Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Сиражудинов, О G -сходимости и усреднении
обобщенных операторов Бельтрами, *Матем. сб.*, 2008,
том 199, номер 5, 127–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:56:51

УДК 517.956.22

М. М. Сиражудинов

О G -сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами

В работе изучаются вопросы G -сходимости и усреднения обобщенных операторов Бельтрами. Доказана G -компактность, даются усредненные модели, описана геометрия одного G -компакта.

Библиография: 14 названий.

Введение

За последние десятилетия получила развитие теория G -сходимости дифференциальных операторов и тесно связанная с ней теория усреднения. Многие задачи математической физики приводят к изучению вопроса G -сходимости дифференциальных операторов, в частности к вопросу об усреднении дифференциальных операторов с частными производными. Такие вопросы возникают в теории упругости, электродинамике и других разделах физики и механики. Вопросам G -сходимости и усреднения дифференциальных операторов посвящено много работ (см. монографию В. В. Жикова и др. [1] и имеющуюся там литературу).

G -сходимость дивергентных эллиптических операторов второго порядка изучена С. Спаньолю и Е. Де Джорджи (см. [2]–[4]). Напомним понятие G -сходимости дивергентных операторов второго порядка. Пусть $\lambda_0 > 1$ – постоянная. Обозначим через $\mathcal{E}(\lambda_0)$ класс операторов вида

$$Au = \operatorname{div}(\mathbf{a}\nabla u),$$

где $\mathbf{a}$ – измеримая в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ симметрическая матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности

$$\lambda_0^{-1}I \leq \mathbf{a} \leq \lambda_0 I,$$

I – единичная матрица. Говорят, что последовательность $\{A_k\} \subset \mathcal{E}(\lambda_0)$ G -сходится к оператору $A \in \mathcal{E}(\lambda_0)$, если для любого $f \in L_2(Q)$ последовательность u_k решений задачи Дирихле $A_k u_k = f$, $u_k \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, сходится в $L_2(Q)$ к u – решению задачи Дирихле $Au = f$, $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q)$. С. Спаньолю (см. [3]) доказал G -компактность класса $\mathcal{E}(\lambda_0)$.

G -сходимость дивергентных эллиптических операторов высокого порядка изучена в работе В. В. Жикова и др. (см. [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант УР.04.01.046) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00621).

G -сходимость дифференциальных операторов – это, иначе, слабая сходимость соответствующих обратных операторов. Поэтому по понятным причинам в задачах G -сходимости кроме корректной разрешимости краевых задач требуются также оценки решений, равномерные относительно любого оператора. Для недивергентных эллиптических операторов и систем (к которым относятся и рассматриваемые в работе операторы) такого рода оценки мало изучены, поэтому G -сходимость недивергентных операторов также изучена не столь детально, как для дивергентных операторов. Вопросам G -сходимости и усреднению недивергентных эллиптических операторов посвящены работы [5]–[7].

В работе [8] рассмотрены некоторые классы эллиптических систем $2n$, $n \geq 1$, операторов первого порядка с действительными коэффициентами, компактных относительно G -сходимости. Операторы Бельтрами (и их обобщения – см. ниже формулы (1.1), (1.3)), если их записать в действительной форме, образуют подкласс операторов из [8]. Поэтому возникает вопрос о G -компактности этого подкласса, рассматриваемого самого по себе. В работе установлена G -компактность таких операторов. (Следует отметить, что в работе [8] такими вопросами не занимались.) Другим способом G -компактность для более узкого класса операторов (подробнее см. в § 1) доказана в работе [9].

В работе будем придерживаться следующих обозначений.

$\mathbb{R}^2$ – плоскость, $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$ – скалярное произведение.

$Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область класса $C_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{1+\alpha}$ (т.е. граница области ∂Q – кусочно гладкая замкнутая кривая, которая состоит из конечного числа дуг класса $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; $\nu_1 \pi, \dots, \nu_m \pi$ – внутренние углы при угловых точках, причем $0 < \nu_j \leq 2$, $j = 1, \dots, m$).

$\bar{Q}$ – замыкание области Q .

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2), \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2), \quad \mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2.$$

i – мнимая единица.

$L_2(Q; \mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций. Символ $\mathbb{C}$ (здесь и далее) в обозначении пространства означает также, что это пространство есть линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Скалярное произведение в $L_2(Q; \mathbb{C})$ дается равенством

$$(u, v)_{L_2(Q; \mathbb{C})} = \operatorname{Re} \int_Q u \bar{v} dx, \quad u, v \in L_2(Q; \mathbb{C}),$$

где $\bar{v}$ – комплексно-сопряженная v функция.

Соответствие $L_2(Q; \mathbb{C}) \ni u = u_1 + iu_2 \mapsto (u_1, u_2) = U \in (L_2(Q))^2$ есть изоморфизм, причем $(U, V)_{(L_2(Q))^2} = (u, v)_{L_2(Q; \mathbb{C})}$.

$W_p^k(Q)$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$) – обычное пространство Соболева; $\overset{\circ}{W}_p^k(Q)$ – подпространство $W_p^k(Q)$, состоящее из элементов с нулевыми следами на границе.

$W_p^k(Q; \mathbb{C})$ – пространство Соболева комплекснозначных функций.

Ω – квадрат со стороной T , параллельной оси координат (квадрат периодов); $|\Omega| = T^2$ – площадь квадрата Ω .

$\mathcal{L}_2(\Omega)$, $\mathcal{H}^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$, $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, $\mathcal{H}^k(\Omega; \mathbb{C}) \equiv W_2^k(\Omega; \mathbb{C})$ – пространства Лебега и Соболева периодических функций.

$\langle u \rangle$ – среднее значение периодической функции u , т.е.

$$\langle u \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u(x) dx.$$

$\mathcal{H}^{-1} \equiv \mathcal{H}^{-1}(\Omega; \mathbb{C})$ – пространство, сопряженное $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$; пространство, сопряженное $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, отождествляем с $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, что возможно в силу теоремы Рисса.

$\rightharpoonup$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

$\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$ – подпространство $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Re} u \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q), \quad \int_Q \operatorname{Im} u dx = 0.$$

$\mathcal{W}_0(Q)$ – аналогичное подпространство $(W_2^1(Q))^2$.

Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной.

Как известно, если $g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) – периодическая функция, $g \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ $g(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle g \rangle$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, где Q – произвольная ограниченная область плоскости.

Когда это не вызывает недоразумений, как уравнение, так и оператор краевой задачи будем обозначать одним и тем же символом.

§ 1. Формулировка основных результатов

1.1. G -сходимость. Обозначим через $\mathcal{B}(k_0; Q)$ множество эллиптических систем двух уравнений первого порядка, записанных в виде одного уравнения в комплексной форме:

$$Au \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \nu \overline{\partial_z u}, \quad (1.1)$$

где μ, ν – измеримые в Q функции, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1, \quad (1.2)$$

k_0 – положительное число (*константа эллиптичности*).

Заметим, что любую равномерно эллиптическую систему двух уравнений с действительными коэффициентами из $L_{\infty}(Q)$ можно представить в виде (1.1), (1.2) (см. [10; гл. 2, § 7 и гл. 3, § 17]). Уравнение (1.1) есть обобщение уравнения Бельтрами

$$A_0 u \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u = f, \quad \|\mu\|_{L_{\infty}} \leq k_0 < 1. \quad (1.3)$$

Подкласс класса $\mathcal{B}(k_0; Q)$, состоящий из уравнений Бельтрами (1.3), обозначим $\mathcal{B}_0(k_0; Q)$.

Очевидно, что оператор A линеен над полем $\mathbb{R}$, а A_0 – над полем $\mathbb{C}$.

Рассмотрим краевую задачу Римана–Гильберта (Р–Г)

$$Au = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}). \quad (1.4)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Задача Р–Г (1.4) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$. Более того, имеют место априорные оценки

$$\nu_0 \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})} \leq \|Au\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})}, \quad (1.5)$$

$$\nu_0 \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_{Q_1} Au \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{Re} \int_{Q_1} Au \overline{\partial_{\bar{z}} v} dx \leq \nu_1 \left(\operatorname{Re} \int_{Q_1} Au \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx \right)^{1/2} \|\partial_{\bar{z}} v\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})} \quad (1.7)$$

$$\forall u, v \in \mathcal{W}_0(Q_1; \mathbb{C}),$$

где

$$\nu_0 = 1 - k_0, \quad \nu_1 = \left(\frac{1 + k_0}{1 - k_0} \right)^{1/2},$$

$Q_1 \subseteq Q$ – любая односвязная подобласть (класса $C_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{1+\alpha}$).

Оценки (1.5)–(1.7) справедливы и для многосвязных областей.

Заметим, что величина

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \quad (= \|\partial_z u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})})$$

задает в подпространстве $\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}) \subset W_2^1(Q; \mathbb{C})$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Действительно, пусть

$$u = u_1 + iu_2, \quad u_1 \in C_0^\infty(Q), \quad u_2 \in C^\infty(\bar{Q}), \quad \int_Q u_2 dx = 0.$$

Тогда

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})}^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \|\nabla u_j\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \int_Q \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx.$$

Интеграл справа равен нулю. В этом можно убедиться, перебросив производные с u_1 на u_2 интегрированием по частям с учетом $u_1 \in C_0^\infty(Q)$. Нормы градиентов в силу неравенств Фридрихса и Пуанкаре эквивалентны W_2^1 -нормам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что последовательность $\{A_k\} \subset \mathcal{B}(k_0; Q)$ G -сходится в области Q к эллиптической системе $A \in \mathcal{B}(k_0; Q)$ (и будем писать $A_k \xrightarrow{G} A$, $G\text{-}\lim A_k = A$), если последовательность $\{\mathcal{A}_k^{-1}\}$ слабо сходится к $\mathcal{A}^{-1}$, где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{A}$ – операторы краевых задач Р–Г

$$A_k u_k = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad Au = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad u_k, u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}).$$

Иначе говоря, $A_k \xrightarrow{G} A$ в области Q , если для любого $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$ последовательность $\{u_k\}$ решений задачи Р–Г слабо в $\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$ сходится к соответствующему решению G -предельной задачи.

G -предел определен единственным образом. Действительно, если имеем два G -предела, то для них справедливо равенство

$$\mu_1 \partial_z w + \nu_1 \overline{\partial_z w} = \mu_2 \partial_z w + \nu_2 \overline{\partial_z w} \quad \forall w \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}).$$

Отсюда для финитных $w = w_1, w_2$ таких, что $w_1 = z$, $w_2 = iz$ в окрестности $U(z_0)$ произвольно заданной точки $z_0 \in Q$, получим $\mu_1 + \nu_1 = \mu_2 + \nu_2$, $\mu_1 - \nu_1 = \mu_2 - \nu_2$. Следовательно, $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$.

В работе [8] автором рассмотрены некоторые классы эллиптических систем с действительными коэффициентами, компактных относительно G -сходимости. Эти классы определены при помощи интегральных неравенств вида (1.6), (1.7) (см. также ниже (2.6), (2.7)). Операторы из класса $\mathcal{B}(k_0; Q)$, если их записать в действительной форме, образуют подмножество класса $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$. Класс $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ шире, чем класс $\mathcal{B}(k_0; Q)$ обобщенных операторов Бельтрами. Например, система $Au = a(x) \partial_z u$, где $1 - k_0 \leq a(x) \leq 1 + k_0$ п.в. в Q , принадлежит $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ и не принадлежит $\mathcal{B}(k_0; Q)$. Поэтому возникает вопрос о G -компактности $\mathcal{B}(k_0; Q)$ как подмножества $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$, т.е. вопрос о принадлежности G -пределов последовательностей из $\mathcal{B}(k_0; Q)$ этому же классу $\mathcal{B}(k_0; Q)$ (такие вопросы в [8] не рассматривались). Ответ на вопрос утвердительный.

ТЕОРЕМА 2. *Класс $\mathcal{B}(k_0; Q)$ обобщенных операторов Бельтрами G -компактен. Иначе говоря, из любой последовательности $\{A_k\} \subset \mathcal{B}(k_0; Q)$ можно выделить G -сходящуюся в смысле определения 1 подпоследовательность.*

Теорема 2 есть достаточно простое следствие G -компактности класса эллиптических систем $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ из [8] (см. ниже п. 2.3). Другим методом, основанным на сходимости основных гомеоморфизмов (K -квазиконформных отображений), аналогичная теорема для более узкого подкласса класса $\mathcal{B}(k_0; Q)$ с константой эллиптичности $k_0 < 1/2$ доказана в работе [9].

