Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, О некоторых категориях систем уравнений Монжа–Ампера, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 11, 109–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:15:58

УДК 517.957+514.763.8

Д. В. Туницкий

О некоторых категориях систем уравнений Монжа–Ампера

Статья посвящена дифференциально-геометрическим структурам, ассоциированным с системами уравнений Монжа–Ампера на многообразиях, и их применению к редукции этих уравнений. Рассматривается категория систем уравнений Монжа–Ампера, морфизмами которой служат замены независимых и зависимых переменных, и ряд ее подкатегорий. Основное внимание уделено подкатегориям уравнений локально эквивалентных треугольных и полутреугольных систем, системам, линейным относительно производных (полулинейным), имеющим постоянные коэффициенты, а также системам в полных дифференциалах. Доказаны эффективно проверяемые признаки, позволяющие определить, когда данная система уравнений Монжа–Ампера принадлежит указанным подкатегориям. В качестве следствий получены условия локальной сводимости системы Монжа–Ампера к одному уравнению второго и первого порядков.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: системы Монжа–Ампера на многообразиях, эквивалентность систем Монжа–Ампера, линеаризация систем Монжа–Ампера.

Введение

Если не оговорено противное, то все описываемые ниже объекты считаются гладкими, т.е. бесконечно дифференцируемыми, а все многообразия – связными хаусдорфовыми паракомпактными и вещественными. Для любого расслоения $\mathfrak{F}$ через $\Gamma(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех сечений этого расслоения. Для любого подмножества $\mathfrak{T}$ модуля $\mathfrak{M}$ через $(\mathfrak{T})$ обозначается подмодуль в $\mathfrak{M}$, порожденный элементами множества $\mathfrak{T}$. При рассмотрении конструкций, связанных с теорией пучков, используется терминология, принятая в руководстве [1]. Все встречающиеся пучки являются пучками модулей над структурным пучком соответствующих функций базового многообразия.

Начальные параграфы (§§ 1–6) носят вводный характер. Основные результаты излагаются в § 7, а § 8 посвящен их доказательству.

Для придания основным конструкциям и результатам максимально общего и инвариантного характера в статье используются элементы теории пучков и категорий. В противовес этому во избежание чрезмерной формализации изложения и для упрощения работы все основные построения сопровождаются вычислениями в локальных координатах. А именно, на примере системы Монжа–Ампера в $\mathbb{R}^4$ (т.е. системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями на плоскости) иллюстрируется вычисление инвариантов, использующихся для

формулировки основных результатов. Этому посвящены примеры 1.3, 4.2, 5.1, 5.2 и замечания 5.11, 7.2, 7.5 и 7.8.

§ 1. Системы уравнений Монжа–Ампера

Пусть M – четырехмерное многообразие и C^∞ – структурный пучок этого многообразия, т.е. пучок функций над M . Тем самым, для любого открытого подмножества U многообразия M множество $C^\infty(U)$ состоит из всех функций на подмножестве U . Через l^n обозначим пучок n -форм над M , так что

$$l^n(U) = \Gamma(\Lambda^n(U)).$$

Пучки l^n , $n = 0, 1, \dots, 4$, являются пучками C^∞ -модулей над многообразием M . Рассмотрим локально свободный двумерный подпучок

$$I \subset l^2. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. (а) *Системой уравнений Монжа–Ампера*, заданной локально свободным двумерным пучком (1.1), называется система внешних дифференциальных уравнений

$$I = 0. \quad (1.2)$$

(б) Погружение

$$\sigma: V \rightarrow M$$

двумерного многообразия V называется *решением* системы уравнений Монжа–Ампера (1.2), если

$$\sigma^*\omega = 0$$

для всех $\omega \in I(U)$ и всякого открытого подмножества $U \subseteq M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Согласно сформулированному определению всякое уравнение Монжа–Ампера (1.2) задается четырехмерным многообразием M и двумерным локально свободным пучком Монжа–Ампера I . Другими словами, системы уравнений Монжа–Ампера находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (M, I) . Ниже в зависимости от контекста уравнениями Монжа–Ампера называются как системы внешних дифференциальных уравнений вида (1.2), так и отвечающие им пары (M, I) .

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4$ и систему Монжа–Ампера из двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a_0 + a_1p_x + a_2p_y + a_3q_x + a_4q_y + a_5(p_xq_y - p_yq_x) &= 0, \\ b_0 + b_1p_x + b_2p_y + b_3q_x + b_4q_y + b_5(p_xq_y - p_yq_x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

на нем (ср. с [2]). Здесь коэффициенты a_i , b_i при $i = 0, 1, \dots, 5$ зависят от x , y , p и q , где x и y – независимые переменные, а

$$p = p(x, y), \quad q = q(x, y)$$

– неизвестные функции. Будем считать, что все коэффициенты этого уравнения – функции, определенные во всем пространстве $\mathbb{R}^4$ параметров x, y, p и q . В частности, всякая система двух квазилинейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными является системой уравнений Монжа–Ампера, у которой $a_5 = b_5 = 0$. Зададим на $\mathbb{R}^4$ две дифференциальные 2-формы

$$\begin{aligned} w_1 &= a_0 dx \wedge dy + a_1 dp \wedge dy + a_2 dx \wedge dp + a_3 dq \wedge dy + a_4 dx \wedge dq + a_5 dp \wedge dq, \\ w_2 &= b_0 dx \wedge dy + b_1 dp \wedge dy + b_2 dx \wedge dp + b_3 dq \wedge dy + b_4 dx \wedge dq + b_5 dp \wedge dq, \end{aligned} \quad (1.4)$$

очевидным образом отвечающие левым частям системы (1.3). Предположим, что эти 2-формы линейно независимы в каждой точке m пространства $\mathbb{R}^5$, и для всякого открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^5$ положим

$$I(U) = (w_1|_U, w_2|_U). \quad (1.5)$$

Ясно, что $I(U)$ – свободный двумерный модуль над кольцом $C^\infty(U)$. Тем самым, выражение (1.5) однозначно сопоставляет системе уравнений (1.3) свободный двумерный пучок I , так что отвечающая этому пучку система внешних дифференциальных уравнений Монжа–Ампера (1.2) и уравнения

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0 \quad (1.6)$$

эквивалентны.

ПРИМЕР 1.4. Обратимся к обратной ситуации: рассмотрим некоторую систему уравнений Монжа–Ампера (1.2). Фиксируем произвольную точку $m \in M$. По определению двумерного локально свободного пучка найдется такая окрестность U точки m , что модуль $I(U)$ двумерен. Тем самым, существуют такие дифференциальные 2-формы $\omega_1, \omega_2 \in I(U)$, которые линейно независимы в каждой точке окрестности U . Сужая в случае необходимости окрестность U , без ограничения общности можно считать ее координатной. Другими словами, существует диффеоморфизм

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^4. \quad (1.7)$$

Положим

$$w_1 = (\varphi^{-1})^* \omega_1, \quad w_2 = (\varphi^{-1})^* \omega_2. \quad (1.8)$$

Построенные таким образом дифференциальные 2-формы w_1 и w_2 на открытом множестве $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^4$ линейно независимы и имеют вид (1.4), причем по построению (1.8) справедливо представление

$$I(U) = (\varphi^* w_1, \varphi^* w_2). \quad (1.9)$$

Представление (1.9) показывает, что в общем случае системы уравнений Монжа–Ампера (1.2) локально ситуация полностью исчерпывается уравнениями вида (1.6), (1.4). Более точно, нами доказана

ЛЕММА 1.5. Рассмотрим систему уравнений Монжа–Ампера (1.2) на многообразии M . Для любой точки $t \in M$ найдутся ее окрестность U , координатный диффеоморфизм (1.7) и дифференциальные 2-формы w_1 и w_2 вида (1.4) такие, что выполняется представление (1.9).

Непосредственная проверка показывает, что справедливо обратное утверждение, а именно

ЛЕММА 1.6. Пусть для четырехмерного многообразия M существует атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$ локальных систем координат

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^4$$

и соответствующее ему множество пар дифференциальных 2-форм

$$\begin{aligned} w_{\alpha,1} &= a_{\alpha,0} dx \wedge dy + a_{\alpha,1} dp \wedge dy + a_{\alpha,2} dx \wedge dp + a_{\alpha,3} dq \wedge dy \\ &\quad + a_{\alpha,4} dx \wedge dq + a_{\alpha,5} dp \wedge dq, \\ w_{\alpha,2} &= b_{\alpha,0} dx \wedge dy + b_{\alpha,1} dp \wedge dy + b_{\alpha,2} dx \wedge dp + b_{\alpha,3} dq \wedge dy \\ &\quad + b_{\alpha,4} dx \wedge dq + b_{\alpha,5} dp \wedge dq, \end{aligned}$$

линейно независимых во всех точках области $\varphi(U_\alpha)$. Положим для всякого открытого множества $U \subseteq M$ и индекса α

$$I_\alpha(U) = (\varphi_\alpha^* w_{\alpha,1}|_{U \cap U_\alpha}, \varphi_\alpha^* w_{\alpha,2}|_{U \cap U_\alpha}).$$

Предположим, что для всех $\alpha, \beta \in A$ выполнены условия согласования

$$I_\alpha(U_\beta) = I_\beta(U_\alpha).$$

Тогда пучок I , определяемый для всякого открытого $U \subseteq M$ выражением

$$I(U) = \{\omega \in l(U) : \omega|_{U \cap U_\alpha} \in I_\alpha(U), \alpha \in A\},$$

задает на многообразии M систему Монжа–Ампера (1.2).

По лемме 1.5 любую систему уравнений Монжа–Ампера (1.2) на многообразии M можно “разобрать” на “части”, каждая из которых представима системой уравнений вида (1.3) в пространстве $\mathbb{R}^4$. Обратно, согласно лемме 1.6 набор согласованных “частей”, представимых системами вида (1.3) в пространстве $\mathbb{R}^4$, можно “собрать” в соответствующую систему уравнений Монжа–Ампера (1.2) на многообразии M .

Всякой системе уравнений Монжа–Ампера (1.2) на многообразии M можно однозначно сопоставить двумерное подрасслоение

$$\Sigma(I) \subset \Lambda^2(M) \tag{1.10}$$

расслоения кососимметрических 2-форм многообразия M . В самом деле, по определению двумерного локально свободного пучка у всякой точки $t \in M$ найдутся окрестность U и такие независимые дифференциальные 2-формы $\omega_1, \omega_2 \in I(U)$, для которых справедливо представление

$$I(U) = (\omega_1, \omega_2). \tag{1.11}$$

Положим

$$\Sigma_m(I) = \{\omega \in \Lambda_m^2(M) : \omega = \lambda\omega_1(m) + \mu\omega_2(m), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \quad (1.12)$$

Это двумерное подпространство в $\Lambda_m^2(M)$ служит слоем подрасслоения (1.10). Ясно, что оно не зависит от выбора базисных форм ω_1 и ω_2 .

Обратно, если задано двумерное подрасслоение Σ расслоения $\Lambda^2(M)$ кососимметрических 2-форм четырехмерного многообразия M , то

$$I(\Sigma)(U) = \Gamma(\Sigma|_U) \quad (1.13)$$

– это локально свободный двумерный пучок $I(\Sigma)$ дифференциальных 2-форм. Тем самым, доказана

ЛЕММА 1.7. (а) Пусть на многообразии M задана система уравнений Монжа–Ампера (1.2). Тогда она однозначно определяет двумерное подрасслоение (1.10) расслоения кососимметрических 2-форм многообразия M .

(б) Обратно, пусть задано двумерное подрасслоение Σ расслоения $\Lambda^2(M)$ кососимметрических 2-форм четырехмерного многообразия M . Тогда это подрасслоение однозначно определяет локально свободный двумерный пучок дифференциальных 2-форм $I(\Sigma)$, т.е. систему уравнений Монжа–Ампера (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Из явных выражений (1.12) для $\Sigma(I)$ и (1.13) для $I(\Sigma)$ видно, что для всякого двумерного подрасслоения Σ расслоения $\Lambda^2(M)$ и всякой системы уравнений Монжа–Ампера (1.2)

$$I(\Sigma(I)) = I, \quad \Sigma(I(\Sigma)) = \Sigma. \quad (1.14)$$

Таким образом, системы уравнений Монжа–Ампера находятся не только во взаимно однозначном соответствии с парами (M, I) , как было установлено в замечании 1.2, но и с парами (M, Σ) .

