Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Стевич, Р. Чен, З. Чжоу, Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в полидиске в другое, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 2, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:05:11

УДК 517.550.2

С. Стевич, Р. Чен, З. Чжоу

Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в полидиске в другое

Пусть $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ – p -пространство Блоха в единичном полидиске $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$, $p > 0$, а $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя. Исследуется ограниченность и компактность взвешенных композиционных операторов $uC_\varphi f(z) = u(z)f(\varphi(z))$, действующих из p -пространства Блоха $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (малого p -пространства Блоха $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) в q -пространство Блоха $\mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ (малое q -пространство Блоха $\mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$). Показано, что условия компактности оператора различны для случаев $p \in (0, 1)$ и $p \geq 1$, в отличие от условий компактности аналогичного оператора в единичном круге.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: полидиск, пространства Блоха, взвешенный композиционный оператор, ограниченность оператора, компактность оператора.

§ 1. Введение

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$ – точки комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$, $\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$ – скалярное произведение z и w , $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$, $\mathbb{D}^n$ – единичный полидиск в $\mathbb{C}^n$, $H(\mathbb{D}^n)$ – пространство голоморфных функций в $\mathbb{D}^n$. Пусть φ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя. Взвешенный композиционный оператор uC_φ в $\mathbb{D}^n$ определяется формулой

$$uC_\varphi f(z) = u(z)f(\varphi(z)), \quad f \in H(\mathbb{D}^n), \quad u \in H(\mathbb{D}^n),$$

т.е. оператор получается композицией оператора $C_\varphi f(z) = f(\varphi(z))$ и оператора умножения $M_u g(z) = u(z)g(z)$, $g \in H(\mathbb{D}^n)$.

Метрика Бергмана $H_z(u, \bar{u})$ в $\mathbb{D}^n$ определяется так:

$$H_z(u, \bar{u}) = \sum_{k=1}^n \frac{|u_k|^2}{(1 - |z_k|^2)^2}, \quad z \in \mathbb{D}^n, \quad u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Пространство Блоха $\mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ – это пространство функций $f \in H(\mathbb{D}^n)$, для которых

$$b_1(f) = \sup_{u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{|\langle \nabla f(z), u \rangle|}{\sqrt{H_z(u, \bar{u})}} < \infty, \quad \nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) \right).$$

Как было показано в [1], величина $|f(0)| + b_1(f)$ эквивалентна следующей норме:

$$\|f\|_{\mathcal{B}^1} = |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2).$$

Работа третьего автора поддержана фондом NNSF Китая (гранты №№ 10001030 и 10371091) и Центром прикладной математики им. Лиу Ху Нанкайского и Тянцзинского университетов.

Это определение является основой определения так называемых p -пространств Блоха.

Говорят, что $f \in H(\mathbb{D}^n)$ лежит в p -пространстве Блоха $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, $p > 0$, если

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p} = |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^p < +\infty;$$

p -пространство Блоха $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p}$.

Если $n = 1$, то малое p -пространство Блоха $\mathcal{B}_0^p = \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D})$ – это пространство всех $f \in H(\mathbb{D})$, для которых

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^p |f'(z)| = 0.$$

Однако при $n \geq 2$ легко доказать (см. [2]), что если

$$\lim_{z \rightarrow \partial \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^p = 0,$$

то f – константа, так что в подобном определении малого пространства Блоха нет того смысла, который имеет определение p -пространства Блоха. Мы назовем малым p -пространством Блоха $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$ замыкание полиномов в p -пространстве Блоха. При $n = 1$ это определение эквивалентно условию

$$\lim_{z \rightarrow \partial \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^p |f'(z)| = 0$$

(например, см. [3] для случая $p = 1$).

Обозначим через $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ пространство ограниченных голоморфных функций в единичном полидиске, т.е.

$$H^\infty(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) \mid \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |f(z)| < \infty \right\}.$$

В последнее время возник большой интерес к изучению композиционных операторов в различных функциональных пространствах в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ (см., например, работы [4]–[10] и ссылки в них). Относительно недавно появились обобщения этих операторов (см. [11]–[15] и ссылки в них). В [16] Оно, Штретхоф и Чжао исследовали ограниченность и компактность взвешенных композиционных операторов, действующих из пространства типа пространства Блоха в единичном круге в аналогичное пространство. Чжоу и Ши [17] попытались получить обобщения результатов работы [8] для голоморфных функций в единичном полидиске. Они сформулировали следующий результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя. Тогда C_φ компактен в $\mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, 1)$, что

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - |\varphi_l(z)|^2} < \varepsilon$$

при $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) < \delta$.

Доказательство проводилось по аналогии с доказательствами, приведенными в [7] и [8], и в результате содержало ошибки. А именно, если достаточность в теореме А была доказана правильно, то в доказательстве необходимости были пробелы. Например, был пропущен случай, когда $|\varphi_1(z^j)| \not\rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$, где $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность в $\mathbb{D}^n$, по которой $\varphi(z^j) \rightarrow \partial\mathbb{D}^n$ при $j \rightarrow \infty$ (см. детали в [17; с. 289]). Затем в [18] Чжоу попытался обобщить теорему А и преодолеть эти трудности, однако пространство тестовых функций, выбранное в этой работе, по-видимому, оказалось неподходящим. Основная идея подхода, с помощью которого можно было бы преодолеть указанные трудности, была предложена С. Стевичем в [19], и в настоящей работе мы ее развиваем. С некоторыми другими недавними результатами в этой области можно познакомиться в [20]–[30].

В настоящей работе обсуждается ограниченность и компактность взвешенных композиционных операторов, действующих из p -пространства Блоха $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (малого p -пространства Блоха $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) в q -пространство Блоха $\mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ (малое q -пространство Блоха $\mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$). Полученные результаты могут рассматриваться как обобщение результатов работы [16].

Статья имеет следующую структуру. В § 2 доказаны вспомогательные результаты, которые будут использованы в дальнейшем. В § 3 приведены некоторые необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности взвешенного композиционного оператора $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$, где $p, q \in (0, \infty)$. В § 4 изучается ограниченность и компактность взвешенного композиционного оператора, действующего между малыми пространствами Блоха в $\mathbb{D}^n$.

Следующие теоремы доказаны в § 3.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, $u \in H(\mathbb{D}^n)$ и $p, q > 0$. Тогда выполнены следующие утверждения:

(а) если $p \in (0, 1)$, то оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда $u \in \mathcal{B}^q$ и

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} < \infty; \quad (1)$$

(б) оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z)|^2} < \infty, \quad (2)$$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z)|^2} < \infty; \quad (3)$$

(с) если $p > 1$, то оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^{p-1}} < \infty, \quad (4)$$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} < \infty. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя и $p, q > 0$. Оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной C выполнена оценка

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \leq C, \quad z \in \mathbb{D}^n. \quad (6)$$

В формулировке следствия 2 мы используем символ $\mathcal{M}(X, Y)$ для обозначения пространства мультипликаторов из X в Y , т.е.

$$\mathcal{M}(X, Y) = \{u \mid fu \in Y \text{ для всех } f \in X\}.$$

Обозначим через $\mathcal{LB}^q(\mathbb{D}^n)$ пространство функций $f \in H(\mathbb{D}^n)$, для которых

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |z_l|^2} < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $n \geq 2$, $u \in H(\mathbb{D}^n)$, $M_u: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – оператор умножения. Тогда верны следующие утверждения:

(а) если $p \in (0, 1)$, то

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}^p, \mathcal{B}^q) = \begin{cases} \left\{ u \in \mathcal{B}^q \mid \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n |u(z)| (1 - |z_k|^2)^{q-p} < \infty \right\} & \text{при } q > 1, \\ \mathcal{B}^q & \text{при } p \leq q, \\ \{0\} & \text{при } q < p; \end{cases}$$

(б) выполнены соотношения

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^q) = \begin{cases} \left\{ u \in \mathcal{LB}^q \mid \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n |u(z)| (1 - |z_k|^2)^{q-1} < \infty \right\} & \text{при } q > 1, \\ \mathcal{LB}^1(\mathbb{D}^n) \cap H^\infty(\mathbb{D}^n) & \text{при } q = 1, \\ \{0\} & \text{при } q < 1; \end{cases}$$

(с) если $p > 1$, то

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}^p, \mathcal{B}^q) = \begin{cases} \left\{ u \mid \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n |u(z)| (1 - |z_k|^2)^{q-p} < \infty, \right. \\ \left. \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |z_l|^2)^{p-1}} < \infty \right\} & \text{при } q > p, \\ H^\infty(\mathbb{D}^n) & \text{при } p = q, \\ \{0\} & \text{при } q < p. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, $u \in H(\mathbb{D}^n)$, $p, q > 0$. Тогда верны следующие утверждения:

(а) оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен тогда и только тогда, когда $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен,

$$\lim_{\varphi(z) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z)|^2} = 0 \quad (7)$$

и, кроме того,

$$\lim_{\varphi(z) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z)|^2} = 0; \quad (8)$$

(b) если $p > 1$, то оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен тогда и только тогда, когда $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен,

$$\lim_{\varphi(z) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^{p-1}} = 0 \quad (9)$$

и, кроме того,

$$\lim_{\varphi(z) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} = 0; \quad (10)$$

(c) если $p \in (0, 1)$, то оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен тогда и только тогда, когда $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен и

$$\lim_{\varphi_l(z) \rightarrow \partial \mathbb{D}} |u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} = 0, \quad l \in \{1, \dots, n\}. \quad (11)$$

Приведем ряд следствий из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $p \geq 1$, $q > 0$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен;
- (b) оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен и

$$\lim_{\varphi(z) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} = 0; \quad (12)$$

(c) $\varphi_l(z) \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$, $l \in \{1, \dots, n\}$, и выполнено условие (12).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, пусть $p \in (0, 1)$, $q > 0$. Оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен тогда и только тогда, когда $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен и

$$\lim_{|\varphi_l(z)| \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} = 0, \quad l \in \{1, \dots, n\}. \quad (13)$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $p \geq 1$, $q \in (0, 1]$, а $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, причем $\|\varphi_l\|_\infty = 1$ для некоторого $l \in \{1, \dots, n\}$. Пусть при некотором $C > 0$ выполнено неравенство

$$H_z(u, \bar{u}) \leq CH_{\varphi(z)}(J\varphi(z)u, \overline{J\varphi(z)u}), \quad z \in \mathbb{D}^n, \quad u \in \mathbb{C}^n,$$

где

$$J\varphi(z) = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}(z) \right)_{1 \leq j, k \leq n}$$

– матрица Якоби φ , а $J\varphi(z)u$ обозначает вектор с j -й координатой, равной

$$(J\varphi(z)u)_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}(z) u_k.$$

Тогда оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ некомпактен.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $p \geq 1$, $q \in (0, 1]$, а $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – автоморфизм $\mathbb{D}^n$. Тогда $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ некомпактен.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – такое голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, что $\|\varphi_l\|_\infty < 1$ и $\varphi_l \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$, $l \in \{1, \dots, n\}$. Тогда оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, $p \in (0, 1)$, $q \geq 1$. Тогда $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен.