Укажем в виде следствия некоторые свойства коэффициентов, которые сохраняются после перехода к G -пределу.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $A_k \xrightarrow{G} A$ в области Q ; $A_k, A \in \mathcal{B}(k_0; Q)$; μ_k, ν_k, μ, ν – коэффициенты A_k, A . Тогда:*

- (i) *если $\nu_k = e^{i\alpha} \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\alpha \in [-\pi, \pi)$ – фиксированное число, то $\nu = e^{i\alpha} \mu$;*
- (ii) *если $\nu_k = e^{i\alpha} \overline{\mu_k}$, $k = 1, 2, \dots$, то $\nu = e^{i\alpha} \bar{\mu}$.*

В частности, при $\nu_k = \mu_k$ имеем $\nu = \mu$, при $\nu_k = \overline{\mu_k}$ имеем $\nu = \bar{\mu}$.

Доказательство следствия см. в п. 2.6. Заметим, что недивергентные эллиптические операторы второго порядка можно представить в виде (1.1), где $\nu = \bar{\mu}$.

G -сходимость обладает свойством локальности, а именно имеет место

ТЕОРЕМА 3 (см. [8]). *Пусть $A_k \xrightarrow{G} A$ в области Q и $Q_1 \subseteq Q$ – любая (класс $C_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{1+\alpha}$) подобласть. Тогда $A_k \xrightarrow{G} A$ и в области Q_1 .*

G -сходимости $A_k \xrightarrow{G} A$ достаточно для сходимости и других решений из $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 4 (см. [8]). Пусть

$$A_k u_k = f_k, \quad f_k \rightarrow f \text{ в } L_2(Q; \mathbb{C}), \quad u_k \rightharpoonup u \text{ в } W_2^1(Q; \mathbb{C}),$$

и пусть $G\text{-}\lim A_k = A$. Тогда $Au = f$.

Теоремы 3, 4 суть следствия аналогичных свойств (подробнее см. п. 2.5) класса $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; \mathbb{C})$ работы [8] и теоремы 2. Они потребуются нам при описании геометрии одного G -компакта и установлении некоторых свойств операторов (1.1), которые сохраняются при переходе к G -пределу.

Для класса $\mathcal{B}_0(k_0; Q)$ операторов Бельтрами справедлива

ТЕОРЕМА 5 (см. [9]). Класс $\mathcal{B}_0(k_0; Q)$ G -компактен.

В п. 2.6 мы дадим простое доказательство теоремы 5, отличное от приведенного в [9].

В силу теорем 2 и 5, казалось бы, и класс операторов вида $Au = \partial_{\bar{z}}u + \nu \overline{\partial_z u}$ должен быть G -компактен, но это не так. Интересные примеры таких операторов, которые G -сходятся к оператору Бельтрами, даются в работе [9]. Другие такие примеры см. ниже (§ 5, примеры 3, 4).

Пусть $Q = \{|x| < 1\}$ – единичный круг. Как известно (см. [11]), существует единственное решение однородного уравнения $A\chi = 0$, $\chi \in W_p^1(Q; \mathbb{C})$, $2 < p \leq p_0(k_0)$, гомеоморфно отображающее круг $\{|x| \leq 1\}$ на себя и оставляющее неподвижными точки 0 и 1 (в дальнейшем будем называть его *основным гомеоморфизмом*). Более того, W_p^1 -нормы основного гомеоморфизма χ и обратного χ^{-1} ограничены постоянной, зависящей только от k_0 . Значит, в силу ограниченности вложения $W_p^1(Q; \mathbb{C}) \subset C^\alpha(\overline{Q}; \mathbb{C})$, $\alpha = (p-2)/p$, χ и χ^{-1} удовлетворяют условию Гёльдера с постоянной и показателем, зависящими только от k_0 . Отсюда и из теоремы 4 легко получим, что справедлива

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A_k, A \in \mathcal{B}(k_0; Q)$, $G\text{-}\lim A_k = A$ в $Q = \{|x| < 1\}$, χ_k и χ – основные гомеоморфизмы A_k и A . Тогда $\chi_k \rightarrow \chi$ в $C(\overline{Q})$ при $k \rightarrow \infty$.

1.2. Усреднение. Перейдем теперь к понятию усреднения обобщенного оператора Бельтрами (1.1). Пусть коэффициенты μ, ν – измеримые периодические функции, удовлетворяющие условию (1.2) в Ω :

$$\operatorname{vrai\,sup}_{x \in \Omega} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1, \quad (1.8)$$

где Ω – квадрат периодов. Рассмотрим семейство операторов A_ε , действующих из $\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$ в $\mathcal{L}_2(Q; \mathbb{C})$ и определенных формулой

$$A_\varepsilon u \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu^\varepsilon \partial_z u + \nu^\varepsilon \overline{\partial_z u}, \quad u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}), \quad (1.9)$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$, $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$. Ясно, что для каждого ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, оператор A_ε принадлежит классу $\mathcal{B}(k_0; Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что для семейства $\{A_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ имеет место *усреднение*, если найдется оператор $A_0 \in \mathcal{B}(k_0; Q)$ такой, что $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$ в области Q при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом A_0 называется *усредненным оператором* (а соответствующее уравнение – *усредненным уравнением*).

Важную роль при усреднении играет ядро оператора $A^*: \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}^{-1}$, сопряженного оператору периодической краевой задачи

$$Au \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu \partial_z u + \nu \overline{\partial_z u} = f \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}), \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}). \quad (1.10)$$

В силу того, что $(\varphi, \psi) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi \bar{\psi} dx$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, – скалярное произведение в $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, имеем

$$\begin{aligned} \langle A^*p, u \rangle &= (Au, p) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} Au \bar{p} dx = \langle -\partial_z p - \partial_{\bar{z}}(\bar{\mu}p + \nu \bar{p}), u \rangle \\ &\quad \forall u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}), \quad \forall p \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – значение функционала, производные понимаются в смысле (периодических) распределений. Отсюда следует (подробнее см. п. 4.1), что сопряженное однородное уравнение дается равенством

$$-A^*p \equiv \partial_z p + \partial_{\bar{z}}(\bar{\mu}p + \nu \bar{p}) = 0, \quad (1.12)$$

где производные понимаются в смысле обычных распределений. Имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Ядро оператора $A^*: \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(\Omega; \mathbb{C})$ – двумерное подпространство $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, причем один из базисов ядра $\{p_1, p_2\}$ удовлетворяет условиям*

$$\langle p_1 \rangle = 1, \quad \langle p_2 \rangle = i. \quad (1.13)$$

Кроме того, в случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$) базисные векторы можно выбрать так, что

$$p_2 = ip_1. \quad (1.14)$$

Сформулируем теперь теорему об усреднении.

ТЕОРЕМА 8. *Для семейства (1.9) имеет место усреднение, причем коэффициенты усредненного оператора*

$$A_0 u \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu^0 \partial_z u + \nu^0 \overline{\partial_z u}, \quad u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}),$$

постоянные и даются равенствами

$$\mu^0 = \langle \mu \mathcal{Q} + \bar{\nu} \mathcal{P} \rangle, \quad \nu^0 = \langle \bar{\mu} \mathcal{P} + \nu \mathcal{Q} \rangle, \quad (1.15)$$

где

$$\mathcal{P} = 2^{-1}(p_1 + ip_2), \quad \mathcal{Q} = 2^{-1}(\bar{p}_1 + i\bar{p}_2),$$

p_1, p_2 – базисные векторы из теоремы 7.

Заметим, что в случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$) усредненный оператор также является оператором Бельтрами. Действительно, согласно теореме 7, так как $p_2 = ip_1$, получим $\mathcal{P} = 0$, $\mathcal{Q} = \bar{p}_1$. Значит, $\nu^0 = 0$, $\mu^0 = \langle \mu \bar{p}_1 \rangle$. Этот результат другим методом был получен в [12].

Теоремы 7, 8 доказаны ниже в §§ 3, 4. Достаточно просто (см. п. 4.4) из теоремы 8 получается

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть коэффициенты μ и ν оператора (1.9) связаны одним из двух соотношений: $\nu = e^{i\alpha}\mu$, $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$, где $\alpha \in [-\pi, \pi)$. Тогда аналогичную структуру имеет и усредненный оператор. Подробнее:

- (i) при $\nu = e^{i\alpha}\mu$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha}\mu^0$;
- (ii) при $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha}\bar{\mu}^0$; если при этом $\alpha \neq -\pi$, то

$$\mu_0 = \frac{\langle \mu \operatorname{Re}(p_1 e^{-i\alpha/2}) \rangle}{\cos(\alpha/2)},$$

если $\alpha \neq 0$, то

$$\mu_0 = \frac{\langle \mu \operatorname{Re}(p_2 e^{-i\alpha/2}) \rangle}{\sin(\alpha/2)},$$

где p_1, p_2 – базисные векторы из теоремы 7.

Заметим, что в случае (ii) при $\alpha \neq 0, -\pi$ для нахождения μ_0 можно использовать любую из формул (они дают одно и то же число).

Утверждения следствия согласуются со следствием 1.

Как было отмечено выше, любую равномерно эллиптическую систему двух уравнений можно записать в виде одного уравнения (1.1), но при этом правая часть (1.1) будет зависеть от коэффициентов исходной системы. Вопрос усреднения таких уравнений решает следующая

ТЕОРЕМА 9. Пусть $u_\varepsilon \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$ – решение задачи P – Γ

$$\partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon + \nu^\varepsilon \overline{\partial_z u_\varepsilon} = a^\varepsilon f + b^\varepsilon g, \quad u_\varepsilon \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}),$$

где $f, g \in L_2(Q; \mathbb{C})$, $a^\varepsilon = a(\varepsilon^{-1}x)$, $b^\varepsilon = b(\varepsilon^{-1}x)$, $a(x), b(x)$ – ограниченные измеримые периодические функции. Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$, где $u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$ удовлетворяет усредненному уравнению

$$\partial_{\bar{z}} u + \mu^0 \partial_z u + \nu^0 \overline{\partial_z u} = a_1^0 f + a_2^0 \bar{f} + b_1^0 g + b_2^0 \bar{g},$$

где μ^0, ν^0 определены формулой (1.15), $a_1^0 = \langle a \mathcal{Q} \rangle$, $a_2^0 = \langle \bar{a} \mathcal{P} \rangle$, $b_1^0 = \langle b \mathcal{Q} \rangle$, $b_2^0 = \langle \bar{b} \mathcal{P} \rangle$; функции $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ определены в (1.15).

В § 5 приведем ряд примеров усреднения, в частности примеры усреднения операторов для слоистых сред. Эти примеры характеризуются тем, что коэффициенты усредненных операторов имеют явные выражения через коэффициенты исходных операторов.

1.3. О геометрии одного G -компакта. В общем случае нет (и не может быть) явных эффективных формул для коэффициентов G -предела. Поэтому возникает вопрос о локализации этих коэффициентов, т.е. о получении явных оценок для коэффициентов G -предела. Оценки такого рода для дивергентных эллиптических операторов второго порядка хорошо известны (см. [1]).

Обозначим через $\mathcal{E}(k_0; Q)$ подмножество обобщенных операторов Бельтрами $\mathcal{B}(k_0; Q)$ таких, что $\nu = \bar{\mu}$ (см. (1.1)). Согласно следствию 1 класс $\mathcal{E}(k_0; Q)$ компактен относительно G -сходимости. Здесь мы хотим описать геометрию этого G -компакта.

Пусть S – замкнутое множество на комплексной плоскости такое, что справедливо $|z| \leq k_0/2 \quad \forall z \in S$, где k_0 – константа эллиптичности. И пусть $\mathcal{E}(S)$ – такое подмножество $\mathcal{E}(k_0; Q)$, что $\mu(x) \in S$ (п.в. в Q) для любого $A \in \mathcal{E}(S)$, где $Au = \partial_{\bar{z}}u + \mu \partial_z u + \bar{\mu} \overline{\partial_z u}$, $u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. Понятно, что множество $\mathcal{E}(S)$ может оказаться незамкнутым относительно G -сходимости. Обозначим через $G\mathcal{E}(S)$ G -замыкание этого множества. Возникает вопрос: существует ли такое множество S^0 , что $\mathcal{E}(S^0) = G\mathcal{E}(S)$? Ответ на вопрос утвердительный и дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 10. *Замыкание множества $\mathcal{E}(S)$ в G -топологии дается формулой $G\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S^0)$, где S^0 – выпуклая оболочка S , $S^0 = \text{co } S$.*

Доказательство теоремы см. в п. 6.3. В § 7 мы дадим новое доказательство известного результата работы [5] по G -компактности недивергентных эллиптических операторов второго порядка.

