Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Болотов, Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 3, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:22:13

УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях

Описывается структура слоений неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях. Дается классификация ориентируемых замкнутых трехмерных многообразий, допускающих трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: слоение, кривизна, трехмерное многообразие.

§ 1. Формулировка основной теоремы

В настоящей работе речь пойдет о слоениях коразмерности 1 на замкнутых трехмерных многообразиях. Прежде чем сформулировать основной результат, приведем примеры трехмерных многообразий.

Слоения Зейферта – это такие компактные трехмерные многообразия, которые допускают слоение, все слои которого гомеоморфны окружности. Отметим, что не все компактные трехмерные многообразия допускают структуру слоения Зейферта. Например, гиперболические формы, т.е. замкнутые трехмерные многообразия, допускающие метрику постоянной отрицательной секционной кривизны, таковыми не являются. В отличие от расслоения, факторпространство по слоям слоения Зейферта, вообще говоря, не является многообразием, однако является двумерным орбиобразием. Это означает, что каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную факторпространству $\mathbb{R}^2$ по действию некоторой конечной группы. Кроме того, должно выполняться определенное условие согласованности действия относительно включений открытых множеств (см. [1]). В качестве примера можно рассмотреть слоеный полноторий, полученный из тривиального расслоения цилиндра $D^2 \times I$ отрезками $x \times I$ после отождествления верхнего и нижнего оснований посредством поворота на угол $2\pi l/n$, где l и n взаимно просты. Факторпространством по слоям этого слоения будет орбиобразие $D^2(n)$, гомеоморфное диску с центром в конической точке. Склеив два слоеных полнотория, нетрудно получить структуру слоения Зейферта на S^3 , $S^2 \times S^1$, а также на линзовом пространстве $L_{p/q} = S^3/\mathbb{Z}_q$ с образующей $\rho \in \mathbb{Z}_q$, действующей по правилу

$$\rho(z_1, z_2) = (e^{2\pi i/q} z_1, e^{2\pi i p/q} z_2),$$

где S^3 понимается как единичная сфера в $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим единственное с точностью до гомеоморфизма I -расслоение над бутылкой Клейна с ориентируемым тотальным пространством. Такое расслоение называется *скрученным расслоением* и обозначается через $\mathcal{K}$. Нетрудно убедиться, что границей $\mathcal{K}$ является тор. Кроме того, на $\mathcal{K}$ можно задать две структуры слоения на окружности, одна из которых – это расслоение с базой “лист Мёбиуса”. Если приклеить к $\mathcal{K}$ полноторий по некоторому диффеоморфизму тора, то за исключением двух особых случаев каждое из слоений может быть продолжено внутрь полнотория до некоторого слоения на окружности. Такое многообразие называется *призматическим пространством* и является факторпространством сферического пространства по свободному действию конечной группы изометрий (см. [1]). Это многообразие допускает в точности две структуры слоения Зейферта, одна из которых имеет базу $P^2(n)$, гомеоморфную орбиобразию $D^2(n)$ с приклеенным к границе листом Мёбиуса.

Если же склеить две копии пространства $\mathcal{K}$ по некоторому торическому диффеоморфизму, то получится так называемое *торическое полурасслоение* (см. [2; с. 38]). Отметим, что лишь в частных случаях склейки полученное многообразие будет слоением Зейферта.

Теперь перейдем к формулировке основного результата.

Мы будем говорить, что слоение $\mathcal{F}$ на римановом многообразии M является *слоением неотрицательной кривизны*, если все слои этого слоения в индуцируемой метрике имеют неотрицательную секционную кривизну.

В настоящей работе мы докажем следующую классификационную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M^3 – гладкое замкнутое ориентируемое риманово многообразие размерности 3, а $\mathcal{F}$ – C^∞ -трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны коразмерности 1 на этом многообразии. Тогда M^3 гомеоморфно многообразию одного из следующих типов:

- 1) торическое расслоение над окружностью;
- 2) линзовое пространство $L_{p/q}$;
- 3) $S^2 \times S^1$;
- 4) $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$;
- 5) торическое полурасслоение;
- 6) призматическое пространство.

Каждое из перечисленных многообразий для некоторой метрики допускает слоение неотрицательной кривизны.

§ 2. Предварительные сведения из теории слоений

2.1. Голономия. Пусть $(M^n, \mathcal{F})$ – гладкое многообразие со слоением коразмерности q . Это означает, что многообразие покрывается расслоенными координатными окрестностями $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$, где слой локально выглядит как плоскость

$$x_{n-q+1} = \text{const}, \quad \dots, \quad x_n = \text{const}.$$

Напомним, что расслоенная координатная окрестность $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, содержащая точку p , называется *отмеченной*, если $\varphi_\lambda(U_\lambda) = (-1, 1)^n$, и при этом $\varphi_\lambda(p) = 0$.

Пусть

$$\pi: (-1, 1)^n \rightarrow (-1, 1)^q$$

– естественная проекция, сопоставляющая точке ее последние q координат.

Прообраз $Q_\lambda := \varphi_\lambda^{-1}(\pi^{-1}(x))$ называется *локальным слоем*. Ясно, что

$$U_\lambda = \bigcup_{x \in (-1, 1)^q} \varphi_\lambda^{-1}(\pi^{-1}(x)).$$

Пусть $l: [0, 1] \rightarrow L$ – замкнутый путь, лежащий на слое $L \in \mathcal{F}$. В [3] показано, что тогда существует такая цепь отмеченных расслоенных окрестностей

$$\mathcal{C} = \{U_0, \dots, U_{n-1}, U_n = U_0\},$$

покрывающая $l([0, 1])$, что:

- 1) существует такое разбиение отрезка $[0, 1]: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, что $l([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, $i = 0, \dots, n-1$;
- 2) если $Q_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, то это пересечение связно (это означает, что локальный слой Q_{i+1} определяется однозначно).

