Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Прибегин, О некоторых методах суммирования степенных рядов для функций из $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 2, 89–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 07:12:42

УДК 517.550.2

С. Г. Прибегин

О некоторых методах суммирования степенных рядов для функций из $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$

Пусть $H^p(D^n)$ – пространство Харди в единичном поликруге $D^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$, а

$$R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{i\theta}) = \sum_k (1 - (\varepsilon|k|)^l)_+^\alpha \widehat{f}_k e^{ik\theta}, \quad l > 0, \quad \alpha > 0,$$

– обобщенные средние Рисса функции $f \in H^p(D^n)$. В работе доказано, что при определенных стандартных соотношениях между p, l, n и α имеет место оценка

$$C_1(\alpha, l, p) \widetilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq \|f(e^{i\theta}) - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{i\theta})\|_p \leq C_2(\alpha, l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p,$$

где $\widetilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p$ и $\omega_l(\varepsilon, f)_p$ – интегральные модули непрерывности l -го порядка.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: средние ряда, обобщенные средние Рисса, обобщенные средние Абеля–Пуассона, правосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля, правосторонняя дробная производная.

§ 1. Введение

Для формулировки основных результатов статьи приведем ряд необходимых определений.

Аналитическая в единичном поликруге

$$D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$$

функция f принадлежит $H^p(D^n)$, если

$$\sup_{\substack{0 \leq \rho_j < 1 \\ j=1, \dots, n}} \|f(\rho e^{i\theta})\|_p = \sup_{\substack{0 \leq \rho_j < 1 \\ j=1, \dots, n}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} = \|f\|_p < \infty,$$

где $\rho e^{i\theta} = (\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_n e^{i\theta_n})$, $Q^n = [-\pi, \pi]^n = [-\pi, \pi] \times \dots \times [-\pi, \pi]$, $d\theta = d\theta_1 \dots d\theta_n$ (см., например, [1; гл. III, 3.4, 3.4.1]).

Пусть

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_k \widehat{f}_k (\rho e^{i\theta})^k \quad (1.1)$$

– ряд Тейлора функции $f \in H^p(D^n)$, где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \dots, n$, $(\rho e^{i\theta})^k = (\rho_1 e^{i\theta_1})^{k_1} \dots (\rho_n e^{i\theta_n})^{k_n}$ и $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{k_1, \dots, k_n}$ – коэффициенты ряда Тейлора.

Для функции $f \in H^p(D^n)$ на единичном торе $T^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1, j = 1, \dots, n\}$ существует почти всюду (см., например, [1; гл. III, 3.4, 3.4.2]) радиальная граничная функция $f(e^{i\theta}) \in L^p_{Q^n}$, где $e^{i\theta} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$, причем

$$\|f(\rho e^{i\theta})\|_p \leq \|f(e^{i\theta})\|_p = \|f\|_p.$$

Пусть $f \in H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, и $f(e^{i\theta})$ – граничная функция. Если

$$\left((0 < p \leq 1) \wedge \left((l \in \mathbb{N}) \vee \left((l \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}) \wedge \left(l > \frac{1}{p} - 1 \right) \right) \right) \right) \vee ((p > 1) \wedge (l > 0)), \quad (1.2)$$

то дробная разность

$$\Delta_h^l f(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{l}{j} (-1)^j f(e^{i(\theta+jh)}), \quad (1.3)$$

где

$$\binom{l}{j} = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(l-j+1)}$$

– биномиальные коэффициенты, определена почти всюду и $\Delta_h^l f(e^{i\theta}) \in L^p_{Q^n}$ при фиксированном $h \in \mathbb{R}^n$. В случае, когда $h_1 = \dots = h_n = h$, $h \in \mathbb{R}$, дробную разность обозначим через $\tilde{\Delta}_h^l f(e^{i\theta})$, т.е.

$$\tilde{\Delta}_h^l f(e^{i\theta}) = \Delta_{\tilde{h}}^l f(e^{i\theta}), \quad (1.4)$$

где $\tilde{h} = (h, \dots, h)$.

Модулями гладкости порядка l функции $f \in H^p(D^n)$ назовем функции

$$\omega_l(\delta, f)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq \delta \\ j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^l f(e^{i\theta})\|_p, \quad (1.5)$$

$$\tilde{\omega}_l(\delta, f)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \|\tilde{\Delta}_h^l f(e^{i\theta})\|_p. \quad (1.6)$$

Пусть $\varphi(t) \in C[0, \infty)$ – экспоненциально убывающая на $[0, \infty)$ функция, т.е.

$$|\varphi(t)| \leq L e^{-at}, \quad L > 0, \quad a > 0.$$

Тогда для $f \in H^p(D^n)$ по аналогии с [2; § 1, формула (1.6)] положим

$$M_{\varepsilon, \varphi}(f, e^{i\theta}) = \sum_k \varphi(\varepsilon|k|) \hat{f}_k e^{ik\theta}, \quad (1.7)$$

где $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\varepsilon > 0$.

Если $\varphi(0) = 1$, то (1.7) назовем φ -средними ряда (1.1), а φ – сумматорной функцией. Выбирая в (1.7) в качестве $\varphi(t)$ функцию

$$r^{l, \alpha}(t) = (1 - t^l)_+^\alpha = (\max(1 - t^l, 0))^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad l > 0,$$

получим обобщенные средние Рисса

$$R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{i\theta}) = \sum_k (1 - (\varepsilon|k|)^l)_+^\alpha \widehat{f}_k e^{ik\theta}. \quad (1.8)$$

Средние (1.8) для $f \in H^p(D^n)$, $0 < p < 1$, и $n \geq 2$ при четном натуральном l были рассмотрены Р. М. Тригубом в [3; § 2], где для них доказана двусторонняя оценка через специальный модуль гладкости. Ранее А. А. Соляником в [2; § 3, теорема 2] при натуральном l была получена двусторонняя оценка приближения функции $f \in H^p(E_2)$ (E_2 – полуплоскость) соответствующими обобщенными средними Рисса. Используя схему доказательства [2], в [4] доказана двусторонняя оценка приближения функции $f \in H^p(D)$ средними (1.8), но уже при $l > 0$. В настоящей статье для средних (1.8) при $l > 0$ доказана оценка сверху через модуль гладкости l -го порядка (1.5) и оценка снизу через модуль (1.6). Основные результаты работы анонсированы в [5].