Далее будем обозначать через C положительную константу, значение которой может оказаться разным в разных случаях.

§ 2. Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов нам потребуется несколько лемм. Возможно, некоторые из них известны в форме, приводимой нами или слегка измененной, но мы докажем их для удобства читателей.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$. Тогда

(а) если $0 < p < 1$, то

$$|f(z)| \leq \left(1 + \frac{n}{1-p}\right) \|f\|_{\mathcal{B}^p};$$

(б) если $p = 1$, то

$$|f(z)| \leq \max\{\ln(2e^{1/n}), 1\} \left(\sum_{k=1}^n \ln \frac{e}{1-|z_k|^2}\right) \|f\|_{\mathcal{B}^1};$$

(с) если $p > 1$, то

$$|f(z)| \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{2^{p-1}}{p-1}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-|z_k|^2)^{p-1}}\right) \|f\|_{\mathcal{B}^p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| f(0) + \int_0^1 \langle \nabla f(tz), \bar{z} \rangle dt \right| \leq |f(0)| + \sum_{j=1}^n \int_0^1 |z_j| \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(tz) \right| dt \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{B}^p} + \|f\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{|z_j|}{(1-t^2|z_j|^2)^p} dt \\ &= \|f\|_{\mathcal{B}^p} + \|f\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{j=1}^n \int_0^{|z_j|} \frac{dt}{(1-t^2)^p}. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) при $p = 1$ получим

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \|f\|_{\mathcal{B}^1} + \frac{1}{2} \|f\|_{\mathcal{B}^1} \sum_{j=1}^n \ln \frac{1 + |z_j|}{1 - |z_j|} \leq \|f\|_{\mathcal{B}^1} + \frac{1}{2} \|f\|_{\mathcal{B}^1} \sum_{j=1}^n \ln \frac{4}{1 - |z_j|^2} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{B}^1} \sum_{j=1}^n \ln \frac{2e^{1/n}}{1 - |z_j|^2} \leq \max\{\ln(2e^{1/n}), 1\} \|f\|_{\mathcal{B}^1} \sum_{j=1}^n \ln \frac{e}{1 - |z_j|^2}. \end{aligned}$$

При $p \neq 1$ из (14) вытекает, что

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}^p} + \|f\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{j=1}^n \int_0^{|z_j|} \frac{dt}{(1-t)^p} = \|f\|_{\mathcal{B}^p} + \|f\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{j=1}^n \frac{1 - (1 - |z_j|)^{-p+1}}{1-p}. \quad (15)$$

При $0 < p < 1$ из (15) получим

$$|f(z)| \leq \left(1 + \frac{n}{1-p}\right) \|f\|_{\mathcal{B}^p}.$$

При $p > 1$ из (15) следует, что

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \|f\|_{\mathcal{B}^p} + \|f\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{j=1}^n \frac{1 - (1 - |z_j|)^{p-1}}{(p-1)(1 - |z_j|)^{p-1}} \\ &\leq \left(\frac{1}{n} + \frac{2^{p-1}}{p-1}\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 - |z_j|^2)^{p-1}}\right) \|f\|_{\mathcal{B}^p}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9. При $p \in (0, 1)$ из включения $f \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ следует, что $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ и, кроме того, существует постоянная $C > 0$, зависящая только от p и n , для которой $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{\mathcal{B}^p}$.

ЛЕММА 2. Пусть φ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, $u \in H(\mathbb{D}^n)$. Тогда оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен тогда и только тогда, когда для всякой ограниченной последовательности $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ из $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$), сходящейся к нулю равномерно внутри $\mathbb{D}^n$, имеет место сходимость $\|uC_\varphi f_k\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен и пусть $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – такая последовательность из $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$), что $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{\mathcal{B}^p} < \infty$ и $f_k \rightarrow 0$ равномерно внутри $\mathbb{D}^n$ при $k \rightarrow \infty$. Допустим, что существуют подпоследовательность $(f_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ и $\delta_0 > 0$, для которых

$$\|uC_\varphi f_{k_m}\|_{\mathcal{B}^q} \geq \delta_0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

В силу компактности uC_φ из последовательности $uC_\varphi f_{k_m} = uf_{k_m} \circ \varphi$ можно извлечь подпоследовательность $(uf_{k_{m_l}} \circ \varphi)_{l \in \mathbb{N}}$, сходящуюся в $\mathcal{B}^q$ (скажем, к g). По лемме 1 для всякого компакта $K \subset \mathbb{D}^n$ существует постоянная $C_K > 0$, не зависящая от f , для которой

$$|u(z)f_{k_{m_l}}(\varphi(z)) - g(z)| \leq C_K \|uf_{k_{m_l}} \circ \varphi - g\|_{\mathcal{B}^q}, \quad z \in K. \quad (17)$$

Из оценки (17) вытекает, что $u(z)f_{k_{m_l}}(\varphi(z)) - g(z) \rightarrow 0$ равномерно внутри $\mathbb{D}^n$ при $l \rightarrow \infty$. Поскольку для всякого компакта $K \subset \mathbb{D}^n$ выполнено $\sup_{z \in K} |u(z)| = M_K < \infty$, то

$$\sup_{z \in K} |u(z)f_{k_{m_l}}(\varphi(z))| \leq M_K \sup_{w \in \varphi(K)} |f_{k_{m_l}}(w)| \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty \quad (18)$$

(здесь использовано то, что $\varphi(K)$ – компактное подмножество $\mathbb{D}^n$). Значит, предельная функция g равна нулю. Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|uC_\varphi f_{k_{m_l}}\|_{\mathcal{B}^q} = 0. \quad (19)$$

Равенство (19) противоречит соотношению $\|uC_\varphi f_{k_{m_l}}\|_{\mathcal{B}^q} \geq \delta_0 > 0$, выполненному для всех $l \in \mathbb{N}$ (см. (16)). Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|uC_\varphi f_k\|_{\mathcal{B}^q} = 0,$$

что и требовалось.

Обратно, пусть $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность из шара $\mathcal{K}_M = B_{\mathcal{B}^p}(0, M)$ в пространстве $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (с центром в начале координат радиуса M). Так как $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|g_k\|_{\mathcal{B}^p} \leq M < \infty$, то $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ равномерно ограничена на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$ по лемме 1 и, следовательно, по теореме Монтеля она нормальна. Поэтому из нее можно извлечь подпоследовательность $(g_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$ к некоторой функции $g \in H(\mathbb{D}^n)$. В силу неравенства Коши $\frac{\partial g_{k_j}}{\partial z_l} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial z_l}$ равномерно внутри $\mathbb{D}^n$ для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$, так что $g \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ и $\|g\|_{\mathcal{B}^p} \leq M$. Значит, последовательность $(g_{k_j} - g)_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет неравенству $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|g_{k_j} - g\|_{\mathcal{B}^p} \leq 2M < \infty$ и сходится к нулю на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$. По условию

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|uC_\varphi g_{k_j} - uC_\varphi g\|_{\mathcal{B}^q} = 0. \quad (20)$$

Соотношение (20) означает, что множество $uC_\varphi(\mathcal{K}_M)$ относительно компактно, что и требовалось.

Следующая лемма является естественным обобщением теоремы, доказанной Харди и Литтлвудом в [31]. Доказательство леммы, а также несколько близких к ней результатов можно найти в [32].

ЛЕММА 3. Пусть $0 < p < 1$. Функция $f \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|^{1-p}, \quad z, w \in \overline{\mathbb{D}^n}. \quad (21)$$

Более того, нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p}$ и

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{1-p}} = |f(0)| + \sup_{z, w \in \mathbb{D}^n, z \neq w} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|^{1-p}}$$

эквивалентны.

Этот результат можно интерпретировать как равенство $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) = \mathcal{L}^{1-p}(\mathbb{D}^n)$, где

$$\mathcal{L}^{1-p}(\mathbb{D}^n) = \{f \in H(\mathbb{D}^n) \mid \|f\|_{\mathcal{L}^{1-p}} < \infty\}$$

– пространство Липшица в полидиске. Приведем несколько следствий из леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы 3 и следствия 1 получим следующую характеристику условий, при которых композиционные операторы, действующие из одного пространства Липшица в другое, ограничены.