Можно показать, что множество точек $z \in U_0$, допускающих цепь $\mathcal{C}$, т.е. точек, однозначно определяющих локальные слои $Q_i \in U_i$ из условия, что $z \in Q_0$ и $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 0, \dots, n-1$, является открытым в U_0 . Значит, существует некоторая насыщенная (состоящая из локальных слоев) открытая окрестность O локального слоя Q_0 , для которой определено следующее отображение:

$$\Gamma(\pi \circ \varphi_0(Q_0(z))) = \pi \circ \varphi_0(Q_n(z)),$$

где $z \in O$.

В [3] показано, что по построенному локальному диффеоморфизму

$$\Gamma: V_0 \rightarrow (-1, 1)^q$$

некоторой окрестности нуля $V_0 \subset (-1, 1)^q$ в $(-1, 1)^q$ корректно определяется гомоморфизм

$$\Psi: \pi_1(L) \rightarrow G_q$$

фундаментальной группы слоя $\pi_1(L)$ в группу ростков диффеоморфизмов G_q в начале координат $0 \in \mathbb{R}^q$. Этот гомоморфизм определен с точностью до внутреннего автоморфизма и называется *голономией слоя* L , а его образ – *группой голономии слоя* L .

Заметим также, что если слоение трансверсально ориентируемо и имеет ко-размерность 1, то определена односторонняя голономия

$$\Psi^+: \pi_1(L) \rightarrow G_q^+$$

слоя L , принимающая значение в группе ростков диффеоморфизмов в нуле, определенных на полуинтервале $[0, \varepsilon)$.

2.2. Геометрическая структура слоев. Широко известно (Кон-Фоссен), что полная ориентируемая поверхность неотрицательной кривизны – это один из следующих объектов:

- а) сфера S^2 с метрикой неотрицательной кривизны;
- б) плоский тор T^2 ;
- в) плоский цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$ с евклидовой метрикой прямого произведения;
- г) $\mathbb{R}^2$ с метрикой неотрицательной кривизны.

Этот и другие, более общие, результаты о полных многообразиях неотрицательной кривизны можно найти в [4].

2.3. Минимальные множества. Напомним, что *насыщенным* называется множество, состоящее из слоев.

Минимальным множеством в слоеном многообразии называется замкнутое насыщенное множество, не содержащее в себе другого замкнутого насыщенного множества.

Напомним следующую важнейшую в теории слоений теорему.

ТЕОРЕМА ПЛАНТА (см. [5]). *Если слои слоения коразмерности 1 на компактном многообразии имеют менее чем экспоненциальный рост объема шаров, то всякое минимальное множество является либо всем многообразием, либо компактным слоем.*

Слоение неотрицательной кривизны имеет полиномиальный рост слоев и поэтому удовлетворяет условиям теоремы Планта. Это означает, что имеет место следующее

СЛЕДСТВИЕ. *Если не все слои слоения неотрицательной кривизны всюду плотны, то слоение содержит компактный слой.*

2.4. Поведение слоения вблизи компактного слоя. Если слоение содержит компактный слой, гомеоморфный S^2 , то классическая теорема стабильности Роба (см. [3]) утверждает, что слоение является расслоением со слоем S^2 , а M^3 гомеоморфно $S^2 \times S^1$.

Предположим, что компактный слой – это тор. В этом случае мы имеем следующую теорему, доказанную в произвольной размерности Т. Нисимори для произвольного компактного слоя с абелевой голономией, которую мы переформулируем для нашего случая.

ТЕОРЕМА НИСИМОРИ (см. [6]). *Пусть U_+ – трубчатая полукрестность компактного слоя F трансверсально ориентируемого C^∞ -гладкого слоения $\mathcal{F}$ на компактном трехмерном многообразии. Предположим, что F гомеоморфен тору. Обозначим через ρ_+ соответствующую группу односторонней голономии слоя F . Тогда имеет место один из следующих случаев:*

- 1) для произвольной окрестности V слоя F ограничение слоения $\mathcal{F}_{U_+ \cap V}$ содержит компактный слой, отличный от F ;

- 2) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \rho_+$ и существует такая окрестность V слоя F , что всякий слой ограниченного слоения $\mathcal{F}_{U_+ \cap V}$ всюду плотен;
- 3) $\rho_+ = \mathbb{Z}$ и образующая представляется сжимающим отображением (неподвижным в нуле) полуинтервала $f: [0, \varepsilon) \rightarrow [0, \varepsilon)$. В этом случае слоение в некоторой окрестности $U_+ \cap V$ слоя F с точностью до диффеоморфизма можно описать следующим образом. Рассмотрим слое-ние $S^1 \times I \times [0, \varepsilon)$ цилиндрами $S^1 \times I \times *$, где $I = [0, 1]$. После этого отождествим точки с координатами $(s, 0, t)$ и $(s, 1, f(t))$.¹

2.5. Поведение слоения вблизи некомпактного слоя. Следующая теорема является обобщением известной теоремы локальной стабильности Роба в размерности 3.