§ 2. Эквивалентность систем уравнений Монжа–Ампера

Пусть наряду с системой уравнений Монжа–Ампера

$$Q = (M, I) \quad (2.1)$$

на многообразии M задана еще одна система уравнений Монжа–Ампера

$$\tilde{Q} = (\tilde{M}, \tilde{I}) \quad (2.2)$$

на многообразии $\tilde{M}$. Эти системы называются *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм

$$f: \tilde{M} \rightarrow M, \quad (2.3)$$

для которого выполнено равенство

$$f^*(I) = \tilde{I}, \quad (2.4)$$

т.е. для всякого открытого множества $U \subseteq \tilde{M}$

$$f^*(I(f(U))) = \tilde{I}(U). \quad (2.5)$$

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим эквивалентные системы уравнений Монжа–Ампера (2.1) и (2.2). Согласно лемме 1.5 для любой точки $\tilde{m} \in \tilde{M}$ найдутся такие окрестность $\tilde{U}$ этой точки и координатный диффеоморфизм

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^4,$$

что

$$\tilde{I}(\tilde{U}) = (\tilde{\varphi}^* \tilde{\omega}_1, \tilde{\varphi}^* \tilde{\omega}_2),$$

где $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ – дифференциальные 2-формы вида

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \tilde{a}_0 dx \wedge dy + \tilde{a}_1 dp \wedge dy + \tilde{a}_2 dx \wedge dp + \tilde{a}_3 dq \wedge dy + \tilde{a}_4 dx \wedge dq + \tilde{a}_5 dp \wedge dq, \\ \tilde{\omega}_2 &= \tilde{b}_0 dx \wedge dy + \tilde{b}_1 dp \wedge dy + \tilde{b}_2 dx \wedge dp + \tilde{b}_3 dq \wedge dy + \tilde{b}_4 dx \wedge dq + \tilde{b}_5 dp \wedge dq \end{aligned}$$

на пространстве $\mathbb{R}^4$. Аналогичным образом, для точки

$$m = f(\tilde{m}) \in M$$

найдутся такие окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.7), что выполняется представление (1.9). При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $U = \tilde{f}(U)$. По определению эквивалентности имеют место равенства (2.5). Тем самым, для прообразов $f^* \omega_1$ и $f^* \omega_2$ дифференциальных 2-форм

$$\omega_1 = \varphi^* w_1, \quad \omega_2 = \varphi^* w_2$$

относительно диффеоморфизма (2.3) справедливо равенство

$$f^*(\omega_1, \omega_2) = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2),$$

где

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\varphi}^* \tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\omega}_2 = \tilde{\varphi}^* \tilde{\omega}_2.$$

Другими словами, имеют место соотношения

$$f^* \omega_1 = b_1 \tilde{\omega}_1 + b_2 \tilde{\omega}_2, \quad f^* \omega_2 = c_1 \tilde{\omega}_1 + c_2 \tilde{\omega}_2, \quad (2.6)$$

где b_1 , b_2 , c_1 и c_2 – некоторые определенные в области $\tilde{U}$ функции.

Заметим, что если рассмотреть композицию диффеоморфизмов

$$f_{\tilde{U}} = \varphi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \rightarrow \varphi(U),$$

то равенства (2.6) можно записать в эквивалентном виде

$$f_{\tilde{U}}^* w_1 = \tilde{b}_1 \tilde{w}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{w}_2, \quad f_{\tilde{U}}^* w_2 = \tilde{c}_1 \tilde{w}_1 + \tilde{c}_2 \tilde{w}_2,$$

где $\tilde{b}_k = (\tilde{\varphi}^{-1})^* b_k$ и $\tilde{c}_k = (\tilde{\varphi}^{-1})^* c_k$ для $k = 1, 2$.

Пусть $\Sigma(I)$ и $\Sigma(\tilde{I})$ – двумерные подрасслоения расслоений кососимметричных 2-форм $\Lambda^2(M)$ и $\Lambda^2(\tilde{M})$ соответственно, однозначно определенные согласно лемме 1.7, (а) для систем уравнений (2.1) и (2.2). Имеет место следующий критерий эквивалентности этих систем.

ЛЕММА 2.2. Диффеоморфизм (2.3) тогда и только тогда является эквивалентностью систем уравнений Монжа–Ампера (2.1) и (2.2), когда

$$f^*(\Sigma(I)) = \Sigma(\tilde{I}).$$

Доказательство вытекает из явного выражения (1.12) для слоев $\Sigma_{f(\tilde{m})}(I)$ и $\Sigma_{\tilde{m}}(\tilde{I})$ подрасслоений $\Sigma(I)$ и $\Sigma(\tilde{I})$ над точками $f(\tilde{m})$ и $\tilde{m}$.

§ 3. Категория систем уравнений Монжа–Ампера

Построим категорию систем уравнений Монжа–Ампера MAs (Monge–Ampere systems). Согласно замечанию 1.2 в качестве объектов $\text{Ob}(\text{MAs})$ этой категории естественно выбрать пары (2.1). Для двух произвольных систем уравнений Монжа–Ампера (2.1) и (2.2) множество морфизмов категории MAs

$$\text{Hom}_{\text{MAs}}(\tilde{Q}, Q) \quad (3.1)$$

состоит из всех эквивалентностей этих систем уравнений, т.е. из всех диффеоморфизмов (2.3), для которых выполнены условия (2.5). Попросту говоря, объекты категории MAs – это системы уравнений Монжа–Ампера, а ее морфизмы – это замены независимых и зависимых переменных, переводящие одну систему уравнений в другую.

Наряду с категорией MAs рассмотрим категорию MAб (Monge–Ampère bundles) двумерных подрасслоений

$$\Sigma \subset \Lambda^2(M). \quad (3.2)$$

Ее объектами служат пары (M, Σ) , состоящие из четырехмерных многообразий M и двумерных подрасслоений (3.2). Для любых двух объектов

$$\tilde{S} = (\tilde{M}, \tilde{\Sigma}), \quad S = (M, \Sigma) \quad (3.3)$$

категории MAб множество морфизмов

$$\text{Hom}_{\text{MAб}}(\tilde{S}, S) \quad (3.4)$$

состоит из всевозможных диффеоморфизмов (2.3), переводящих подрасслоения $\tilde{\Sigma}$ и Σ друг в друга:

$$f_*(\tilde{\Sigma}) = \Sigma.$$

Заметим, что подрасслоения (3.2) и пары вида (3.3) уже обсуждались выше, например в замечании 1.8. Введенные в данном параграфе понятия позволяют уточнить содержание этого замечания. Чтобы сделать это, рассмотрим два ковариантных функтора:

$$\Sigma: \text{MAs} \rightarrow \text{MAб}, \quad I: \text{MAб} \rightarrow \text{MAs}. \quad (3.5)$$

Их действие на объектах $\text{Ob}(\text{MAs})$ и $\text{Ob}(\text{MAб})$ было определено выражениями (1.12) и (1.13), а на морфизмах f из множеств (3.1) и (3.4) они действуют

тождественно:

$$\begin{aligned}\Sigma(\tilde{Q}, Q): \operatorname{Hom}_{\operatorname{MA}s}(\tilde{Q}, Q) \ni f &\mapsto f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{MAb}}(\Sigma(\tilde{Q}), \Sigma(Q)), \\ I(\tilde{S}, S): \operatorname{Hom}_{\operatorname{MAb}}(\tilde{S}, S) \ni f &\mapsto f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{MA}s}(I(\tilde{S}), I(S)).\end{aligned}$$

Таким образом, равенства (1.14) из замечания 1.8 можно переписать в следующем равносильном виде:

$$I \circ \Sigma = \operatorname{Id}_{\operatorname{MA}s}, \quad \Sigma \circ I = \operatorname{Id}_{\operatorname{MAb}}.$$

Сформулируем полученный результат, используя терминологию, принятую в теории категорий и функторов (см. [3; гл. 1, § 6]).

ЛЕММА 3.1. *Функторы Σ и I осуществляют изоморфизм категорий $\operatorname{MA}s$ и MAb . Тем самым, эти категории изоморфны.*

На категорном языке задачу об эквивалентности систем уравнений Монжа–Ампера (2.1) и (2.2) можно переформулировать следующим образом: при каких условиях на данные уравнения множество морфизмов (3.1) непусто? По лемме 2.2 эта проблема равносильна задаче об изоморфности отвечающих этим уравнениям подрасслоений $\Sigma(Q)$ и $\Sigma(\tilde{Q})$.

§ 4. Типы систем уравнений Монжа–Ампера

Рассмотрим систему Монжа–Ампера (2.1). По леммам 1.7 и 3.1 эта система полностью определяется соответствующим ей двумерным подрасслоением

$$\Sigma(I) \subset \Lambda^2(M) \tag{4.1}$$

шестимерного расслоения кососимметричных 2-форм. Фиксируем точку $m \in M$ и слой $\Sigma_m(I)$ подрасслоения (4.1) над ней. Этот слой может как содержать отличные от нуля вырожденные 2-формы, так и не содержать таковых. Логически рассматриваемая ситуация исчерпывается следующими четырьмя исходами (см. [4], [5]). Слой $\Sigma_m(I)$:

- вообще не содержит отличных от нуля вырожденных форм;
- содержит единственное одномерное подпространство, состоящее из вырожденных форм;
- содержит ровно два различных одномерных подпространства, состоящих из вырожденных форм;
- содержит более двух различных одномерных подпространств, состоящих из вырожденных форм.

В первом случае говорят, что система уравнений Монжа–Ампера (2.1) имеет в точке m *эллиптический*, во втором – *параболический*, в третьем – *гиперболический* и в четвертом – *вырожденный тип*. Эта система называется эллиптической, параболической, гиперболической или вырожденной, если она имеет соответствующий тип во всех точках m многообразия M . Эквивалентные системы Монжа–Монжа имеют одинаковый тип. Более точно, справедлива

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что заданы две эквивалентные системы Монжа–Ампера (2.1) и (2.2), и пусть диффеоморфизм f осуществляет их эквивалентность. Тогда для любой точки $\tilde{m}$ многообразия $\tilde{M}$ система (2.1) в точке $f(\tilde{m})$ имеет тот же тип, что и система (2.2) в точке $\tilde{m}$.*

Доказательство вытекает из сформулированного определения типа, леммы 2.2 и того очевидного факта, что ранг кососимметрической формы сохраняется под действием диффеоморфизма.

Для вычисления типа системы (2.1) воспользуемся определением 1.1. Поскольку в силу этого определения пучок I локально свободен и двумерен, то найдутся такая окрестность U точки m и дифференциальные 2-формы $\omega_1, \omega_2 \in I(U)$, для которых выполняется представление (1.11). Согласно (1.12) всевозможные линейные комбинации

$$\omega = \lambda\omega_1(m) + \mu\omega_2(m) \quad (4.2)$$

этих форм при $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ образуют двумерное подпространство $\Sigma_m(I)$. Кососимметрическая 2-форма (4.2) вырождена тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение

$$(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) \wedge (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda^2\omega_1 \wedge \omega_1 + 2\lambda\mu\omega_1 \wedge \omega_2 + \mu^2\omega_2 \wedge \omega_2 = 0 \quad (4.3)$$

имеет решение $(\lambda : \mu)$, принадлежащее проективной прямой RP^1 .

ПРИМЕР 4.2. В случае системы (1.3) или, что то же самое, (1.6) формы $\omega_1 = w_1$ и $\omega_2 = w_2$ заданы равенствами (1.4). Поскольку

$$\begin{aligned} (\lambda w_1 + \mu w_2) \wedge (\lambda w_1 + \mu w_2) &= \lambda^2 w_1 \wedge w_1 + 2\lambda\mu w_1 \wedge w_2 + \mu^2 w_2 \wedge w_2 \\ &= 2(\gamma_0\lambda^2 + \gamma_1\lambda\mu + \gamma_2\mu^2)dx \wedge dy \wedge dp \wedge dq, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= a_0a_5 - a_1a_4 + a_2a_3, \\ \gamma_1 &= a_0b_5 - a_1b_4 + a_2b_3 + b_0a_5 - b_1a_4 + b_2a_3, \\ \gamma_2 &= b_0b_5 - b_1b_4 + b_2b_3, \end{aligned}$$

то характеристическое уравнение (4.3) сводится к соотношению

$$\gamma_0\lambda^2 + \gamma_1\lambda\mu + \gamma_2\mu^2 = 0. \quad (4.4)$$

Тем самым, система (1.3) эллиптическая, если дискриминант

$$\Delta = \gamma_1^2 - 4\gamma_0\gamma_2 \quad (4.5)$$

этого уравнения отрицателен, параболична, если он равен нулю, и гиперболична, если он положителен. Для того чтобы система (1.6) была вырождена, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \quad (4.6)$$

Заметим, что поскольку характеристическое уравнение (4.3) носит локальный характер, то в силу леммы 1.5 ситуация, рассмотренная в данном примере, по существу полностью охватывает общий случай.