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя и $p, q \in (0, 1)$. Оператор $C_\varphi: \mathcal{L}_p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда существует постоянная C , для которой

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^{1-q}}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^{1-p}} \leq C. \quad (22)$$

ЛЕММА 4. Пусть $0 < p < 1$. Тогда всякая ограниченная по норме последовательность $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $\mathbb{D}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность из $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, для которой $\|f_j\|_{\mathcal{B}^p} \leq C$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (21) имеем

$$|f_j(z) - f_j(w)| \leq C_1 |z - w|^{1-p}, \quad z, w \in \overline{\mathbb{D}^n}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что семейство $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ равностепенно непрерывно. По лемме 1 для всякой функции $f \in H(\mathbb{D}^n)$ выполнено $\|f\|_\infty \leq (1 + n/(1-p))\|f\|_{\mathcal{B}^p}$. В частности, семейство $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ограничено в $C(\overline{\mathbb{D}^n})$. Теперь требуемый результат получаем в силу теоремы Арцела–Асколи.

Лемма 4 позволяет усилить лемму 2. Доказательство следующего результата напоминает доказательство леммы 2 и поэтому мы его не приводим.

ЛЕММА 5. Пусть $p \in (0, 1)$, $u \in H(\mathbb{D}^n)$, а φ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя. Оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен тогда и только тогда, когда для всякой ограниченной последовательности $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, сходящейся к нулю равномерно на $\mathbb{D}^n$, имеет место сходимость $\|uC_\varphi f_j\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 6. Пусть $p \in (0, 1)$, а $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность, ограниченная по норме $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ и сходящаяся к нулю равномерно внутри $\mathbb{D}^n$. Тогда она сходится к нулю равномерно на $\mathbb{D}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, $r \in (1-\varepsilon, 1)$ и $w \in r\mathbb{D}^n$. Используя (21), получаем

$$|f_k(z)| \leq |f_k(w)| + C|z - w|^{1-p}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}^n}.$$

Так как $\sup_{w \in r\mathbb{D}^n} |f_k(w)| \rightarrow 0$ и для всякого $z \in \overline{\mathbb{D}^n} \setminus r\mathbb{D}^n$ существует w_z , для которого $|z - w_z| < n\varepsilon$, то имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}^n}} |f_k(z)| \leq C(n\varepsilon)^{1-p},$$

что приводит к требуемому результату.

Следующая лемма доказывается стандартно, с использованием n -ых частичных сумм тейлоровского разложения и простых вычислений.

ЛЕММА 7. Пусть $f \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ и $r \in (0, 1)$. Тогда $f_r(z) = f(rz) \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$ и $\|f_r\|_{\mathcal{B}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{B}^p}$.

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2 и следствий из них

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1, (а). Допустим сначала, что $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ и выполнено условие (1). Пусть $f \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $f \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$). В силу леммы 1 значение в точке $\varphi(0)$ является ограниченным линейным функционалом на $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, так что $|f(\varphi(0))| \leq C\|f\|_{\mathcal{B}^p}$, и поэтому

$$|uC_\varphi f(0)| = |u(0)| |f(\varphi(0))| \leq C|u(0)| \|f\|_{\mathcal{B}^p}. \quad (23)$$

Пусть

$$\begin{aligned} I_f(z) &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial((uC_\varphi f)(z))}{\partial z_k} \right| (1 - |z_k|^2)^q \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) f(\varphi(z)) + u(z) \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial \zeta_l}(\varphi(z)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) в силу следствия 9 и определения q -пространства Блоха вытекает, что

$$I_f(z) \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q |f(\varphi(z))| + |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta_l}(\varphi(z)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_\infty \|u\|_{\mathcal{B}^q} + \|f\|_{\mathcal{B}^p} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{B}^p} \left(C\|u\|_{\mathcal{B}^q} + \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (23) и (26) в силу (1) получаем ограниченность оператора $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$.

Пусть теперь $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – ограниченный оператор. Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\|uC_\varphi f\|_{\mathcal{B}^q} \leq C\|f\|_{\mathcal{B}^p}, \quad f \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n). \quad (27)$$

Положив $f \equiv 1 \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, получим, что $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$.

Зафиксировав l , $1 \leq l \leq n$, и $w \in \mathbb{D}^n$, будем использовать семейство тестовых функций $\{f_{w,l} \mid \varphi_l(w) \neq 0\}$ из $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, определенных равенством

$$f_{w,l}(z) = \frac{1}{\varphi_l(w)} \left(\frac{1 - |\varphi_l(w)|^2}{(1 - \overline{\varphi_l(w)} z_l)^p} - \frac{1}{(1 - \overline{\varphi_l(w)} z_l)^{p-1}} \right). \quad (28)$$

Докажем, что $f_{w,l} \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$ и $\|f_{w,l}\|_{\mathcal{B}^p} \leq 1 + 3p2^p$.

Так как

$$\frac{\partial f_{w,l}}{\partial z_l}(z) = \frac{p(1 - |\varphi_l(w)|^2)}{(1 - \overline{\varphi_l(w)} z_l)^{p+1}} - \frac{p-1}{(1 - \overline{\varphi_l(w)} z_l)^p}, \quad \frac{\partial f_{w,l}}{\partial z_j}(z) = 0, \quad j \neq l,$$

и $|f_{w,l}(0)| = |\varphi_l(w)|$, то

$$|f_{w,l}(0)| + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{w,l}}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^p \leq 1 + 3p2^p.$$

Поэтому $\|f_{w,l}\|_{\mathcal{B}^p} \leq 1 + 3p2^p$. С помощью формулы Тейлора и несложных оценок легко видеть, что $f_{w,l}$ является $\mathcal{B}^p$ -пределом своих n -ых тейлоровских полиномов, т.е. $f_{w,l} \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$.

Из (24) и (27) для любых $z \in \mathbb{D}^n$ и $w \in \mathbb{D}^n$ получаем

$$\sum_{k=1}^n \left| f_{w,l}(\varphi(z)) \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) + u(z) \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{w,l}}{\partial \zeta_s}(\varphi(z)) \frac{\partial \varphi_s}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \leq C(3p2^p + 1). \quad (29)$$

Поэтому в силу равенства $f_{w,l}(\varphi(w)) = 0$ имеем

$$|u(w)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial w_k}(w) \right| \frac{(1 - |w_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(w)|^2)^p} \leq C(3p2^p + 1) < \infty, \quad l \in \{1, \dots, n\},$$

где $w \in \mathbb{D}^n$ – любая точка. По непрерывности эта оценка сохраняется и при $\varphi_l(w) = 0$, что доказывает требуемый результат в данном случае.

(b) Заметим сначала, что условие (2) означает, что $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$. Поэтому по лемме 1, (b), (24), определению $\mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ и следствию 9 имеем

$$\begin{aligned} I_f(z) &\leq |f(\varphi(z))| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q + \|f\|_{\mathcal{B}^1} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \\ &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}^1} \|u\|_{\mathcal{B}^q} + C \|f\|_{\mathcal{B}^1} \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \sum_{l=1}^n \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \\ &\quad + \|f\|_{\mathcal{B}^1} |u(z)| \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z)|^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (23), учитывая условия (2) и (3), получаем, что оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен.

Пусть $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – ограниченный оператор. Используя тестовые функции (8) как и в п. (а), мы убеждаемся в выполнении условия (3). Докажем теперь условие (2). Пусть

$$g_{w,l}(z) = \ln \frac{1}{1 - \overline{\varphi_l(w)} z_l}, \quad l \in \{1, \dots, n\}, \quad w \in \mathbb{D}^n.$$

Так как при $k \neq l$

$$\frac{\partial g_{w,l}}{\partial z_k}(z) = 0, \quad \frac{\partial g_{w,l}}{\partial z_l}(z) = \frac{\overline{\varphi_l(w)}}{1 - \overline{\varphi_l(w)} z_l},$$

то

$$\|g_{w,l}\|_{\mathcal{B}^1} \leq \sup_{z \in \mathbb{D}^n} (1 - |z_l|^2) \left| \frac{\overline{\varphi_l(w)}}{1 - \overline{\varphi_l(w)} z_l} \right| \leq 2. \quad (31)$$

Поэтому $g_{w,l} \in \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$. Как и в случае функций (28), получаем, что $g_{w,l} \in \mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$.

Заметим, что

$$\frac{\partial g_{w,l}}{\partial z_l}(\varphi(w)) = \frac{\overline{\varphi_l(w)}}{1 - |\varphi_l(w)|^2}, \quad g_{w,l}(\varphi(w)) = \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(w)|^2}.$$

Используя последние равенства, а также (24), (27) (для $f = g_{w,l}$) и (31), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial w_k}(w)(1 - |w_k|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(w)|^2} \right| \\ & \leq C \|g_{w,l}\|_{\mathcal{B}^1} + |u(w)| \left| \sum_{k=1}^n \frac{\overline{\varphi_l(w)}}{1 - |\varphi_l(w)|^2} \frac{\partial \varphi_l}{\partial w_k}(w) \right| (1 - |w_k|^2)^q \\ & \leq 2C + \sup_{w \in \mathbb{D}^n} |u(w)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial w_k}(w) \right| \frac{(1 - |w_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(w)|^2}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения и условия (3) следует, что условие (2) выполнено.

(с) Из (24) в силу леммы 1, (с) и определения $\mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ получим

$$\begin{aligned} I(z) & \leq C \|f\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^{p-1}} \\ & \quad + \|f\|_{\mathcal{B}^p} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p}. \end{aligned} \quad (32)$$

Взяв верхнюю грань по $\mathbb{D}^n$ в (32) и используя условия (4), (5) и (23), установим ограниченность оператора $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$.