ТЕОРЕМА 2 (см. [7]). *Если голономия собственного (вложенного) слоя L , гомеоморфного ориентируемой поверхности со счетным числом концов и конечным числом ручек, тривиальна, то слоение в некоторой насыщенной окрестности L гомеоморфно прямому произведению $L \times \mathbb{R}$.*

Для изучения голономии некомпактных слоев нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (см. [8; лемма 2.5]). *Пусть $(M, \mathcal{F})$ – слоеное полное риманово многообразие. Пусть $\{f_\alpha\}$ – семейство отображений полного многообразия N в M , обладающее следующим свойством: образ каждого f_α принадлежит некоторому слою L_α и f_α является локальной изометрией римановых многообразий. Предположим, что для некоторого $n \in N$ множество $\{f_\alpha(n)\}$ ограничено в M . Тогда существует подпоследовательность $\{f_{\alpha_k}\}$, которая сходится равномерно на компактных множествах к отображению $f: N \rightarrow M$. Более того, f есть локальная изометрия на некоторый слой слоения $\mathcal{F}$.*

2.6. Топология трехмерных многообразий. Для доказательства основного результата нам понадобятся следующие две глубокие теоремы из топологии трехмерных многообразий.

ТЕОРЕМА 4 (см. [9]). *Если компактное ориентируемое неприводимое трехмерное многообразие с несжимаемой границей имеет разрешимую фундаментальную группу, то оно гомеоморфно либо $T^2 \times I$, либо $\mathcal{H}$.*

ТЕОРЕМА 5 (см. [10]). *Пусть M^3 – это компактное неприводимое трехмерное многообразие. Предположим, что имеется эпиморфизм $\pi_1(M^3) \rightarrow \mathbb{Z}$ с конечно порожденным ядром, которое не изоморфно $\mathbb{Z}_2$. Тогда M^3 является расслоением над S^1 .*

¹Нетрудно видеть, что некомпактные слои полученного слоения, гомеоморфные полуцилиндрам $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, являются собственными и содержат в своем замыкании компактный слой F . Другими словами, в достаточно малой односторонней окрестности слоя F слоение выглядит так же, как в окрестности компактного слоя рибовской компоненты (см. [3]).

§ 3. Предварительные результаты

ЛЕММА 1. Пусть M^3 – компактное трехмерное многообразие со слоением $\mathcal{F}$ неотрицательной кривизны. Тогда:

- если некомпактный слой L содержит в своем замыкании компактный слой T , то слоение в односторонней окрестности слоя T , содержащей слой L , не может описываться п. 1) теоремы Нисимори;
- если несобственный слой L имеет в своем замыкании компактный слой T , то слоение в некоторой односторонней окрестности слоя T , содержащей слой L , описывается п. 2) теоремы Нисимори.

Предположим, что слоение в односторонней трубчатой окрестности U_+ слоя T , гомеоморфной $T \times [0, \varepsilon)$, соответствует п. 1) теоремы Нисимори. Тогда можно предъявить достаточно близкий компактный слой T' , разделяющий U_+ на две связные компоненты, каждая из которых должна содержать слой L . А это невозможно, так как слой L связан.

Теперь предположим, что L – несобственный слой и односторонняя трубчатая окрестность U_+ слоя T , гомеоморфная $T \times [0, \varepsilon)$, соответствует п. 3) теоремы Нисимори. Тогда некоторая окрестность слоя T содержит бесконечное множество копий C_i , $i = 1, \dots, \infty$, гомеоморфных $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, каждая из которых является замкнутым подмножеством одного слоя L , так как очевидно, что $C_i = \overline{C}_i \cap L$, где $\overline{C}_i$ – замыкание C_i в M^3 . Напомним, что топология на слое L задается пересечениями $Q \cap U$, где Q – связная компонента $L \cap U$, а U открыто в M^3 . Всякая окружность ∂C_i разбивает L на две связные компоненты, одна из которых A_i содержит C_i . Нетрудно видеть, что C_i является открытым и замкнутым подмножеством A_i , и поэтому $A_i = C_i$, так как A_i связно. Осталось заметить, что любой шар достаточно большого радиуса R с центром в произвольной фиксированной точке $x_0 \in L$ содержит $\bigcup_{i=1}^3 \partial C_i$ и не содержит целиком никакого A_i , $i = 1, 2, 3$, так как A_i являются замкнутыми подмножествами слоя L и не компактны. Поэтому для каждого шара B_{x_0} с центром в x_0 радиуса, большего R , мы найдем точки $x_i \in A_i$, $i = 1, 2, 3$, не принадлежащие B_{x_0} и лежащие в разных компонентах связности множества $L \setminus B_{x_0}$. Отсюда мы заключаем, что L имеет более двух концов, что противоречит тому, что многообразие неотрицательной секционной кривизны имеет не более двух концов (см. [4]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{F}$ – трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны на ориентируемом компактном 3-многообразии M^3 . Тогда $\mathcal{F}$ – слоение почти без голономии. Это означает, что только компактные слои могут иметь нетривиальную голономию.

Достаточно показать, что любой слой L , изометричный $S^1 \times \mathbb{R}$, не имеет голономии. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть слой L является собственным (т.е. вложенным подмногообразием), а значит, содержит в замыкании компактный слой T , гомеоморфный тору (по теореме Планта). Ясно, что группа изометрий слоя L содержит ко-компактную подгруппу $\mathcal{T} \subset \text{Isom}(S^1 \times \mathbb{R})$ параллельных переносов вдоль $\mathbb{R}$.