Обозначим через E класс экспоненциально убывающих функций из $C^\infty[0, \infty)$, все производные которых также экспоненциально убывают, т.е. если $\varphi \in E$, то $|\varphi^{(k)}(t)| \leq L_k e^{-a_k t}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $L_k > 0$, $a_k > 0$. Пусть φ – сумматорная функция из E и $l > 0$. Тогда

$$\varphi_l(t) = 1 - \Delta_t^l \varphi(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} \varphi(mt)$$

также сумматорная функция из E и

$$M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} \sum_k \varphi(m\varepsilon|k|) \widehat{f}_k e^{ik\theta}. \quad (1.9)$$

В частном случае, когда $\varphi(t) = e^{-t}$, имеем $\varphi_l(t) = 1 - (1 - e^{-t})^l$ и

$$M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{i\theta}) = P_\varepsilon^l(f, e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} f(e^{-m\varepsilon} e^{i\theta}), \quad (1.10)$$

где $e^{-m\varepsilon} e^{i\theta} = (e^{-m\varepsilon} e^{i\theta_1}, \dots, e^{-m\varepsilon} e^{i\theta_n})$. Средние $P_\varepsilon^l(f, e^{i\theta})$ назовем *обобщенными средними Абеля–Пуассона*. В случае $H^p(D)$ обобщенные средние Абеля–Пуассона при натуральном l были введены Э. А. Стороженко в [6], [7] и для них доказана оценка сверху; оценка снизу доказана только для случая $l = 1$ в [7; § 5, теорема 6]. Соляником в [2; § 3, теорема 1] были рассмотрены обобщенные средние Абеля–Пуассона для $H^p(E_2)$ (E_2 – полуплоскость) при натуральном l , где для них доказана двусторонняя оценка. В [8] результат Соляника был обобщен на $H^p(E_{2n})$ и $l > 0$. В настоящей статье для средних (1.10) доказана оценка сверху через модуль (1.5) и оценка снизу через модуль (1.6) при $l > 0$. В случае $H^p(D)$ этот результат доказан в [9].

§ 2. Вспомогательные утверждения

Из (1.1) следует, что

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} f((\rho e^{i\theta})^m e^{it}) (\rho e^{i\theta})^{-j} d\theta = \begin{cases} \widehat{f}_k e^{ikt}, & km = j, \\ 0, & km \neq j, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$(\rho e^{i\theta})^m e^{it} = ((\rho e^{i\theta_1})^m e^{it_1}, \dots, (\rho e^{i\theta_n})^m e^{it_n}),$$

$$(e^{i\theta})^{-j} = ((e^{i\theta_1})^{-j_1}, \dots, (e^{i\theta_n})^{-j_n}), \quad \widehat{f}_k e^{ikt} = \widehat{f}_{k_1, \dots, k_n} e^{i(k_1 t_1 + \dots + k_n t_n)}.$$

Здесь $kt = j$ означает, что $k_1 t = j_1 \wedge \dots \wedge k_n t = j_n$, а $kt \neq j$ означает, что $k_1 t \neq j_1 \vee \dots \vee k_n t \neq j_n$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in H^p(D^n)$, а $\varphi \in C[0, \infty)$ – экспоненциально убывающая функция такая, что $\varphi(0) = 1$. Тогда имеет место следующее интегральное представление:

$$f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\Phi(\rho e^{i\theta}, e^{it})}{\prod_{j=1}^n (1 - \rho e^{i\theta_j})^s} \sum_k \Delta_\varepsilon^{ns} \varphi(\varepsilon|k|) (\rho e^{i\theta})^{-k} d\theta, \quad (2.2)$$

где $s > 0$ и

$$\Phi(\rho e^{i\theta}, e^{it}) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f((\rho e^{i\theta})^m e^{it}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (2.1)

$$\sum_k \varphi(m\varepsilon|k|) \widehat{f}_k e^{ikt} = \sum_j \varphi(\varepsilon|j|) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} f((\rho e^{i\theta})^m e^{it}) (\rho e^{i\theta})^{-j} d\theta.$$

Подставляя данное выражение в (1.9) и считая, что $e^{-a\varepsilon/2} \leq \rho < 1$, получим следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \Phi(\rho e^{i\theta}, e^{it}) \sum_k \varphi(\varepsilon|k|) (\rho e^{i\theta})^{-k} d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\Phi(\rho e^{i\theta}, e^{it})}{\prod_{j=1}^n (1 - \rho e^{i\theta_j})^s} \prod_{j=1}^n (1 - \rho e^{i\theta_j})^s \sum_k \varphi(\varepsilon|k|) (\rho e^{i\theta})^{-k} d\theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В [9; § 3, формула (35)] получено следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (1 - \rho e^{i\theta})^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\varepsilon k) (\rho e^{i\theta})^{-k} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\beta}{k} (-1)^k \sum_{m=1}^k \varphi(\varepsilon(k-m)) (\rho e^{i\theta})^m + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_\varepsilon^\beta \varphi(\varepsilon k) (\rho e^{i\theta})^{-k}, \end{aligned}$$

где $\beta > 0$, а $\varphi(t)$ – непрерывная экспоненциально убывающая на $[0, \infty)$ функция. На основании этой формулы

$$\begin{aligned} (1 - \rho e^{i\theta_j})^s \sum_{k_j=0}^{\infty} \Delta_\varepsilon^{(j-1)s} \varphi(\varepsilon|k|) (\rho e^{i\theta_j})^{-k_j} \\ = \sum_{k_j=1}^{\infty} \binom{s}{k_j} (-1)^{k_j} \sum_{m=1}^{k_j} \Delta_\varepsilon^{(j-1)s} \varphi(\varepsilon(|k| - m)) (\rho e^{i\theta_j})^m \\ + \sum_{k_j=0}^{\infty} \Delta_\varepsilon^{js} \varphi(\varepsilon|k|) (\rho e^{i\theta_j})^{-k_j}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $j = 1, \dots, n$, а $\Delta_\varepsilon^0 \varphi(\varepsilon|k|) = \varphi(\varepsilon|k|)$,

$$\Delta_\varepsilon^{js} \varphi(\varepsilon|k|) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{js}{m} (-1)^m \varphi(\varepsilon(|k| + m)).$$

Согласно теореме Коши

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(\rho e^{i\theta}, e^{it})}{(1 - \rho e^{i\theta_j})^s} (\rho e^{i\theta_j})^m d\theta_j = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Полагая последовательно в формуле (2.4) $j = 1, 2, \dots, n$, а затем подставляя соответствующие выражения в (2.3), получим с учетом (2.5) интегральное представление (2.2).

СЛЕДСТВИЕ. Из представления (2.2) получаем

$$M_{\varepsilon, \varphi}(f, e^{it}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{f(\rho e^{i(\theta+t)})}{\prod_{j=1}^n (1 - \rho e^{i\theta_j})^{s/n}} \sum_k \Delta_\varepsilon^s \varphi(\varepsilon|k|) (\rho e^{i\theta})^{-k} d\theta, \quad (2.6)$$

где $s > 0$, $f \in H^p(D^n)$, а $\varphi(t)$ непрерывная экспоненциально убывающая на $[0, \infty)$ функция.