§ 2. G -сходимость

2.1. Задача Римана–Гильберта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для случая ограниченной гладкой (класса $C^{1+\alpha}$) односвязной области теорема 1 доказана в [8] и [13]. Когда мы имеем область класса $C_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{1+\alpha}$, доказательство проводится аналогично, при этом (как и в [8], [13]) надо воспользоваться тем, что задача Р–Г (1.4) для системы Коши–Римана однозначно разрешима в силу [10; гл. 4, § 7, п. 4]. (С идеей доказательства можно познакомиться ниже, в п. 3.2, где изучается периодическая задача.) При получении априорных оценок в [8], [13] гладкость границы не требовалась. Можно считать ее кусочно гладкой и состоящей из конечного числа связных компонент.

2.2. Об эквивалентности условий (1.2) и (1.6), (1.7). Справедлива

ЛЕММА 1. *Пусть коэффициенты обобщенного уравнения Бельтрами μ, ν – измеримые в Q функции. Тогда условие (1.2) эквивалентно интегральным условиям (1.6) и (1.7), где $Q_1 = Q$, $0 \leq k_0 < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено выше, из условия (1.2) следуют оценки (1.6), (1.7). Теперь покажем, что из (1.6), (1.7) следует (1.2). Положим в (1.6), (1.7)

$$v = u = \theta n^{-1} \varphi \sin(n \operatorname{Re}(z\bar{\xi})),$$

где $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ – действительная функция, $\xi, \theta \in \mathbb{C}$. Тогда легко получим

$$\begin{aligned} & (1 - k_0)|\xi|^2|\theta|^2 \int_Q \varphi^2 \cos^2(n \operatorname{Re}(z\bar{\xi})) dx + \alpha_n^1 \\ & \leq \operatorname{Re} \int_Q (|\xi|^2|\theta|^2 + \mu \bar{\xi}^2|\theta|^2 + \nu |\xi|^2 \bar{\theta}^2) \varphi^2 \cos^2(n \operatorname{Re}(z\bar{\xi})) dx \\ & \leq (1 + k_1)|\xi|^2|\theta|^2 \int_Q \varphi^2 \cos^2(n \operatorname{Re}(z\bar{\xi})) dx + \alpha_n^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $k_1 = (2k_0)/(1 - k_0) > k_0$; через α_n^1, α_n^2 обозначены суммы интегралов, содержащих производные φ . Заметим, что $\alpha_n^1, \alpha_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как каждый интеграл в α_n^1 и α_n^2 имеет множитель n^{-1} . Очевидно, что $\cos^2(n \operatorname{Re}(z\bar{\xi})) \rightarrow 1/2$ в $L_2(Q)$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, после предельного перехода из (2.1) имеем

$$\begin{aligned} & (1 - k_0)|\xi|^2|\theta|^2 \int_Q \varphi^2(x) dx \\ & \leq |\xi|^2|\theta|^2 \int_Q \varphi^2(x) dx + \int_Q \varphi^2(x) \operatorname{Re}(\mu\bar{\xi}^2|\theta|^2 + \nu|\xi|^2\bar{\theta}^2) dx \\ & \leq (1 + k_1)|\xi|^2|\theta|^2 \int_Q \varphi^2(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ получаем

$$-k_1|\xi|^2|\theta|^2 \leq \operatorname{Re}(-\mu\bar{\xi}^2|\theta|^2 - \nu|\xi|^2\bar{\theta}^2) \leq k_0|\xi|^2|\theta|^2 \quad \text{п.в. в } Q \quad \forall \xi, \theta \in \mathbb{C}.$$

Заменим в этом соотношении ξ на $i\xi$, θ на $i\theta$ и поделим его на $|\xi|^2|\theta|^2$. Тогда получим, что для любых $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = |\eta| = 1$, имеют место неравенства

$$-k_1 \leq \operatorname{Re}(\mu\zeta + \nu\eta) \leq k_0 \quad \text{п.в. в } Q. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что $\mu, \nu \in L_\infty(Q; \mathbb{C})$. Действительно, так как $k_0 < k_1$, то имеем

$$|\operatorname{Re}(\mu\zeta + \nu\eta)| \leq k_1 \quad \text{п.в. в } Q. \quad (2.3)$$

Положим здесь $\zeta = \eta = 1$, $\zeta = 1$, $\eta = -1$; тогда имеем $|\operatorname{Re}(\mu + \nu)| \leq k_1$, $|\operatorname{Re}(\mu - \nu)| \leq k_1$ п.в. в Q . Значит, $|\operatorname{Re} \mu| \leq k_1$, $|\operatorname{Re} \nu| \leq k_1$ п.в. в Q . Теперь, полагая в (2.3) $\zeta = \eta = i$, $\zeta = i$, $\eta = -i$, получаем $|\operatorname{Im} \mu| \leq k_1$, $|\operatorname{Im} \nu| \leq k_1$ п.в. в Q . Значит, $\mu, \nu \in L_\infty(Q; \mathbb{C})$.

Пусть теперь $Q_0 \subset Q$, $\operatorname{mes}(Q \setminus Q_0) = 0$, — множество, на котором значения μ и ν конечны. И пусть для $z_0 \in Q_0$ имеем $\mu(z_0) \neq 0$, $\nu(z_0) \neq 0$. Тогда из (2.2) при $\zeta = e^{-i\varphi}$, $\eta = e^{-i\psi}$, $\varphi = \arg \mu(z_0)$, $\psi = \arg \nu(z_0)$ получаем

$$|\mu(z_0)| + |\nu(z_0)| \leq k_0. \quad (2.4)$$

Когда одно из чисел $\mu(z_0)$, $\nu(z_0)$ нуль, а другое нет, аналогично получим (2.4). Таким образом, почти всюду в Q имеем (2.4). Лемма 1 доказана.

2.3. Вспомогательные результаты. Обозначим через $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ множество систем первого порядка вида

$$B = \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — измеримые квадратные матрицы второго порядка с действительными элементами, удовлетворяющие в любой (класса $C_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{1+\alpha}$) односвязной

подобласти $Q_1 \subseteq Q$ условиям

$$\nu_0 \sum_{j=1}^2 \|\nabla u_j\|_{L_2(Q_1)}^2 \leq \int_{Q_1} Bu \cdot \Lambda u \, dx, \quad (2.6)$$

$$\int_{Q_1} Bu \cdot \Lambda u \, dx \leq \nu_1 \left(\int_{Q_1} Bu \cdot \Lambda u \, dx \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^2 \|\nabla v_j\|_{L_2(Q_1)}^2 \right)^{1/2}, \quad (2.7)$$

$$u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2), \quad u, v \in \mathcal{W}(Q_1),$$

где ν_0, ν_1 – положительные постоянные, $\nu_0^{-1} \nu_1^2 \geq 1$;

$$\Lambda u = \left\{ -\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\}$$

– система Коши–Римана; $f \cdot g = f_1 g_1 + f_2 g_2$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Вопросы G -сходимости класса $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ изучались в [8], [13].¹ Напомним некоторые результаты из [8], [13], которые потребуются нам ниже.

1°. Для любого $B \in \mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ элементы матриц $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ограничены постоянной, зависящей только от ν_0 и ν_1 .

2°. Любой элемент $B \in \mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ – эллиптическая система.

3°. Задача Р–Г $Bu = f \in (L_2(Q))^2$, $u \in \mathcal{W}_0(Q)$, однозначно разрешима, причем имеет место оценка

$$c_0 \|u\|_{\mathcal{W}_0(Q)} \leq \|Bu\|_{L_2(Q)}, \quad u \in \mathcal{W}_0(Q),$$

где $\|u\|_{\mathcal{W}_0(Q)} = (\sum_{j=1}^2 \|\nabla u_j\|_{L_2(Q)}^2)^{1/2}$, $u = (u_1, u_2)$, задает норму в $\mathcal{W}_0(Q)$, эквивалентную W_2^1 -норме в силу неравенств Пуанкаре и Фридрихса; $c_0 > 0$ – константа.

Эта оценка позволяет нам ввести понятие G -сходимости на множестве $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ аналогично определению 1.

4°. G -предел единствен.

5°. Класс $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ G -компактен.

6°. Пусть $B_k \xrightarrow{G} B$ в области Q ; тогда $B_k \xrightarrow{G} B$ и в любой подобласти $Q_1 \subseteq Q$.

7°. Пусть $B_k \xrightarrow{G} B$ в области Q , $B_k u_k = f_k$, $f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q)$, $u_k \rightharpoonup u$ в $W_2^1(Q)$; тогда $Bu = f$ (сходимость произвольных решений).

Как было отмечено выше, класс $\mathcal{B}(k_0; Q)$ обобщенных операторов Бельтрами есть подмножество $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$, где ν_0, ν_1 такие же, как в (1.6), (1.7). В этом легко убедиться, если в (1.6), (1.7) выделить реальные части интегралов; тогда мы получим (2.6), (2.7), где B – система, полученная из (1.1) выделением действительной и мнимой частей и представлением их в виде (2.5). Такое вложение $\mathcal{B}(k_0; Q)$ в $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ будем обозначать через J , т.е.

$$\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q) \ni B = JA, \quad A \in \mathcal{B}(k_0; Q). \quad (2.8)$$

¹Заметим, что в этих работах область Q принадлежит классу $C^{1+\alpha}$. Это обстоятельство не влияет на справедливость результатов и в случае кусочно гладких областей (см. выше п. 2.1).

2.4. Доказательство теоремы 2 о G -компактности $\mathcal{B}(k_0; Q)$. В силу 5° и вложения (2.8) нам достаточно показать следующее: пусть $A_k \in \mathcal{B}(k_0; Q)$, $B_k = JA_k$ – соответствующая A_k система из $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$, и пусть $B_k \xrightarrow{G} B$ в $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$; тогда найдется оператор $A \in \mathcal{B}(k_0; Q)$ такой, что $B = JA$.

Рассмотрим систему $BU = F$, $U = (u_1, u_2)$, $F = (f_1, f_2)$. Умножим второе уравнение на i и прибавим к первому, тогда легко получим уравнение

$$Au \equiv \alpha \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \nu \overline{\partial_z u} + \beta \overline{\partial_{\bar{z}} u} = f, \quad (2.9)$$

где $u = u_1 + iu_2$, $f = f_1 + if_2$. Следовательно, наша задача свелась к доказательству того, что $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и μ, ν удовлетворяют соотношению (1.2).

Рассмотрим проекторы

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k^{-1} A_k: W_2^1(Q; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}), \quad (2.10)$$

где $\mathcal{A}_k$ – оператор краевой задачи Р–Г $A_k u = f \in L_2(Q; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. В силу (1.2), (1.5) имеем

$$\|\mathcal{P}_k\| \leq c_0,$$

где $c_0 > 0$ – константа, зависящая только от константы эллиптичности k_0 из (1.2). Следовательно, из последовательности $\{\mathcal{P}_k\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\mathcal{P}_{k'} \rightarrow \mathcal{P}$, причем $\mathcal{P}: W_2^1(Q; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$ – проектор, ограниченный постоянной c_0 . Положим

$$\tilde{A} = A\mathcal{P}: W_2^1(Q; \mathbb{C}) \rightarrow L_2(Q; \mathbb{C}). \quad (2.11)$$

Очевидно, что $\tilde{A}$ есть расширение A , так как $\tilde{A} = A$ на $\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. Отметим некоторые свойства $\tilde{A}$.

а) В любой подобласти $Q_1 \subseteq Q$ имеем (см. [8], [13])

$$\int_{Q_1} |\tilde{A}u|^2 dx \leq c_0 \|u\|_{W_2^1(Q_1; \mathbb{C})}^2, \quad u \in W_2^1(Q_1; \mathbb{C}), \quad (2.12)$$

где $c_0 > 0$ – константа, зависящая только от k_0 .

б) Пусть $c \in \mathbb{C}$; тогда $\tilde{A}(c\bar{z}) = c$, $\tilde{A}c = 0$.

Действительно,

$$\tilde{A}(c\bar{z}) = A(w\text{-}\lim \mathcal{A}_{k'}^{-1} A_{k'}(c\bar{z})) = A(w\text{-}\lim \mathcal{A}_{k'}^{-1} c) = AA^{-1}c = c,$$

где $w\text{-}\lim$ – слабый предел в $\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. Аналогично получим и второе соотношение.

Покажем, что $\tilde{A}$ есть дифференциальный оператор. Пусть $z_0 \in Q$ – точка Лебега функций $\tilde{A}u$, Az , $A(iz)$, где $u \in C^\infty(\bar{Q}; \mathbb{C})$. По формуле Тейлора получим

$$u = u(z_0) + \partial_{\bar{z}} u(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + \partial_z u(z_0)(z - z_0) + v(z).$$

Из оценки (2.12) следует, что $\tilde{A}v|_{z=z_0} = 0$. Поэтому в силу б) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{A}u|_{z=z_0} &= \partial_{\bar{z}} u(z_0) + \tilde{A}(z \partial_z u(z_0))|_{z=z_0} \\ &= \partial_{\bar{z}} u(z_0) + (\operatorname{Re} \partial_z u(z_0)) \tilde{A}(z)|_{z=z_0} + (\operatorname{Im} \partial_z u(z_0)) \tilde{A}(iz)|_{z=z_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $u \in C^\infty(\bar{Q}; \mathbb{C})$ имеем

$$\tilde{A}u = \partial_{\bar{z}}u + \mu \partial_z u + \nu \overline{\partial_z u} \quad \text{п.в. в } Q, \quad (2.13)$$

где $\mu = 2^{-1}(\tilde{A}z - i\tilde{A}(iz))$, $\nu = 2^{-1}(\tilde{A}z + i\tilde{A}(iz))$.