Более того, для всякой точки (s, t) на слое L существуют точка $(s, 0)$ геодезической $S_0^1 := S^1 \times 0 \subset S^1 \times \mathbb{R}$ и такая изометрия $\phi \in \mathcal{T}$, что $\phi(s, 0) = (s, t)$. Рассмотрим последовательность точек $\{(s_i, t_i), i = 1, \dots, \infty\}$ на слое L , сходящихся к точке t_0 на компактном слое T . Тогда существует последовательность изометрий $\{\phi_i\}$ таких, что $\phi_i(s_i, 0) = (s_i, t_i)$. Последовательность $\{s_i \times 0\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{s_{i_k} \times 0\}$ к точке $(s_0, 0)$. Ясно, что $\{\phi_{i_k}(s_0, 0)\}$ сходится к t_0 . Согласно теореме 3 имеем подпоследовательность $\{\phi_r\}$ последовательности изометрий $\{\phi_{i_k}\}$, которая сходится к изометрическому накрытию $\phi: L \rightarrow T$. Последовательность окружностей $S_r^1 = \phi_r(S^1 \times 0) = S^1 \times t_r$, $\phi_r \in \mathcal{T}$, равномерно сходится к окружности S_T^1 на слое T . Ясно, что $\phi(S_0^1) = S_T^1$ не гомотопна нулю на слое T , так как ϕ – это накрытие. В частности, отсюда следует, что компактный слой является тором. Пусть $\{U_0, \dots, U_{n-1}, U_n = U_0\}$ – цепь отмеченных окрестностей, описанная в п. 2.1 и покрывающая окружность S_T^1 . Пусть $l: I \rightarrow S_T^1$ – параметризация окружности, а $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$ – такое разбиение отрезка I , что $l([c_p, c_{p+1}]) \subset U_p$, $p = 0, \dots, n-1$. Обозначим через $\{s_p^k, k = 0, \dots, m-1\}$ прообраз $\phi^{-1}l(c_p)$, $p = 0, \dots, n-1$ (заметим, что $l(c_0) = l(c_n)$).

Для достаточно больших r окружности S_r^1 попадут в $\bigcup_{p=0}^{n-1} U_p$, причем $\phi_r([s_p^k, s_{p+1}^k]) \subset U_p$ и $\phi_r([s_{n-1}^k, s_0^{k+1}]) \subset U_{n-1}$. Поэтому если элемент группы голономии $\Psi^+([S_T^1])$ нетривиален, то он представляется диффеоморфизмом, имеющим сходящуюся к нулю последовательность периодических точек (на самом деле неподвижных точек, так как диффеоморфизм должен сохранять ориентацию). Так как слой L предполагался собственным, из леммы 1 получаем $\Psi^+([S_T^1]) = 1$. А значит, очевидно, $\Psi([S_r^1]) = 1$, где r достаточно велико. Поэтому слой L имеет тривиальную голономию.

Случай 2. Предположим, что L – несобственный слой. Если замыкание слоя не содержит компактный слой, то по теореме Планта этот слой является всюду плотным в многообразии M^3 . Если же слой содержит в своем замыкании компактный слой T , то из леммы 1 и теоремы Нисимори следует, что он является всюду плотным в некоторой односторонней окрестности компактного слоя.

Пусть $\{U_0, \dots, U_{n-1}, U_n = U_0\}$ – цепь отмеченных расслоенных окрестностей, описанная в п. 2.1 и покрывающая окружность $l(I) = S_0^1 := S^1 \times 0 \subset L$. Пусть $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$ – такое разбиение отрезка I , что $l([c_p, c_{p+1}]) \subset U_p$, $p = 0, \dots, n-1$. Согласно отмеченному выше замыкание L имеет ненулевую меру и содержит некоторую открытую окрестность слоя L . Поэтому если голономия слоя L нетривиальна, то существует последовательность точек $\{(s_i, t_i), i = 1, \dots, \infty\}$ на L , лежащих в отмеченной окрестности U_0 , сходящаяся к точке $(s_0, 0) \in U_0 \cap S_0^1$ и обладающая следующим свойством:

$$\Gamma(\pi \circ \varphi_0(s_i, t_i)) \neq \pi \circ \varphi_0(s_i, t_i).$$

Тогда по теореме 3, как и ранее, существует подпоследовательность ϕ_r последовательности изометрий $\{\phi_i : \phi_i(s, 0) = (s, t_i)\}$, которая сходится к изометрическому накрытию $\phi: L \rightarrow L$. Так как группа изометрий слоя $L = S^1 \times \mathbb{R}$ есть прямое произведение $\text{Iso}(S^1) \times \text{Iso}(\mathbb{R})$ (см. [4]), то слоение окружностями

$\{S^1 \times t\}$ сохраняется при изометриях. Отсюда мы заключаем, что последовательность окружностей $S_r^1 := \phi_r(S^1 \times 0) = S^1 \times t_r$, лежащих на L , равномерно сходится к окружности S_0^1 .

Аналогично случаю 1 обозначим через $\{s_p^k, k = 0, \dots, m-1\}$ прообраз $\phi^{-1}l(c_p)$. Для достаточно больших r окружности S_r^1 попадут в $\bigcup_{p=0}^{n-1} U_p$, и при этом $\phi_r([s_p^k, s_{p+1}^k]) \subset U_p$ и $\phi_r([s_{n-1}^k, s_0^{k+1}]) \subset U_{n-1}$. Но тогда $\Gamma^m(\pi \circ \varphi_0(s_r, t_r)) = \pi \circ \varphi_0(s_r, t_r)$ для достаточно больших r . Так как слоение предполагалось трансверсально ориентируемым, то Γ – сохраняющий ориентацию локальный диффеоморфизм. Поэтому $m = 1$, и мы получаем противоречие. Утверждение 1 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Всякий слой, гомеоморфный цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, либо всюду плотен в M^3 , либо является собственным слоем.*

Так как доказательство этого утверждения аналогично доказательству предыдущего утверждения, мы ограничимся лишь наброском.