ПРИМЕР 4.3. Частный случай системы уравнений (1.3) – это система в полных дифференциалах

$$p_x + a = 0, \quad p_y + b = 0. \quad (4.7)$$

Она вырождена, ибо для нее выполнены условия (4.6). Интересно, что локально всякая вырожденная система Монжа–Ампера (2.1) эквивалентна системе вида (4.7) (см. теорему 7.9).

§ 5. Характеристические векторы и ковекторы

Рассмотрим эллиптическую систему уравнений Монжа–Ампера (2.1). По определению соответствующее этой системе расслоение (4.1) не содержит отличных от нуля вырожденных 2-форм. Это равносильно отсутствию на проективной прямой вещественных корней у характеристического уравнения (4.3). Однако поскольку оно является алгебраическим уравнением второго порядка, то у него имеются два комплексно-сопряженных корня.

ПРИМЕР 5.1 (продолжение примера 4.2). Положим для $j = 1, 2$

$$\delta_j = (-1)^{3-j} \sqrt{|\Delta|},$$

когда дискриминант (4.5) неотрицателен (система неэллиптика), и

$$\delta_j = (-1)^{3-j} i \sqrt{|\Delta|},$$

где i – мнимая единица, когда отрицателен (система эллиптика). Тогда для $j = 1, 2$ корни характеристического многочлена (4.4) в случае $\gamma_2 \neq 0$ находятся по формуле

$$(\lambda_j : \mu_j) = (2\gamma_2 : -\gamma_1 + \delta_j), \quad (5.1)$$

в случае $\gamma_0 \neq 0$ находятся по формуле

$$(\lambda_j : \mu_j) = (-\gamma_1 + \delta_j : 2\gamma_0) \quad (5.2)$$

и в случае $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0, \gamma_0 = 0$ находятся по формулам

$$(\lambda_1 : \mu_1) = (1 : 0), \quad (\lambda_2 : \mu_2) = (0 : 1). \quad (5.3)$$

В неэллиптическом случае эти корни вещественные, а в эллиптическом – комплексно-сопряженные:

$$(\bar{\lambda}_j : \bar{\mu}_j) = (\lambda_{3-j} : \mu_{3-j}).$$

Для того чтобы принять во внимание как вещественные, так и комплексные корни характеристического уравнения, введем в рассмотрение комплексификацию

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^2 M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^2 M$$

расслоения кососимметрических форм $\Lambda^2 M$ и комплексификацию

$$T^{\mathbb{C}} M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TM$$

касательного расслоения TM .

По лемме 1.7 (см. также лемму 3.1) всякая система уравнений Монжа–Ампера (2.1) однозначно определяет и однозначно определяется отвечающим ей подрасслоением (4.1), комплексификация которого является двумерным подрасслоением $\Lambda_{\mathbb{C}}^2(M)$:

$$\Sigma^{\mathbb{C}}(I) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Sigma(I) \subset \Lambda_{\mathbb{C}}^2(M). \quad (5.4)$$

Комплексный вектор $\xi \in T_m^{\mathbb{C}}M$ называется *характеристическим вектором* системы (2.1) в точке $m \in M$, если найдется такая отличная от нуля 2-форма $\omega \in \Sigma_m^{\mathbb{C}}(I)$, для которой

$$\xi \lrcorner \omega = 0.$$

Положим

$$H = \bigcup_{m \in M} H(m), \quad (5.5)$$

где

$$H(m) = \{\xi \in T_m^{\mathbb{C}}M \mid \exists \omega \in \Sigma_m^{\mathbb{C}}(I) : \omega \neq 0, \xi \lrcorner \omega = 0\} \quad (5.6)$$

– это множество всех характеристических векторов в точке m .

Двойственным образом определяются характеристические ковекторы. Рассмотрим комплексификацию кокасательного расслоения многообразия M :

$$(T^*)^{\mathbb{C}}M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*M.$$

Комплексный ковектор $\alpha \in (T_m^*)^{\mathbb{C}}M$ называется *характеристическим ковектором* системы (2.1) в точке $m \in M$, если найдется такая отличная от нуля 2-форма $\omega \in \Sigma_m^{\mathbb{C}}(I)$, для которой

$$\alpha \wedge \omega = 0.$$

Положим

$$H^* = \bigcup_{m \in M} H^*(m), \quad (5.7)$$

где

$$H^*(m) = \{\alpha \in (T_m^*)^{\mathbb{C}}M \mid \exists \omega \in \Sigma_m^{\mathbb{C}}(I) : \omega \neq 0, \alpha \wedge \omega = 0\} \quad (5.8)$$

– это множество всех характеристических ковекторов в точке m .

ПРИМЕР 5.2 (продолжение примера 5.1). Выясним, как устроено множество характеристических векторов (5.6) для невырожденной системы (1.3) в пространстве $\mathbb{R}^4$. Согласно примеру 5.1 корни характеристического уравнения (4.4) вычисляются либо по формуле (5.1), либо (5.2), либо (5.3), где Δ определено выражением (4.5). Поэтому одномерные подпространства комплексного подпространства (5.4), состоящие из вырожденных форм, порождаются дифференциальными 2-формами

$$\begin{aligned} \Omega_j = & (\mu_j a_0 + \lambda_j b_0) dx \wedge dy + (\mu_j a_1 + \lambda_j b_1) dp \wedge dy + (\mu_j a_2 + \lambda_j b_2) dx \wedge dp \\ & + (\mu_j a_3 + \lambda_j b_3) dq \wedge dy + (\mu_j a_4 + \lambda_j b_4) dx \wedge dq + (\mu_j a_5 + \lambda_j b_5) dp \wedge dq, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2$. Поскольку 2-формы (1.4) линейно независимы, то 2-формы Ω_j отличны от нуля. А поскольку эти формы кососимметричны и вырождены,

то их ранг в точности равен 2. Прямая проверка показывает, что комплексное векторное подпространство H_j , аннулирующее форму Ω_j , порождается векторными полями

$$\begin{aligned} e_{j1} &= (\mu_j a_5 + \lambda_j b_5) \frac{\partial}{\partial y} + (\mu_j a_3 + \lambda_j b_3) \frac{\partial}{\partial p} - (\mu_j a_1 + \lambda_j b_1) \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j2} &= (\mu_j a_1 + \lambda_j b_1) \frac{\partial}{\partial x} + (\mu_j a_2 + \lambda_j b_2) \frac{\partial}{\partial y} - (\mu_j a_0 + \lambda_j b_0) \frac{\partial}{\partial p}, \\ e_{j3} &= (\mu_j a_5 + \lambda_j b_5) \frac{\partial}{\partial x} - (\mu_j a_4 + \lambda_j b_4) \frac{\partial}{\partial p} + (\mu_j a_2 + \lambda_j b_2) \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j4} &= (\mu_j a_3 + \lambda_j b_3) \frac{\partial}{\partial x} + (\mu_j a_4 + \lambda_j b_4) \frac{\partial}{\partial y} - (\mu_j a_0 + \lambda_j b_0) \frac{\partial}{\partial q}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке пространства $\mathbb{R}^4$. Действительно, если отличен от нуля коэффициент $\mu_j a_0 + \lambda_j b_0$, то линейно независимы векторы e_{j2} и e_{j4} , если отличен от нуля коэффициент $\mu_j a_1 + \lambda_j b_1$, то линейно независимы векторы e_{j1} и e_{j2} , если отличен от нуля коэффициент $\mu_j a_2 + \lambda_j b_2$, то линейно независимы векторы e_{j2} и e_{j3} , если отличен от нуля коэффициент $\mu_j a_4 + \lambda_j b_4$, то линейно независимы векторы e_{j3} и e_{j4} , а если отличен от нуля коэффициент $\mu_j a_5 + \lambda_j b_5$, то линейно независимы векторы e_{j1} и e_{j3} . При этом во всякой точке $m \in \mathbb{R}^4$ множество характеристических векторов (5.6) является объединением двумерных подпространств $H_1(m)$ и $H_2(m)$, порожденных векторами (5.9). Аналогично обстоит дело с линейными дифференциальными формами, аннулирующими 2-форму Ω_j при внешнем умножении и порождающими пространство H_j^* .

Согласно леммам 1.5 и 1.6 всякая система Монжа–Ампера (2.1) локально представима в виде (1.3). Поэтому из примера 5.2 ясно, что если система (2.1) параболична в точке m , то $\mu_1 = \mu_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$ и

$$H_1(m) = H_2(m), \quad H_1^*(m) = H_2^*(m). \quad (5.10)$$

Если же эта система гиперболична либо эллиптична, то $\mu_1 \neq \mu_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и

$$H_1(m) \cap H_2(m) = 0, \quad H_1^*(m) \cap H_2^*(m) = 0, \quad (5.11)$$

причем в гиперболическом и параболическом случаях

$$\overline{H}_j(m) = H_j(m), \quad \overline{H}_j^*(m) = H_j^*(m), \quad (5.12)$$

а в эллиптическом

$$\overline{H}_{3-j}(m) = H_j(m), \quad \overline{H}_{3-j}^*(m) = H_j^*(m) \quad (5.13)$$

для $j = 1, 2$. При этом для всех трех типов

$$H(m) = H_1(m) \cup H_2(m), \quad H^*(m) = H_1^*(m) \cup H_2^*(m). \quad (5.14)$$

Более точно, имеет место

ЛЕММА 5.3. Пусть система уравнений Монжа–Ампера (2.1) либо эллиптическая, либо параболическая, либо гиперболическая на всем многообразии M . Тогда для любой точки $m_0 \in M$ найдутся ее окрестность U и двумерные комплексные подрасслоения

$$H_j \subseteq T^{\mathbb{C}}U, \quad H_j^* \subseteq (T^*)^{\mathbb{C}}U$$

при $j = 1, 2$, обладающие следующими свойствами.

(а) Расслоения $H_1, H_2, T^{\mathbb{C}}U, H_1^*, H_2^*$ и $(T^*)^{\mathbb{C}}U$ тривиальны, а множества (5.6) и (5.8) характеристических векторов и ковекторов системы (2.1) в точке $m \in U$ представимы в виде (5.14). При этом

$$\xi \lrcorner \alpha = 0$$

для всех $\xi \in H_{3-j}(m), \alpha \in H_j^*(m), m \in M$ и $j = 1, 2$.

(б) Если система (2.1) параболическая, то выполнены равенства (5.10) и (5.12), если эллиптическая, то равенства (5.11) и (5.13), а если гиперболическая, то равенства (5.11) и (5.12).