Пусть $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен. С помощью тестовых функций (28) мы убеждаемся в том, что выполнено условие (5). Докажем теперь условие (4). Будем использовать тестовые функции

$$h_{w,l}(z) = \frac{p}{(1 - \overline{\varphi_l(w)}z_l)^{p-1}} - \frac{(p-1)(1 - |\varphi_l(w)|^2)}{(1 - \overline{\varphi_l(w)}z_l)^p}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{w,l}}{\partial z_l}(z) & = \frac{p(p-1)\overline{\varphi_l(w)}}{(1 - \overline{\varphi_l(w)}z_l)^p} - \frac{(p-1)p\overline{\varphi_l(w)}(1 - |\varphi_l(w)|^2)}{(1 - \overline{\varphi_l(w)}z_l)^{p+1}}, \\ \frac{\partial h_{w,l}}{\partial z_k}(z) & = 0, \quad k \neq l, \end{aligned}$$

то справедлива оценка $\|h_{w,l}\|_{\mathcal{B}^p} \leq 3p(p-1)2^p + 2p - 1$.

Как и для функций (28), мы видим, что $h_{w,l} \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$. С другой стороны,

$$h_{w,l}(\varphi(w)) = \frac{1}{(1 - |\varphi_l(w)|^2)^{p-1}}, \quad \frac{\partial h_{w,l}}{\partial z_l}(\varphi(w)) = 0.$$

Учитывая (24) и (27) (для $f = h_{w,l}$), получаем

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial w_k}(z)(1 - |w_k|^2)^q \frac{1}{(1 - |\varphi_l(w)|^2)^{p-1}} \right| \leq C \|h_{w,l}\|_{\mathcal{B}^p} \leq C(3p(p-1)2^p + 2p - 1)$$

для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$, откуда следует, что выполнено условие (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Положив $u \equiv 1$ в теореме 1, мы убеждаемся в том, что условия (2) и (4) выполняются автоматически. Кроме того, $u \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, $p \in (0, \infty)$. Условия (1), (3) и (5) объединяются в (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Допустим сначала, что $q < p$. Положив $\varphi(z) = z$, из теоремы 1 получаем, что

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k|^2)^{q-p} = M < \infty. \quad (33)$$

Зафиксируем $z'_l = (z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^{n-1}$ и пусть $u_{z'_l}(z_l)$ – функция, полученная из u фиксацией z'_l . Тогда из (33) следует, что

$$|u(z)| \leq M(1 - |z_l|^2)^{p-q}, \quad z_l \in \mathbb{D}.$$

Пусть $|z_l| \rightarrow 1$. Тогда по принципу максимума модуля

$$u_{z'_l}(z_l) = 0, \quad z_l \in \mathbb{D}.$$

Так как $z'_l \in \mathbb{D}^{n-1}$ может быть любым, то $u(z) \equiv 0$.

Пусть теперь $p \in (0, 1)$ и $p \leq q < 1$. По теореме 1 и лемме 1, (а) имеем

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k|^2)^{q-p} \leq n \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| = n \|u\|_\infty \leq C \|u\|_{\mathcal{B}^q},$$

так что в этом случае условие $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ влечет за собой условие (1).

Допустим теперь, что $p = q \geq 1$. Тогда неравенство (3) или (5) означает, что $u \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$. При $p = 1$ требуемый результат вытекает из теоремы 1. Кроме того, при $p > 1$ в силу (4) выполнено $u \in \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$. Используя эти замечания и известное вложение $H^\infty(\mathbb{D}^n) \subset \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$, получаем, что $u \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$, как и требовалось.

Другие случаи непосредственно следуют из теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2, (а). Допустим сначала, что выполнены условия (7) и (8) и оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен. Докажем, что оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен. Пусть $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность, для которой $\|f_j\|_{\mathcal{B}^1} \leq M$, $j \in \mathbb{N}$, и пусть $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится к нулю на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$. Мы должны доказать, что $\|uC_\varphi f_j\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Как следует из (7) и (8), для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое r , $0 < r < 1/(2e)$, что

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z)|^2} < \varepsilon, \quad (34)$$

$$|u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z)|^2} < \varepsilon \quad (35)$$

при $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) < r$.

Поскольку $0 < r < 1/(2e)$, то

$$1 \leq \sum_{l=1}^n \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \quad (36)$$

при $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) < r$.

Поэтому из (34) и (36) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q < \varepsilon \quad (37)$$

при $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) < r$.

Из (24), леммы 1, (b), определения $\mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$, (34), (35) и (37) следует, что для достаточно больших j

$$\begin{aligned} I_{f_j}(z) &\leq C_1 \|f_j\|_{\mathcal{B}^1} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \ln \frac{e}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \\ &\quad + C_1 \|f_j\|_{\mathcal{B}^1} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \\ &\leq (n+2)C_1 \varepsilon \|f_j\|_{\mathcal{B}^1} \leq (n+2)C_1 M \varepsilon \end{aligned} \quad (38)$$

при $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) < r$.

Пусть $E_r = \{w \in \mathbb{D}^n \mid \text{dist}(w, \partial \mathbb{D}^n) \geq r\}$. Так как E_r – замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{D}^n$, то оно компактно и поэтому $f_j(w) \rightarrow 0$ равномерно на E_r при $j \rightarrow \infty$. В силу неравенства Коши $\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(w) \rightarrow 0$ равномерно на E_r при $j \rightarrow \infty$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Так как оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен, то $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$. С другой стороны, из теоремы 1, (b) следует, что условие (3) выполнено.

Учитывая замечания и (24), получаем, что

$$\begin{aligned} I_{f_j}(z) &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q |f_j(\varphi(z))| \\ &\quad + |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_l}(\varphi(z)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{B}^q} \sup_{w \in E_r} |f_j(w)| \\ &\quad + \left(\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \right) \max_{l=1,n} \sup_{w \in E_r} \left| \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_l}(w) \right| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (39)$$

при $j \rightarrow \infty$, если только $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) \geq r$.

Поскольку $\lim_{j \rightarrow \infty} u(0)f_j(\varphi(0)) = 0$, то, объединяя (38) и (39), приходим к равенству

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|uC_\varphi f_j\|_{\mathcal{B}^q} = 0,$$

так что оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен.

Необходимость в (a) и (b). Имеем $p \geq 1$. Предположим, что оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен. Ясно, что тогда $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен.

Докажем сначала, что неравенство (10) выполнено при $p \geq 1$ (это будет означать, что при $p = 1$ выполнено (8)).

Предположим, что (10) не выполнено, так что имеется последовательность $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{D}^n$, удовлетворяющая условию $w^j = \varphi(z^j) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n$, $j \rightarrow \infty$, и имеется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$|u(z^j)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^p} \geq \varepsilon_0, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (40)$$

Поскольку uC_φ – ограниченный оператор, то по теореме 1 выполнено условие (5) (соответственно условие (3) в случае $p = 1$). Значит, в $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ существует такая подпоследовательность (для которой будем использовать то же обозначение $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$), что определен конечный предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |u(z^j)| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^p}, \quad k, l \in \{1, \dots, n\}.$$

Мы также можем считать, что для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$ определен конечный предел $\lim_{j \rightarrow \infty} |w_l^j| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_l(z^j)|$. В силу (40) можно считать без ограничения общности, что $l = 1$ и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |u(z^j)| \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{k_0}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_0}^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_1(z^j)|^2)^p} = \varepsilon_1 > 0 \quad (41)$$

для некоторого $k_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Построим последовательность функций $(\widehat{f}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (a) $(\widehat{f}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ – ограниченная последовательность в $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ и даже в $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$;
- (b) $(\widehat{f}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$;
- (c) $\|uC_\varphi \widehat{f}_j\|_{\mathcal{B}^q} \not\rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

(42)

В силу леммы 2 это будет противоречить компактности оператора uC_φ : по этой лемме условие (8) необходимо для компактности $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$.

Случай 1. Допустим сначала, что $|w_1^j| \rightarrow 1$, $j \rightarrow \infty$. Пусть

$$\widehat{f}_{w_1^j}(z) = \frac{(1 - |w_1^j|^2)^2}{(1 - z_1 \overline{w_1^j})^{p+1}} - \frac{1 - |w_1^j|^2}{(1 - z_1 \overline{w_1^j})^p}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (43)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{f}_{w_1^j}}{\partial z_k}(z) &= 0, \quad k \neq 1, \\ \frac{\partial \widehat{f}_{w_1^j}}{\partial z_1}(z) &= (p+1) \overline{w_1^j} \frac{(1 - |w_1^j|^2)^2}{(1 - z_1 \overline{w_1^j})^{p+2}} - p \overline{w_1^j} \frac{(1 - |w_1^j|^2)}{(1 - z_1 \overline{w_1^j})^{p+1}}, \end{aligned}$$

так что

$$\|\widehat{f}_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^p} = |\widehat{f}_{w_1^j}(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n (1 - |z_k|^2)^p \left| \frac{\partial \widehat{f}_{w_1^j}}{\partial z_k}(z) \right| \leq 1 + (3p+2)2^{p+1},$$

т.е. последовательность $(\widehat{f}_{w_1^j})_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена в $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$. Как и в случае функций из (28), имеем $\widehat{f}_{w_1^j} \in \mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n)$, $j \in \mathbb{N}$.