Предположим, что замыкание слоя L содержит компактный слой T . Из леммы 1 следует, что существует односторонняя окрестность T , не содержащая компактных слоев, отличных от T . Аналогично доказательству предыдущего утверждения строится последовательность окружностей, сходящихся к окружности γ на компактном слое, представляющей ненулевой элемент фундаментальной группы. Так как голономия некомпактных слоев тривиальна, то голономия вдоль пути γ представляется локальным диффеоморфизмом полуинтервала $[0, \delta)$, имеющим множество неподвижных точек, которое является одновременно открытым и замкнутым и поэтому (из соображений связности) совпадает со всем полуинтервалом. Следовательно, γ представляет тривиальную одностороннюю голономию. Таким образом, показано, что группа односторонней голономии слоя T в этом случае равна $\mathbb{Z}$. Из леммы 1 следует, что слой L должен быть собственным.

Если же замыкание L не содержит компактного слоя, то по теореме Планта слой L должен быть всюду плотным. Утверждение 2 доказано.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что $B \subset M^3$ – слоеное связное подмногообразие с краем, являющимся объединением компактных слоев, причем внутри B нет компактных слоев. Тогда B гомеоморфно одному из следующих многообразий:*

- 1) $D^2 \times S^1$;
- 2) $\mathcal{K}$;
- 3) $T^2 \times I$.

Прежде всего отметим, что из теоремы Планта и условия данной теоремы следует, что всякий слой внутри B имеет в своем замыкании компактный слой. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что B содержит слой, гомеоморфный $S^1 \times \mathbb{R}$. В этом случае из утверждений 1 и 2 следует, что этот слой является собственным и не имеет голономии. Более того, из леммы 1 следует, что односторонняя голономия каждого предельного компактного слоя равна $\mathbb{Z}$. По теореме 2 множество таких слоев открыто в B . Тогда все слои внутри B гомеоморфны

$S^1 \times \mathbb{R}$. Действительно, если внутри B все слои собственные и имеется слой, гомеоморфный $\mathbb{R}^2$, то внутренность B , которую мы обозначим через $\overset{\circ}{B}$, есть объединение двух открытых множеств, одно из которых состоит из слоев, гомеоморфных $S^1 \times \mathbb{R}$, а второе – из слоев, гомеоморфных $\mathbb{R}^2$. Из связности $\overset{\circ}{B}$ следует, что одно из этих множеств должно быть пустым.

Пусть B содержит несобственный слой. Так как замыкание множества несобственных слоев не может содержать компактных слоев с односторонней голономией $\mathbb{Z}$ (иначе мы получим противоречие с леммой 1), то замыкания множеств собственных и несобственных слоев не пересекаются. А это противоречит связности B .

Таким образом, мы доказали, что если B содержит слой, гомеоморфный $S^1 \times \mathbb{R}$, то внутри B все слои гомеоморфны $S^1 \times \mathbb{R}$ и являются собственными.

Из п. 3) теоремы Нисимори следует, что односторонняя голономия любого компактного слоя представляется сжимающим отображением. Отсюда следует, что множество некомпактных слоев, содержащих в своем замыкании один и тот же компактный слой K , является открытым и связным множеством $A \subset B$. Предположим, что существует некомпактный слой L' , принадлежащий $\bar{A} \setminus A$. Пусть $K_i, i = 1, \dots, k$, – множество компактных слоев ∂B , отличных от K . Обозначим через $W_i \cong U_+ \cap V$ соответствующую окрестность компактного слоя K_i , описанную в п. 3) теоремы Нисимори. Покажем, что $L' \cap W = C'_1 \sqcup C'_2$, где $W = \bigcup_{j=1}^k W_j$, а $C'_i, i = 1, 2$, – слои слоения $\mathcal{F}_W$, гомеоморфные $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Действительно, так как слой L' является собственным, нетрудно показать, что каждое из множеств $\bar{L}'_+ \setminus L'_+$ и $\bar{L}'_- \setminus L'_-$, где L'_+ и L'_- – части слоя L' , гомеоморфные $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $S^1 \times \mathbb{R}_{\leq 0}$ соответственно, является замкнутым и насыщенным и по теореме Планта содержит компактный слой. Поэтому $L' \cap W$ имеет, как минимум, две связные компоненты, но и не более двух, так как слой L' имеет два конца (см. доказательство леммы 1).

Из теоремы 2 следует, что найдется такая достаточно узкая насыщенная трубчатая окрестность U слоя L' , гомеоморфная $L' \times \mathbb{R}$, что $L \cap W = C_1 \sqcup C_2$ для любого слоя $L \subset U$, где $C_i, i = 1, 2$, – слои слоения $\mathcal{F}_W$, достаточно близкие к $C'_i, i = 1, 2$. Поясним это более подробно. Нетривиальным является случай, когда C'_1 и C'_2 принадлежат одному W_i . Рассмотрим трансверсальный интервал $[0, \delta) \subset [0, \varepsilon)$ (см. п. 3) теоремы Нисимори). Пусть $c'_i \in [0, \delta) \cap C'_i$ – точки на C'_i , имеющие максимальное значение в интервале $[0, \delta)$. (Заметим, что $[\alpha, \delta) \cap C'_i$ состоит из конечного числа точек для любого α из интервала $(0, \delta)$.) Без ограничения общности считаем, что $c'_1 > c'_2$. Тогда $f(c'_1) < c'_2$, где f – сжимающее отображение, представляющее отображение голономии (см. п. 3) теоремы Нисимори). Это следует из того факта, что интервал $(c'_1, f(c'_1))$ должен содержать точки слоя C'_2 , так как понятно, что $(f^{k-1}(c'_1), f^k(c'_1)) \cap C'_2 \neq \emptyset$ для некоторого k . Тогда $c_1 > c_2$ и $f(c_1) < c_2$, где $c_i \in [0, \delta) \cap C_i$ достаточно близки к $c'_i, i = 1, 2$. Откуда следует, что c_2 не равно $f^k(c_1)$ ни для какого $k \in \mathbb{Z}$ и $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Поэтому найдется слой из A , имеющий, как минимум, три конца, что невозможно для многообразия неотрицательной кривизны. Следовательно, A замкнуто в $\overset{\circ}{B}$ и поэтому совпадает с $\overset{\circ}{B}$, так как A связно. Теперь, используя