Отсюда в силу того, что $\tilde{A}$ есть расширение A , получим, что в (2.9) $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Осталось показать, что G -предел A удовлетворяет условию (1.2). Согласно лемме 1 достаточно проверить, что для A выполнены оценки (1.6), (1.7), но (1.6), (1.7) для A и (2.6), (2.7) для G -предела $B = JA$ есть одно и то же. Теорема 1 доказана.

2.5. Доказательство следствия 1. Пусть $\nu_k = e^{i\alpha}\mu_k$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим задачу Р–Г $A_k u_k = Au$, $u_k, u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$, где A – G -предел A_k . Имеем $\nu_k \equiv e^{-i\alpha/2}u_k \rightarrow e^{-i\alpha/2}u \equiv v$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Очевидно, что ν_k удовлетворяет уравнению

$$B_k \nu_k \equiv \partial_{\bar{z}}\nu_k + \mu_k \partial_z \nu_k + \mu_k \overline{\partial_z \nu_k} = e^{-i\alpha/2}Au.$$

Следовательно, по теореме 4 получаем

$$Bv \equiv \partial_{\bar{z}}v + \tilde{\mu} \partial_z v + \tilde{\nu} \overline{\partial_z v} = e^{-i\alpha/2}Au,$$

где B – одна из G -предельных точек последовательности $\{B_k\}$. Выясним структуру коэффициентов B . Согласно соотношениям (2.10), (2.11) (записанным для B_k) имеем $\tilde{B}(iz) = w\text{-}\lim \mathcal{B}_{k'}^{-1}B_{k'}(iz) = w\text{-}\lim \mathcal{B}_{k'}^{-1}0 = 0$. Следовательно, в силу (2.13) $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$. Значит, $\partial_{\bar{z}}u + \tilde{\mu} \partial_z u + \tilde{\mu} e^{i\alpha} \overline{\partial_z u} = Au$, $u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. Таким образом, в силу единственности G -предела $\tilde{\mu} = \mu$, $\nu = \mu e^{i\alpha}$.

Пусть теперь $\nu_k = e^{i\alpha}\overline{\mu_k}$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим задачу Р–Г $A_k u_k = Au$, $u_k, u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. В силу G -сходимости $A_k \xrightarrow{G} A$ и единственности решения задачи Р–Г $u_k \rightarrow u$ в $\mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. Тогда из равенства

$$\mu_k \partial_z u_k + e^{i\alpha} \overline{\mu_k \partial_z u_k} = Au - \partial_{\bar{z}}u_k$$

в силу равномерной по k ограниченности $\mu_k \partial_z u_k$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ (значит, для некоторой подпоследовательности $\{k'\} \subset \{k\}$ получаем $\mu_{k'} \partial_z u_{k'} \rightarrow Ru$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$) получим $Ru + e^{i\alpha} \overline{Ru} = \mu \partial_z u + \nu \overline{\partial_z u}$, где μ, ν – коэффициенты G -предела. Перейдя к комплексно-сопряженному выражению и умножив его на $e^{i\alpha}$, имеем $Ru + e^{i\alpha} \overline{Ru} = e^{i\alpha} \bar{\nu} \partial_z u + e^{i\alpha} \bar{\mu} \overline{\partial_z u}$. Следовательно, в силу единственности G -предела получим $\nu = e^{i\alpha} \bar{\mu}$. Следствие доказано.

2.6. Доказательство теоремы 5 (о G -компактности класса $\mathcal{B}_0(k_0; Q)$ операторов Бельтрами). В силу теоремы 2 достаточно показать, что из $A_k = \partial_{\bar{z}} + \mu_k \partial_z \xrightarrow{G} A \in \mathcal{B}(k_0; Q)$ следует $A \in \mathcal{B}_0(k_0; Q)$. А это эквивалентно линейности A над полем $\mathbb{C}$.

Пусть $c \in \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$; тогда в силу G -сходимости из $A_k u_k = Au$, $u_k \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$ следует $\nu_k \equiv cu_k \rightarrow cu \equiv v$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ при $k \rightarrow \infty$. Так как $A_k \nu_k = f$, $f = cAu$, то в силу теоремы 4 (о сходимости произвольных решений) получим $Av = f$. Следовательно, $A(cu) = cAu$. Теорема доказана.

§ 3. О периодических решениях сопряженного уравнения $A^*p = 0$

3.1. Неравенство острого угла. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) μ, ν – измеримые ограниченные периодические функции, причем имеет место оценка (1.8). Неравенство (1.6) влечет за собой важную оценку для оператора $A: \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$ периодической задачи

$$Au \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu \partial_z u + \nu \overline{\partial_z u} = f \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}), \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}). \quad (3.1)$$

А именно, имеет место неравенство острого угла

$$\nu_0 \langle |\partial_{\bar{z}}u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle Au \overline{\partial_{\bar{z}}u} \rangle, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}), \quad (3.2)$$

где $\langle g \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(x) dx$ – среднее значение g .

Очевидно, что достаточно проверить справедливость (3.2) на множестве гладких периодических функций. Из соотношения (1.6) получим

$$\nu_0 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{\bar{z}}(v(y)\varphi(x))|^2 dx \leq \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} A(v(y)\varphi(x)) \overline{\partial_{\bar{z}}(v(y)\varphi(x))} dx, \quad (3.3)$$

где v – любая гладкая периодическая функция, $y = \varepsilon^{-1}x$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $A(v(y)\varphi(x)) = \partial_{\bar{z}}(v(y)\varphi(x)) + \mu(y)\partial_z(v(y)\varphi(x)) + \nu(y)\overline{\partial_z(v(y)\varphi(x))}$. Заметим, что из оценки (1.8), которая теперь имеет место на всей плоскости, следует справедливость (1.6) в любой области $Q \subset \mathbb{R}^2$. Для получения (3.3) надо положить в (1.6) $u(x) = v(x)\varphi(\varepsilon x)$, сделать замену переменных $x \mapsto \varepsilon x = y$, затем поменять местами x и y .

Из (3.3) в силу того, что

$$\partial_{\bar{z}}(v(y)\varphi(x)) = \varepsilon^{-1}\varphi \partial_{\bar{\xi}}v + v \partial_{\bar{z}}\varphi, \quad \partial_z(v(y)\varphi(x)) = \varepsilon^{-1}\varphi \partial_{\xi}v + v \partial_z\varphi,$$

где $\xi = y_1 + iy_2$, $(y_1, y_2) = y$, имеем

$$\lambda_\varepsilon + \nu_0 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{\bar{\xi}}v(y)|^2 \Big|_{y=\varepsilon^{-1}x} |\varphi(x)|^2 dx \leq \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 (Av \overline{\partial_{\bar{\xi}}v}) \Big|_{y=\varepsilon^{-1}x} dx,$$

где $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда после предельного перехода в силу произвольности $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ получим неравенство острого угла.

3.2. Доказательство теоремы 7. Воспользуемся неравенством острого угла (3.2) для описания ядра оператора $A^*: \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega; \mathbb{C})^*$, сопряженного оператору периодической задачи (3.1). Преобразуем среднее значение в левой части (3.2). Для гладкого периодического $u = u_1 + iu_2 \in C^2$ имеем

$$\langle |\partial_{\bar{z}}u|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \langle |\nabla u_j|^2 \rangle + \frac{1}{2} |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx.$$

Интеграл справа равен нулю, в чем можно убедиться, перебросив производные с u_1 на u_2 с учетом периодичности. Значит, в силу плотности гладких

периодических функций в $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$ получим

$$\langle |\partial_{\bar{z}} u|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \langle |\nabla u_j|^2 \rangle, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}), \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{4} \nu_0 \sum_{j=1}^2 \langle |\nabla u_j|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle Au \overline{\partial_{\bar{z}} u} \rangle, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}). \quad (3.5)$$

В силу неравенства Пуанкаре сумма в левой части (3.5) задает в подпространстве

$$\widehat{\mathcal{H}} = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}) \mid \langle u \rangle = 0\} \subset \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$$

квадрат нормы (обозначим ее $\|u\|_{\widehat{\mathcal{H}}}$), эквивалентной $\mathcal{H}^1$ -норме. Следовательно,

$$c_0 \|u\|_{\widehat{\mathcal{H}}}^2 \leq \operatorname{Re} \langle Au \overline{\partial_{\bar{z}} u} \rangle, \quad u \in \widehat{\mathcal{H}}, \quad (3.6)$$

где $c_0 > 0$ – константа, не зависящая от u .

Обозначим через

$$P: \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}} = \{f \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) \mid \langle f \rangle = 0\}$$

ортопроектор на подпространство $\widehat{\mathcal{L}}$. Привлечением рядов Фурье легко убедиться, что $\partial_{\bar{z}}: \widehat{\mathcal{H}} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ есть изоморфизм. Тогда из (3.6) получим

$$c_1 \|f\|_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})}^2 \leq (P \circ A \circ (\partial_{\bar{z}})^{-1} f, f)_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})}, \quad f \in \widehat{\mathcal{L}},$$

где $c_1 > 0$ – константа, не зависящая от f . Это означает, что оператор $\mathcal{B} = P \circ A \circ (\partial_{\bar{z}})^{-1}: \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ коэрцитивный и, следовательно, по лемме Лакса–Мильграма (см. [1; гл. 1, § 1]) отображение $\mathcal{B}: \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ – изоморфизм. Тогда и отображение $P \circ A: \mathcal{H} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ – изоморфизм. Отсюда следует, что сужение P на образ $\operatorname{im} A$ оператора A устанавливает изоморфизм между подпространствами $\operatorname{im} A$ и $\widehat{\mathcal{L}}$. (Замкнутость $\operatorname{im} A$ есть следствие неравенства (3.6).) Действительно, если $f_1, f_2 \in \operatorname{im} A$, $f_1 \neq f_2$ и $Pf_1 = Pf_2$, то из (3.6) для $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 такие, что $Au_1 = f_1$, $Au_2 = f_2$, получим $\|u\| = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. Тогда $Au_1 = Au_2 = f_1 = f_2$.

У изоморфных подпространств коразмерности одинаковые. Так как $\widehat{\mathcal{L}}$ имеет коразмерность 2 (напомним, что мы рассматриваем пространства над полем $\mathbb{R}$), то образ $\operatorname{im} A$ также имеет коразмерность 2.

Для завершения доказательства теоремы 7 осталось показать, что один из базисов ядра A^* имеет структуру, отмеченную в теореме 7.

Пусть $\{p_1, p_2\}$ – базис $\operatorname{Ker} A^*$; тогда средние $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle$ одновременно не равны нулю. Иначе периодическая задача $Au = 1$, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$, разрешима. И тогда из (3.5) получим $u = \operatorname{const}$, что невозможно, так как $Au = 1$.

Пусть $\{p_1, p_2\}$ – базис $\operatorname{Ker} A^*$; тогда произведение $\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle$ не равно нулю. Пусть это не так, $\langle p_1 \rangle = 0$, $\langle p_2 \rangle = a + ib \neq 0$. Положим константу c равной $-b + ia$. Тогда периодическая задача $Au = c$, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$, разрешима, так как $\operatorname{Re} \langle c \overline{p_1} \rangle = \operatorname{Re} \langle c \overline{p_2} \rangle = 0$, но это невозможно в силу (3.5).

Средние значения базисных векторов p_1, p_2 одновременно не могут быть действительными (мнимыми) числами. Иначе рассмотрим базис $\{q_1, q_2\}$, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2 - \langle p_2 \rangle \langle p_1 \rangle^{-1} p_1$. Тогда $\langle q_2 \rangle = 0$, что противоречит предыдущему.

Таким образом, любой из базисов $\{p_1, p_2\}$ удовлетворяет условиям: произведение $\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle$ не равно нулю, $\langle p_1 \rangle = a_1 + ib_1$, $\langle p_2 \rangle = a_2 + ib_2$, a_1 или a_2 не нуль и b_1 или b_2 не нуль. Если $a_1 \neq 0$, то для базиса $\{q_1, q_2\}$, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2 - a_2 a_1^{-1} p_1$, имеем $\text{Re} \langle q_1 \rangle = a_1 \neq 0$, $\text{Re} \langle q_2 \rangle = 0$. Так что можно считать с самого начала $\langle p_2 \rangle = ib_2 \neq 0$. Аналогично, можно считать, что $b_1 = 0$.