При возведении интегралов в степень $p > 1$ мы будем использовать известное неравенство Йенсена в следующей форме: если $f \in L_{Q^n}^p$, $p > 1$, и $g \in L_{Q^n}^1 \cap L_{Q^n}^\infty$, то

$$\|f(u)g(u)\|_1^p \leq \|g(u)\|_1^{p-1} \| |f(u)|^p g(u) \|_1, \quad (2.7)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n) \in Q^n$.

В случае $0 < p \leq 1$ вместо неравенства Йенсена будем использовать неравенство (2.8) из следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $f(z) \in H^p(D^n)$, $0 < p \leq 1$. Тогда

$$\|f(\rho e^{it})\|_1^p \leq 2^{n(1-p)} \prod_{j=1}^n (R_j - \rho_j)^{p-1} \|f(Re^{it})\|_p^p, \quad 0 < \rho_j < R_j \leq 1. \quad (2.8)$$

При $n = 1$ неравенство (2.8) приведено в [10; § 2, лемма 3, формула (13)]. Для $n \geq 2$ доказательство (2.8) аналогично доказательству в одномерном случае.

В [10; § 2, лемма 2, формула (12)] доказана следующая

ЛЕММА 3. Пусть $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma - \beta > 1$ и $\frac{1}{2} < R < 1$. Тогда

$$\int_0^\pi t^\beta |1 - Re^{it}|^{-\gamma} dt \leq C(\beta, \gamma) (1 - R)^{1+\beta-\gamma}.$$

Для модуля гладкости (1.5) имеет место следующий аналог свойства полуаддитивности.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in H^p(D^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\|\Delta_{\lambda h}^l f(e^{i\theta})\|_p^p \leq M(l, p) \left(\prod_{j=1}^n (|\lambda_j| + 1) \right)^{N(l, p)} \omega_l^p(|h|, f)_p, \quad (2.9)$$

где

$$M(l, p) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \binom{l}{m} \right|^p, & 0 < p \leq 1, \\ 2^{([l]+1)p}, & p > 1, \end{cases}$$

$$N(l, p) = \begin{cases} [\log_2(M(l, p))] + 1, & 0 < p \leq 1, \\ ([l] + 1)p, & p > 1, \end{cases}$$

$[\cdot]$ – целая часть числа.

Доказательство основано на формуле (9) из [9], которая справедлива и для функций многих переменных в следующей форме:

$$\Delta_{\lambda h}^l f(e^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} \Delta_{\lambda h/2}^l f(e^{i(\theta+m\lambda h/2)}), \quad (2.10)$$

где $f(e^{i\theta}) \in L_{Q^n}^p$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $g = \max_{j=1, \dots, n} (|\lambda_j| + 1)$. Выберем $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{s-1} < g \leq 2^s$. Применяя (2.10) к разности $\Delta_{\lambda h}^l f(e^{i\theta})$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, а затем рекуррентно к разностям во внутренней сумме $s-1$ раз, получим

$$\Delta_{\lambda h}^l f(e^{i\theta}) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \binom{l}{m_1} \sum_{m_2=0}^{\infty} \binom{l}{m_2} \cdots \sum_{m_s=0}^{\infty} \binom{l}{m_s} \Delta_{\lambda h/2^s}^l f(e^{i(\theta+g(m)\lambda h)}),$$

где $g(m) = \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2^2}m_2 + \cdots + \frac{1}{2^s}m_s$.

Отсюда, учитывая инвариантность квазинормы относительно сдвига и неравенство треугольника, имеем

$$\|\Delta_{\lambda h}^l f(e^{i\theta})\|_p^p \leq M(l, p)^s \|\Delta_{\lambda h/2^s}^l f(e^{i\theta})\|_p^p, \quad 0 < p \leq 1, \quad (2.11)$$

$$\|\Delta_{\lambda h}^l f(e^{i\theta})\|_p \leq 2^{([l]+1)s} \|\Delta_{\lambda h/2^s}^l f(e^{i\theta})\|_p, \quad p > 1. \quad (2.12)$$

Так как $|\lambda_j h|/2^s \leq |h|$, $j = 1, \dots, n$, и

$$M(l, p)^s \leq M(l, p) 2^{(s-1)N(l, p)} \leq M(l, p) g^{N(l, p)} \leq M(l, p) \left(\prod_{j=1}^n (|\lambda_j| + 1) \right)^{N(l, p)},$$

$$2^{([l]+1)s} \leq 2^{[l]+1} 2^{(s-1)([l]+1)} \leq 2^{[l]+1} g^{[l]+1} \leq 2^{[l]+1} \left(\prod_{j=1}^n (|\lambda_j| + 1) \right)^{[l]+1},$$

то из (2.11) и (2.12) следует (2.9). Таким образом, лемма 4 доказана.

§ 3. Приближение функций класса $H^p(D^n)$ обобщенными средними Абе́ля–Пуассона

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, а $\varphi(t) \in E$ и $\varphi(0) = 1$, число l удовлетворяет (1.2). Тогда

$$\|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it})\|_p \leq C(l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при натуральном s

$$|\Delta_\varepsilon^{ns} \varphi(\varepsilon|k|)| \leq \max_{t \in [\varepsilon|k|, \infty)} |\varphi^{(ns)}(t)| \varepsilon^{ns} \leq L_{ns} e^{-a_{ns} \varepsilon|k|} \varepsilon^{ns},$$

то при $\rho = e^{-a_{ns} \varepsilon/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_k \Delta_\varepsilon^{ns} \varphi(\varepsilon|k|) (\rho e^{i\theta})^{-k} \right| &\leq L_{ns} \varepsilon^{ns} \sum_k e^{-a_{ns} \varepsilon|k|/2} \\ &= L_{ns} \varepsilon^{ns} \frac{1}{(1 - e^{-a_{ns} \varepsilon/2})^n} \leq C(s) \varepsilon^{ns-n}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее,

$$\frac{1}{|1 - \rho e^{i\theta}|^s} \leq \frac{2^s}{|1 - \rho^2 e^{i\theta}|^s}. \quad (3.2)$$

Из (2.2) на основании (3.1) и (3.2) получаем

$$|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it})| \leq C(s) \varepsilon^{ns-n} \int_{Q^n} \frac{|\Phi(\rho e^{i\theta}, e^{it})|}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho^2 e^{i\theta_j}|^s} d\theta. \quad (3.3)$$

Далее будем различать два случая для значений p : а) $0 < p \leq 1$; б) $1 < p < \infty$.