Ясно, что $(\widehat{f}_{w_1^j})_{j \in \mathbb{N}}$ стремится к нулю равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$. Кроме того,

$$\widehat{f}_{w_1^j}(w_1^j) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{f}_{w_1^j}}{\partial z_1}(w^j) = \frac{\overline{w_1^j}}{(1 - |w_1^j|^2)^p}.$$

Покажем, что $\|uC_\varphi \widehat{f}_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^q} \not\rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Пусть

$$J_{\widehat{f}_{w_1^j}}(z^j) = |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial \widehat{f}_{w_1^j}}{\partial z_1}(\varphi(z^j)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|uC_\varphi \widehat{f}_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^q} &\geq J_{\widehat{f}_{w_1^j}}(z^j) = |w_1^j| |u(z^j)| \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |w_1^j|^2)^p} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right| \\ &\geq |w_1^j| |u(z^j)| \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{k_0}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_0}^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_1(z^j)|^2)^p} \rightarrow \varepsilon_1 > 0 \end{aligned} \quad (44)$$

при $j \rightarrow \infty$, что и доказывает требуемый результат в рассматриваемом случае.

Случай 2. Пусть $|w_1^j| \rightarrow \rho < 1$, $j \rightarrow \infty$. Поскольку $w^j \rightarrow \partial \mathbb{D}^n$, то существует $l \in \{2, \dots, n\}$, для которого $|w_l^j| \rightarrow 1$, $j \rightarrow \infty$.

Если для некоторых $k_1 \in \{1, \dots, n\}$ и $\varepsilon_2 > 0$ выполнено

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |u(z^j)| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_{k_1}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_1}^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^p} = \varepsilon_2 > 0,$$

то мы приходим к противоречию, используя тестовые функции

$$g_{w_l^j}(z) = \frac{(1 - |w_l^j|^2)^2}{(1 - z_l \overline{w_l^j})^{p+1}} - \frac{1 - |w_l^j|^2}{(1 - z_l \overline{w_l^j})^p}, \quad j \in \mathbb{N},$$

как и в случае 1. Поэтому будем предполагать, что для выбранного l

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |u(z^j)| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^p} = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (45)$$

Пусть

$$f_{w_l^j}^*(z) = (z_1 + 2) \left(\frac{1 - |w_l^j|^2}{1 - z_l \overline{w_l^j}} \right)^p, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (46)$$

Так как

$$\frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial z_k} = 0, \quad k \neq 1, l, \quad \frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial z_1} = \left(\frac{1 - |w_l^j|^2}{1 - z_l \overline{w_l^j}} \right)^p, \quad \frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial z_l} = p(z_1 + 2) \overline{w_l^j} \frac{(1 - |w_l^j|^2)^p}{(1 - z_l \overline{w_l^j})^{p+1}},$$

то

$$\|f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^p} = |f_{w_l^j}^*(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n (1 - |z_k|^2)^p \left| \frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial z_k}(z) \right| \leq 2 + 2^p + 3p2^{p+1} < \infty,$$

т.е. $f_{w_l^j}^* \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, и, кроме того, $(f_{w_l^j}^*)_{j \in \mathbb{N}}$ – ограниченная последовательность в $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$. Как и в случае функций из (28) имеем $f_{w_l^j}^* \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$, $j \in \mathbb{N}$.

Заметим, что

$$\frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial \zeta_1}(\varphi(z^j)) = \left(\frac{1 - |w_l^j|^2}{1 - w_l^j \overline{w_l^j}} \right)^p = 1, \quad \frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial \zeta_l}(\varphi(z^j)) = \frac{p(2 + w_l^j) \overline{w_l^j}}{1 - |w_l^j|^2}.$$

Так как при $|z| \leq r < 1$ выполнено неравенство

$$|f_{w_l^j}^*(z)| \leq (2 + r) \left(\frac{1 - |w_l^j|^2}{1 - r} \right)^p, \quad j \in \mathbb{N},$$

то $f_{w_l^j}^* \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$.

Легко также видеть, что

$$\|f_{w_l^j}^*\|_\infty \leq 3 \cdot 2^p. \quad (47)$$

Покажем, что $\|uC_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} \not\rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Пусть

$$L_j = |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial \zeta_1}(\varphi(z^j)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right| = |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right|.$$

Теперь из (24), определения $\|uC_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q}$, (47) и неравенства $p \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} L_j &\leq |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial f_{w_l^j}^*}{\partial \zeta_l}(\varphi(z^j)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \\ &\quad + \|uC_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} + |f_{w_l^j}^*(\varphi(z^j))| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q \\ &\leq 3p |u(z^j)| \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z^j)|^2} \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \\ &\quad + \|uC_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} + \|f_{w_l^j}^*\|_\infty \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q \\ &\leq 3p |u(z^j)| \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^p} \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \\ &\quad + \|uC_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} + 3 \cdot 2^p \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q. \end{aligned} \quad (48)$$

Так как оператор uC_φ ограничен, то выполняется (2) или (4). Значит,

$$\lim_{\varphi(z) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q = 0; \quad (49)$$

в частности,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q = 0.$$

Допустим, что, наоборот, $\|uC_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Пусть $j \rightarrow \infty$ в (48). Тогда, используя (45) и (49), получим, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} L_j = \lim_{j \rightarrow \infty} |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right| = 0.$$

Так как $|w_1^j| \leq \rho < 1$, то для достаточно больших j выполнены следующие оценки:

$$0 < C_\rho \varepsilon_1 \leq C_\rho |u(z^j)| \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{k_0}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_0}^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_1(z^j)|^2)^p} \leq |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right|, \quad (50)$$

где, например, можно выбрать $C_\rho = (1 - \rho^2)^p$. Однако (50) противоречит сходимости $\lim_{j \rightarrow \infty} L_j = 0$.

С другой стороны, должно выполняться равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |u(z^j)| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_{k_1}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_1}^j|^2)^q}{(1 - |w_l^j|^2)^p} = 0.$$

Из сказанного следует, что равенство (8) выполнено для любого $p \geq 1$.

Докажем теперь равенства (7) и (9). Пусть сначала $p > 1$. Предположим, что (9) не выполняется, так что есть последовательность $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ точек из $\mathbb{D}^n$, удовлетворяющая условию $\omega^j = \varphi(z^j) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n$, $j \rightarrow \infty$, и имеется такое $\varepsilon_3 > 0$, что

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^{p-1}} \geq \varepsilon_3, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Так как оператор uC_φ ограничен, то по теореме 1 выполнено (4). Значит, на некоторой подпоследовательности $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ (для которой мы снова используем обозначения $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ для любых $k, l \in \{1, \dots, n\}$ выражение

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^{p-1}}$$

имеет конечный предел при $j \rightarrow \infty$, так что для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$ существует конечный предел $\lim_{j \rightarrow \infty} |w_l^j| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_l(z^j)|$. Можно считать без ограничения общности, что $l = 1$ и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z_{k_0}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_0}^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_1(z^j)|^2)^{p-1}} = \varepsilon_4 > 0 \quad (52)$$

для некоторого $k_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Как и выше, построим последовательность функций $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющих (42), и с их помощью получим противоречие с утверждением леммы 2.

Случай 1. Пусть $|w_1^j| \rightarrow 1$, $j \rightarrow \infty$. Используем следующие тестовые функции:

$$g_{w_1^j}(z) = (p+1) \frac{1 - |w_1^j|^2}{(1 - \bar{w}_1^j z_1)^p} - p \frac{(1 - |w_1^j|^2)^2}{(1 - \bar{w}_1^j z_1)^{p+1}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial g_{w_1^j}}{\partial z_k}(z) = 0, \quad k \neq 1, \quad \frac{\partial g_{w_1^j}}{\partial z_1}(\varphi(z^j)) = 0, \quad g_{w_1^j}(\varphi(z^j)) = \frac{1}{(1 - |w_1^j|^2)^{p-1}}. \quad (53)$$

Кроме того, последовательность $(g_{w_1^j})_{j \in \mathbb{N}}$ равномерно ограничена, поскольку

$$\sup_{w \in \mathbb{D}} \|g_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^p} \leq 2p + 1 + 3p(p+1)2^{p+1} < \infty.$$

Как и в случае функций из (28), получим $g_{w_1^j} \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$. Легко видеть, что последовательность $(g_{w_1^j})_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю равномерно внутри $\mathbb{D}^n$. Из леммы 2 следовало бы, что $\|uC_\varphi g_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, а из (24) и (52) вытекает, что

$$\begin{aligned} C\|uC_\varphi g_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^q} &\geq \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) g_{w_1^j}(\varphi(z^j)) + u(z) \sum_{l=1}^n \frac{\partial g_{w_1^j}}{\partial \zeta_l}(\varphi(z^j)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_1(z^j)|^2)^{p-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| \geq \varepsilon_4 > 0 \end{aligned} \quad (54)$$

для достаточно больших j , что приводит к противоречию.

Случай 2. Предположим, что $|w_1^j| \rightarrow \rho < 1$, $j \rightarrow \infty$. Так как $w^j \rightarrow \partial \mathbb{D}^n$, то для некоторого $l \in \{2, \dots, n\}$ имеем $|w_l^j| \rightarrow 1$, $j \rightarrow \infty$.

Если существуют $k_1 \in \{1, \dots, n\}$ и $\varepsilon_5 > 0$, для которых

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z_{k_1}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_1}^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^{p-1}} = \varepsilon_5 > 0,$$

то мы придем к противоречию, как и в случае 1, с помощью следующих тестовых функций:

$$g_{w_l^j}(z) = (p+1) \frac{1 - |w_l^j|^2}{(1 - \overline{w_l^j} z_l)^p} - p \frac{(1 - |w_l^j|^2)^2}{(1 - \overline{w_l^j} z_l)^{p+1}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Итак, для выбранного выше l можно считать, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^{p-1}} = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (55)$$

Используя функции из (46), ограниченность оператора uC_φ , (24) и условие $p > 1$, получаем

$$\begin{aligned} &|w_1^j + 2| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q \\ &\leq C\|uC_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} + |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right| \\ &\quad + 3p|u(z^j)| \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{1 - |\varphi_l(z^j)|^2} \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|u C_\varphi f_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} + |u(z^j)| \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(z^j) \right| \\
&\quad + 3p |u(z^j)| \sum_{k,l=1}^n \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z^j)|^2)^p} \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{56}$$

при $j \rightarrow \infty$ в силу условия (8).