(с) Если система (2.1) эллиптическая либо гиперболическая, то

$$I(U) = \left\{ \omega \in \Gamma(\Lambda_{\mathbb{C}}^2(U)) : \omega = c\alpha_1 \wedge \beta_1 + r\alpha_2 \wedge \beta_2; \right. \\ \left. \alpha_j, \beta_j \in \Gamma(H_j^*|_U); \quad c, r \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{\infty}(U) \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к системе (2.1) лемму 1.5: для всякой точки $m_0 \in M$ найдутся ее окрестность U , координатный диффеоморфизм (1.7) и дифференциальные 2-формы w_1 и w_2 вида (1.4) такие, что выполняется представление (1.9). По лемме 4.1 тип системы (1.6), отвечающей формам (1.4), совпадает на $\varphi(U)$ с типом исходной системы (2.1). При $j = 1, 2$ корни (λ_j, μ_j) соответствующего характеристического уравнения (4.4) можно вычислить по формулам из примера 5.1. Они являются гладкими функциями, подставив которые в выражение

$$\omega_j = \varphi^* \lambda_j \varphi^* w_1 + \varphi^* \mu_j \varphi^* w_2,$$

получим две независимые гладкие дифференциальные 2-формы, вырожденные по построению. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что на U существуют такие линейные дифференциальные формы $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 , что

$$\omega_j = \alpha_j \wedge \beta_j.$$

В эллиптическом случае корни характеристического уравнения различные и комплексно-сопряженные, поэтому формы $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 независимы и

$$\bar{\alpha}_{3-j} = \alpha_j, \quad \bar{\beta}_{3-j} = \beta_j.$$

В параболическом случае корни вещественные и совпадают, поэтому

$$\alpha_{3-j} = \alpha_j, \quad \beta_{3-j} = \beta_j, \quad \bar{\alpha}_j = \alpha_j, \quad \bar{\beta}_j = \beta_j.$$

В гиперболическом случае корни вещественные и различные, поэтому формы $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 также независимы и

$$\bar{\alpha}_j = \alpha_j, \quad \bar{\beta}_j = \beta_j.$$

Положим для всякой точки $m \in U$ и $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} H_j^*(m) &= \{\gamma \in (T_m^*)^{\mathbb{C}}U : \gamma = c\alpha_j(m) + r\beta_j(m); \ c, r \in \mathbb{C}\}. \\ H_j(m) &= \{\xi \in T_m^{\mathbb{C}}U : \xi \lrcorner \alpha_{3-j} = \xi \lrcorner \beta_{3-j} = 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, построены гладкие тривиальные двумерные подрасслоения комплексных расслоений $T^{\mathbb{C}}U$ и $(T^*)^{\mathbb{C}}U$. Причем установленные свойства линейных дифференциальных форм $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 позволяют на основании определений (5.6) и (5.8) сделать вывод о справедливости свойств (а), (b) и (с).

Лемма 5.3 доказана.

Из леммы 5.3 вытекают два следующих следствия.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. (а) Пусть система (2.1) либо эллиптична, либо гиперболична на всем многообразии M . Тогда объединения (5.2) и (5.7) являются локально тривиальными расслоениями над M , типичным слоем которых служит букет $\mathbb{C}^2 \vee \mathbb{C}^2$ комплексных плоскостей с отмеченными нулями. При этом для каждой точки $m \in M$ линейные оболочки слоев $H(m)$ и $H^*(m)$ совпадают с комплексификациями $T_m^{\mathbb{C}}M$ и $(T_m^*)^{\mathbb{C}}M$ слоев касательного и кокасательного расслоений многообразия M .

(b) Пусть система (2.1) параболична. Тогда объединения (5.2) и (5.7) являются локально тривиальными расслоениями над M , типичным слоем которых служит комплексная плоскость $\mathbb{C}^2$.

(с) И в случае (а), и в случае (b) слои $H(m)$ и $H^*(m)$ расслоений (5.2) и (5.7) замкнуты относительно комплексного сопряжения.

Таким образом, в случае эллиптических, параболических и эллиптических систем уравнений Монжа–Ампера множества характеристических векторов (5.2) и ковекторов (5.7) – это расслоения, которые называются *характеристическими расслоениями* системы Монжа–Ампера (2.1).

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Рассмотрим две системы уравнений Монжа–Ампера (2.1) и (2.2) и отвечающие этим уравнениям характеристические расслоения $H, \tilde{H}$ и $H^*, \tilde{H}^*$. Предположим, что система (2.2) либо гиперболична, либо эллиптична на многообразии M .

(а) Если $\tilde{M} = M$, то три следующих равенства равносильны:

$$Q = \tilde{Q}, \quad \tilde{H} = H, \quad \tilde{H}^* = H^*.$$

(b) Пусть (2.3) – некоторый диффеоморфизм; тогда три следующих равенства равносильны:

$$(2.4), \quad f_*(\tilde{H}) = H, \quad f^*(H^*) = \tilde{H}^*.$$

Следуя работе Т. Моримото [6], введем производные множества характеристических векторов. Рассмотрим произвольное многообразие U и некоторое подрасслоение W его комплексного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}U$. Производные подрасслоения $W^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, определяются по индукции следующим образом. Нулевая производная совпадает с исходным подрасслоением: $W^{(0)} = W$. Предположим, что для $k \geq 0$ определена производная $W^{(k)}$. Тогда слой $W^{(k+1)}(m)$ производной $W^{(k+1)}$ над точкой $m \in U$ является векторным подпространством в $T_m^{\mathbb{C}}U$, порожденным векторами $X(m)$ и $[Y, Z](m)$, где X, Y – произвольные локальные сечения $W^{(k)}$, а Z – произвольное локальное сечение W . В случае, когда многообразие U четырехмерно, а подрасслоение W двумерно, ситуация в каждой точке m исчерпывается тремя возможностями:

- (0) $W^{(1)}(m) = W(m)$;
- (1) $W(m) \subsetneq W^{(1)}(m) = W^{(2)}(m)$, $\dim_{\mathbb{C}} W^{(1)}(m) = 3$;
- (2) $W(m) \subsetneq W^{(1)}(m) \subsetneq W^{(2)}(m) = T_m^{\mathbb{C}}U$.

До конца данного параграфа будем предполагать, что все встречающиеся системы Монжа–Ампера либо эллиптически, либо параболически, либо гиперболически. Рассмотрим систему уравнений Монжа–Ампера (2.1) и выберем для фиксированной точки $m \in M$ окрестность U и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}U$ согласно лемме 5.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6. (а) Для целого неотрицательного числа l производной l -го порядка от характеристического расслоения H называется подмножество комплексных касательных векторов

$$H^{(l)} = \bigcup_{m \in M} H^{(l)}(m),$$

где

$$H^{(l)}(m) = H_1^{(l)}(m) \cup H_2^{(l)}(m).$$

(б) Система уравнений (2.1) принадлежит классу $H_{k,l}$, $k, l = 0, 1, 2$, $k \geq l$, в точке m , если для одного из подрасслоений H_1 и H_2 имеет место случай (к), а для другого – случай (л). Система уравнений Монжа–Ампера (2.1) принадлежит классу $H_{k,l}$ на многообразии M , если она принадлежит этому классу во всех точках многообразия M .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. (а) Очевидно, что определения (а) и (б) инвариантны относительно выбора окрестности U и подрасслоений H_1 и H_2 .

(б) Производная $H^{(l)}$, вообще говоря, не обязательно является расслоением. Действительно, слой $H^{(l)}(m)$ – это объединение векторных пространств $H_1^{(l)}(m)$ и $H_2^{(l)}(m)$, размерности которых в общем случае зависят от выбора точки m .

(с) Для гиперболических систем уравнений Монжа–Ампера при $0 \leq l < k \leq 2$ класс $H_{k,l}$ непуст, а для параболических и эллиптических систем пуст в силу равенства (5.10).

ПРИМЕР 5.8. В качестве примера вычислим первые производные характеристического расслоения для полулинейной гиперболической системы

$$\begin{aligned} a(x, y, p, q) + p_x &= 0, \\ b(x, y, p, q) + q_y &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

и полулинейной эллиптической системы

$$\begin{aligned} a(x, y, p, q) + p_y - q_x &= 0, \\ b(x, y, p, q) + p_x + q_y &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Начнем с гиперболической системы (5.15). Отвечающая ей система внешних дифференциальных уравнений имеет вид

$$(a dx + dp) \wedge dy = 0, \quad dx \wedge (b dy + dq) = 0.$$

Поэтому непосредственно из определения (5.6) вытекает, что характеристические расслоения H_1 и H_2 порождаются векторными полями

$$e_{11} = \frac{\partial}{\partial q}, \quad e_{12} = \frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial p} \quad (5.17)$$

и

$$e_{21} = \frac{\partial}{\partial p}, \quad e_{22} = \frac{\partial}{\partial y} - b \frac{\partial}{\partial q} \quad (5.18)$$

соответственно. Следовательно, первая производная $H_1^{(1)}$ порождается векторными полями (5.17) и их скобкой Ли

$$[e_{11}, e_{12}] = -a_q \frac{\partial}{\partial p},$$

а первая производная $H_2^{(1)}$ – векторными полями (5.18) и скобкой Ли

$$[e_{21}, e_{22}] = -b_p \frac{\partial}{\partial q}.$$

Для эллиптической системы (5.16) согласно примерам 4.2 и 5.1

$$\begin{aligned} a_0 &= a, & a_1 &= 0, & a_2 &= 1, & a_3 &= -1, & a_4 &= a_5 = 0, \\ b_0 &= b, & b_1 &= 1, & b_2 &= b_3 = 0, & b_4 &= 1, & b_5 &= 0, \\ \gamma_0 &= -1, & \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= -1, \\ \mu_j &= 1, & \lambda_j &= i(-1)^{3-j}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу выражений (5.9) характеристические расслоения H_j при $j = 1, 2$ порождаются векторными полями

$$e_{j1} = \lambda_j \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}, \quad e_{j2} = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial y} - (b + \lambda_j a) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (5.19)$$

Следовательно, первая производная $H_j^{(1)}$ порождается векторными полями (5.19) и их скобкой Ли

$$[e_{j1}, e_{j2}] = -e_{j1}(b + \lambda_j a) \frac{\partial}{\partial p} = (a_p - b_p - \lambda_j(b_p + a_q)) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Для последующего изложения будет важно, что классы $H_{k,l}$ инвариантны относительно эквивалентностей систем уравнений Монжа–Ампера. Более точно, имеют место два следующих утверждения.

ЛЕММА 5.9. Рассмотрим системы (2.1) и (2.2) на многообразиях M и $\widetilde{M}$ соответственно и некоторый диффеоморфизм (2.3), удовлетворяющий равенству (2.4). Выберем для уравнения (2.2) открытое подмножество $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ и расслоения $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$ над ним согласно лемме 5.3. Тогда множество $U = f(\widetilde{U})$ и расслоения

$$H_1 = f_*(\widetilde{H}_1), \quad H_2 = f_*(\widetilde{H}_2)$$

удовлетворяют лемме 5.3 для системы (2.1). Кроме того,

$$f_*(\widetilde{H}_1^{(l)}(m) \cap \widetilde{H}_2^{(r)}(m)) = H_1^{(l)}(f(m)) \cap H_2^{(r)}(f(m))$$

для всех $m \in \widetilde{U}$ и целых неотрицательных l и r .

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 из [7] и леммы 6.2, (а) из [8].

СЛЕДСТВИЕ 5.10. Пусть выполнены все условия леммы 5.9. Тогда

$$f_*(\widetilde{H}_1^{(l)}(m) \cup \widetilde{H}_2^{(r)}(m)) = H_1^{(l)}(f(m)) \cup H_2^{(r)}(f(m))$$

для всех $m \in \widetilde{U}$ и целых неотрицательных l и r . В частности,

$$f_*(\widetilde{H}^{(l)}(m)) = H^{(l)}(f(m)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. Условия принадлежности невырожденной системы Монжа–Ампера (2.1) классу $H_{k,l}$ в фиксированной точке $m \in M$ являются эффективно проверяемыми. В самом деле, по леммам 1.5 и 1.6 в локальных координатах всякая система Монжа–Ампера сводится к системе (1.3) на пространстве $\mathbb{R}^4$. Согласно примеру 5.2 двумерные пространства H_j характеристических векторов системы (1.3) порождаются векторными полями (5.9), среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке пространства $\mathbb{R}^4$. Пусть для определенности в точке m это будут векторные поля e_{j1} и e_{j2} .

(а) Для принадлежности рассматриваемой системы классу $H_{0,0}$ в точке m необходимо и достаточно, чтобы для $j = 1, 2$

$$e_{j1} \wedge e_{j2} \wedge [e_{j1}, e_{j2}] = 0. \quad (5.20)$$

(б) Для принадлежности системы классу $H_{1,0}$ в точке m необходимо и достаточно, чтобы для $j = j_0$, где j_0 равно либо 1, либо 2, выполнялось условие (5.20), а для $j = 3 - j_0$ – условие

$$\begin{aligned} e_{j1} \wedge e_{j2} \wedge [e_{j1}, e_{j2}] &\neq 0, \\ e_{j1} \wedge e_{j2} \wedge [e_{j1}, e_{j2}] \wedge [e_{j1}, [e_{j1}, e_{j2}]] &= 0, \\ e_{j1} \wedge e_{j2} \wedge [e_{j1}, e_{j2}] \wedge [e_{j2}, [e_{j1}, e_{j2}]] &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

(с) Для принадлежности системы классу $H_{1,1}$ в точке m необходимо и достаточно, чтобы условие (5.21) выполнялось для $j = 1, 2$.