а) Чтобы обеспечить применение леммы 3, будем считать, что

$$s = \left(\left\lceil \frac{1}{p} \right\rceil + 1 \right) (N(l, p) + 1).$$

Возведем обе части (3.3) в степень p , применяя при этом лемму 2 к функции

$$\frac{\Phi(z, e^{it})}{\prod_{j=1}^n (1 - \rho z_j)^s},$$

считая, что $R = 1$. В результате получим

$$|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it})|^p \leq C(l, p) \varepsilon^{nsp-np} (1 - \rho)^{(p-1)n} \int_{Q^n} \frac{|\Delta_\theta^l f(e^{it})|^p}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho e^{i\theta_j}|^{sp}} d\theta.$$

Проинтегрируем обе части полученного неравенства по t . Далее, применив лемму 4 и лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it})\|_p^p &\leq C(l, p) \varepsilon^{ns-n} \int_{Q^n} \frac{\|\Delta_\theta^l f(e^{it})\|_p^p}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho e^{i\theta_j}|^{sp}} d\theta \\ &\leq C(l, p) \varepsilon^{nsp-n} \omega_l^p(\varepsilon, f) \left(\int_0^\pi \left(\frac{\theta}{\varepsilon} + 1 \right)^{N(l, p)} \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} \right)^n \\ &= C(l, p) \varepsilon^{nsp-n} \omega_l^p(\varepsilon, f) \left(\sum_{m=0}^{N(l, p)} \binom{N(l, p)}{m} \varepsilon^{-m} \int_0^\pi \theta^m |1 - \rho e^{i\theta}|^{-sp} d\theta \right) \\ &\leq C(l, p) \omega_l^p(\varepsilon, f)_p. \end{aligned}$$

б) Обозначим: $m = ([l] + 1)([p] + 1)$. При возведении обеих частей неравенства (3.3) в степень p следует воспользоваться неравенством Йенсена (2.7) и

леммой 3. Чтобы обеспечить применение леммы 3, будем считать, что $s = m+2$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it})|^p &\leq C(l, p) \varepsilon^{nsp-np} \left(\int_0^\pi \frac{d\theta}{|1 - \rho^2 e^{i\theta}|^s} \right)^{n(p-1)} \\ &\times \int_{Q^n} \frac{|\Phi(\rho e^{i\theta}, e^{it})|^p}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho^2 e^{i\theta_j}|^s} d\theta \leq C(l, p) \varepsilon^{ns-n} \int_{Q^n} \frac{|\Delta_\theta^l f(e^{it})|^p}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho e^{i\theta_j}|^s} d\theta. \end{aligned}$$

Как и в случае а), проинтегрируем обе части полученного неравенства по t на Q^n , а затем применим лемму 4 и лемму 3. Получим

$$\begin{aligned} \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, e^{it})\|_p^p &\leq C(l, p) \varepsilon^{ns-n} \int_{Q^n} \frac{\|\Delta_\theta^l f(e^{it})\|_p^p}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho e^{i\theta_j}|^{sp}} d\theta \\ &\leq C(l, p) \varepsilon^{ns-n} \omega_l^p(\varepsilon, f)_p \left(\int_0^\pi \left(\frac{\theta}{\varepsilon} + 1 \right)^m \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^s} \right)^n \\ &= C(l, p) \varepsilon^{ns-n} \omega_l^p(\varepsilon, f)_p \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varepsilon^{-k} \int_0^\pi \frac{\theta^k d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^s} \right)^n \leq C(l, p) \omega_l^p(\varepsilon, f)_p. \end{aligned}$$

На основе других идейных соображений в [2; § 2, предложение 2] доказан аналог теоремы 1 для $f \in H^p(E_2)$, $0 < p \leq 1$, $l \in \mathbb{N}$. В [5; теорема 1] доказан аналог теоремы 1 для $f \in H^p(E_{2n})$ и $l > 0$. Отметим также, что в [6; § 3, теорема 1] эта теорема доказана для $f \in H^p(D)$, $0 < p \leq 1$.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in H^p(D^n)$, а F – комплекснозначная с раз непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ функция, причем сама функция и все ее с производных экспоненциально убывают, при этом $s \geq n\left(\left[\frac{1}{p}\right] + 1\right)$. Тогда

$$\|M_{\varepsilon, F}(f, e^{it})\|_p \leq C(p) \|f\|_p. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.6) на основании (3.1) следует, что

$$|M_{\varepsilon, F}(f, e^{it})| \leq C(s) \varepsilon^{s-n} \int_{Q^n} \frac{|f(\rho e^{i(\theta+t)})|}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho e^{i\theta_j}|^{s/n}} d\theta, \quad (3.5)$$

где $\rho = e^{-a_s \varepsilon/2}$.

Далее, как и в теореме 1, будем различать два случая для значений p : а) $0 < p \leq 1$; б) $1 < p < \infty$.

а) Возведем обе части (3.5) в степень p и применим лемму 2 к функции $f(z e^{it}) / \prod_{j=1}^n (1 - z_j)^{s/n}$, положив $R = e^{-a_s \varepsilon/4}$. Проинтегрируем обе части полученного неравенства по t и далее воспользуемся n -субгармоничностью функции $|f|^p$, а также леммой 3. В результате имеем

$$\begin{aligned} \|M_{\varepsilon, F}(f, e^{it})\|_p^p &\leq C(p) \varepsilon^{sp-np} (R - \rho)^{(p-1)n} \|f\|_p^p \left(\int_0^\pi |1 - R e^{i\theta}|^{-sp/n} d\theta \right)^n \\ &\leq C(p) \varepsilon^{sp-n} \|f\|_p^p (1 - R)^{n-sp} \leq C(p) \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

б) При возведении обеих частей неравенства (3.5) в степень p следует воспользоваться неравенством Йенсена (2.7), а затем проинтегрировать обе части

полученного неравенства по t , учитывая вновь n -субгармоничность функции $|f|^p$ и лемму 3. Тогда

$$\|M_{\varepsilon, F}(f, e^{it})\|_p^p \leq C(p) \varepsilon^{sp-np} \|f\|_p^p \left(\int_0^\pi |1 - \rho e^{i\theta}|^{-s/n} d\theta \right)^{np} \leq C(p) \|f\|_p^p.$$

Для $f \in H^p(D^n)$ введем следующий оператор, являющийся одним из обобщений производной Вейля:

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l} f(\rho e^{it}) = \sum_k (i|k|)^l \widehat{f}_k (\rho e^{it})^k. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что

$$\left(\frac{\partial^l f}{\partial t^l} \right)_k^\wedge = (i|k|)^l \widehat{f}_k. \quad (3.7)$$

Тогда

$$\sum_{k, |k| \neq 0} \frac{1}{(i|k|)^l} \left(\frac{\partial^l f}{\partial t^l} \right)_k^\wedge (\rho e^{it})^k = f(\rho e^{it}) - f(0). \quad (3.8)$$

Так как

$$\left(\frac{\partial^l f}{\partial t^l} \right)_k^\wedge e^{ik(t+\tau)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\partial^l f}{\partial t^l} (Re^{i(t+\varphi)}) (Re^{i\varphi})^{-k} d\varphi e^{ik\tau},$$