С другой стороны, так как $|w_1^j| \leq \rho < 1$ и $p > 1$, то

$$\frac{\varepsilon_4}{2} < \left| \frac{\partial u}{\partial z_{k_0}}(z^j) \right| \frac{(1 - |z_{k_0}^j|^2)^q}{(1 - |\varphi_1(z^j)|^2)^{p-1}} \leq C \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q$$

для достаточно больших j , что противоречит (56).

Пусть теперь $p = 1$. Докажем, что условие (7) выполнено. Предположим противное, т.е. что (7) не выполнено и имеется последовательность $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ точек из $\mathbb{D}^n$, удовлетворяющая условию $\omega^j = \varphi(z^j) \rightarrow \partial \mathbb{D}^n$, $j \rightarrow \infty$, и имеется такое $\varepsilon_6 > 0$, что

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z^j)|^2} \geq \varepsilon_6, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{57}$$

Так как оператор $u C_\varphi$ ограничен, то условие (2) выполнено по теореме 1. Значит, для любых $k, l \in \{1, \dots, n\}$ из $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ можно извлечь подпоследовательность (также обозначаемую через $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$), для которой пределы

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z^j)|^2}$$

конечны для всех $k, l \in \{1, \dots, n\}$ и для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$ предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |w_l^j| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_l(z^j)|$$

тоже конечен. Без ограничения общности можно считать, что $l = 1$ и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z_{k_0}}(z^j) \right| (1 - |z_{k_0}^j|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_1(z^j)|^2} = \varepsilon_7 > 0 \tag{58}$$

для некоторого $k_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Случай 1. Допустим, что $|w_1^j| \rightarrow 1$, $j \rightarrow \infty$. Будем использовать тестовые функции

$$h_{w_1^j}(z) = \frac{3}{a_j} \left(\ln \frac{1}{1 - \overline{w_1^j} z_1} \right)^2 - \frac{2}{a_j^2} \left(\ln \frac{1}{1 - \overline{w_1^j} z_1} \right)^3, \quad z \in \mathbb{D}^n,$$

где $a_j = \ln 1/(1 - |w_1^j|^2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_{w_1^j}}{\partial z_1}(z) &= \frac{6\overline{w_1^j}}{1 - \overline{w_1^j} z_1} \left(\frac{1}{a_j} \left(\ln \frac{1}{1 - \overline{w_1^j} z_1} \right) - \frac{1}{a_j^2} \left(\ln \frac{1}{1 - \overline{w_1^j} z_1} \right)^2 \right), \\
\frac{\partial h_{w_1^j}}{\partial z_k}(z) &= 0, \quad k \neq 1.
\end{aligned}$$

Несложно видеть, что для некоторой постоянной $M > 0$ выполнено $\|h_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^p} \leq M < \infty$.

Теперь для $z = \varphi_1(z^j)$ получаем

$$\frac{\partial h_{w_1^j}}{\partial z_1}(\varphi(z^j)) = 0, \quad h_{w_1^j}(\varphi(z^j)) = \ln \frac{1}{1 - |\varphi_1(z^j)|^2}.$$

Как и в случае функций из (28), выводим, что $h_{w_1^j} \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$, $j \in \mathbb{N}$.

Из сказанного выше, (24) и ограниченности оператора uC_φ следует, что

$$\begin{aligned} C\|uC_\varphi h_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^q} &\geq \sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) h_{w_1^j}(\varphi(z^j)) \right. \\ &\quad \left. + u(z^j) \sum_{l=1}^n \frac{\partial h_{w_1^j}}{\partial z_l}(\varphi(z^j)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_1(z^j)|^2} \geq \frac{\varepsilon_7}{2} > 0 \end{aligned} \quad (59)$$

для достаточно больших j . Значит, $\|uC_\varphi h_{w_1^j}\|_{\mathcal{B}^q} \not\rightarrow 0$, что и обеспечивает требуемый результат в этом случае.

Случай 2. Допустим, что $|w_1^j| \rightarrow \rho < 1$, $j \rightarrow \infty$. Так как $w^j \rightarrow \partial \mathbb{D}^n$, то существует $l \in \{2, \dots, n\}$, для которого $|w_l^j| \rightarrow 1$, $j \rightarrow \infty$.

Если можно найти $k_1 \in \{1, \dots, n\}$ и $\varepsilon_8 > 0$, для которых

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z_{k_1}}(z^j) \right| (1 - |z_{k_1}^j|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z^j)|^2} = \varepsilon_8 > 0,$$

то мы приходим к противоречию, используя следующие тестовые функции:

$$h_{w_l^j}(z) = \frac{3}{b_j} \left(\ln \frac{1}{1 - w_l^j z_l} \right)^2 - \frac{2}{b_j^2} \left(\ln \frac{1}{1 - w_l^j z_l} \right)^3, \quad j \in \mathbb{N},$$

где $b_j = \ln(1/(1 - |w_l^j|^2))$, аналогично случаю 1.

Значит, для выбранного l можно считать, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_l(z^j)|^2} = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (60)$$

Используя тестовые функции (46) как в случае $p > 1$, мы видим, что оценка (56) выполнена и с $p = 1$. С другой стороны, так как $|w_1^j| \leq \rho < 1$, то

$$\frac{\varepsilon_7}{2} < \left| \frac{\partial u}{\partial z_{k_0}}(z^j) \right| (1 - |z_{k_0}^j|^2)^q \ln \frac{1}{1 - |\varphi_1(z^j)|^2} \leq C \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q$$

для достаточно больших j . Это противоречит (56), что завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2, (b). Достаточность. Пусть выполнены условия (9) и (10) и оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен. Докажем, что оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен. Как обычно, предположим, что последовательность $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию

$\|f_j\|_{\mathcal{B}^p} \leq M$, $j \in \mathbb{N}$, и сходится к нулю равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}^n$. Мы должны доказать, что $\|uC_\varphi f_j\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Из (9) и (10) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует r , $0 < r < 1$, такое, что

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^{p-1}} < \varepsilon,$$

$$|u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} < \varepsilon$$

при $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) < r$.

Отсюда в силу (24), леммы 1, (с) и определения $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ получаем, что для достаточно больших j

$$\begin{aligned} I_{f_j}(z) &\leq C_1 \|f_j\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^{p-1}} \\ &\quad + C_1 \|f_j\|_{\mathcal{B}^p} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \\ &\leq 2C_1 \varepsilon \|f_j\|_{\mathcal{B}^p} \leq 2C_1 M \varepsilon \end{aligned} \quad (61)$$

при $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) < r$.

Из доказательства п. (а) мы знаем, что $f_j(w) \rightarrow 0$ равномерно на E_r при $j \rightarrow \infty$, а $\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(w) \rightarrow 0$ равномерно на E_r при $j \rightarrow \infty$ для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$.

Так как $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен, то $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$. С другой стороны, по теореме 1, (с) получаем, что условие (5) выполнено.

Отсюда, используя (24), имеем

$$\begin{aligned} I_{f_j}(z) &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q |f_j(\varphi(z))| \\ &\quad + |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_l}(\varphi(z)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{B}^q} \sup_{w \in E_r} |f_j(w)| \\ &\quad + \left(\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \right) \max_{l=1, \dots, n} \sup_{w \in E_r} \left| \frac{\partial f_j}{\partial \zeta_l}(w) \right| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (62)$$

при $j \rightarrow \infty$, если только $\text{dist}(\varphi(z), \partial \mathbb{D}^n) \geq r$.

Так как верно равенство $\lim_{j \rightarrow \infty} u(0)f_j(\varphi(0)) = 0$, оценки (61) и (62), то $\lim_{j \rightarrow \infty} \|uC_\varphi f_j\|_{\mathcal{B}^q} = 0$. Поэтому $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – компактный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2, (с). Предположим сначала, что оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен и условие (11) выполнено. Мы докажем, что $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен. Пусть $\|f_j\|_{\mathcal{B}^p} \leq C$, $j \in \mathbb{N}$, и пусть последовательность $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю равномерно в $\mathbb{D}^n$. Покажем, что $\|uC_\varphi f_j\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Заметим, что при $f_l(z) = z_l \in \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$, $l \in \{1, \dots, n\}$, имеем

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \varphi_l(z) + u(z) \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q = M < \infty,$$

а значит, для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$ в силу условия $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ верны оценки

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \\ & \leq \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \right) \|\varphi_l\|_\infty + M < \infty. \end{aligned} \quad (63)$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и $l \in \{1, \dots, n\}$ из (11) следует существование такого r , $0 < r < 1$, что

$$|u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} < \varepsilon \quad (64)$$

при $|\varphi_l(z)| > r$.

Так как для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$ верно неравенство

$$\begin{aligned} I_{f_j}(z) & \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q |f_j(\varphi(z))| \\ & \quad + |u(z)| \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial w_l}(\varphi(z)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \end{aligned}$$

и $u \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$, то достаточно для каждого $l \in \{1, \dots, n\}$ оценить выражение

$$|u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial w_l}(\varphi(z)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q,$$

так как по предположению $f_j(\varphi(z)) \rightarrow 0$ равномерно на $\overline{\mathbb{D}^n}$.