п. 3) теоремы Нисимори, а именно явный вид слоения в односторонней окрестности компактного слоя K , нетрудно построить замкнутую трансверсаль, пересекающую все слои, принадлежащие внутренности B . Для этого достаточно “сдвинуть” замкнутую кривую на K , представляющую нетривиальную одностороннюю голономию, внутрь B трансверсально слоению. Подробности мы опускаем (см. [3]).

Из теоремы 2 следует, что слоение внутри B является расслоением над S^1 со слоем, гомеоморфным $S^1 \times \mathbb{R}$. Нетрудно убедиться, что B в этом случае гомотопически эквивалентно либо тору, либо бутылке Клейна, и поэтому фундаментальная группа B является, очевидно, разрешимой, а B неприводимо. Кроме того, вложение границы индуцирует мономорфизм фундаментальных групп (граничный тор несжимаем). Действительно, в противном случае слоение содержало бы рибовскую компоненту (см. [11]), что невозможно по предположению. Следовательно, по теореме 4, если B содержит слой, гомеоморфный $S^1 \times \mathbb{R}$, то B гомеоморфно либо $T^2 \times I$, либо $\mathcal{H}$.

Случай 2. Предположим, что все слои внутри B гомеоморфны $\mathbb{R}^2$. В этом случае B гомеоморфно либо полноторию $D^2 \times S^1$, либо $T^2 \times I$ (см. [12]).

Теорема 6 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Предположим сначала, что слоение $\mathcal{F}$ не содержит компактных слоев. Тогда по утверждению 1 $\mathcal{F}$ – слоение без голономии. Теорема 5.1 из [6] утверждает, что в этом случае все слои гомеоморфны типичному слою F , универсальное накрытие M^3 стягиваемо (значит, M^3 неприводимо) и факторгруппа $\pi_1(M^3)/\pi_1(F)$ является свободной абелевой. В этом случае, очевидно, имеется эпиморфизм $\pi_1(M^3) \rightarrow \mathbb{Z}$ с конечно порожденным ядром, не изоморфным $\mathbb{Z}_2$, и согласно теореме 5 M^3 является расслоением над S^1 . Так как фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ является $\pi_1(F)$ -расширением свободной абелевой группы, то M^3 – торическое расслоение, так как $\pi_1(F)$ в нашем случае либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}$.

Предположим, что слоение $\mathcal{F}$ содержит конечное число компактных слоев. Согласно теореме 6 каждая компонента, ограниченная компактными слоями, гомеоморфна либо $D^2 \times S^1$, либо $\mathcal{H}$, либо $T^2 \times I$. Каждые две соседние компоненты, гомеоморфные $T^2 \times I$ и имеющие общий единственный компактный слой, можно объединить в одну, также гомеоморфную $T^2 \times I$.

Нетрудно видеть, что M^3 гомеоморфно или торическому расслоению над S^1 , или многообразию, склеенному из двух кусков, каждый из которых это либо $\mathcal{H}$, либо $D^2 \times S^1$.

Если это два склеенных полнотория $D^2 \times S^1$, то многообразие либо является линзовым пространством, либо это $S^2 \times S^1$.

Если оба куска гомеоморфны $\mathcal{H}$, то M^3 – это торическое полурасслоение.

Если же один из кусков гомеоморфен $\mathcal{H}$, а второй гомеоморфен $D^2 \times S^1$, то, используя теорему Зейферта–ван Кампена, получаем, что фундаментальная

группа M^3 изоморфна группе с двумя образующими a, b и соотношениями

$$aba^{-1}b = 1, \quad a^{2n} = b^m,$$

где m и n – любые не равные нулю целые числа либо имеет место одна из двух комбинаций: $m = 0, n = 1$ или $m = 1, n = 0$. Нетрудно видеть, что полученное многообразие двулистно накрывается либо $S^2 \times S^1$, либо линзовым пространством и в зависимости от фундаментальной группы либо гомеоморфно $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ (если $n = 1, m = 0$) или гомеоморфно $S^2 \times S^1$ (если $n = 0, m = 1$), либо же является призматическим пространством (при других значениях n и m).

Отметим, что при $n = 1, m \neq 0$ фундаментальная группа многообразия M^3 является бинарной группой диэдра D^* . В частности, при $n = 1, m = 2$ фундаментальная группа M^3 изоморфна кватернионной группе $Q8$.

Теперь предположим, что компактных слоев бесконечное множество. Если слоение содержит слой, гомеоморфный S^2 , то по теореме стабильности Роба слоение является расслоением со слоем S^2 , а M^3 гомеоморфно $S^2 \times S^1$.