Итак, существует базис $\{q_1, q_2\}$ со свойствами $\langle q_1 \rangle = a$, $\langle q_2 \rangle = ib$, $ab \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Заменяв базис $\{q_1, q_2\}$ на $\{p_1, p_2\}$, где $p_1 = a^{-1} q_1$, $p_2 = b^{-1} q_2$, получим требуемый базис со свойствами $\langle p_1 \rangle = 1$, $\langle p_2 \rangle = i$.

Пусть теперь A – оператор Бельтрами ($\nu = 0$). Тогда в силу линейности A и A^* над полем $\mathbb{C}$ вместе с вектором p_1 и вектор $\tilde{p}_2 = ip_1$ принадлежит ядру $\text{Ker } A^*$. Осталось заметить, что p_1 и ip_1 линейно независимы над полем $\mathbb{R}$. Теорема 7 доказана.

3.3. Об одной оценке элементов ядра $\text{Ker } A^*$. Результаты этого пункта потребуются нам в §6 при описании геометрии одного G -компакта. Пусть $\nu = \bar{\mu}$; тогда сопряженное уравнение (1.12) запишется в виде

$$-A^*p \equiv \partial_z p + \partial_{\bar{z}}(\overline{\mu(p + \bar{p})}) = 0. \quad (3.7)$$

Очевидно, что $p = p_2 = i$ есть решение (3.7). Пусть $p = p_1 = r + is \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$ – первый базисный элемент ядра $\text{Ker } A^*$ (теорема 7). Перенормируем его условием

$$\langle (\text{Re } p_1)^2 \rangle = \langle r^2 \rangle = 1. \quad (3.8)$$

Тогда имеет место

ЛЕММА 2. *Норма s оценивается сверху константой, зависящей только от константы эллиптичности k_0 , т.е.*

$$\|s\|_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})} \leq c(k_0). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p_1 \in \text{Ker } A^*$, то имеем

$$\text{Re} \langle \bar{p}_1 (\partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \overline{\mu \partial_z u}) \rangle = 0, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}).$$

Это эквивалентно соотношению

$$\text{Re} \langle \bar{p}_1 \partial_{\bar{z}} u + 2\bar{p}_1 \text{Re}(\mu \partial_z u) \rangle = 0, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}).$$

Отсюда следует, что

$$\text{Re} \langle is \partial_{\bar{z}} u \rangle = \text{Re} \langle r (\partial_{\bar{z}} u + 2 \text{Re}(\mu \partial_z u)) \rangle, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}). \quad (3.10)$$

Образ оператора $\partial_{\bar{z}}: \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$ совпадает с подпространством

$$\widehat{\mathcal{L}} = \{f \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) \mid \langle f \rangle = 0\}, \quad \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) = \widehat{\mathcal{L}} \oplus \mathbb{C}.$$

Так как $\langle s \rangle = 0$ (см. теорему 7), то получим

$$\text{Re} \langle is (\partial_{\bar{z}} u + c) \rangle = \text{Re} \langle is \partial_{\bar{z}} u \rangle \quad \forall c \in \mathbb{C}. \quad (3.11)$$

Следовательно, левая часть (3.10) определяет линейный непрерывный функционал над $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$

$$F(g) = \operatorname{Re}\langle s\bar{g} \rangle, \quad g \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}).$$

Для каждого $g \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$ найдется единственный элемент $u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$, $\langle u \rangle = 0$, такой, что $\partial_{\bar{z}} u = -i(\bar{g} - \langle \bar{g} \rangle)$. Тогда в силу условия (3.8) из (3.10), (3.11) получим

$$\begin{aligned} |F(g)| &= |\operatorname{Re}\langle s\bar{g} \rangle| = |\operatorname{Re}\langle s(\bar{g} - \langle \bar{g} \rangle) \rangle| = |\operatorname{Re}\langle is \partial_{\bar{z}} u \rangle| \\ &= |\operatorname{Re}\langle r(\partial_{\bar{z}} u + 2 \operatorname{Re}(\mu \partial_{\bar{z}} u)) \rangle| \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})} \\ &\leq 2(1 + k_0) \|g\|_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенство $\|\partial_{\bar{z}} u\|_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})} = \|\partial_z u\|_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})}$, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$, которое доказывается аналогично (3.4). Таким образом,

$$|\operatorname{Re}\langle s\bar{g} \rangle| \leq 2(1 + k_0) \langle |g|^2 \rangle^{1/2} \quad \forall g \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}).$$

Отсюда при $g = s$ получим (3.9). Лемма 2 доказана.

Пусть $A_n \in \mathcal{B}(k_0; Q)$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность обобщенных операторов Бельтрами таких, что $\nu_n = \overline{\mu_n}$, причем μ_n – гладкая периодическая функция. Обозначим через $p_1^n = r_n + is_n$ первый из базисных элементов ядра $\operatorname{Ker} A_n^*$ (теорема 7, второй элемент ядра $p_2^k = i$), нормированный, как и в лемме 2, условием (3.8). Тогда справедлива

ЛЕММА 3. *Элементы*

$$p_1^n = r_n + is_n \in \operatorname{Ker} A_n^*, \quad n = 1, 2, \dots,$$

обладают свойствами:

- (i) r_n – положительная периодическая функция: $r_n(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$;
- (ii) последовательность $\{p_1^n\}$ ограничена в $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$:

$$\|p_1^n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})} \leq c,$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 ;

- (iii) пусть $\{p_1^k = r_k + is_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{p_1^n\}$ – любая слабо сходящаяся подпоследовательность, $p_1^k = r_k + is_k \rightharpoonup p_1 = r + is$ в $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, тогда $r(x) > 0$ п.в. в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем для A_n соответствующее сопряженное однородное уравнение (3.7) и выделим его действительную и мнимую части. Тогда имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1}((1 + 2a)r) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2}(br) + \frac{\partial s}{\partial x_2} = 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial x_1}(br) + \frac{\partial}{\partial x_2}((1 - 2a)r) - \frac{\partial s}{\partial x_1} = 0, \end{cases}$$

где $a + ib = \mu$ (индекс n опущен). Исключив s , получим

$$\sum_{l,j=1}^2 \frac{\partial^2(a_{lj}r)}{\partial x_l \partial x_j} = 0, \quad (3.12)$$

где $a_{11} = 1 + 2a$, $a_{22} = 1 - 2a$, $a_{12} = a_{21} = 2b$. Согласно (1.8) легко получим $1 - k_0 \leq a_{11} \leq 1 + k_0$, $1 - k_0 \leq a_{22} \leq 1 + k_0$, $(1 - k_0)^2 \leq \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \leq (1 + k_0)^2$. Следовательно, $r = \operatorname{Re} p_1$ есть периодическое решение уравнения (3.12), которое является сопряженным однородным уравнением для равномерно эллиптического уравнения $\sum_{l,j=1}^2 a_{lj} \partial^2 u / \partial x_l \partial x_j = 0$. Как известно (см., например, [1; гл. 1, § 3], [5]), все нетривиальные периодические решения (3.12) знакопостоянны.

Так как $r \neq 0$, $\langle r \rangle > 0$, то получим, что $r(x) > 0 \ \forall x \in \Omega$ (если обозначим первый базисный вектор из теоремы 7 через $p_1^0 = r^0 + is^0$, $\langle p_1^0 \rangle = \langle r^0 \rangle = 1$, то после перенормировки (3.8) имеем $p_1 = p_1^0 / \|r^0\|_{\mathcal{L}_2}$, значит, $\langle r \rangle = 1 / \|r^0\|_{\mathcal{L}_2} > 0$). Итак, свойство (i) доказано.

Свойство (ii) есть следствие леммы 2. Наконец, (iii) есть следствие того, что r_k – решение сопряженного уравнения (3.12) (см. [5]). Лемма 3 доказана.

§ 4. Усреднение обобщенного уравнения Бельтрами

4.1. Об одном интегральном тождестве. Из соотношения (1.11) стандартной процедурой, использующей разбиение единицы, легко получаем равенство

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{\bar{z}} \varphi + \mu \partial_z \varphi + \nu \overline{\partial_z \varphi}) \bar{p} dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}), \quad (4.1)$$

где p – любой элемент ядра оператора A^* . (Отметим, что соотношение (1.12) есть следствие равенства (4.1).)

Докажем равенство (4.1). Пусть носитель функции φ есть подмножество ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$. Покроем Q конечным числом областей Q_j , $j = 1, \dots, n$, замыкание каждой из которых принадлежит квадрату периодов Ω_j . И пусть $\psi_1, \dots, \psi_n$ – разбиение единицы, соответствующее этому покрытию, т.е. $\psi_j \in C_0^\infty(Q_j; \mathbb{C})$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1 \ \forall x \in Q$. Обозначим выражение слева в (4.1) через I . Тогда имеем

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\partial_{\bar{z}} \sum_{j=1}^n (\varphi \psi_j(x)) + \mu \partial_z \sum_{j=1}^n (\varphi \psi_j(x)) + \nu \overline{\partial_z \sum_{j=1}^n (\varphi \psi_j(x))} \right) \bar{p} dx \\ &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\Omega_j} (\partial_{\bar{z}} \Theta_j + \mu \partial_z \Theta_j + \nu \overline{\partial_z \Theta_j}) \bar{p} dx, \end{aligned}$$

где $\Theta_j = \varphi \psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j; \mathbb{C})$. Функцию Θ_j , $j = 1, \dots, n$, периодически продолжим на всю плоскость. Тогда в силу (1.11) и $p \in \operatorname{Ker} A^*$ имеем

$$I = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\Omega_j} \bar{p} A \Theta_j dx = \sum_{j=1}^n |\Omega_j| \operatorname{Re} \langle \bar{p} A \Theta_j \rangle = 0.$$

Соотношение (4.1) доказано.

Положим в равенстве (4.1) $\varphi(x) = \psi(\varepsilon x)$, $0 < \varepsilon \leq 1$, где $\psi(x)$ – финитная функция. Тогда после замены переменной $\varepsilon x \mapsto x$ легко получим

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{\bar{z}} \psi + \mu(\varepsilon^{-1} x) \partial_z \psi + \nu(\varepsilon^{-1} x) \overline{\partial_z \psi}) \overline{p(\varepsilon^{-1} x)} dx = 0, \quad (4.2)$$

при этом в качестве функции ψ можно взять любой финитный элемент из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$.

4.2. Доказательство теоремы 8 об усреднении. Пусть $\hat{A} \in \mathcal{B}(k_0; Q)$ – любой из G -предельных в области Q операторов семейства $\{A_\varepsilon\}$, т.е. $A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \hat{A}$. Достаточно показать, что $\hat{A} = A_0$. С этой целью рассмотрим задачу Римана–Гильберта

$$\partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon + \nu^\varepsilon \overline{\partial_z u_\varepsilon} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad u_\varepsilon \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}), \quad (4.3)$$

где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

Пусть u_ε – решение этой задачи. Умножим равенство (4.3) на функцию

$$\overline{p_1^\varepsilon(x)} \psi(x) = \overline{p_1(\varepsilon^{-1}x)} \psi(x),$$

где $p_1 = p_1(x)$, $\langle p_1 \rangle = 1$, – первый из базисных элементов ядра $\text{Ker } A^*$ (см. теорему 7), $\psi \in C_0^\infty(Q)$ – действительная функция. Тогда после интегрирования по Q в силу равенства $\text{Re } z = \text{Re } \bar{z}$ получим

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_Q [\partial_{\bar{z}}(u_\varepsilon \psi) + \mu^\varepsilon \partial_z(u_\varepsilon \psi) + \nu^\varepsilon \overline{\partial_z(u_\varepsilon \psi)}] \overline{p_1^\varepsilon} dx \\ - \text{Re} \int_Q (\overline{p_1^\varepsilon} \partial_{\bar{z}} \psi + \mu^\varepsilon \overline{p_1^\varepsilon} \partial_z \psi + \overline{\nu^\varepsilon} p_1^\varepsilon \partial_z \psi) u_\varepsilon dx = \text{Re} \int_Q f \overline{p_1^\varepsilon} \psi dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое слева согласно (4.2) равно нулю.