то (3.8) можно записать в следующем виде:

$$f(\rho e^{i(t+\tau)}) - f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\partial^l f}{\partial t^l} (Re^{i(t+\varphi)}) \sum_{k, |k| \neq 0} \frac{1}{(i|k|)^l} \left(\frac{\rho}{R} e^{-i\varphi} \right)^k e^{ik\tau} d\varphi. \quad (3.9)$$

ЛЕММА 6. Пусть $f \in H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, $l > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\|\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p \leq C(l, p) \varepsilon^l \left\| \frac{\partial^l f}{\partial t^l} (e^{-\varepsilon/4} e^{it}) \right\|_p, \quad 0 < h \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (1.4) и (3.9) имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(\widetilde{\rho} e^{it}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\partial^l f}{\partial t^l} (\widetilde{R} e^{i(t+\varphi)}) \sum_{k, |k| \neq 0} \frac{1}{(i|k|)^l} \left(\frac{\widetilde{\rho}}{\widetilde{R}} e^{-i\varphi} \right)^k \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m e^{\pm im|k|h} d\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\partial^l f}{\partial t^l} (\widetilde{R} e^{i(t+\varphi)}) \sum_{k, |k| \neq 0} \left(\frac{1 - e^{\pm i|k|h}}{i|k|} \right)^l \left(\frac{\widetilde{\rho}}{\widetilde{R}} e^{-i\varphi} \right)^k d\varphi, \end{aligned}$$

где $\tilde{\rho} = (\rho, \dots, \rho)$, $\tilde{R} = (R, \dots, R)$, $\rho, R \in \mathbb{R}$. Пусть $\rho = e^{-\varepsilon}$, $R = e^{-h/2}$, $R_1 = e^{-h/4}$. Тогда предыдущее равенство можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-\varepsilon} e^{it}) &= h^l \sum_{k, |k| \neq 0} \left(\frac{1 - e^{\pm |k|h}}{i|k|h} \right)^l e^{-3|k|h/4} \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\partial^l f}{\partial t^l} \left(e^{-h/4} \tilde{R}_1 e^{i(\varphi+t)} \right) (\tilde{R}_1 e^{i\varphi})^{-k} d\varphi \cdot e^{-(\varepsilon-h)|k|}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \frac{\partial^l f}{\partial t^l} (e^{-h/4} \tilde{R}_1 e^{i(\varphi+t)}) (\tilde{R}_1 e^{i\varphi})^{-k} d\varphi \cdot e^{-(\varepsilon-h)|k|} \\ &= \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} f_{e^{-h/4}} \right)_k e^{-(\varepsilon-h)|k|} e^{ikt} = \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} f_{e^{-\varepsilon+3h/4}} \right)_k e^{ikt}, \end{aligned}$$

где $f_{e^{-\tau}}(z) = f(e^{-\tau}z)$, то в силу (1.7) из равенства (3.10) следует, что

$$\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-\varepsilon} e^{it}) = h^l M_{\varepsilon, F_{1\pm}} \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} f_{e^{-\varepsilon+3h/4}}, e^{it} \right),$$

где $F_{1\pm}(\tau) = ((1 - e^{\pm i\tau})/(i\tau))^l e^{-3\tau/4} \in E$.

Так как $\varepsilon - \frac{3}{4}h > \frac{1}{4}\varepsilon$, то

$$\left\| \frac{\partial^l}{\partial t^l} f_{e^{-\varepsilon+3h/4}}(e^{it}) \right\|_p \leq \left\| \frac{\partial^l}{\partial t^l} f_{e^{-\varepsilon/4}}(e^{it}) \right\|_p.$$

Применяя лемму 5, получаем утверждение леммы 6.

Аналоги леммы 6 для конечных разностей в одномерном случае доказаны другими методами в [11; § 4, лемма 3] и [2; § 3, формула (38)]. В [8; § 3; лемма 6] доказан аналог этой леммы для $f \in H^p(E_{2n})$.

ЛЕММА 7. Пусть $f \in H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$, число l удовлетворяет (1.2). Тогда

$$\left\| \frac{\partial^l f}{\partial t^l} (e^{-\varepsilon} e^{-i\theta}) \right\|_p \leq C(p) \varepsilon^{-l} \|f(e^{i\theta}) - P_{j\varepsilon}^l(f, e^{i\theta})\|_p, \quad j \in \mathbb{N},$$

где $P_{j\varepsilon}^l(f, e^{i\theta})$ – обобщенные средние Абеля–Пуассона (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основные идеи доказательства этой леммы взяты из [2; § 2, лемма 3].

Согласно (3.7) имеем

$$\left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} f_{e^{-\varepsilon}} \right)_k = \left(\frac{\partial^l f}{\partial t^l} \right)_k e^{-\varepsilon|k|} = (i|k|)^l e^{-\varepsilon|k|} \hat{f}_k = i^l \varepsilon^{-l} F_2(\varepsilon|k|) (1 - e^{-j\varepsilon|k|})^l \hat{f}_k,$$

где

$$F_2(t) = \frac{t^l}{(1 - e^{-jt})^l} e^{-t} \in E.$$

Далее, так как

$$(1 - e^{-j\varepsilon|k|})^l \widehat{f}_k = (f - P_{j\varepsilon}^l(f))_l^\wedge,$$

то

$$\frac{\partial^l f}{\partial t^l}(e^{-\varepsilon} e^{i\varphi}) = i\varepsilon^{-l} \sum_k F_2(\varepsilon|k|)(f - P_{j\varepsilon}^l(f))_k^\wedge e^{ik\varphi} = i^l \varepsilon^{-l} M_{\varepsilon, F_2}(f - P_{j\varepsilon}^l(f), e^{i\varphi}).$$

Отсюда, применяя лемму 5, получаем требуемое неравенство.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, и число l удовлетворяет (1.2). Тогда

$$C_1(l, p) \widetilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})\|_p \leq C_2(l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху сразу следует из теоремы 1, поскольку $e^{-t} \in E$. Докажем оценку снизу. Как и в [2; §3, теорема 1], будем исходить из соотношения

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{it}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m \widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-m\varepsilon} e^{it}) - \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m \widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-m\varepsilon} e^{it}), \\ 0 < h &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Преобразуя $\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-m\varepsilon} e^{it})$ и меняя порядок суммирования в первой сумме (3.11), а затем используя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{it})\|_p^p &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{l}{k} \right|^p \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(e^{-m\varepsilon} e^{i(t \pm k\tilde{h})}) \right\|_p^p \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \binom{l}{m} \right|^p \|\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-m\varepsilon} e^{it})\|_p^p \end{aligned} \quad (3.12)$$

при $0 < p \leq 1$ и

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{it})\|_p &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{l}{k} \right| \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(e^{-m\varepsilon} e^{i(t \pm k\tilde{h})}) \right\|_p \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \binom{l}{m} \right| \|\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-m\varepsilon} e^{it})\|_p \end{aligned} \quad (3.13)$$

при $p > 1$.