Вспомним, что множество компактных слоев замкнуто в M^3 и поэтому компактно (см. [3]). Пусть T – компактный слой. Рассмотрим маленькую нормальную окрестность U_NT , гомеоморфную нормальному расслоению NT . Этот гомеоморфизм задается посредством экспоненциального отображения $\exp: NT \rightarrow U_NT$, определенного в достаточно малой окрестности нулевого сечения. Потребуем, чтобы U_NT была настолько малой, чтобы нормальные геодезические пересекали слоение трансверсально. Так как слоение является трансверсально ориентируемым, то $U_NT \simeq T \times \mathbb{R}$. Пусть U_N^+T и U_N^-T обозначают соответствующие односторонние окрестности слоя T . Очевидно, что если существует компактный слой T' внутри U_N^+T или U_N^-T , то в силу трансверсальности естественная проекция $p: U_NT \rightarrow T$, ограниченная на T' , является накрытием и, значит, является гомеоморфизмом, так как расслоение $p: U_NT \rightarrow T$ тривиально. Действительно, T' можно отождествить с единичным сечением расслоения $p: U_NT \rightarrow T$ для удачно выбранной метрики в U_NT . Это означает, что для любого T' , лежащего внутри U_NT , $T' \cup T$ ограничивают в M^3 компактное многообразие A_T , гомеоморфное $T \times I$. Если в каждой из полуокрестностей U_N^+T и U_N^-T есть компактный слой соответственно T' и T'' , то очевидно, что $T' \cup T''$ также ограничивают в M^3 компактное многообразие B_T , гомеоморфное $T \times I$. Предположим, что слой T является предельным во множестве компактных слоев. Если в каждой из полуокрестностей U_N^+T и U_N^-T есть компактный слой (соответственно T' и T''), то покроем слой T множеством $U_T = B_T \setminus T' \cup T''$. Если же только в одной из полуокрестностей, скажем, в U_N^+T , есть компактный слой T' , то покроем слой T множеством $U_T = A_T \setminus T'$. Так как множество предельных слоев является замкнутым подмножеством компактного множества, то оно является компактным. Поэтому из покрытия $\{U_T, T \text{ — предельный компактный слой}\}$ можно выделить конечное подпокрытие. Теперь осталось заметить, что если $U_T \cap U_{\bar{T}} \neq \emptyset$, то замыкание

$\overline{U_T \cup U_{\tilde{T}}}$ гомеоморфно объединению нескольких копий $T \times I$, склеенных по общему компактному слою. Это следует из того, что любой компактный слой T' , лежащий внутри $\overline{U_T}$, разбивает $\overline{U_T}$ на две копии $T \times I$.

Таким образом, и в этом случае мы можем разбить многообразие M^3 на куски, гомеоморфные либо $D^2 \times S^1$, либо $\mathcal{H}$, либо $T^2 \times I$ и повторить доказательство.

Осталось показать, что каждое из полученных многообразий допускает слоение неотрицательной кривизны.

В случае, когда многообразие M^3 является торическим расслоением, оно допускает геометрическую структуру по образцу E^3 , Nil или Sol (см. [1]). Причем каждый из слоев является плоским в индуцированной метрике. Универсальное накрытие в этом случае гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. Если (x, y, z) – стандартные координаты на $\mathbb{R}^3$, а плоскости $z = \text{const}$ – это слои поднятого расслоения, то метрика имеет один из следующих видов:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{евклидова геометрия});$$

$$ds^2 = dz^2 + dy^2 + (dx - z dy)^2 \quad (\text{Nil-геометрия});$$

$$ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2 \quad (\text{Sol-геометрия}).$$

Если M^3 не является торическим расслоением, то оно разрезается тором T на два куска, каждый из которых гомеоморфен либо $\mathcal{H}$, либо полноторию $D^2 \times S^1$.

Пусть (r, z) – декартовы координаты на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим 1-форму

$$h(r)dr + (1 - |h(r)|)dz, \quad (*)$$

где $h(r)$ – гладкая монотонная неубывающая нечетная функция такая, что

$$h(r) = h^{(k)}(r) = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad k = 1, \dots, \infty,$$

$$h(r) = 1 \quad \text{при} \quad \frac{1}{3} \leq r \leq q.$$

В цилиндрических координатах (r, ϕ, z) , $0 \leq r \leq q$, на $\mathbb{R}^3$ та же самая форма задает слоение на $D_q^2 \times \mathbb{R}$, где D_q^2 – диск радиуса q . Нетрудно видеть, что это слоение опускается на полноторий $D_q^2 \times S^1$ после факторизации по действию группы $\mathbb{Z}$ параллельными переносами вдоль оси Oz . Отметим, что граничный слой имеет слоеный воротник $A \simeq T \times J_1$, состоящий из компактных слоев $\{T \times *\}$, где J_1 – открытый полуинтервал. Легко проверить, что в стандартной евклидовой метрике все слои имеют неотрицательную кривизну, а компактные слои являются плоскими.

Если же мы добавим к (r, z) декартову координату x , то в координатах (r, x, z) форма $(*)$ задает слоение на $I \times \mathbb{R}^2$, где I – отрезок $[-q, q]$. Нетрудно видеть, что слоение опускается на пространство $\mathcal{H}_q$, гомеоморфное $\mathcal{H}$, после факторизации по следующему изометрическому действию группы $\pi_1(\mathcal{H})$ на $I \times \mathbb{R}^2$:

$$a: (r, x, z) \rightarrow (r, x + 1, z), \quad b: (r, x, z) \rightarrow (-r, -x, z + 1),$$

где a, b – образующие $\pi_1(\mathcal{H})$.