(d) Для принадлежности системы классу $H_{2,0}$ в точке m необходимо и достаточно, чтобы для $j = j_0$, где j_0 равно либо 1, либо 2, выполнялось условие (5.20), а для $j = 3 - j_0$ — хотя бы одно из двух условий

$$\begin{aligned} e_{j1} \wedge e_{j2} \wedge [e_{j1}, e_{j2}] \wedge [e_{j1}, [e_{j1}, e_{j2}]] &\neq 0, \\ e_{j1} \wedge e_{j2} \wedge [e_{j1}, e_{j2}] \wedge [e_{j2}, [e_{j1}, e_{j2}]] &\neq 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

(e) Для принадлежности системы классу $H_{2,1}$ в точке m необходимо и достаточно, чтобы для $j = j_0$, где j_0 равно либо 1, либо 2, выполнялось условие (5.21), а для $j = 3 - j_0$ — хотя бы одно из двух условий (5.22).

(g) Для принадлежности системы классу $H_{2,2}$ в точке m необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно из двух условий (5.22) выполнялось для $j = 1$ и хотя бы одно — для $j = 2$.

Таким образом, для проверки принадлежности системы Монжа–Ампера классу $H_{k,l}$ в фиксированной точке $m \in M$ требуется выполнение лишь конечного числа стандартных алгебраических операций и операций частного дифференцирования над коэффициентами этой системы. В частности, можно автоматизировать процесс проверки, запрограммировав его на языке какой-либо из широко распространенных систем компьютерной алгебры, например Reduce.

§ 6. Подкатегории систем уравнений Монжа–Ампера

Наряду с категорией MAs всех систем уравнений Монжа–Ампера рассмотрим ряд ее полных подкатегорий, т.е. подкатегорий, в которых морфизмами выступают все эквивалентности соответствующих уравнений.

Объектами полных подкатегорий MAs_e, MAs_p, MAs_h, MAs_d служат соответственно эллиптические, параболические, гиперболические и вырожденные на всем многообразии системы уравнений Монжа–Ампера.

Также полными подкатегориями систем уравнений Монжа–Ампера являются $H_{k,l}$, $k, l = 0, 1, 2$, $k \geq l$, объектами которых служат эллиптические, параболические и гиперболические системы, принадлежащие классу $H_{k,l}$ на всем многообразии M в соответствии с определением 5.6.

Выше (в примере 4.3) упоминалась локальная эквивалентность систем уравнений Монжа–Ампера. Хотя интуитивно содержание этого понятия более или менее ясно, сформулируем его строгое определение.

Пусть даны фиксированная система уравнений Монжа–Ампера (2.2) и определенный класс $\{Q\}$ систем уравнений Монжа–Ампера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Система (2.2) называется *локально эквивалентной* системе класса $\{Q\}$, если для каждой точки $\tilde{m}$ многообразия $\tilde{M}$ найдутся ее окрестность U , система (2.1) из класса $\{Q\}$ и некоторое открытое подмножество V многообразия M такие, что ограничения

$$Q|_V = (V, I|_V), \quad \tilde{Q}|_U = (U, \tilde{I}|_U)$$

систем (2.1) и (2.2) на множества V и U соответственно эквивалентны.

Если системы уравнений класса $\{Q\}$ имеют определенный вид, то будем говорить о *локальной эквивалентности системе определенного вида*.

Используя это определение, лемму 1.5 можно переформулировать следующим образом: *всякая система уравнений Монжа–Ампера локально эквивалентна системе вида (1.3)*. Теперь естественным образом возникает задача об описании систем Монжа–Ампера, которые локально эквивалентны системам (1.3) специального вида.

Выше уже были рассмотрены примеры 4.3 и 5.8 систем Монжа–Ампера специального вида. В дополнение к ним приведем

ПРИМЕР 6.2. Система Монжа–Ампера (1.3) вида

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 p_x + a_2 p_y &= 0, \\ b_0 + b_1 p_x + b_2 p_y + b_3 q_x + b_4 q_y + b_5 (p_x q_y - p_y q_x) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

называется *треугольной*, если коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 не зависят от неизвестной функции q . Иными словами, первое уравнение треугольной системы является уравнением первого порядка с двумя независимыми переменными и одной неизвестной функцией p . Если $p = p(x, y)$ – решение этого уравнения, то, подставив его во второе уравнение системы (6.1), снова получим уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией q . Таким образом, решение треугольной системы Монжа–Ампера сводится к последовательному решению двух уравнений первого порядка. Отличительной особенностью треугольной системы является то, что она ни в одной точке не может быть эллиптической, поскольку дискриминант (4.5) характеристического многочлена (4.4) для системы вида (6.1) всегда неотрицателен.

Имеет место

ЛЕММА 6.3. *Всякая треугольная система Монжа–Ампера (6.1) локально эквивалентна системе вида*

$$p_x = 0, \quad b_0 + b_2 p_y + b_3 q_x + b_4 q_y + b_5 (p_x q_y - p_y q_x) = 0. \quad (6.2)$$

Доказательство см. в § 8.

Чтобы придать словосочетанию “специальный вид” более точный смысл, сформулируем соответствующие определение. При этом ограничимся системами уравнений Монжа–Ампера $Q = (M, I)$ постоянного типа, т.е. эллиптического, параболического, гиперболического или вырожденного на всем многообразии M . Начнем с гиперболического случая:

$$Q = (M, I) \in \text{Ob}(\text{MA}_{\text{Sh}}). \quad (6.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Рассмотрим гиперболическую систему уравнений Монжа–Ампера (6.3) на многообразии M . Будем говорить, что она:

(а) *локально почти треугольна*, если она локально эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned} a + p_x &= 0, \\ b_0 + b_2 p_y + b_3 q_x + b_4 q_y + b_5 (p_x q_y - p_y q_x) &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

в которой

$$a_q(x, y, p, q) \neq 0, \quad (6.5)$$

$$ab_5 - b_4 \neq 0; \quad (6.6)$$

(b) *локально треугольна*, если она локально эквивалентна системе вида (6.2) с

$$b_4(x, y, p, q) \neq 0; \quad (6.7)$$

(c) *локально линейна относительно производных* или *локально полулинейна*, если она локально эквивалентна системе вида

$$a(x, y, p, q) + p_x = 0, \quad b(x, y, p, q) + q_y = 0, \quad (6.8)$$

для которой выполнены условия (6.5) и

$$b_p(x, y, p, q) \neq 0; \quad (6.9)$$

(d) имеет *локально полупостоянные коэффициенты*, если она локально эквивалентна системе вида (6.8), для которой выполнены условия (6.9) и

$$a(x, y, p, q) = 0; \quad (6.10)$$

(e) имеет *локально постоянные коэффициенты*, если она локально эквивалентна системе вида (6.8), для которой выполнены условия (6.10) и

$$b(x, y, p, q) = 0. \quad (6.11)$$

Поясним введенные в определении 6.4 термины.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Во-первых, по лемме 6.3 любая треугольная система Монжа–Ампера (6.1) локально эквивалентна системе (6.2), от которой полутреугольная система (6.4) отличается лишь наличием в первом уравнении свободного члена a . Неравенство (6.5) – это условие существенной зависимости свободного члена a от неизвестной функции q , а неравенства (6.6) и (6.7) – это условия гиперболичности, т.е. положительности дискриминанта (4.5) характеристического многочлена (4.4) для систем (6.2) и (6.4). Во-вторых, всякая линейная относительно производных гиперболическая система уравнений (1.3) локально эквивалентна системе вида (6.5) (см. [9; гл. III, § 1]). И в-третьих, если коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ и b_5 системы (1.3) постоянны, то она эквивалентна системе (6.8), (6.10), (6.11), от которой система (6.8)–(6.10) с полупостоянными коэффициентами отличается лишь наличием во втором уравнении (6.8) свободного члена b .

Уравнения Монжа–Ампера, удовлетворяющие условиям (a)–(d) определения 6.4, образуют полные подкатегории категорий MAS_h . Подкатегорию локально полутреугольных (semi-triangular) систем обозначим через

$$\text{MAS}_{h, \text{s-tr}},$$

подкатегорию локально треугольных (triangular) систем обозначим через

$$\text{MAS}_{h,\text{tr}},$$

подкатегорию локально полулинейных (semi-linear) систем обозначим через

$$\text{MAS}_{h,s-l},$$

подкатегорию систем с локально полупостоянными (semi-constant) коэффициентами обозначим через

$$\text{MAS}_{h,s-c},$$

а подкатегорию систем с локально постоянными коэффициентами обозначим через

$$\text{MAS}_{h,c}.$$

Теперь перейдем к параболическому случаю:

$$Q = (M, I) \in \text{Ob}(\text{MAS}_p). \quad (6.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. Рассмотрим параболическую систему уравнений Монжа–Ампера (6.12) на многообразии M . Будем говорить, что она:

(а) *локально почти треугольна*, если она локально эквивалентна системе вида (6.4), для которой выполнены условия (6.5) и

$$ab_5 - b_4 = 0; \quad (6.13)$$

(б) *локально треугольна*, если она локально эквивалентна системе вида (6.2), для которой выполнено условие

$$b_4(x, y, p, q) = 0. \quad (6.14)$$

Введенная в определении 6.6 терминология поясняется аналогичным гиперболическому случаю образом. Равенства (6.13) и (6.14) – это условие параболичности, при котором дискриминант (4.5) характеристического многочлена (4.4) для систем (6.2) и (6.4) равен нулю.

Уравнения Монжа–Ампера, удовлетворяющие условиям (а) и (б) определения 6.6, образуют полные подкатегории категории MAS_p . Подкатегорию локально полутреугольных систем обозначим через

$$\text{MAS}_{p,s-\text{tr}},$$

а подкатегорию локально треугольных систем обозначим через

$$\text{MAS}_{p,\text{tr}}.$$

Перейдем к рассмотрению эллиптического случая:

$$Q = (M, I) \in \text{Ob}(\text{MAS}_e). \quad (6.15)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. Рассмотрим эллиптическую систему уравнений Монжа–Ампера (6.15) на многообразии M . Будем говорить, что она:

(а) *локально линейна относительно производных* или *локально полулинейна*, если она локально эквивалентна системе вида

$$a(x, y, p, q) + p_x + q_y = 0, \quad b(x, y, p, q) + p_y - q_x = 0, \quad (6.16)$$

для которой выполнено хотя бы одно из двух неравенств

$$a_p - b_q \neq 0, \quad b_p + a_q \neq 0; \quad (6.17)$$

(б) имеет *локально постоянные коэффициенты*, если она локально эквивалентна системе вида (6.16), для которой выполнены условия (6.10) и (6.11).

Пояснение введенной в определении 6.7 терминологии аналогично проведенному в замечании 6.5. Уравнения Монжа–Ампера, удовлетворяющие условиям (а) и (б) определения 6.7, образуют полные подкатегории категории MAS_e . Подкатегорию локально полулинейных систем обозначим через

$$\text{MAS}_{e,s-l},$$

а подкатегорию систем с локально постоянными коэффициентами обозначим через

$$\text{MAS}_{e,c},$$

Теперь рассмотрим вырожденный случай.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. Будем говорить, что система уравнений Монжа–Ампера (2.1) *локальна в полных дифференциалах*, если она локально эквивалентна системе вида (4.7).

Поясним введенное определение.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.9. Система (4.7) фактически является системой уравнений в полных дифференциалах, но несколько отличается от стандартного случая тем, что, вообще говоря, ее свободные члены a и b зависят сразу от двух неизвестных функций p и q . В связи с этим условие интегрируемости, т.е. равенства вторых смешанных производных от p , в общем случае принимает вид уравнения

$$b_x - b_p a - a_y + a_p b + b_q q_x - a_q q_y = 0$$

относительно p и q , а не обычного условия на коэффициенты системы.

Уравнения Монжа–Ампера, удовлетворяющие определению 6.8, образуют полную подкатегорию категории MAS , которую обозначим через

$$\text{MAS}_{\text{total}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.10. Полная подкатегория S категории MAS систем уравнений Монжа–Ампера называется *замкнутой*, если из условий

$$\tilde{Q} \in \text{Ob}(S), \quad Q \in \text{Ob}(\text{MAS}), \quad \text{Hom}_{\text{MAS}}(\tilde{Q}, Q) \neq \emptyset$$

вытекает, что $Q \in S$.