В силу определения средних $P_\varepsilon^l(f, e^{it})$ (см. (1.10)) и инвариантности квазинормы относительно сдвига имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(e^{-m\varepsilon} e^{i(t \pm k\hat{h})}) \right\|_p &= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(e^{-m\varepsilon} e^{it}) \right\|_p \\ &= \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})\|_p. \end{aligned}$$

Далее, вследствие n -субгармоничности получаем, что

$$\|\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-m\varepsilon} e^{it})\|_p \leq \|\widetilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p.$$

Из (3.12) и (3.13) на основании сделанных замечаний вытекает следующая оценка:

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{it})\|_p \leq C(l, p) (\|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})\|_p + \|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p). \quad (3.14)$$

На основании лемм 6 и 7 имеем

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p \leq C(l, p) \left\| \frac{\partial^l}{\partial t^l} f(e^{-\varepsilon/4} e^{it}) \right\|_p \leq C(l, p) \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})\|_p. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.14), получим

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(e^{it})\|_p \leq C(l, p) \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})\|_p.$$

Отсюда, переходя к супремуму по h , получим требуемую оценку снизу.

Для обобщения средних Абеля–Пуассона сумматорная функция $\varphi_l(t) = 1 - (1 - e^t)^l$ является гладкой, но не является финитной, а потому в (1.7) бесконечное число слагаемых. Поэтому возникает вполне естественный вопрос о существовании гладкой сумматорной функции, в методе суммирования которой (1.7) было бы конечное число слагаемых и также имела бы место оценка сверху и снизу. В качестве такой функции можно взять

$$\chi_l(t) = \begin{cases} e^{-\operatorname{tg}^l(\pi t)}, & 0 < t < 0.5 \\ 0, & t \geq 0.5. \end{cases} \quad (3.16)$$

Для средних $M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in H^p(D^n)$, число l удовлетворяет (1.2). Тогда

$$C_1(l, p) \tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p \leq C_2(l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции можно доказать, что $\chi_l \in C^\infty[0, \infty)$. Отсюда в силу финитности функции $\chi_l(t)$ следует, что $\chi_l(t) \in E$. Используя разложение в ряд Маклорена функций $(1 - e^{-t})^l$ и $1 - \chi_l(t)$, можно доказать, что

$$\mu(t) = \frac{1 - \chi_l(t)}{(1 - e^{-t})^l} \in E, \quad \frac{1}{\mu(t)} \in E.$$

Отсюда на основании теоремы 2 и леммы 5

$$\begin{aligned} \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p &= \|M_{\varepsilon, \mu}(f(\cdot) - P_\varepsilon^l(f, \cdot), e^{it})\|_p \\ &\leq C(l, p) \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})\|_p \leq C(l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p &\leq C(l, p) \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})\|_p = C(l, p) \|M_{\varepsilon, \frac{1}{\mu}}(f(\cdot) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, \cdot), e^{it})\|_p \\ &\leq C(l, p) \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

§ 4. Приближение функций класса $H^p(D^n)$ обобщенными средними Рисса

Правосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка β функции $\varphi(x)$ (см., например, [12; гл. 2, § 5, формула (53)]) определяется так:

$$(I_-^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{\beta-1} \varphi(t) dt, \quad \beta > 0,$$

а дробная производная (см., например, [12; гл. 2, § 5, формулы (5.6), (5.7)]) определяется следующим образом:

$$(D_-^\beta \varphi)(x) = (-1)^{[\beta]+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\beta]+1} ((I_-^{1-\{\beta\}} \varphi)(x)),$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

ЛЕММА 8. Пусть $\alpha > 0$, $\beta = 1 + \alpha - \delta$, $0 < \delta < 1$. Тогда

$$|\Delta_\varepsilon^\beta r^{1,\alpha}(\varepsilon k)| \leq C(\alpha, \delta) \varepsilon^\beta, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \varepsilon > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения, используемые при доказательстве этой леммы, взяты автором из [12; гл. 4, § 20, п. 3°, теорема 20.4]. Простым вычислением устанавливаем (см., например, [12; гл. 1, § 2, п. 5°, формула (2.45)]), что

$$\begin{aligned} (D_-^\beta r^{1,\alpha})(t) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\delta)} (1-t)_+^{\delta-1} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\delta)} (1-t)^{\delta-1}, & t < 1, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases} \\ I_-^\beta (D_-^\beta r^{1,\alpha})(t) &= (1-t)_+^\alpha = r^{1,\alpha}(t). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon^\beta r^{1,\alpha}(\varepsilon k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta}{j} (-1)^j r^{1,\alpha}(k\varepsilon + j\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta}{j} (-1)^j \int_{k\varepsilon+j\varepsilon}^{\infty} (t - (k\varepsilon + j\varepsilon))^{\beta-1} (D_-^\beta r^{1,\alpha})(t) dt. \end{aligned}$$

Сделаем в интегралах замену переменного $t - k\varepsilon = \varepsilon u$. Тогда

$$\Delta_\varepsilon^\beta r^{1,\alpha}(\varepsilon k) = \varepsilon^\beta \int_0^\infty (D_-^\beta r^{1,\alpha})((k+u)\varepsilon) P_\beta(u) du,$$

где

$$P_\beta(u) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta}{j} (-1)^j (u-j)_+^{\beta-1}.$$

Как доказано в [13; п. 2, лемма 2] (см. также [12; гл. 4, § 20, п. 2°, лемма 20.1]), $P_\beta(u) \in L^1[0, \infty)$. Из этого доказательства следует, что $P_\beta(u) \in L^q[0, \infty)$ при

любом $q \geq 1$. Пусть $1 < p < \frac{1}{1-\delta}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда на основании неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} |\Delta_\varepsilon^\beta r^{1,\alpha}(\varepsilon k)| &\leq \varepsilon^\beta \int_0^\infty (D_-^\beta r^{1,\alpha})((k+u)\varepsilon) |P_\beta(u)| du \\ &\leq \varepsilon^\beta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\delta)} \left(\int_0^{1/\varepsilon-k} (1-\varepsilon(k+u))^{(\delta-1)p} du \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |P_\beta(u)|^q du \right)^{1/q} \\ &\leq C(\alpha, \delta) \varepsilon^\beta. \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. При $\rho = e^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, $\beta = 1 + \alpha - \delta$, $0 < \delta < 1$ имеет место оценка

$$\left| \sum_k \Delta_\varepsilon^\beta r^{1,\alpha}(\varepsilon |k|) (\rho e^{i\theta})^{-k} \right| \leq C(\alpha, \delta) \varepsilon^{\beta-n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 8 имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_k \Delta_\varepsilon^\beta r^{1,\alpha}(\varepsilon |k|) (\rho e^{i\theta})^{-k} \right| &\leq C(\alpha, \delta) \varepsilon^\beta \left(\sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]+1} e^{\varepsilon k} \right)^n \\ &= C(\alpha, \delta) \varepsilon^\beta \left(\frac{e^{\varepsilon([1/\varepsilon]+1)} - 1}{e^\varepsilon - 1} \right)^n \leq C(\alpha, \delta) \varepsilon^{\beta-n}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 10. Пусть $f \in H^p(D^n)$. Если

$$\left((0 < p \leq 1) \wedge \left(\alpha > \frac{n}{p} - 1 \right) \right) \vee ((p > 1) \wedge (\alpha > n - 1)), \quad (4.1)$$