Отсюда, так как $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, где u – решение G -предельной задачи $\hat{A}u = f$, $u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$, в силу $\mu^{\varepsilon_k} \overline{p_1^{\varepsilon_k}} \rightharpoonup \langle \mu \overline{p_1} \rangle$, $\overline{\nu^{\varepsilon_k}} p_1^{\varepsilon_k} \rightharpoonup \langle \bar{\nu} p_1 \rangle$, $\overline{p_1^{\varepsilon_k}} \rightharpoonup \langle \overline{p_1} \rangle = 1$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ после предельного перехода по последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ получим

$$- \text{Re} \int_Q (\partial_{\bar{z}} \psi + \langle \mu \overline{p_1} + \bar{\nu} p_1 \rangle \partial_z \psi) u dx = \int_Q f_1 \psi dx,$$

где $f_1 = \text{Re } f$. Следовательно, в силу произвольности $\psi \in C_0^\infty(Q)$, $\text{Im } \psi = 0$, имеем

$$\text{Re}(\partial_{\bar{z}} u + \langle \mu \overline{p_1} + \bar{\nu} p_1 \rangle \partial_z u) = f_1. \quad (4.4)$$

Аналогично, с учетом $\langle p_2 \rangle = i$ (теорема 7) получим еще соотношение

$$\text{Re}(-i \partial_{\bar{z}} u + \langle \mu \overline{p_2} + \bar{\nu} p_2 \rangle \partial_z u) = f_2,$$

где $f_2 = \text{Im } f$, которое эквивалентно равенству

$$\text{Im}(\partial_{\bar{z}} u + i \langle \mu \overline{p_2} + \bar{\nu} p_2 \rangle \partial_z u) = f_2. \quad (4.5)$$

Теперь умножим (4.5) на i и прибавим к (4.4); тогда имеем

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} u + \frac{1}{2} (\langle \mu \overline{p_1} + \bar{\nu} p_1 \rangle \partial_z u + \langle \bar{\mu} p_1 + \nu \overline{p_1} \rangle \overline{\partial_z u}) \\ + \frac{1}{2} (\langle i \mu \overline{p_2} + i \bar{\nu} p_2 \rangle \partial_z u + \langle i \bar{\mu} p_2 + i \nu \overline{p_2} \rangle \overline{\partial_z u}) \\ = \partial_{\bar{z}} u + \frac{1}{2} \langle \mu (\overline{p_1} + i \overline{p_2}) + \bar{\nu} (p_1 + i p_2) \rangle \partial_z u \\ + \frac{1}{2} \langle \bar{\mu} (p_1 + i p_2) + \nu (\overline{p_1} + i \overline{p_2}) \rangle \overline{\partial_z u} = f. \end{aligned}$$

Следовательно (см. (1.15)), в силу единственности G -предела получим $\hat{A} = A_0$. Теорема 8 доказана.

4.3. Доказательство теоремы 9. Теорема 9 доказывается аналогично теореме 8 (без привлечения G -предела) с использованием оценки

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0(Q;\mathbb{C})} \leq c_0(\|f\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} + \|g\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}),$$

где $c_0 > 0$ – константа, зависящая только от k_0 и максимума L_∞ -норм a и b . Эта оценка есть следствие оценки (1.5).

4.4. Доказательство следствия 2. Пусть $\nu = e^{i\alpha}\mu$. Тогда согласно теореме 8, определению 2 и следствию 1 в силу единственности G -предела получим $\nu^0 = e^{i\alpha}\mu^0$. Аналогично доказывается, что при $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha}\bar{\mu}^0$. Осталось показать, что в случае $\eta = e^{i\alpha}\bar{\mu}$ коэффициент μ^0 определяется по формулам из следствия 2.

При $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$ сопряженное однородное уравнение (1.12) представимо в виде

$$\partial_z p + 2\partial_{\bar{z}}(\bar{\mu}e^{i\alpha/2}\operatorname{Re}(e^{-i\alpha/2}p)) = 0.$$

Отсюда следует, что число $q = e^{i(\alpha+\pi)/2}$ является одним из его решений.

Пусть $\alpha \neq -\pi$, $\alpha \in [-\pi, \pi)$, и пусть p_1 , $\langle p_1 \rangle = 1$, – первый базисный вектор (см. теорему 7); тогда вторым базисным вектором является

$$p_2 = \frac{q - p_1 \operatorname{Re} q}{\operatorname{Im} q}. \quad (4.6)$$

При $\alpha \neq 0$, $\alpha \in [-\pi, \pi)$, если p_2 , $\langle p_2 \rangle = i$, – второй базисный вектор, то первый дается формулой

$$p_1 = \frac{q - p_2 \operatorname{Im} q}{\operatorname{Re} q}. \quad (4.7)$$

Из формул (4.6), (4.7), (1.14) легко получим требуемый результат. Например, при $\alpha \neq -\pi$ имеем

$$\mu^0 = \langle \mu(\mathcal{Q} + e^{-i\alpha}\mathcal{P}) \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \mu(\bar{p}_1 + e^{-i\alpha}p_1) \left(1 - i \frac{\operatorname{Re} q}{\operatorname{Im} q} \right) \right\rangle = \frac{\langle \mu \operatorname{Re}(p_1 e^{-i\alpha/2}) \rangle}{\cos(\alpha/2)}.$$

§ 5. Примеры по усреднению

Когда коэффициенты μ , ν имеют специальную структуру, например зависят только от x_1 , коэффициенты усредненного оператора вычисляются достаточно просто.

ПРИМЕР 1. Пусть $\nu = 0$, $\mu = \mu(x_1)$ – периодическая (измеримая ограниченная) функция одной переменной. Тогда усредненный оператор дается равенством

$$A_0 u = \partial_{\bar{z}} u + \mu^0 \partial_z u,$$

где

$$\mu^0 = \frac{\langle \mu(1 + \mu)^{-1} \rangle}{\langle (1 + \mu)^{-1} \rangle}.$$

Действительно, сопряженное уравнение (1.12) здесь такое: $\partial_z p + \partial_{\bar{z}}(\bar{\mu}p) = 0$. Будем искать решения, зависящие только от x_1 . Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{d}{dx_1}((1 + \mu)p) = 0 \implies p = \frac{c}{1 + \bar{\mu}}, \quad c \in \mathbb{C} - \text{константа}.$$

Отсюда при $c = \langle(1 + \bar{\mu})^{-1}\rangle^{-1}$ получим базисный вектор p_1 , $\langle p_1 \rangle = 1$, и по теореме 8 имеем $\mu^0 = \langle(1 + \mu)^{-1}\rangle^{-1} \langle \mu(1 + \mu)^{-1} \rangle$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mu = 0$, $\nu = \nu(x_1)$ – периодическая функция. Тогда

$$\begin{aligned} \mu^0 &= \frac{\langle(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle}{\langle(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle^2 - |\langle\nu(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle|^2} - 1, \\ \nu^0 &= \frac{\langle\nu(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle}{\langle(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle^2 - |\langle\nu(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle|^2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Действительно, решениями уравнения (1.12), зависящими только от x_1 , являются функции

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{A^2 - |B|^2} \frac{A + B - (A + \bar{B})\nu}{1 - |\nu|^2}, \quad \langle p_1 \rangle = 1, \\ p_2 &= \frac{1}{A^2 - |B|^2} \frac{i(A - B) + i(A - \bar{B})\nu}{1 - |\nu|^2}, \quad \langle p_2 \rangle = i, \end{aligned}$$

где $A = \langle(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle$, $B = \langle\nu(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle$.

Отсюда и из формул (1.14) получим (5.1).

ПРИМЕР 3. Пусть $\mu = 0$, $\nu = \nu(x_1)$ – нечетная периодическая функция. Тогда $\mu^0 = \langle(1 - |\nu|^2)^{-1}\rangle^{-1} - 1$, $\nu^0 = 0$.

Это следует из (5.1) в силу того, что среднее значение нечетной функции равно нулю.

Пусть, например, $\nu = c_0 \sin x_1$, $|c_0| < 1$, $c_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $\mu^0 = \sqrt{1 - |c_0|^2} - 1$, $\nu^0 = 0$.

ПРИМЕР 4. Пусть $\mu = 0$, $\nu = k_0 e^{mx_1 i}$, $m \neq 0$ целое. Тогда $\mu^0 = -k_0^2$, $\nu^0 = 0$.

Это также есть следствие условий (5.1), так как $\langle e^{mx_1 i} \rangle = 0$, $|e^{mx_1 i}| = 1$.

ПРИМЕР 5. Пусть $\mu = \mu(x_1)$, $\nu = \nu(x_1)$ – периодические функции. Тогда

$$\begin{aligned} \mu^0 &= \frac{\langle(1 + \mu)(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1}\rangle}{|\langle(1 + \mu)(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1}\rangle|^2 - |\langle\nu(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1}\rangle|^2} - 1, \\ \nu^0 &= \frac{\langle\nu(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1}\rangle}{|\langle(1 + \mu)(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1}\rangle|^2 - |\langle\nu(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1}\rangle|^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Будем искать решения (1.12), зависящие от x_1 . Тогда (1.12) запишется в виде

$$\frac{d}{dx_1}(p + \bar{\mu}p + \nu\bar{p}) = 0.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения удовлетворяет равенству

$$(1 + \bar{\mu})p + \nu\bar{p} = c, \quad c \in \mathbb{C} - \text{константа.} \quad (5.3)$$

Исключив $\bar{p}$ из (5.3) и комплексно-сопряженного выражения для (5.3), получим

$$p = \frac{(1 + \mu)c - \nu\bar{c}}{|1 + \mu|^2 - |\nu|^2}, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (5.4)$$

Подберем $c = c_1$, $c = c_2$ так, чтобы соответствующие решения (5.4) удовлетворяли условиям нормировки $\langle p_1 \rangle = 1$, $\langle p_2 \rangle = i$. Для нахождения c_1 и c_2 имеем равенства, получаемые из (5.4) переходом к средним значениям:

$$\begin{aligned} Ac_1 - B\bar{c}_1 &= 1, & Ac_2 - B\bar{c}_2 &= i, \\ A &= \langle (1 + \mu)(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle, & B &= \langle \nu(|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Исключив из них и комплексно-сопряженных им выражений $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$, получим

$$c_1 = \frac{\bar{A} + B}{|A|^2 - |B|^2}, \quad c_2 = \frac{i(\bar{A} - B)}{|A|^2 - |B|^2}. \quad (5.6)$$

Заметим, что $|A|^2 - |B|^2 \neq 0$. Действительно, если это не так, получим

$$\frac{A}{B} = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \lambda \implies A = \lambda B, \quad B = \bar{\lambda} A \implies A = |\lambda|^2 A.$$

Отсюда имеем $\lambda = e^{i\varphi}$, где φ – некоторое действительное число, так как

$$\begin{aligned} |A| &= |\langle a \rangle + \langle \mu a \rangle| \geq \langle a \rangle - \langle |\mu| a \rangle = \langle 1 - |\mu| a \rangle \geq (1 - k_0) \langle a \rangle > 0, \\ a &= (|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \geq (1 - |\mu| - |\nu|)^{-2} \geq (1 - k_0)^{-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $0 = A - e^{i\varphi} B = \langle (1 + \mu - e^{i\varphi} \nu) a \rangle$. Значит,

$$0 = \operatorname{Re} \langle (1 + \mu - e^{i\varphi} \nu) a \rangle \geq (1 - k_0) \langle a \rangle \geq (1 - k_0)^{-1} > 0.$$

Получили противоречие.

Таким образом,

$$p_1 = \frac{(1 + \mu)c_1 - \nu\bar{c}_1}{|1 + \mu|^2 - |\nu|^2}, \quad p_2 = \frac{(1 + \mu)c_2 - \nu\bar{c}_2}{|1 + \mu|^2 - |\nu|^2}, \quad \langle p_1 \rangle = -i, \quad \langle p_2 \rangle = 1,$$

где c_1 и c_2 определены формулами (5.6), (5.5). Отсюда с учетом (1.14) несложными преобразованиями получим (5.2).

Формулы (5.2) упрощаются, если коэффициенты μ , ν связаны соотношениями из следствия 2.

ПРИМЕР 6. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mu = \mu(x_1)$ – периодическая функция. Тогда при $\nu = e^{i\alpha} \mu$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha} \mu^0$, при $\nu = e^{i\alpha} \bar{\mu}$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha} \bar{\mu}^0$, где в обоих случаях

$$\mu^0 = \frac{\langle \mu(1 + 2 \operatorname{Re} \mu)^{-1} \rangle}{\langle (1 + 2 \operatorname{Re} \mu)^{-1} \rangle}. \quad (5.7)$$

Действительно, пусть, например, $\nu = e^{i\alpha}\mu$. Тогда

$$a = (|1 + \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} = (1 + 2\operatorname{Re} \mu)^{-1}.$$

Преобразуем знаменатель (5.2):

$$|\langle (1 + \mu)a \rangle|^2 - |\langle \mu a \rangle|^2 = \langle a \rangle^2 + 2\langle a \rangle \langle a \operatorname{Re} \mu \rangle = \langle a \rangle \langle a + 2a \operatorname{Re} \mu \rangle = \langle a \rangle \langle aa^{-1} \rangle = \langle a \rangle.$$

Следовательно, μ^0 дается формулой (5.7).