ЛЕММА 6.11. *Подкатегории MA_{se} , MA_{sp} , MA_{sh} , MA_{sd} ; $H_{k,l}$, $k, l = 0, 1, 2$, $k \geq l$; $\text{MA}_{\text{sh,s-tr}}$, $\text{MA}_{\text{sh,tr}}$, $\text{MA}_{\text{sh,s-l}}$, $\text{MA}_{\text{sh,s-c}}$, $\text{MA}_{\text{sh,c}}$, $\text{MA}_{\text{sp,s-tr}}$, $\text{MA}_{\text{sp,tr}}$, $\text{MA}_{\text{se,s-l}}$, $\text{MA}_{\text{se,c}}$ и MA_{total} замкнуты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 замкнуты подкатегории MA_{se} , MA_{sp} , MA_{sh} и MA_{sd} , а в силу следствия 5.10 – подкатегории $H_{k,l}$, $k, l = 0, 1, 2$, $k \geq l$. Замкнутость подкатегорий $\text{MA}_{\text{sh,s-tr}}$, $\text{MA}_{\text{sh,tr}}$, $\text{MA}_{\text{sh,s-l}}$, $\text{MA}_{\text{sh,s-c}}$, $\text{MA}_{\text{sh,c}}$, $\text{MA}_{\text{sp,s-tr}}$, $\text{MA}_{\text{sp,tr}}$, $\text{MA}_{\text{se,s-l}}$, $\text{MA}_{\text{se,c}}$ и MA_{total} следует непосредственно из определений 6.4, 6.6–6.8.

Лемма 6.11 доказана.

§ 7. Локальная эквивалентность

Исследуем задачу локальной эквивалентности систем уравнений Монжа–Ампера на многообразиях. А именно, изучим, каким образом соотносятся категории $\text{MA}_{\text{sh,s-tr}}$, $\text{MA}_{\text{sh,tr}}$, $\text{MA}_{\text{sh,s-l}}$, $\text{MA}_{\text{sh,s-c}}$, $\text{MA}_{\text{sh,c}}$, $\text{MA}_{\text{sp,s-tr}}$, $\text{MA}_{\text{sp,tr}}$, $\text{MA}_{\text{se,s-l}}$, $\text{MA}_{\text{se,c}}$ и MA_{total} с категориями $H_{k,l}$, $k, l = 0, 1, 2$, $k \geq l$.

Начнем с установления эффективно проверяемых условий того, что данная гиперболическая система Монжа–Ампера либо локально почти треугольна, либо локально треугольна, либо локально полулинейна, либо имеет локально полупостоянные коэффициенты, либо имеет локально постоянные коэффициенты в соответствии с определением 6.4.

ТЕОРЕМА 7.1. *Рассмотрим гиперболическую систему уравнений Монжа–Ампера (6.3). Имеют место следующие утверждения.*

(а) *Если система (6.3) является объектом категории $H_{2,1}$, то она локально полутреугольна, т.е. служит объектом категории $\text{MA}_{\text{h,s-tr}}$. Иными словами, имеет место включение*

$$\text{Ob}(H_{2,1}) \subseteq \text{Ob}(\text{MA}_{\text{h,s-tr}}).$$

(b) *Если система (6.3) является объектом категории $H_{2,0}$, то она локально треугольна, т.е. служит объектом категории $\text{MA}_{\text{h,tr}}$. Иными словами, имеет место включение*

$$\text{Ob}(H_{2,0}) \subseteq \text{Ob}(\text{MA}_{\text{h,tr}}).$$

(с) *Система (6.3) тогда и только тогда является объектом категории $H_{1,1}$, когда она локально полулинейна, т.е. служит объектом категории $\text{MA}_{\text{h,s-l}}$. Иными словами, имеет место равенство*

$$\text{Ob}(\text{MA}_{\text{h}}) \cap \text{Ob}(H_{1,1}) = \text{Ob}(\text{MA}_{\text{h,s-l}}).$$

(d) *Система (6.3) тогда и только тогда является объектом категории $H_{1,0}$, когда она имеет локально полупостоянные коэффициенты, т.е. служит объектом категории $\text{MA}_{\text{h,s-c}}$. Иными словами, имеет место равенство*

$$\text{Ob}(H_{1,0}) = \text{Ob}(\text{MA}_{\text{h,s-c}}).$$

(е) Система (6.3) тогда и только тогда является объектом категории $H_{0,0}$, когда она имеет локально постоянные коэффициенты, т.е. служит объектом категории $MA_{h,c}$. Иными словами, имеет место равенство

$$\text{Ob}(MA_{sh}) \cap \text{Ob}(H_{0,0}) = \text{Ob}(MA_{sh,c}).$$

Доказательство см. в § 8.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. (а) Аналогичный утверждению (е) результат получен в работе О. К. Фоссума [10]. Для этого он использовал предложенный В. В. Лычагиным подход, который заключается в построении поля операторов, ассоциированного с изучаемой системой (см. [11; гл. 9]).

(b) По сути утверждения (с) и (е) теоремы 7.1 являются аналогами результатов о возможности локального сведения одного гиперболического уравнения Монжа–Ампера второго порядка к полулинейному уравнению второго порядка и уравнению Монжа–Ампера второго порядка с постоянными коэффициентами посредством контактного преобразования (см. [7; § 3] и [12; гл. 21]).

(с) Важно отметить, что согласно замечанию 5.11 все утверждения теоремы 7.1 эффективно проверяемы. Точнее говоря, для их проверки требуется выполнение лишь конечного числа стандартных алгебраических операций и операций частного дифференцирования над коэффициентами рассматриваемой гиперболической системы Монжа–Ампера (6.3). Действительно, согласно замечанию 5.11 в локальных координатах утверждения теоремы 7.1 выглядят так:

- выполнение условия (е) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.4)–(6.6);
- выполнение условия (d) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.2), (6.7);
- выполнение условия (с) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.8), (6.9);
- выполнение условия (b) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.8)–(6.10);
- выполнение условия (а) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.8), (6.10), (6.11).

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть дана гиперболическая система уравнений Монжа–Ампера (6.3). Справедливы следующие утверждения.

(а) Если система (6.3) принадлежит классу $H_{2,1}$, то локально она сводится к одному квазилинейному гиперболическому уравнению второго порядка.

(b) Если система (6.3) принадлежит классу $H_{2,0}$, то локально она сводится к одному квазилинейному уравнению первого порядка.

(с) Если система (6.3) принадлежит классу $H_{1,1}$, то локально она сводится к одному полулинейному гиперболическому уравнению второго порядка.

(d) Если система (6.3) принадлежит классу $H_{1,0}$, то локально она сводится к одному обыкновенному уравнению первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По определению 6.4, (а) и теореме 7.1, (b) система (6.3) локально эквивалентна системе вида (6.4), для которой выполнено

неравенство (6.5). Это неравенство позволяет разрешить первое уравнение (6.4) относительно неизвестной функции

$$q = q(x, y, p, p_x). \quad (7.1)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (6.4), получим квазилинейное уравнение второго порядка относительно p

$$b_0 + b_2 p_y + (b_3 - b_5 p_y)(q_x + q_p p_x + q_{p_x} p_{xx}) + (b_4 - b_5 a)(q_y + q_p p_y + q_{p_x} p_{xy}) = 0.$$

По теореме о неявной функции $q_{p_x} \neq 0$, поэтому полученное уравнение гиперболично в силу неравенства (6.6).

(b) По определению 6.4, (b) и теореме 7.1, (a) система (6.3) локально эквивалентна системе вида (6.2). Общее решение ее первого уравнения – это функция, зависящая только от одной переменной y :

$$p = p(y). \quad (7.2)$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы (6.2), получим относительно неизвестной функции q уравнение

$$b_0 + b_2 p'(y) + (b_3 - b_5 p'(y))q_x + b_4 q_y = 0. \quad (7.3)$$

В силу неравенства (6.7) это уравнение первого порядка.

(c) По определению 6.4, (c) и теореме 7.1, (c) система (6.3) локально эквивалентна системе вида (6.8), для которой выполнено неравенство (6.5). Это неравенство позволяет разрешить первое уравнение (6.4) относительно функции q в виде выражения (7.1). Подставляя это выражение во второе уравнение системы (6.8), выводим уравнение относительно p :

$$b(x, y, p, q) + q_y + q_p p_y + q_{p_x} p_{xy} = 0.$$

По теореме о неявной функции $q_{p_x} \neq 0$, поэтому, разделив на нее левую и правую части выведенного уравнения, получим полулинейное гиперболическое уравнение второго порядка относительно p .

(d) По определению 6.4, (d) и теореме 7.1, (d) система (6.3) локально эквивалентна системе вида (6.8). В силу условия (6.9) можно решить первое уравнение, в результате чего получается выражение (7.2). Подставляя его во второе уравнение системы (6.8), выводим относительно неизвестной функции q обыкновенное уравнение первого порядка, в котором переменная x играет роль параметра:

$$b(x, y, p(y), q) + q_y = 0.$$

Следствие 7.3 доказано.

В теореме 7.1 и следствии 7.3 речь шла о гиперболических системах. Рассмотрим случай систем Монжа–Ампера (6.12) параболического типа и установим для них условия локальной полутреугольности и треугольности в соответствии с определением 6.6.

ТЕОРЕМА 7.4. *Рассмотрим параболическую систему уравнений Монжа–Ампера (6.12). Имеют место следующие утверждения.*

(а) *Если система (6.12) является объектом категории $H_{1,1}$, то она локально полутреугольна, т.е. служит объектом категории $MA_{p,s-tr}$. Иными словами, имеет место включение*

$$\text{Ob}(MA_{Sp}) \cap \text{Ob}(H_{1,1}) \subseteq \text{Ob}(MA_{p,s-tr}).$$

(б) *Система (6.12) тогда и только тогда является объектом категории $H_{0,0}$, когда она локально треугольна, т.е. служит объектом категории $MA_{p,tr}$. Иными словами, имеет место равенство*

$$\text{Ob}(MA_{Sp}) \cap \text{Ob}(H_{0,0}) = \text{Ob}(MA_{p,tr}).$$

Доказательство см. в § 8.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. (а) В некотором смысле утверждения (а) и (б) теоремы 7.4 являются аналогами результатов о возможности локального сведения одного параболического уравнения Монжа–Ампера второго порядка к эволюционному уравнению второго порядка и уравнению Монжа–Ампера второго порядка с постоянными коэффициентами посредством контактного преобразования (см. [7; § 3] и [12; гл. 21]).

(б) Важно отметить, что согласно замечанию 5.11 все утверждения теоремы 7.1 эффективно проверяемы. Точнее говоря, для их проверки требуется выполнение лишь конечного числа стандартных алгебраических операций и операций частного дифференцирования над коэффициентами рассматриваемой параболической системы Монжа–Ампера (6.12). Действительно, согласно замечанию 5.11 в локальных координатах утверждения теоремы 7.4 выглядят так:

- если выполнено условие (с) замечания 5.11, то рассматриваемая система локально эквивалентна системе вида (6.4), (6.5), (6.13);
- выполнение условия (а) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.2), (6.14).

СЛЕДСТВИЕ 7.6. *Рассмотрим параболическую систему уравнений Монжа–Ампера (6.12). Справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если система (6.12) принадлежит классу $H_{1,1}$, то она локально сводится к одному квазилинейному параболическому уравнению второго порядка, которое может вырождаться в уравнение первого порядка.*

(б) *Если система (6.12) принадлежит классу $H_{0,0}$, то она локально сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое может вырождаться в алгебраическое уравнение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По определению 6.6, (а) и теореме 7.4, (а) система (6.12) локально эквивалентна системе вида (6.4), для которой выполнено неравенство (6.5). Это неравенство позволяет разрешить первое уравнение (6.4) относительно неизвестной функции q в виде выражения (7.1). Подставляя это

выражение во второе уравнение системы (6.4), получим квазилинейное уравнение второго порядка относительно p , которое в силу равенства (6.13) принимает вид

$$b_0 + b_2 p_y + (b_3 - b_5 p_y)(q_x + q_p p_x + q_{p_x} p_{xx}) = 0.$$

Это квазилинейное параболическое уравнение второго порядка, которое вырождается в уравнение первого порядка при $b_3 - b_5 p_y = 0$.