то

$$\|R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{it})\|_p \leq C(\alpha, p, l) \|f\|_p. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала (4.2) для $R_\varepsilon^{1,\alpha}(f, e^{it})$. Из (2.6) на основании леммы 9 получаем

$$|R_\varepsilon^{1,\alpha}(f, e^{it})| \leq C(\alpha, \delta) \varepsilon^{\beta-n} \int_{Q^n} \frac{|f(\rho e^{i(\theta+t)})|}{\prod_{j=1}^n |1 - \rho e^{i\theta_j}|^{\beta/n}} d\theta, \quad (4.3)$$

где $\beta = 1 + \alpha - \delta$, $0 < \delta < 1$, $\rho = e^\varepsilon$.

Далее, как и в теореме 1, будем различать два случая: а) $0 < p \leq 1$; б) $1 < p < \infty$.

а) Возведем обе части (4.3) в степень p , применяя при этом лемму 2 к функции

$$\frac{f(ze^{it})}{\prod_{j=1}^n (1 - z_j)^{\beta/n}},$$

а затем проинтегрируем обе части полученного неравенства по t . В результате получим

$$\|R_\varepsilon^{1,\alpha}(f, e^{it})\|_p^p \leq C(\alpha, \delta) \varepsilon^{\beta p - np} (R - \rho)^{(p-1)n} \|f\|_p^p \left(\int_0^\pi |1 - R e^{i\theta}|^{\beta p/n} d\theta \right)^n, \quad (4.4)$$

где $R = e^{-\varepsilon/2}$.

Так как $\alpha > \frac{n}{p} - 1$, то полагая $\delta_0 = \alpha + 1 - \frac{n}{p}$ и считая, что $\delta \in (0, \delta_0)$, имеем $\frac{\beta p}{n} > 1$, что позволяет воспользоваться леммой 3. На основании леммы 3

$$\int_0^\pi |1 - Re^{i\theta}|^{-\beta p/n} d\theta \leq C(\alpha, \delta, p)(1 - R)^{1-\beta p/n} \leq C(\alpha, \delta, p)\varepsilon^{(n-\beta p)/n}.$$

Подставляя полученное неравенство в (4.4) и используя произвольность δ , получаем (4.2) для $R_\varepsilon^{1,\alpha}(f, e^{it})$ при $0 < p \leq 1$ и $\alpha > \frac{n}{p} - 1$.

б) При возведении обеих частей неравенства (4.3) в степень p следует воспользоваться неравенством Йенсена (2.7), а затем проинтегрировать обе части полученного неравенства по t . Тогда

$$\|R_\varepsilon^{1,\alpha}(f, e^{it})\|_p^p \leq C(\alpha, \delta, p)\varepsilon^{\beta p - np} \|f\|_p^p \left(\int_0^\pi |1 - \rho e^{i\theta}|^{-\beta/n} d\theta \right)^{np}. \quad (4.5)$$

Так как $\alpha > n - 1$, то считая, что $\delta \in (0, \delta_0)$, где $\delta_0 = \alpha + 1 - n$, имеем $\frac{\beta}{n} > 1$. Это обеспечивает применение леммы 3. Согласно лемме 3

$$\int_0^\pi |1 - \rho e^{i\theta}|^{-\beta/n} d\theta \leq C(\beta)(1 - \rho)^{1-\beta/n} \leq C(\beta)\varepsilon^{(n-\beta)/n}.$$

Подставляя это неравенство в (4.5) и учитывая произвольность δ , получаем (4.2) при $p > 1$ и $\alpha > n - 1$.

Рассмотрим теперь случай произвольного $l > 0$. Представим $r^{l,\alpha}(t)$ в следующем виде:

$$r^{l,\alpha}(t) = r^{1,\alpha}(t)\Psi_{l,\alpha}(t),$$

где функция $\Psi_{l,\alpha}(t) = ((1 - t^l)/(1 - t))^\alpha$ при $0 \leq t < 1$, а на $[0, \infty)$ она продолжена гладким образом так, что $\Psi_{l,\alpha}(t) \in E$. Тогда

$$R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{it}) = M_{\varepsilon, \Psi_{l,\alpha}}(R_\varepsilon^{1,\alpha}(f, e^{it})).$$

Отсюда на основании леммы 5 и того, что (4.2) для $R^{1,\alpha}(f, e^{it})$ уже доказано, следует (4.2) в общем случае. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in H^p(D^n)$, l и α удовлетворяют (1.2) и (4.1) соответственно. Тогда

$$C_1(\alpha, l, p)\tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq \|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{it})\|_p \leq C_2(\alpha, l, p)\omega_l(\varepsilon, f)_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в [4; § 2, теорема], будем придерживаться схемы, предложенной в [2; § 3, теорема 2]. Докажем сначала оценку сверху. Пусть $\chi_l(t)$ – функция (3.16). На основании теоремы 3

$$\|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p \leq C(l, p)\omega_l(\varepsilon, f)_p. \quad (4.6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{it})\|_p &\leq C(p)(\|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p \\ &+ \|R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, e^{it}) - M_{\varepsilon, r^{l,\alpha}\chi_l}(f, e^{it})\|_p + \|M_{\varepsilon, r^{l,\alpha}\chi_l}(f, e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь

$$M_{\varepsilon, r^l, \alpha \chi_l}(f, e^{it}) = \sum_k (1 - (\varepsilon|k|)^l)_+^\alpha \chi_l(\varepsilon|k|) \widehat{f}_k e^{ikt}.$$

В силу леммы 10 и теоремы 3

$$\begin{aligned} & \|R_\varepsilon^{l, \alpha}(f, e^{it}) - M_{\varepsilon, r^l, \alpha \chi_l}(f, e^{it})\|_p \\ &= \|R_\varepsilon^{l, \alpha}(f(\cdot) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, \cdot), e^{it})\|_p \leq C(\alpha, l, p) \omega_l^p(\varepsilon, f)_p. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & M_{\varepsilon, r^l, \alpha \chi_l}(f, e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it}) \\ &= \sum_k ((1 - (\varepsilon|k|)^l)_+^\alpha - 1) \chi_l(\varepsilon|k|) (1 - e^{-i\varepsilon|k|})^{-l} e^{i|k|t} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m \widehat{f}_k e^{im\varepsilon|k|} \end{aligned}$$