Операторы $\partial_{\bar{z}}$ и ∂_z , очевидно, несимметричны относительно x_1 и x_2 . Поэтому не приходится ожидать сохранения формул из предыдущих примеров, когда коэффициенты зависят только от x_2 . В связи с этим рассмотрим аналог примеров 1, 5.

ПРИМЕР 7. Пусть $\nu = \nu(x_2)$, $\mu = \mu(x_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu^0 &= 1 - \frac{\langle (1 - \mu)(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle}{|\langle (1 - \mu)(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle|^2 - |\langle \nu(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle|^2}, \\ \nu^0 &= \frac{\langle \nu(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle}{|\langle (1 - \mu)(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle|^2 - |\langle \nu(|1 - \mu|^2 - |\nu|^2)^{-1} \rangle|^2}. \end{aligned}$$

В частности, при $\nu = 0$ имеем $\nu^0 = 0$,

$$\mu^0 = \langle (1 - \mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \mu(1 - \mu)^{-1} \rangle.$$

Действительно, сопряженное уравнение здесь такое:

$$\frac{d}{dx_2}(p - \bar{\mu}p - \nu\bar{p}) = 0.$$

Сравнивая его с уравнением из примера 5, замечаем, что в данном случае в формулах (5.4), (5.5) мы должны заменить μ на $-\mu$, ν на $-\nu$. Отсюда, как и в примере 5, получим требуемый результат.

ПРИМЕР 8 (слоистые среды). Комплексный потенциал процессов, происходящих в слоистых средах, удовлетворяет (1.1), где μ и ν – периодические функции одной переменной, причем $\bar{\nu} = \nu$. Тогда согласно (5.2) получим $\bar{\nu}^0 = \nu^0$.

ПРИМЕР 9. Пусть $\nu = 0$,

$$\mu(x) = \frac{b(x_2) - a(x_1)}{b(x_2) + a(x_1)},$$

где a, b – измеримые ограниченные периодические функции такие, что имеет место (1.2) (например, для выполнения (1.2) достаточно предположить, что $1/b \in \mathcal{L}_\infty(\Omega; \mathbb{C})$, $\operatorname{Re}(a/b) \geq \alpha_0 > 0$, где α_0 – константа). Тогда $\nu^0 = 0$,

$$\mu^0 = \frac{\langle b \rangle - \langle a \rangle}{\langle b \rangle + \langle a \rangle}. \quad (5.8)$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2), \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2), \\ 2\partial_z(\overline{b(x_2)} + \overline{a(x_1)}) + 2\partial_{\bar{z}}(\overline{b(x_2)} - \overline{a(x_1)}) &= \mathcal{D}_1\bar{a} - i\mathcal{D}_2\bar{b} - \mathcal{D}_1\bar{a} + i\mathcal{D}_2\bar{b} = 0, \end{aligned}$$

то $p = p_1 = (\bar{b} - \bar{a})(\bar{b} - \bar{a})^{-1}$ – решение сопряженного уравнения (1.12)

$$\partial_z p + \partial_{\bar{z}}(\bar{\mu}p) = 0.$$

Следовательно, согласно теореме 8 получим (5.8).

§ 6. О геометрии одного G -компакта

6.1. Метрика в $\mathcal{E}(k_0; Q)$. Пусть $\mathfrak{M} = \{f_1, f_2, \dots\} \subset L_2(Q; \mathbb{C})$ – счетное всюду плотное в $L_2(Q; \mathbb{C})$ множество; тогда G -топологию в классе $\mathcal{E}(k_0; Q)$ можно задать при помощи метрики

$$\rho_G(A_1, A_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\|(A_1^{-1} - A_2^{-1})f_l\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}}{1 + \|(A_1^{-1} - A_2^{-1})f_l\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}}, \quad f_l \in \mathfrak{M}.$$

Эквивалентность соотношений $G\text{-}\lim A_k = A$, $\rho_G(A_k, A) \rightarrow 0$ вытекает из оценки (1.3).

Введем в $\mathcal{E}(k_0; Q)$ еще одну метрику:

$$\rho(A_1, A_2) = \int_Q |\mu^1 - \mu^2|^2 dx.$$

Метрика ρ сильнее метрики ρ_G , т.е. из сходимости $\rho(A_k, A) \rightarrow 0$ следует сходимость $\rho_G(A_k, A) \rightarrow 0$. Доказывается это точно так же, как аналогичное утверждение в работе [5], поэтому подробности опускаем.

Пусть $Q \subset \Omega$, Ω – квадрат (периодов). Имеет место

ЛЕММА 4. *Множество сужений на Q операторов из $\mathcal{E}(k_0; \Omega)$ с гладкими периодическими коэффициентами всюду плотно в $\mathcal{E}(k_0; Q)$, наделенном метрикой ρ_G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить этот факт для класса $\mathcal{E}(k_0; Q)$ с метрикой ρ .

Продолжим коэффициент μ операторов из $\mathcal{E}(k_0; Q)$ периодически на всю плоскость, положив $\mu = 0$ на $\Omega \setminus Q$. Очевидно, что полученные таким продолжением операторы принадлежат $\mathcal{E}(k_0; \Omega)$.

Пусть теперь A , $Au = \partial_{\bar{z}}u + \mu \partial_z u + \bar{\mu} \overline{\partial_z u}$, – произвольный элемент из класса $\mathcal{E}(k_0; \Omega)$, и пусть ω – сглаживающая функция, т.е. неотрицательная функция из $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, обращающаяся в нуль вне единичного круга $\{|x| < 1\}$ и удовлетворяющая условию $\int_{|x| < 1} \omega(x) dx = 1$. Рассмотрим функцию

$$\mu_h(x) = h^{-2} \int_{|x-y| < h} \mu(y) \omega(h^{-1}(x-y)) dy = \int_{|t| < 1} \mu(x-h\bar{t}) \omega(t) dt, \quad (6.1)$$

$$0 < h \leq 1.$$

Она бесконечно дифференцируема и периодична.

Легко видеть, что оператор A_h , $A_h u = \partial_{\bar{z}}u + \mu_h \partial_z u + \overline{\mu_h} \overline{\partial_z u}$, принадлежит классу $\mathcal{E}(k_0; \Omega)$. Кроме того, $\mu_h \rightarrow \mu$ в $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$ при $h \rightarrow 0$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, и пусть Σ – частичная сумма ряда Фурье μ такая, что $\mathcal{L}_2$ -норма $\|\mu - \Sigma\|$ меньше $\varepsilon/20$. Легко видеть следующее:

- 1) для любой периодической функции $u \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$ в силу неравенства Гёльдера имеем

$$|u_h(x)|^2 \leq \int_{|y| \leq 1} \omega(y) |u(x - hy)|^2 dx;$$

следовательно,

$$\int_{\Omega} |u_h(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega_1} |u(x)|^2 dx \leq 9 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

где $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(x, \Omega) < h\}$;

- 2) если u – непрерывная периодическая функция, то в силу равномерной непрерывности в $\bar{\Omega}_1$ имеем

$$|u_h(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2|\Omega|} \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall h < h_0(\varepsilon).$$

С учетом 1) и 2) получим $\|\mu - \mu_h\| \leq 10\|\mu - \Sigma\| + \|\Sigma - \Sigma_h\| \leq \varepsilon$. Следовательно, множество операторов с гладкими периодическими μ всюду плотно в $\mathcal{E}(k_0; \Omega)$, наделенном метрикой ρ . Значит, совокупность сужений на Q таких операторов всюду плотно в множестве $\mathcal{E}(k_0; Q)$ с метрикой ρ . Лемма 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $G\text{-}\lim A_n = A$ в области Q и $A_n, A \in \mathcal{E}(k_0; Q)$. Тогда согласно лемме 4 можно считать, что коэффициент μ_n оператора A_n есть сужение на Q гладкой периодической функции. Точнее, найдется последовательность $\tilde{A}_n \in \mathcal{E}(k_0; Q)$ с такими коэффициентами, которая G -сходится к A .

6.2. Структура G -предела в $\mathcal{E}(k_0; Q)$. Пусть $A_n, A \in \mathcal{E}(k_0; Q)$, $A_n \xrightarrow{G} A$. Согласно лемме 4 и замечанию 1 можно считать, что коэффициент μ_n оператора $A_n u = \partial_{\bar{z}} u + \mu_n \partial_z u + \overline{\mu_n} \partial_{\bar{z}} u$ есть сужение на Q гладкой периодической функции. Пусть $p_1^n = r_n + is_n$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность из лемм 2, 3. Справедлива

ЛЕММА 5. Коэффициент μ G -предела A дается равенством

$$\mu = r^{-1}(w\text{-}\lim r_n \mu_n), \quad r = w\text{-}\lim r_n, \quad (6.2)$$

где положительные функции r_n, r определены в лемме 3, $w\text{-}\lim$ – слабый предел в $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$.

В силу единственности G -предела не нужно переходить в (6.2) к подпоследовательности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $L_n: \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$ оператор периодической задачи $\partial_{\bar{z}} u + \mu_n \partial_z u + \overline{\mu_n} \partial_{\bar{z}} u = f \in \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$. И пусть L_n^* – сопряженный оператор. Согласно теореме 7 ядро $\text{Ker } L_n^*$ – двухмерное подпространство $\mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C})$. Пусть p_1^n, p_2^n – базис $\text{Ker } L_n^*$. Так как $-L_n^* p = \partial_{\bar{z}} p + \partial_z(\overline{\mu_n}(p + \bar{p})) = 0$ (см. (1.12)), то $p_2^n = i$, а $p_1^n = r_n + is_n$ нормируем условием $\langle r_n^2 \rangle = 1$. Тогда согласно лемме 3 существует подпоследовательность $\{k\} \subset \{n\}$ такая, что

$$p_1^k = r_k + is_k \rightharpoonup r + is = p_1, \quad r_k \mu_k \rightharpoonup \tilde{\mu} \quad \text{в } \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}), \quad (6.3)$$

$r(x) > 0$ п.в. в Ω .

Согласно (4.1) имеем

$$\operatorname{Re} \int_Q \bar{p}(\partial_{\bar{z}}\psi + \mu_k \partial_z\psi + \overline{\mu_k} \overline{\partial_z\psi}) dx = 0, \quad \psi \in \mathring{W}_2^1(Q; \mathbb{C}), \quad (6.4)$$

где p – любой элемент ядра $\operatorname{Ker} L_k^*$. Положим здесь $p = p_1^k = r_k + is_k$; тогда имеем

$$\operatorname{Re} \int_Q \overline{p_1^k}(\partial_{\bar{z}}\psi + 2 \operatorname{Re}(\mu_k \partial_z\psi)) dx = 0, \quad \psi \in \mathring{W}_2^1(Q; \mathbb{C}). \quad (6.5)$$

Рассмотрим задачу Р–Г $A_k u_k = Au$, $u_k, u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C})$. В силу единственности решения задачи Р–Г и $A_k \xrightarrow{G} A$ получим

$$u_k = u_k(u) \rightharpoonup u \quad \text{в } \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}) \quad \text{для любого } u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}). \quad (6.6)$$

Подставим в (6.5) $\psi = u_k \varphi$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ – действительная функция. Тогда в силу очевидных равенств $\varphi f + u_k \partial_{\bar{z}}\varphi + 2 \operatorname{Re}(u_k \mu_k \partial_z\varphi) = A_k(u_k \varphi)$, $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$ получим

$$- \operatorname{Re} \int_Q (\overline{p_1^k} u_k \partial_{\bar{z}}\varphi + 2 r_k \mu_k u_k \partial_z\varphi) dx = \operatorname{Re} \int_Q \overline{p_1^k} \varphi Au dx.$$

Отсюда с помощью (6.3) и (6.6) получаем

$$- \operatorname{Re} \int_Q (\overline{p_1} u \partial_{\bar{z}}\varphi + 2 \hat{\mu} u \partial_z\varphi) dx = \operatorname{Re} \int_Q \overline{p_1} \varphi Au dx. \quad (6.7)$$

Из (6.5) после предельного перехода с учетом (6.3) получим

$$\operatorname{Re} \int_Q (\overline{p_1} \partial_{\bar{z}}\psi + 2 \hat{\mu} \partial_z\psi) dx = 0, \quad \psi \in \mathring{W}_2^1(Q; \mathbb{C}).$$

Откуда при $\psi = u\varphi$ имеем

$$\operatorname{Re} \int_Q (\overline{p_1} u \partial_{\bar{z}}\varphi + 2 \hat{\mu} \partial_z\varphi) dx + \operatorname{Re} \int_Q (\overline{p_1} \varphi \partial_{\bar{z}}u + 2 \hat{\mu} \varphi \partial_zu) dx = 0.$$

Прибавив это равенство к (6.7), получим

$$\int_Q \varphi \operatorname{Re}(\overline{p_1} \partial_{\bar{z}}u + 2 \hat{\mu} \partial_zu) dx = \int_Q \varphi \operatorname{Re}(\overline{p_1} Au) dx.$$

Значит, в силу произвольности φ имеем

$$\operatorname{Re}(\overline{p_1} \partial_{\bar{z}}u + 2 \hat{\mu} \partial_zu) = \operatorname{Re}(\overline{p_1} Au). \quad (6.8)$$

Согласно равенству $\operatorname{Im} Au = \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}u$ имеем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(\overline{p_1} \partial_{\bar{z}}u) &= \overline{p_1} \partial_{\bar{z}}u + p_1 \partial_z\bar{u} = (\overline{p_1} + p_1) \partial_{\bar{z}}u - p_1 2i \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}u \\ &= 2r \partial_{\bar{z}}u - p_1 (Au - \overline{Au}). \end{aligned}$$

Значит, в силу (6.8) получим

$$r \partial_{\bar{z}}u + 2 \operatorname{Re}(\hat{\mu} \partial_zu) = \operatorname{Re}(\overline{p_1} Au) + 2^{-1} p_1 (Au - \overline{Au}) = r Au.$$

Таким образом,

$$\partial_{\bar{z}}u + r^{-1} \hat{\mu} \partial_zu + r^{-1} \overline{\hat{\mu}} \overline{\partial_zu} = Au \quad \forall u \in \mathcal{W}_0(Q; \mathbb{C}).$$

Лемма 5 доказана.