Из (64) и оценки $\|f_j\|_{\mathcal{B}^p} \leq C$ при $|\varphi_l(z)| > r$ для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} & |u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial w_l}(\varphi(z)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \\ & \leq \|f_j\|_{\mathcal{B}^p} \sum_{k=1}^n |u(z)| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \leq C\varepsilon. \end{aligned} \quad (65)$$

С другой стороны, отсюда и из (63) следует, что для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$\sup_{|\varphi_l(z)| \leq r} |u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial w_l}(\varphi(z)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \leq C \sup_{|\varphi_l(z)| \leq r} \left| \frac{\partial f_j}{\partial w_l}(\varphi(z)) \right|. \quad (66)$$

Применяя неравенство Коши к функции одного переменного

$$g(w_l) = f(w_1, \dots, w_{l-1}, w_l, w_{l+1}, \dots, w_n)$$

при $|w_l| \leq r$, получаем, что

$$\left| \frac{\partial f}{\partial w_l}(w) \right| \leq C \sup_{|w_l| \leq (1+r)/2} |f(w)| \leq C \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |f(z)|$$

с константой $C > 0$, не зависящей от f .

По предположению $\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |f_j(z)| \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Теперь применим последнюю оценку к функциям $\frac{\partial f_j}{\partial w_l}$ и из (66) получим

$$\sup_{|\varphi_l(z)| \leq r} |u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial w_l}(\varphi(z)) \right| \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \rightarrow 0, \quad (67)$$

$$j \rightarrow \infty, \quad l \in \{1, \dots, n\}.$$

Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} u(0)f_j(\varphi(0)) = 0$, то из (65) и (67) следует, что $\|uC_\varphi f_j\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (Или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – компактный оператор. Тогда $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен и, как мы знаем из теоремы 1, (а), выполнено (1). Докажем, что условие (11) выполняется для $l \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $(z^j)_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность точек из $\mathbb{D}^n$ и для $w^j = \varphi(z^j) = (w_1^j, \dots, w_n^j)$ выполнено $\lim_{j \rightarrow \infty} |w_l^j| = 1$.

Пусть

$$h_{w_l^j}^*(z) = \frac{1 - |w_l^j|^2}{(1 - z_l \overline{w_l^j})^p}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что $\|h_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^p} \leq 1 + 2^{p+1}p$, $j \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность $(h_{w_l^j}^*)_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена в $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ и, более того, в $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$ для всех $l \in \{1, \dots, n\}$. Кроме того, $(h_{w_l^j}^*)_{j \in \mathbb{N}}$ стремятся к нулю равномерно внутри $\mathbb{D}^n$ при $j \rightarrow \infty$. Значит, $\|uC_\varphi h_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, по лемме 2 и поэтому

$$\sum_{k=1}^n (1 - |z_k^j|^2)^q \left| u(z) \sum_{l=1}^n \frac{\partial h_{w_l^j}^*}{\partial \zeta_l}(\varphi(z^j)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) + h_{w_l^j}^*(\varphi(z^j)) \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right|$$

$$\leq \|uC_\varphi h_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$|u(z)| \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k^j|^2)^q}{(1 - |w_l^j|^2)^p} \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z^j) \right|$$

$$\leq \frac{1}{p|w_l^j|} (1 - |w_l^j|^2)^{1-p} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial z_k}(z^j) \right| (1 - |z_k^j|^2)^q + \frac{1}{p|w_l^j|} \|uC_\varphi h_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q}$$

$$\leq \frac{1}{p|w_l^j|} (1 - |w_l^j|^2)^{1-p} \|u\|_{\mathcal{B}^q} + \frac{1}{p|w_l^j|} \|uC_\varphi h_{w_l^j}^*\|_{\mathcal{B}^q} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Так как $l \in \{1, \dots, n\}$ может быть любым, то приходим к требуемому результату.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Эквивалентность (а) $\iff$ (б) – прямое следствие теоремы 2. Поскольку $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен, то $\varphi_l(z) \in \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$, $l \in \{1, \dots, n\}$, и поэтому (б) $\implies$ (с). Наконец, тот факт, что (а) следует из (с), вытекает из доказательства теоремы 2, (а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Оно непосредственно следует из теоремы 2, (с).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5. Из формулы для $H_z(u, \bar{u})$ получаем, что условие $H_z(u, \bar{u}) \leq CH_{\varphi(z)}(J\varphi(z)u, \overline{J\varphi(z)u})$ эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^n \frac{|u_k|^2}{(1 - |z_k|^2)^2} \leq C \sum_{l=1}^n \frac{\left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k} u_k \right|^2}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^2}.$$

В силу очевидного неравенства, взяв $u_k = 1 - |z_k|^2, k = 1, \dots, n$, получаем

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k|^2)^2}{(1 - |z_k|^2)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{|u_k|^2}{(1 - |z_k|^2)^2} \leq C \sum_{l=1}^n \frac{\left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k} \right| |u_k| \right)^2}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^2} \\ &\leq C \left(\sum_{l=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k} \right| |u_k|}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \right)^2 = C \left(\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k} \right| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Это соотношение и условия $q \in (0, 1], p \geq 1$ дают оценку

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k} \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \geq \sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k} \right| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \geq \sqrt{\frac{n}{C}}, \quad z \in \mathbb{D}^n.$$

Теперь требуемый результат получается из следствия 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6. Как известно, если $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D}^n)$, то

$$H_z(u, \bar{u}) = H_{\varphi(z)}(J\varphi(z)u, \overline{J\varphi(z)u}), \quad z \in \mathbb{D}^n, \quad u \in \mathbb{C}^n.$$

Значит, в силу следствия 5 если $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D}^n)$, то $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – некомпактный оператор при $q \in (0, 1], p \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 7. Из условия следствия получаем

$$\sum_{k,l=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \leq \sum_{l=1}^n \frac{\|\varphi_l\|_{\mathcal{B}^q}^q}{(1 - \|\varphi_l\|_\infty^2)^p} < \infty.$$

Таким образом, согласно следствию 1 оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен. С другой стороны, поскольку $\|\varphi_l\|_\infty < 1, l \in \{1, \dots, n\}$, то условия следствия 3 тривиальным образом выполняются и мы приходим к требуемому результату.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 8. По лемме Шварца для полидиска существует постоянная $C > 0$, с которой выполнено неравенство

$$H_{\varphi(z)}(J\varphi(z)u, \overline{J\varphi(z)u}) \leq CH_z(u, \bar{u}), \quad z \in \mathbb{D}^n, \quad u \in \mathbb{C}^n,$$

т.е.

$$\sum_{l=1}^n \frac{\left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k} u_k \right|^2}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^2} \leq C \sum_{k=1}^n \frac{|u_k|^2}{(1 - |z_k|^2)^2}.$$

Положив

$$u^{(k)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1 - |z_k|^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

получаем

$$\sum_{l=1}^n \frac{|\frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(1 - |z_k|^2)|^2}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^2} \leq C, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

откуда, очевидно, следует, что

$$\left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)}{1 - |\varphi_l(z)|^2} \leq C, \quad k, l \in \{1, \dots, n\}.$$

Из этого неравенства и условия $q \geq 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \leq C \sum_{k=1}^n (1 - |z_k|^2)^{q-1} (1 - |\varphi_l(z)|^2)^{1-p} \leq Cn.$$

Теперь следствие 1 позволяет доказать ограниченность $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$. С другой стороны, предполагая, что $|\varphi_l(z)| \rightarrow 1$ в неравенстве

$$\left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} \leq C(1 - |\varphi_l(z)|^2)^{1-p}, \quad k, l \in \{1, \dots, n\},$$

получаем, что выполнено условие (11) из теоремы 2 (здесь используется то, что $p \in (0, 1)$), так что по теореме 2, (с) оператор $C_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ (или $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$) $\rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – компактный.

§ 4. Малое p -пространство Блоха

В этом параграфе мы сформулируем и докажем соответствующие результаты относительно малого p -пространства Блоха. Первые из них касаются ограниченности оператора $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, а $p, q > 0$. Тогда верны следующие утверждения.

- (а) Если $p \in (0, 1)$, то оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q$ для всякого мультииндекса γ и выполнено (1).
- (б) Оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^1(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q$ для всякого мультииндекса γ и выполнены условия (2), (3).
- (с) Если $p > 1$, то оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен тогда и только тогда, когда $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q$ для всякого мультииндекса γ и выполнены условия (4), (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Из условий (1)–(5) по теореме 1 получаем, что оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен. В частности,

$$\|uC_\varphi f\|_{\mathcal{B}^q} \leq \|uC_\varphi\|_{\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)} \|f\|_{\mathcal{B}^p}, \quad f \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n). \quad (68)$$

Ограниченность оператора $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ будет очевидна, как только мы докажем, что $uC_\varphi f \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$, $f \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$. Итак, пусть $f \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$. По определению $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$ для всякого $\varepsilon > 0$ имеется такой полином p_ε , что $\|f - p_\varepsilon\|_{\mathcal{B}^p} < \varepsilon$. Поэтому, используя (68), получаем

$$\|uC_\varphi f - uC_\varphi p_\varepsilon\|_{\mathcal{B}^q} \leq \|uC_\varphi\|_{\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)} \|f - p_\varepsilon\|_{\mathcal{B}^p} < \varepsilon \|uC_\varphi\|_{\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)}. \quad (69)$$

Так как $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ , то $uC_\varphi p_\varepsilon \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$. Это и (69), поскольку $\mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ – замкнутое подмножество $\mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$, приводит к требуемому результату.

Если оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ ограничен, то условия (1)–(5) можно доказать так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, с теми же тестовыми функциями, что и там, заметив, что все тестовые функции лежат в $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$. Поскольку полиномы $z^\gamma \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ , то имеем $u\varphi^\gamma = uC_\varphi z^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$, что и требовалось.

Докажем результат о компактности оператора $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя и $p, q > 0$.