и

$$\widehat{f}_k e^{im\varepsilon|k|} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} f(\rho e^{i(\theta+m\varepsilon)}) (\rho e^{i\theta})^{-k} d\theta,$$

то

$$\begin{aligned} & M_{\varepsilon, r^l, \alpha \chi_l}(f, e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(\rho e^{i(\theta+m\varepsilon)}) \right) \\ & \times \sum_k F_{r^l, \alpha}(\varepsilon|k|) (\rho e^{i(\theta-t)})^{-k} d\theta = M_{\varepsilon, F_{r^l, \alpha}}(\Delta_\varepsilon^l f, e^{it}). \end{aligned}$$

Здесь

$$F_{r^l, \alpha}(t) = ((1 - t^l)_+^\alpha - 1) \chi_l(t) (1 - e^{it})^{-l} \in E, \quad \Delta_\varepsilon^l f = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(z e^{im\varepsilon}),$$

где $z = (\rho e^{i\theta_1}, \dots, \rho e^{i\theta_n})$.

Применяя лемму 5, имеем

$$\begin{aligned} & \|M_{\varepsilon, r^l, \alpha \chi_l}(f, e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p = \|M_{\varepsilon, F_{r^l, \alpha}}(\Delta_\varepsilon^l f, e^{it})\|_p \\ & \leq C(l, \alpha, p) \|\Delta_\varepsilon^l f\|_p \leq C(l, \alpha, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Подстановка (4.6), (4.8) и (4.9) в (4.7) позволяет получить требуемую оценку сверху.

На основании теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned} & \widetilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq C(l, p) \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \chi_l}(f, e^{it})\|_p = C(l, p) \left\| \sum_k (1 - \chi_l(\varepsilon|k|)) \widehat{f}_k e^{ikt} \right\|_p \\ &= C(l, p) \left\| \sum_k \mu(\varepsilon|k|) (1 - (1 - (\varepsilon|k|)^l)_+^{\alpha m}) \widehat{f}_k e^{ikt} \right\|_p. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mu(t) = \frac{1 - \chi_l(t)}{1 - (1 - t^l)_+^{\alpha m}}, \quad m = n \left(\left[\frac{1}{\alpha} \right] + 1 \right) \left(\left[\frac{1}{p} \right] + 1 \right).$$

Нетрудно установить, что функция $\mu(t)$ удовлетворяет всем условиям на функцию $F(t)$ из леммы 5. Тогда на основании леммы 5 и неравенства треугольника

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p &\leq C(l, p) \|M_{\varepsilon, \mu}(f(\cdot) - R_{\varepsilon}^{l, \alpha m}(f, \cdot), e^{it})\|_p \\ &\leq C(l, p) \left(\|f(e^{it}) - R_{\varepsilon}^{l, \alpha m}(f, e^{it})\|_p + \sum_{k=1}^{m-1} \|R_{\varepsilon}^{l, \alpha k}(f, e^{it}) - R_{\varepsilon}^{l, \alpha(k+1)}(f, e^{it})\|_p \right) \\ &= C(l, p) \left(\|f(e^{it}) - R_{\varepsilon}^{l, \alpha}(f, e^{it})\|_p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-1} \|R_{\varepsilon}^{l, \alpha}(\dots(R_{\varepsilon}^{l, \alpha}(f(e^{it} - R_{\varepsilon}^{l, \alpha}(f, e^{it}))))\dots)\|_p \right).\end{aligned}$$

Далее, применяя последовательно лемму 10, получаем оценку снизу.

Список литературы

- [1] У. Рудин, *Теория функций в полидиске*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1969.
- [2] A. A. Soljanik, “On the order of approximation to functions of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leq 1$) by certain means of Fourier integrals”, *Anal. Math.*, **12**:1 (1986), 59–75.
- [3] Р. М. Тригуб, “Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 145–160; англ. пер.: R. M. Trigub, “Multipliers in the Hardy spaces $H_p(D^m)$ with $p \in (0, 1]$ and approximation properties of summability methods for power series”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 621–638.
- [4] С. Г. Прибегин, “Приближение функций из H^p , $0 < p \leq 1$, обобщенными средними Рисса с дробными показателями”, *Матем. сб.*, **197**:7 (2006), 77–86; англ. пер.: S. G. Pribeĭgin, “Approximation of functions in H^p , $0 < p \leq 1$, by generalized Riesz means with fractional exponents”, *Sb. Math.*, **197**:7 (2006), 1025–1035.
- [5] С. Г. Прибегин, “Приближение функций из $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$, обобщенными средними Рисса–Бохнера”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, Материалы зимней математической школы, Воронеж, Воронежский государственный университет, 2007, 184–185.
- [6] Э. А. Стороженко, “О приближении функций класса H^p , $0 < p < 1$ ”, *Сообщ. АН ГССР*, **88**:1 (1977), 45–48.
- [7] Э. А. Стороженко, “Об одной задаче Харди–Литтлвуда”, *Матем. сб.*, **119**(161):4(12) (1982), 564–583; англ. пер.: È. A. Storozhenko, “On a problem of Hardy–Littlewood”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:2 (1984), 557–577.
- [8] С. Г. Прибегин, “Об одном методе суммирования интегралов Фурье для функций из $H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$ ”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 718–728; англ. пер.: S. G. Pribeĭgin, “A method for summing Fourier integrals of functions from $H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$ ”, *Math. Notes*, **82**:5–6 (2007), 643–652.
- [9] С. Г. Прибегин, “Об одном методе приближения в H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 123–136; англ. пер.: S. G. Pribeĭgin, “A method of approximation in H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Sb. Math.*, **192**:11 (2001), 1705–1719.
- [10] Э. А. Стороженко, “Приближение функций класса H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **105**(147):4 (1978), 601–621; англ. пер.: È. A. Storozhenko, “Approximation of functions of class H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:4 (1978), 527–545.

- [11] Э. А. Стороженко, “О теоремах типа Джексона в H^p , $0 < p < 1$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:4 (1980), 946–962; англ. пер.: È. A. Storoženko, “Theorems of Jackson type in H^p , $0 < p < 1$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:1 (1981), 203–218.
- [12] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [13] U. Westphal, “An approach to fractional powers of operators via fractional differences”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **29** (1974), 557–576.

С. Г. Прибегин (S. G. Pribegin)

Одесский национальный морской университет, Украина

E-mail: ivanpribegin@rambler.ru

Поступила в редакцию

04.07.2005 и 27.11.2008