Так как слои являются цилиндрами, то они плоские в индуцируемой метрике. Граничный слой имеет слоеный воротник $B \simeq T \times J_2$, состоящий из компактных слоев $\{T \times *\}$, где J_2 – открытый полуинтервал.

Так как образующая b меняет знак r -координаты, то можно параметризовать $\mathcal{K}_q$ таким образом, чтобы каждая точка имела неотрицательную r -координату. Бутылка Клейна ($r = 0$) при этом будет соответствовать множеству особенностей параметризации.

Предположим, что $M^3 = D_{1/2}^2 \times S^1 \cup \mathcal{K}_{1/2}$. Склеивая два построенных слоения по общему слою T посредством некоторого линейного преобразования тора, мы получим слоение на M^3 . Рассмотрим покрытие $U = \{U_1, U_2\}$ многообразия M^3 , где $U_1 = D_{1/2}^2 \times S^1 \cup B$, $U_2 = \mathcal{K}_{1/2} \cup A$. Ясно, что $U_1 \simeq D_q^2 \times S^1 \setminus T$, а $U_2 \simeq \mathcal{K}_q \setminus T$ для некоторого $q > 1/2$. Поэтому на каждом U_i , $i = 1, 2$, можно задать евклидовы координаты и евклидову метрику аналогично тому, как это было сделано выше. Все слои в этой метрике будут иметь неотрицательную кривизну.

При переходе из одной системы координат в другую координаты (r, ϕ, z) перейдут в координаты $(1 - r, v(x, z), w(x, z))$, где v, w – линейные функции от переменных (x, z) . Рассмотрим отображение $p: M^3 \rightarrow I$, которое сопоставляет каждой точке $D_q^2 \times S^1$ (с координатами (r, ϕ, z)) ее r -координату, а каждой точке $\mathcal{K}_q$ (с координатами (r, x, z)) – разность $1 - r$. Нетрудно видеть, что это отображение корректно определено и непрерывно. Отметим, что $p^{-1}(0)$ является окружностью, а $p^{-1}(1)$ – это бутылка Клейна. Рассмотрим разбиение единицы $\{\rho, 1 - \rho\}$, подчиненное покрытию $V = \{V_i, i = 1, 2\}$ отрезка I , которое обладает следующим свойством: $p^{-1}(V_i) = U_i$, $i = 1, 2$. Так как p – собственное отображение, то $\{\rho \circ p, 1 - \rho \circ p\}$ является разбиением единицы, подчиненным покрытию U . Пусть $ds_1^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$ и $ds_2^2 = dr^2 + dx^2 + dz^2$ – евклидовы метрики на U_1 и U_2 соответственно. Тогда

$$ds^2 = (\rho \circ p) ds_1^2 + (1 - \rho \circ p) ds_2^2$$

– глобальная метрика на M^3 . Заметим, что на пересечении $U_1 \cap U_2$ имеем $0 < r < 1$, где все точки имеют регулярную параметризацию. Функция $\rho \circ p$ зависит только от r -координаты. Поэтому на торах $r = \text{const}$ индуцируется плоская метрика, и данное слоение в построенной метрике имеет неотрицательную кривизну.

Аналогичным образом строится метрика неотрицательной кривизны на описанных слоениях и в оставшихся случаях. Тем самым, теорема 1 доказана полностью.

Как следствие теоремы 1 отметим, что не все сферические формы допускают слоение неотрицательной кривизны.

Список литературы

- [1] П. Скотт, *Геометрии на трехмерных многообразиях*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: P. Scott, “The geometries of 3-manifolds”, *Bull. London Math. Soc.*, **15**:5 (1983), 401–487.
- [2] A. Hatcher, *Notes on basic 3-manifold topology*, Preprint, 2000.

- [3] И. Тамура, *Топология слоений*, Мир, М., 1979; пер. с яп.: I. Tamura, *Topology of foliations*, Sugaku Sensho, **80**, Iwanami Shoten, Tokyo, 1976.
- [4] J. Cheeger, D. Gromoll, “On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature”, *Ann. of Math. (2)*, **96**:3 (1972), 413–443.
- [5] J. F. Plante, “On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one”, *J. Differential Equations*, **15**:1 (1974), 178–194.
- [6] T. Nishimori, “Compact leaves with abelian holonomy”, *Tohoku Math. J. (2)*, **27**:2 (1975), 259–272.
- [7] J. Cantwell, L. Conlon, “Reeb stability for noncompact leaves in foliated 3-manifolds”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**:2 (1981), 408–410.
- [8] S. Adams, G. Stuck, “Splitting of nonnegatively curved leaves in minimal sets of foliations”, *Duke Math. J.*, **71**:1 (1993), 71–92.
- [9] B. Evans, L. Moser, “Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **168** (1972), 189–210.
- [10] J. Stallings, “On fibering certain 3-manifolds”, *Topology of 3-manifolds and related topics* (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962, 95–100.
- [11] С. П. Новиков, “Топология слоений”, Тр. ММО, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 248–278; англ. пер.: S. P. Novikov, “Topology of foliations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **14** (1965), 268–304.
- [12] H. Rosenberg, R. Roussarie, “Reeb Foliations”, *Ann. of Math. (2)*, **91**:1 (1970), 1–24.

Д. В. Болотов (D. V. Bolotov)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков;

Харьковский национальный университет

им. В. Н. Каразина, Украина

E-mail: bolotov@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию

16.01.2008 и 01.12.2008