(b) По определению 6.6, (b) и теореме 7.4, (b) система (6.12) локально эквивалентна системе вида (6.2). Решая первое уравнение, выводим выражение (7.2). Подставляя его во второе уравнение системы (6.2), получаем относительно неизвестной функции q уравнение (7.3). В силу равенства (6.14) это обыкновенное уравнение первого порядка относительно одной неизвестной функции q , в котором y играет роль параметра:

$$b_0 + b_2 p'(y) + (b_3 - b_5 p'(y))q_x = 0.$$

При $b_3 - b_5 p'(y) = 0$ оно вырождается в алгебраическое уравнение.

Следствие 7.6 доказано.

В теоремах 7.1 и 7.4, а также в следствиях 7.3 и 7.6 речь шла о гиперболических и параболических системах. Рассмотрим случай систем Монжа–Ампера (6.15) эллиптического типа и установим для них условия локальной полулинейности и локального постоянства коэффициентов в соответствии с определением 6.7.

ТЕОРЕМА 7.7. *Рассмотрим эллиптическую систему уравнений Монжа–Ампера (6.15). Имеют место следующие утверждения.*

(a) Система (6.15) тогда и только тогда является объектом категории $H_{1,1}$, когда она локально полулинейна, т.е. служит объектом категории $MA_{e,s-1}$. Иными словами, имеет место равенство

$$Ob(MA_{e,s}) \cap Ob(H_{1,1}) = Ob(MA_{e,s-1}).$$

(b) Система (6.15) тогда и только тогда является объектом категории $H_{0,0}$, когда она имеет локально постоянные коэффициенты, т.е. служит объектом категории $MA_{e,c}$. Иными словами, имеет место равенство

$$Ob(MA_{e,s}) \cap Ob(H_{0,0}) = Ob(MA_{e,c}).$$

Доказательство см. в § 8.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.8. (a) Аналогичный утверждению (b) теоремы 7.7 результат получен в работе О. К. Фоссума [10]. Для этого он использовал предложенный В. В. Лычагиным подход, который заключается в построении поля операторов, ассоциированного с изучаемой системой (см. [11; гл. 9]).

(b) Утверждения (a) и (b) теоремы 7.7 являются аналогами результатов о возможности локального сведения одного эллиптического уравнения Монжа–Ампера второго порядка к полулинейному уравнению второго порядка и к уравнению Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами посредством контактного преобразования (см. [7; § 3] и [12; гл. 21]).

(с) Важно отметить, что согласно замечанию 5.11 все утверждения теоремы 7.1 эффективно проверяемы. Точнее говоря, для их проверки требуется выполнение лишь конечного числа стандартных алгебраических операций и операций частного дифференцирования над коэффициентами рассматриваемой эллиптической системы Монжа–Ампера (6.15). Действительно, согласно замечанию 5.11 в локальных координатах утверждения теоремы 7.4 выглядят так:

- выполнение условия (с) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.16), (6.17);
- выполнение условия (а) замечания 5.11 равносильно локальной эквивалентности рассматриваемой системы системе вида (6.16), (6.10), (6.11).

Из теоремы 7.7 вытекает следствие, аналогичное следствиям 7.3 и 7.6. Не будем на этом останавливаться, а перейдем к системам вырожденного типа. Сформулируем критерий того, что система уравнений Монжа–Ампера (2.1) локальна в полных дифференциалах.

ТЕОРЕМА 7.9. *Система уравнений Монжа–Ампера (2.1) тогда и только тогда локальна в полных дифференциалах, когда она имеет вырожденный тип. Иными словами, справедливо равенство*

$$\text{Ob}(\text{MA}_{\text{total}}) = \text{Ob}(\text{MA}_{\text{sd}}).$$

Доказательство см. в § 8.

§ 8. Свойства эквивалентных систем Монжа–Ампера

Данный параграф в основном посвящен доказательству сформулированных выше результатов. Прежде всего, установим, что справедлива

ЛЕММА 8.1. *Зафиксируем на n -мерном многообразии M произвольную точку t . Пусть в некоторой окрестности U этой точки заданы $n-2$ вещественнозначных линейных дифференциальных форм $\beta_1, \dots, \beta_{n-2}$ и линейная дифференциальная форма β , которые линейно независимы. Предположим, что у точки t имеется окрестность, в которой форма β :*

- (а) *либо вещественнозначна;*
- (б) *либо комплекснозначна и удовлетворяет неравенству*

$$\beta \wedge \bar{\beta} \neq 0.$$

Тогда найдется окрестность этой точки, в которой определены такие вещественнозначные в случае (а) и комплекснозначные в случае (б) функции $F, c_1, \dots, c_{n-2}$ и c , что $c \neq 0$ и

$$dF = c\beta + c_1\beta_1 + \dots + c_{n-2}\beta_{n-2}. \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подмножество h всех векторов из комплексификации $T^{\mathbb{C}}U$ касательного расслоения над U , которые аннулируются линейными формами β и $\beta_1, \dots, \beta_{n-2}$. Поскольку эти формы линейно независимы,

то h – одномерное векторное подрасслоение. По теореме Фробениуса–Ниренберга (см. [13; § 6.2]) в некоторой окрестности точки m определены функции $G_1, \dots, G_{n-1}$, дифференциалы которых независимы и аннулируют подрасслоение h . Выберем ту из этих функций, дифференциал которой независим с линейными формами $\beta_1, \dots, \beta_{n-2}$, и обозначим ее через F . Поскольку дифференциал F аннулирует подрасслоение h , то он выражается через линейную комбинацию дифференциальных форм β и $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ (см. [14; § 17]).

Лемма 8.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.3. По аналогии с примером 1.3 сопоставим левым частям уравнений (6.1) внешние дифференциальные 2-формы

$$w_1 = a_0 dx \wedge dy + a_1 dp \wedge dy + a_2 dx \wedge dp,$$

$$w_2 = b_0 dx \wedge dy + b_1 dp \wedge dy + b_2 dx \wedge dp + b_3 dq \wedge dy + b_4 dx \wedge dq + b_5 dp \wedge dq.$$

Переименовав при необходимости переменные, мы всегда можем добиться выполнения неравенства $a_1 \neq 0$ и считать, что $a_1 = 1$. Таким образом,

$$w_1 = (a_0 dx + dp) \wedge (dy - a_2 dx).$$

Дважды применив лемму 8.1 при $n = 3$, получим, что в окрестности любой точки $m \in \mathbb{R}^4$ определены такие функции Y , P и c , $c \neq 0$, что

$$w_1 = c dP \wedge dY.$$

Лемма 6.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Пусть m – произвольная точка многообразия M . Выберем окрестность U этой точки и двумерные вещественные подрасслоения H_1 и H_2 касательного расслоения TU в соответствии с леммой 5.3. В случае гиперболичности эти подрасслоения вещественны.

(а) По определению 5.6 класса $H_{2,1}$ одна из первых производных $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(1)}$ является инволютивным трехмерным распределением. Для определенности будем считать, что это $H_1^{(1)}$. По теореме Фробениуса в некоторой окрестности точки m определена функция y , аннулирующая распределение $H_1^{(1)}$. По лемме 5.3, (а) отсюда вытекает, что

$$dy \in \Gamma(H_2^*).$$

Поэтому по лемме 5.3, (с), уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно гарантировать существование в ней такой независимой с dy линейной дифференциальной формы β и дифференциальной 2-формы ω , для которых выполняется представление

$$I(U) = (\beta \wedge dy, \omega).$$

Выберем произвольную функцию x так, чтобы линейные дифференциальные формы dx , dy и ω были независимы. По лемме 8.1, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно утверждать, что в ней определены такая функция p и коэффициенты c_1 , c_2 и c , $c \neq 0$, что

$$dp = c\beta + c_1 dx + c_2 dy.$$

Следовательно,

$$I(U) = ((dp + a dx) \wedge dy, \omega),$$

где a – некоторая функция на U . Тем самым, в окрестности U точки m система (6.3) принимает вид (6.4). По лемме 6.11 полученная система (6.4) также принадлежит классу $H_{2,1}$, а потому согласно примеру 5.8 неравенство (6.5) равносильно трехмерности первой производной $H_1^{(1)}$. По лемме 4.1 система (6.4) гиперболична, а потому для нее выполнено условие (6.6).

Утверждение (а) доказано.

(b) По определению 5.6 класса $H_{2,0}$ одно из характеристических расслоений H_1 и H_2 является инволютивным двумерным распределением. Для определенности будем считать, что это H_1 . По теореме Фробениуса в некоторой окрестности точки m определены функции y и p , аннулирующие распределение H_1 . По лемме 5.3, (а) отсюда вытекает, что

$$dy, dp \in \Gamma(H_2^*).$$

Поэтому по лемме 5.3, (с), уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно гарантировать существование в ней такой дифференциальной 2-формы ω , для которой выполняется представление

$$I(U) = (dp \wedge dy, \omega).$$

Тем самым, в окрестности U точки m система (6.3) принимает вид (6.2). По лемме 4.1 эта система гиперболична, а потому для нее выполнено условие (6.7).

Утверждение (b) доказано.

(с) По определению 5.6 класса $H_{1,1}$ первые производные $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(1)}$ – это трехмерные инволютивные распределения. По теореме Фробениуса в некоторой окрестности точки m определены такие две функции x и y , что dx аннулирует распределение $H_1^{(1)}$, а dy аннулирует распределение $H_2^{(1)}$. По лемме 5.3, (а) отсюда следует, что

$$dy \in \Gamma(H_1^*), \quad dx \in \Gamma(H_2^*).$$

Следовательно, по лемме 5.3, (с), уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно гарантировать существование в ней таких двух независимых с dx и dy линейных дифференциальных форм β_1 и β_2 , для которых выполняется представление

$$I(U) = (\beta_1 \wedge dy, dx \wedge \beta_2).$$

По лемме 8.1, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно утверждать, что в этой окрестности определены такие функции p , q и коэффициенты c_1 , c_2 , c , $c \neq 0$, r_1 , r_2 и r , $r \neq 0$, для которых

$$dp = c\beta_1 + c_1 dy + c_2 dx, \quad dq = r\beta_2 + r_1 dy + r_2 dx.$$

Следовательно,

$$I(U) = (dp \wedge dy + a dx \wedge dy, dx \wedge dq + b dx \wedge dy),$$

где a и b – некоторые функции. Тем самым, в U система (6.3) принимает вид (6.8). По лемме 6.11 полученная система (6.8) также принадлежит

классу $H_{1,0}$, а потому согласно примеру 5.8 неравенства (6.5) и (6.9) равносильны трехмерности первых производных $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(1)}$.

Обратно, система (6.8), (6.5), (6.9) в силу примера 5.8 принадлежит классу $H_{1,1}$. Поэтому по лемме 6.11 локально полулинейная система (6.3) также принадлежит этому классу.

Утверждение (с) доказано.

(d) По определению 5.6 класса $H_{1,0}$ можно, не ограничивая общности, считать производную $H_1^{(1)}$ трехмерным инволютивным распределением, а подрасслоение H_2 – двумерным. По теореме Фробениуса в некоторой окрестности точки m определены такие три функции x , y и p , что dx аннулирует распределение $H_1^{(1)}$, а dy и dp аннулируют распределение H_2 . По лемме 5.3, (а) отсюда следует, что

$$dy, dp \in \Gamma(H_1^*), \quad dx \in \Gamma(H_2^*).$$

Следовательно, по лемме 5.3, (с), уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно гарантировать существование в ней такой независимой с dx , dy и dp линейной дифференциальной формы β , для которой выполняется представление

$$I(U) = (dp \wedge dy, dx \wedge \beta).$$

По лемме 8.1, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно утверждать, что в этой окрестности определены такая функция q и коэффициенты c_1 , c_2 , c , $c \neq 0$, для которых

$$dq = c\beta + c_1 dy + c_2 dx.$$

Следовательно,

$$I(U) = (dp \wedge dy, dx \wedge dq + b dx \wedge dy),$$

где b – некоторая функция. Тем самым, в окрестности U система (6.3) принимает вид (6.8), (6.10). По лемме 6.11 полученная система (6.8) также принадлежит классу $H_{1,0}$, а потому согласно примеру 5.8 неравенство (6.9) равносильно трехмерности первой производной $H_1^{(1)}$.

Обратно, система (6.8)–(6.10) в силу примера 5.8 принадлежит классу $H_{1,0}$. Поэтому по лемме 6.11 система (6.3) с локально постоянными коэффициентами также принадлежит этому классу.

Утверждение (d) доказано.