- (а) Если $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ и выполнены условия (7) и (8) ((9) и (10)), то $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ – компактный оператор.
- (б) Пусть $p \geq 1$ и $q > 0$. Если $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ – компактный оператор, то $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ и выполнены условия (9) и (10) (или (7) и (8)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По теореме 2 оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ компактен. Чтобы доказать компактность $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$, достаточно показать, что $uC_\varphi f \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого $f \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$. Поэтому рассмотрим $f \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$. Заметим, что $f_r \in H(\frac{1}{r}\mathbb{D}^n)$. Отсюда следует, что для всякого r существует многочлен p_r , для которого

$$\sup_{z \in (2/(1+r))\overline{\mathbb{D}^n}} |f_r(z) - p_r(z)| < (1-r)^2.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f_r}{\partial z_k}(z) - \frac{\partial p_r}{\partial z_k}(z) \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{(2/(1+r))\partial\mathbb{D}} \frac{f_r(z_1, \dots, \zeta_k, \dots, z_n) - p_r(z_1, \dots, \zeta_k, \dots, z_n)}{(z_k - \zeta_k)^2} d\zeta_k \right| \leq 4, \end{aligned}$$

для всякого $z \in \overline{\mathbb{D}^n}$ и $k \in \{1, \dots, n\}$.

Теперь из леммы 7 следует, что $\|p_r\|_{\mathcal{B}^p} \leq C(\|f\|_{\mathcal{B}^p} + 1)$ с постоянной C , не зависящей от f . Пусть r_n – последовательность точек из $(0, 1)$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$. Тогда $p_{r_n} - f \rightarrow 0$ равномерно внутри $\mathbb{D}^n$ и нормы в $\mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n)$ элементов этой последовательности ограничены. Из компактности оператора $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|uC_\varphi p_{r_n} - uC_\varphi f\|_{\mathcal{B}^q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|uC_\varphi(p_{r_n} - f)\|_{\mathcal{B}^q} = 0.$$

Так как $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ , то $uC_\varphi p_{r_n} \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$, откуда $uC_\varphi f \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$, что и требовалось.

(б) Так как $z^\gamma \in \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$, то $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$. Выполнение условий (9) и (10) (или (7) и (8)) можно продемонстрировать, как и в доказательстве теоремы 2. Достаточно просто заметить, что тестовые функции из теоремы 2 лежат в $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, $p \in (0, 1)$, $q > 0$. Тогда $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ – компактный оператор тогда и только тогда, когда $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ , а для всякого $l \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$\lim_{|\varphi_l(z)| \rightarrow 1} |u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} = 0. \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ компактен, то включение $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса g доказывается так же, как в теореме 3. То, что выполнено (70), устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 3. Заметим, что тестовые функции в этом случае лежат в $\mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n)$.

Теперь предположим, что выполнено (70) и что $u\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ . Из (70) получаем, что по данному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|\varphi_l(z)| > \delta$ справедлива оценка

$$|u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} < \varepsilon. \quad (71)$$

С другой стороны,

$$|u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p} < \frac{1}{(1 - \delta^2)^p} |u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \quad (72)$$

при $|\varphi_l(z)| \leq \delta$.

Поскольку при $\gamma = \vec{0}$ получаем $u \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$, а при $\gamma = \vec{1}$ получаем $u\varphi \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$, то для некоторой постоянной $M_2 > 0$ выполнено неравенство

$$|u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| (1 - |z_k|^2)^q \leq M_2$$

(см. (63)), так что правая часть (72) ограничена.

Из (70) и (72) следует, что величина

$$|u(z)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_k}(z) \right| \frac{(1 - |z_k|^2)^q}{(1 - |\varphi_l(z)|^2)^p}, \quad l \in \{1, \dots, n\},$$

ограничена.

Значит, по теореме 3 оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ корректно определен и ограничен. По теореме 2, (с) оператор $uC_\varphi: \mathcal{B}^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$ – компактный. По определению $\mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ – подпространство в $\mathcal{B}^q(\mathbb{D}^n)$, что гарантирует компактность $uC_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – голоморфное отображение $\mathbb{D}^n$ в себя, причем $\|\varphi_l\|_\infty < 1$ и $\varphi^\gamma \in \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ для всякого мультииндекса γ . Тогда оператор $C_\varphi: \mathcal{B}_0^p(\mathbb{D}^n) \rightarrow \mathcal{B}_0^q(\mathbb{D}^n)$ компактен.

Список литературы

- [1] R. M. Timoney, “Bloch functions in several complex variables. I”, *Bull. London Math. Soc.*, **12**:4 (1980), 241–267.
- [2] R. M. Timoney, “Bloch functions in several complex variables. II”, *J. Reine Angew. Math.*, **319** (1980), 1–22.
- [3] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **139**, Marcel Dekker, New York, 1990.
- [4] M. D. Contreras, A. G. Hernandez-Diaz, “Weighted composition operators in weighted Banach spaces of analytic functions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **69**:1 (2000), 41–46.
- [5] C. C. Cowen, B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [6] B. D. MacCluer, R. Zhao, “Essential norms of weighted composition operators between Bloch-type spaces”, *Rocky Mountain J. Math.*, **33**:4 (2003), 1437–1458.
- [7] K. M. Madigan, “Composition operators on analytic Lipschitz spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **119**:2 (1993), 465–473.
- [8] K. Madigan, A. Matheson, “Compact composition operators on the Bloch space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**:7 (1995), 2679–2687.
- [9] A. Montes-Rodriguez, “Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions”, *J. London Math. Soc.* (2), **61**:3 (2000), 872–884.
- [10] Sh. Ye, “Weighted composition operator between the little α -Bloch spaces and the logarithmic Bloch space”, *J. Comput. Anal. Appl.*, **10**:2 (2008), 243–252.
- [11] S. Li, S. Stević, “Generalized composition operators on Zygmund spaces and Bloch type spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **338**:2 (2008), 1282–1295.
- [12] S. Li, S. Stević, “Products of composition and integral type operators from H^∞ to the Bloch space”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **53**:5 (2008), 463–474.
- [13] S. Li, S. Stević, “Products of Volterra type operator and composition operator from H^∞ and Bloch spaces to Zygmund spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **345**:1 (2008), 40–52.
- [14] X. Zhu, “Generalized weighted composition operators from Bloch type spaces to weighted Bergman spaces”, *Indian J. Math.*, **49**:2 (2007), 139–150.
- [15] X. Zhu, “Products of differentiation, composition and multiplication from Bergman type spaces to Bers type spaces”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **18**:3 (2007), 223–231.
- [16] S. Ohno, K. Stroethoff, R. Zhao, “Weighted composition operators between Bloch-type spaces”, *Rocky Mountain J. Math.*, **33**:1 (2003), 191–215.
- [17] Z. Zhou, J. Shi, “Compact composition operators on the Bloch space in polydiscs”, *Sci. China Ser. A*, **44**:3 (2001), 286–291.
- [18] Z. Zhou, “Composition operators on the Lipschitz space in polydiscs”, *Sci. China Ser. A*, **46**:1 (2003), 33–38.
- [19] S. Stević, “Composition Operators between H^∞ and α -Bloch spaces on the polydisc”, *Z. Anal. Anwend.*, **25**:4 (2006), 457–466.
- [20] D. D. Clahane, S. Stević, “Norm equivalence and composition operators between Bloch/Lipschitz spaces of the ball”, *J. Inequal. Appl.*, 2006, ID 61018.
- [21] L. Jiang, C. Ouyang, “Cyclic behavior of linear fractional composition operators in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **341**:1 (2008), 601–612.
- [22] S. Li, S. Stević, “Weighted composition operators from Bloch space to H^∞ on the polydisc”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **28**:7–8 (2007), 911–925.
- [23] S. Li, S. Stević, “Weighted composition operators from Bergman-type spaces into Bloch spaces”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **117**:3 (2007), 371–385.

- [24] S. Li, S. Stević, “Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space on the polydisc”, *Abstr. Appl. Anal.*, 2007, ID 48478.
- [25] S. Li, S. Stević, “Weighted composition operators between H^∞ and α -Bloch spaces in the unit ball”, *Taiwanese J. Math.*, **12**:7 (2008), 1625–1639.
- [26] J. Shi, L. Luo, “Composition operators on the Bloch space of several complex variables”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **16**:1 (2000), 85–98.
- [27] S. Stević, “Weighted composition operators between mixed norm spaces and H_α^∞ spaces in the unit ball”, *J. Inequal. Appl.*, **2007** (2007), ID 28629.
- [28] S. Stević, “Norm of weighted composition operators from Bloch space to H_μ^∞ on the unit ball”, *Ars. Combin.*, **88** (2008), 125–127.
- [29] S.-I. Ueki, L. Luo, “Compact weighted composition operators and multiplication operators between Hardy spaces”, *Abstr. Appl. Anal.*, 2008, ID 196498.
- [30] Z. Zhou, J. Shi, “Composition operators on the Bloch space in polydiscs”, *Complex Variables Theory Appl.*, **46**:1 (2001), 73–88.
- [31] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Some properties of fractional integrals. II”, *Math. Z.*, **34**:1 (1932), 403–439.
- [32] S. Stević, “On Lipschitz and α -Bloch spaces on the unit polydisc”, *Studia Sci. Math. Hung.*, **45**:3 (2008), 361–378.

С. Стевич (S. Stević)

Mathematical Institute,
Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrad, Serbia
E-mail: sstevic@ptt.rs

Поступила в редакцию
28.01.2008 и 20.07.2008

Р. Чен (R. Chen)

Department of Mathematics, Tianjin University,
Republic of China
E-mail: fjcry@yahoo.com.cn

З. Чжоу (Z. Zhou)

Department of Mathematics, Tianjin University,
Republic of China
E-mail: zehuazhou2003@yahoo.com.cn