(е) По определению 5.6 класса $H_{0,0}$ подрасслоения H_1 и H_2 – это двумерные инволютивные распределения. По теореме Фробениуса в некоторой окрестности точки m определены такие четыре функции x , y , p и q , что dx и dq аннулируют распределение H_1 , а dy и dp аннулируют распределение H_2 . По лемме 5.3, (а) отсюда следует, что

$$dy, dp \in \Gamma(H_1^*), \quad dx, dq \in \Gamma(H_2^*).$$

Следовательно, по лемме 5.3, (с) выполняется представление

$$I(U) = (dp \wedge dy, dx \wedge dq).$$

Тем самым, в окрестности U система (6.3) принимает вид (6.8), (6.10), (6.11).

Обратно, система (6.8), (6.10), (6.11) в силу примера 5.8 принадлежит классу $H_{0,0}$. Поэтому по лемме 6.11 система (6.3) с локально постоянными коэффициентами также принадлежит этому классу.

Утверждение (е) доказано.

Теорема 7.1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.4. Пусть m – произвольная точка многообразия M . Выберем окрестность U этой точки и двумерное вещественное подрасслоение H касательного расслоения TU в соответствии с леммой 5.3 (в данном случае подрасслоения H_1 и H_1 вещественны и совпадают).

(а) По определению 5.6 класса $H_{1,1}$ первая производная $H^{(1)}$ – это инволютивное трехмерное распределение. По теореме Фробениуса, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно утверждать, что в этой окрестности определена вещественнозначная функция y , которая аннулирует распределение $H^{(1)}$. По лемме 5.3, (а) отсюда вытекает, что

$$dy \in \Gamma(H^*).$$

Следовательно, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно обеспечить существование в ней независимой с dy линейной дифференциальной формы β и 2-формы ω , для которых выполняется представление

$$I(U) = (\beta \wedge dy, \omega).$$

Выберем произвольную функцию x так, чтобы линейные дифференциальные формы dx , dy и ω были независимы. По лемме 8.1, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно утверждать, что в ней определены такая функция p и коэффициенты c_1 , c_2 и c , $c \neq 0$, что

$$dp = c\beta + c_1 dx + c_2 dy.$$

Следовательно,

$$I(U) = ((dp + a dx) \wedge dy, \omega),$$

где a – некоторая функция на U . Тем самым, в окрестности U точки m система (6.12) принимает вид (6.4). По лемме 6.11 полученная система (6.4) также принадлежит классу $H_{1,1}$, а потому согласно примеру 5.8 неравенство (6.5) равносильно трехмерности первой производной $H^{(1)}$. По лемме 4.1 полученная система (6.4) параболична, а потому для нее выполнено условие (6.13).

Утверждение (а) доказано.

(b) По определению 5.6 класса $H_{0,0}$ подрасслоение H – это двумерное инволютивное распределение. По теореме Фробениуса в некоторой окрестности точки m определены такие две функции y и p , что dx и dq аннулируют распределение H . По лемме 5.3, (а) отсюда следует, что

$$dy, dp \in \Gamma(H^*).$$

Следовательно, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно обеспечить существование в ней такой дифференциальной 2-формы ω , для которой выполняется представление

$$I(U) = (dp \wedge dy, \omega).$$

Тем самым, в окрестности U система (6.12) принимает вид (6.2). По лемме 4.1 эта система параболична, а потому для нее выполнено условие (6.14).

Обратно, система (6.2), (6.14) параболична и в силу примера 5.8 принадлежит классу $H_{0,0}$. Поэтому по лемме 6.11 локально треугольная система (6.12) также принадлежит этому классу.

Утверждение (b) доказано.

Теорема 7.4 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.7. Пусть m – произвольная точка многообразия M . Выберем окрестность U этой точки и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}U$ в соответствии с леммой 5.3.

(а) По определению 5.6 класса $H_{1,1}$ первые производные $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(1)}$ – это комплексные инволютивные трехмерные распределения. В силу леммы 5.3, (а), (b) к этим распределениям можно применить теорему Фробениуса–Ниренберга (см. [13; § 6.2]). В результате получим, что в некоторой окрестности точки m определена комплекснозначная функция F такая, что dF аннулирует распределение $H_1^{(1)}$. По лемме 5.3, (а) отсюда следует, что

$$dF_j \in \Gamma(H_2).$$

Следовательно, по лемме 5.3, (с), уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно гарантировать существование в ней такой комплекснозначной линейной дифференциальной формы β , для которой выполняется представление

$$I^{\mathbb{C}}(U) = (\beta \wedge dF, \bar{\beta} \wedge d\bar{F}),$$

где $I^{\mathbb{C}}(U) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} I(U)$ – комплексификация модуля $I(U)$. Положив

$$x = \operatorname{Re} F, \quad y = \operatorname{Im} F,$$

получим

$$I^{\mathbb{C}}(U) = (\beta \wedge (dx + i dy), \bar{\beta} \wedge d(dx - i dy)).$$

По лемме 8.1, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно утверждать, что в этой окрестности определены такая комплекснозначная функция G и коэффициенты c_1, c_2 и $c, c \neq 0$, что

$$dG = c\beta + c_1 dx + c_2 dy.$$

Следовательно,

$$I^{\mathbb{C}}(U) = ((dG - c_1 dx - c_2 dy) \wedge (dx + i dy), (d\bar{G} - \bar{c}_1 dx - \bar{c}_2 dy) \wedge (dx - i dy)).$$

Положив

$$q = \operatorname{Re} G, \quad p = \operatorname{Im} G,$$

получим

$$I(U) = (dp \wedge dy + dx \wedge dq + b dx \wedge dy, dx \wedge dp - dq \wedge dy + a dx \wedge dy),$$

где a и b – некоторые вещественные функции. Тем самым, в U система (6.15) принимает вид (6.16). По лемме 6.11 полученная система (6.16) также принадлежит классу $H_{1,1}$, а потому согласно примеру 5.8 условия (6.17) равносильны трехмерности первых производных $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(1)}$.

Обратно, система (6.16), (6.17) в силу примера 5.8 принадлежит классу $H_{1,1}$. Поэтому по лемме 6.11 локально полулинейная система (6.15) также принадлежит этому классу.

Утверждение (а) доказано.

(b) По определению 5.6 класса $H_{0,0}$ распределения H_1 и H_2 – это комплексные инволютивные двумерные распределения. В силу леммы 5.3, (а), (b) к этим распределениям можно применить теорему Фробениуса–Ниренберга (см. [13; § 6.2]). В результате получим, что в некоторой окрестности точки m определены две комплекснозначные функции F и G , которые аннулируют распределение H_1 . По лемме 5.3, (а) отсюда следует, что

$$dF, dG \in \Gamma(H_2).$$

Следовательно, по лемме 5.3, (b), (c) выполняется представление

$$I^{\mathbb{C}}(U) = (dG \wedge dF, \overline{dG} \wedge \overline{dF}).$$

Положив

$$x = \operatorname{Re} F, \quad y = \operatorname{Im} F, \quad q = \operatorname{Re} G, \quad p = \operatorname{Im} G,$$

получим

$$I(U) = (dp \wedge dy + dx \wedge dq, dx \wedge dp - dq \wedge dy).$$

Тем самым, в U система (6.15) принимает вид (6.16), (6.10), (6.11).

Обратно, система (6.16), (6.10), (6.11) в силу примера 5.8 принадлежит классу $H_{0,0}$. Поэтому по лемме 6.11 система (6.15) с локально постоянными коэффициентами также принадлежит этому классу.

Утверждение (b) доказано.

Теорема 7.7 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.9. По определению двумерного локально свободного пучка найдутся некоторая окрестность U точки m и такие независимые дифференциальные 2-формы $\omega_1, \omega_2 \in I(U)$, для которых справедливо представление

$$I(U) = (\omega_1, \omega_2).$$

Поскольку система (2.1) вырождена, то и эти формы вырождены, т.е. существуют такие линейные дифференциальные формы α, β, γ и δ , что

$$\omega_1 = \alpha \wedge \beta, \quad \omega_2 = \gamma \wedge \delta.$$

Из вырожденности системы (2.1) вытекает, что 2-форма

$$\alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$$

также вырождена. Следовательно, среди линейных форм α , β , γ и δ может быть не более трех линейно независимых. С другой стороны, в силу двумерности пучка (1.1) их не может быть и меньше трех. Тем самым, не ограничивая общности, можно считать формы α , β и γ линейно независимыми, а δ считать их линейной комбинацией. Следовательно,

$$\omega_1 = \alpha \wedge \beta, \quad \omega_2 = \gamma \wedge (c\alpha + r\beta),$$

где c и r – некоторые коэффициенты, причем $c^2 + r^2 \neq 0$. Положив

$$\theta = c\alpha + r\beta, \quad \psi = c\beta - r\alpha,$$

получим

$$I(U) = (\psi \wedge \theta, \gamma \wedge \theta).$$

По теореме Фробениуса, уменьшив в случае необходимости окрестность U , можно утверждать, что в ней существуют такие независимые функции x , y и p , что

$$dx = b_1\psi + b_2\gamma + b_3\theta, \quad dy = c_1\psi + c_2\gamma + c_3\theta, \quad dp = r_1\psi + r_2\gamma + r_3\theta.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что матрица 2×2 со строками b_1 , b_2 и c_1 , c_2 невырождена. Поэтому

$$I(U) = (dx \wedge \theta, \theta \wedge dy),$$

причем в силу независимости функций x , y и p найдутся такие коэффициенты a , b и c , $c \neq 0$, что

$$c\theta = a\,dx + b\,dy + dp.$$

Следовательно,

$$I(U) = (b\,dx \wedge dy + dx \wedge dp, a\,dx \wedge dy + dp \wedge dy).$$

Тем самым, в U система (2.1) принимает вид (4.7).

Обратно, система (4.7) вырождена. Поэтому по лемме 4.1 и всякая система (2.1) локально в полных дифференциалах также вырождена.

Теорема 7.9 доказана.

Список литературы

- [1] Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: R. O. Wells, jr., *Differential analysis on complex manifolds*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [2] Д. В. Туницкий, “О гиперболических системах уравнений Монжа–Ампера”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 119–158; англ. пер.: D. V. Tunitskii, “Hyperbolic Monge–Ampère systems”, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1223–1258.
- [3] И. Букур, А. Деляну, *Введение в теорию категорий и функторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: I. Bucur, A. Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*, Wiley, London–New York–Sydney, 1968.

- [4] С. Й. Билчев, “Системы из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (локальная теория)”, *Изв. вузов. Матем.*, 1970, № 3, 14–21.
- [5] А. М. Васильев, *Теория дифференциально-геометрических структур*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986.
- [6] Т. Morimoto, “La géométrie des équations de Monge–Ampère”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **289**:1 (1979), 25–28.
- [7] Д. В. Туницкий, “О контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:2 (1996), 195–220; англ. пер.: D. V. Tunitskii, “On the contact linearization of Monge–Ampere equations”, *Izv. Math.*, **60**:2 (1996), 425–451.
- [8] Д. В. Туницкий, “Эквивалентность и характеристические связности уравнений Монжа–Ампера”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 131–157; англ. пер.: D. V. Tunitskii, “Equivalence and characteristic connections of the Monge–Ampere equations”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 771–797.
- [9] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: R. Courant, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Intersci. Publ., New York–London, 1962.
- [10] О. К. Fossum, *On classification of a nonlinear first order system of Jacobi type*, Preprints of the Sophus Lie seminar, University of Tromsø, 2002; <http://www.math.uit.no/seminar/preprints/02-12-of.pdf>.
- [11] V. Lychagin, *Lectures on geometry of differential equations*, Part II. Roma, 1992.
- [12] A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov, *Contact geometry and nonlinear differential equations*, Encyclopedia Math. Appl., **101**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [13] Н. Е. Харт, *Геометрическое квантование в действии: приложения гармонического анализа в квантовой статистической механике и в квантовой теории поля*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: N. E. Hurt, *Geometric quantization in action. Applications of harmonic analysis in quantum statistical mechanics and quantum field theory*, Math. Appl. (East European Ser.), **8**, Reidel Publ., Dordrecht–Boston, MA, 1983.
- [14] Э. Картан, *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1962; пер. с фр.: É. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

Д. В. Туницкий (D. V. Tunitsky)
 Институт проблем управления
 им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва
 E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Поступила в редакцию
 22.01.2008 и 16.02.2009