6.3. Геометрия G -компакта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Покажем сначала, что

$$G\mathcal{E}(S) \subset \mathcal{E}(S^0). \quad (6.9)$$

В силу локальности G -сходимости (теорема 2) можно без потери общности считать, что $Q = \Omega$ есть квадрат (периодов). Так как оператор A из $\mathcal{E}(k_0; Q)$ определяется однозначно через коэффициент μ , мы в дальнейшем будем применять обозначения $\mu \in \mathcal{E}(k_0; Q)$, $\mu_k \xrightarrow{G} \mu$ вместо $A \in (k_0; Q)$, $A_k \xrightarrow{G} A$.

Пусть μ – любой элемент $\mathcal{E}(S)$; продолжим его периодически на всю плоскость и сгладим по формуле (6.1). Область значений $\mu_h(x)$, $x \in Q$, содержится в S^0 . Действительно, пусть $\operatorname{Re}(zz') \leq \alpha$ – произвольная полуплоскость, содержащая S^0 . Тогда, очевидно, $\operatorname{Re}(\mu_h(x)z') \leq \alpha$, так как $\mu(y) \in S^0$ для любого $y \in \mathbb{R}^2$. (За периодическим продолжением мы сохраним прежнее обозначение.) А так как S^0 как выпуклая оболочка компакта есть выпуклый компакт, то он получается как пересечение всех таких полуплоскостей. Значит, $\mu_h(x) \in \mathcal{E}(S^0)$ при $x \in Q$.

Теперь вместе с $\mathcal{E}(S^0)$ рассмотрим множество $\mathcal{E}_h(S^0)$, полученное сопоставлением μ гладкой периодической функции μ_h (см. (6.1)). По доказанному $\mathcal{E}_h(S^0) \subset \mathcal{E}(S^0)$. Следовательно, $G\mathcal{E}_h(S^0) \subset G\mathcal{E}(S^0)$. С другой стороны, по лемме 4 множество $\mathcal{E}_h(S^0)$ всюду плотно в $\mathcal{E}(S^0)$ в топологии G -сходимости. Значит, $G\mathcal{E}_h(S^0) = G\mathcal{E}(S^0)$. Отсюда, так как $S \subset S^0$, получим $G\mathcal{E}(S) \subset G\mathcal{E}(S^0) = G\mathcal{E}_h(S^0)$. Следовательно, для доказательства включения (6.9) достаточно установить справедливость включения $G\mathcal{E}_h(S^0) \subset \mathcal{E}_h(S^0)$ (так как $\mathcal{E}_h(S^0) \subset \mathcal{E}(S^0)$, $G\mathcal{E}_h(S^0) = G\mathcal{E}(S^0)$). Пусть $\mu \in G\mathcal{E}_h(S^0)$, и пусть $\mu_k \xrightarrow{G} \mu$, где $\mu_k \in \mathcal{E}_h(S^0)$. Тогда в силу леммы 5 аналогично доказательству соотношения $\mu_h(x) \in S^0$, $x \in Q$ (см. выше), получим, что $\mu(x) \in S^0$, $x \in Q$. Следовательно, $G\mathcal{E}_h(S^0) \subset \mathcal{E}_h(S^0)$.

Докажем теперь обратное включение

$$\mathcal{E}(S^0) \subset G\mathcal{E}(S^0). \quad (6.10)$$

Пусть $\square = (\square_\alpha)$ – произвольное разбиение Q на квадраты $\square_\alpha$. И пусть $\mu(x)$ – произвольный элемент из $\mathcal{E}_h(S^0)$. Рассмотрим кусочно постоянную функцию $\nu(x)$, равную в $\square_\alpha$ значению μ в центре квадрата $\square_\alpha$. В силу непрерывности μ в $\bar{Q}$ имеем $\nu \rightarrow \mu$ в $\mathcal{L}_2(Q; \mathbb{C})$, когда диаметр разбиения стремится к нулю. Следовательно, так как метрика ρ сильнее ρ_G (см. п. 6.1), то кусочно постоянные функции указанного вида (обозначим их $\mathcal{E}_\square$) плотны в $\mathcal{E}_h(S^0)$ в топологии G -сходимости. Множество $\mathcal{E}_h(S^0)$, как было отмечено ранее, плотно в $\mathcal{E}(S^0)$. Значит, $\mathcal{E}_\square$ плотно в $\mathcal{E}(S^0)$. Поэтому (6.10) будет доказано, если мы покажем, что $\mathcal{E}_\square \subset G\mathcal{E}(S^0)$. А это означает, что мы должны доказать, что любая кусочно постоянная функция (из $\mathcal{E}_\square$) достижима, т.е. существует G -предел последовательности из $\mathcal{E}(S)$.

Из G -сходимости в Q следует G -сходимость и в любой подобласти $Q_1 \subset Q$ (теорема 2), поэтому достаточно проверить, что достижима любая постоянная из $\mathcal{E}(S^0)$, т.е. достигим любой элемент из S^0 .

Пусть $\hat{\mu} \in S^0$ – произвольный элемент. Тогда $\hat{\mu}$ представляется в виде выпуклой комбинации некоторых элементов из S , т.е.

$$\hat{\mu} = \sum_{\ell=1}^m t_{\ell} \mu_{\ell}, \quad t_{\ell} \geq 0, \quad \sum_{\ell=1}^m t_{\ell} = 1, \quad \mu_{\ell} \in S, \quad \ell = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим семейство

$$\mu^{\varepsilon}(x) = \sum_{\ell=1}^m T_{\ell}(\varepsilon^{-1} x_1) \mu_{\ell}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (6.11)$$

где $T_{\ell}(x_1)$ – периодическая функция переменной x_1 ; $T_{\ell}(x_1) = 1$ при $x_1 \in r_{\ell} \subset [0, 1]$ и $T_{\ell}(x_1) = 0$ при $x_1 \in [0, 1] \setminus r_{\ell}$. Причем $r_{\ell} = [\alpha_{\ell}, \alpha_{\ell+1}]$, $\ell = 1, \dots, m$, $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{m+1} \leq 1$, и длина отрезка r_{ℓ} равна

$$\theta_{\ell} = \frac{(1 + 2 \operatorname{Re} \mu_{\ell}) t_{\ell}}{\sum_{k=1}^m (1 + 2 \operatorname{Re} \mu_k) t_k}. \quad (6.12)$$

Согласно примеру 6

$$\mu^{\varepsilon} \xrightarrow{G} \mu^0 = \frac{\langle \mu(1 + 2 \operatorname{Re} \mu)^{-1} \rangle}{\langle (1 + 2 \operatorname{Re} \mu)^{-1} \rangle}.$$

Легко видеть, что $\mu^0 = \hat{\mu}$. Действительно, в силу (6.12) имеем

$$\begin{aligned} \langle (1 + 2 \operatorname{Re} \mu)^{-1} \rangle &= \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{1 + 2 \operatorname{Re} \mu_{\ell}} \theta_{\ell} = \sum_{\ell=1}^m \frac{t_{\ell}}{\sum_{k=1}^m (1 + 2 \operatorname{Re} \mu_k) t_k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^m (1 + 2 \operatorname{Re} \mu_k) t_k \right)^{-1}, \\ \langle \mu(1 + 2 \operatorname{Re} \mu)^{-1} \rangle &= \sum_{\ell=1}^m \frac{\mu_{\ell}}{1 + 2 \operatorname{Re} \mu_{\ell}} \theta_{\ell} = \hat{\mu} \left(\sum_{k=1}^m (1 + 2 \operatorname{Re} \mu_k) t_k \right)^{-1}, \end{aligned}$$

значит, $\mu^0 = \hat{\mu}$. Таким образом, $\mu^{\varepsilon} \xrightarrow{G} \hat{\mu}$. Теорема 10 доказана.

§ 7. Снова о G -сходимости недивергентных эллиптических операторов второго порядка

Вопросы G -сходимости недивергентных эллиптических операторов второго порядка хорошо изучены (см. [5]). Здесь мы хотим осветить этот вопрос с точки зрения эллиптических систем.

Обозначим через $\mathcal{A}(\lambda_0; Q)$ множество недивергентных эллиптических операторов второго порядка

$$Av \equiv \sum_{\ell, j=1}^2 a_{\ell j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\ell} \partial x_j}, \quad a_{12} = a_{21},$$

с измеримыми коэффициентами, которые удовлетворяют условию

$$\lambda_0^{-1} |\xi|^2 \leq \mathbf{a} \xi \cdot \xi \leq \lambda_0 |\xi|^2 \quad \text{п.в. в } Q \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (7.1)$$

где $\lambda_0 > 1$ – константа эллиптичности, $\mathbf{a}$ – матрица коэффициентов.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная гладкая односвязная область. Известно, что задача Дирихле

$$Av = f \in L_2(Q), \quad v \in \mathring{W}_2^2(Q),$$

однозначно разрешима, причем имеет место оценка

$$c_0 \|v\|_{\mathring{W}_2^2(Q)} \leq \|Av\|_{L_2(Q)}, \quad v \in \mathring{W}_2^2(Q), \quad (7.2)$$

где $c_0 > 0$ – константа, зависящая только от λ_0 (см., например, [5], [14]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [5]). Скажем, что последовательность $\{A_k\} \subset \mathcal{A}(\lambda_0; Q)$ G -сходится в области Q к оператору $A \in \mathcal{A}(\lambda_0; Q)$, $A_k \xrightarrow{G} A$, если $\mathcal{A}_k^{-1} \rightharpoonup \mathcal{A}^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$, где $\mathcal{A}_k, \mathcal{A}$ – операторы краевых задач Дирихле

$$\begin{aligned} A_k v_k &= f \in L_2(Q), & v_k &\in \mathring{W}_2^2(Q), \\ Av &= f \in L_2(Q), & v &\in \mathring{W}_2^2(Q). \end{aligned}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 11 (см. [5]). *Класс $\mathcal{A}(\lambda_0; Q)$ компактен относительно G -сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что из всякой последовательности из $\mathcal{A}(\lambda_0; Q)$ можно выделить G -сходящуюся подпоследовательность. В силу того, что G -сходимость метризуема и L_2 -сходимость коэффициентов влечет G -сходимость (подробнее см. [5]), достаточно считать, что мы имеем дело с последовательностями операторов с гладкими коэффициентами, причем эти коэффициенты суть сужения на Q гладких периодических функций. Итак, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}(\lambda_0; Q)$ – такая последовательность. Рассмотрим задачу Дирихле

$$A_n v_n = f \in L_2(Q), \quad v_n \in \mathring{W}_2^2(Q). \quad (7.3)$$

Эта задача однозначно разрешима, и имеет место оценка (7.2):

$$c_0 \|v_n\|_{\mathring{W}_2^2(Q)} \leq \|f\|_{L_2(Q)} \quad \forall f \in L_2(Q). \quad (7.4)$$

Отсюда в силу сепарабельности $L_2(Q)$ следует, что существует подпоследовательность $\{k\} \subset \{n\}$ такая, что

$$v_k \equiv A_k^{-1} f \rightharpoonup v(f) \quad \text{в } \mathring{W}_2^2(Q) \quad (7.5)$$

для любого $f \in L_2(Q)$.

Введем в рассмотрение комплексный градиент

$$u_k = u_{1k} + iu_{2k} \equiv \partial_z v_k.$$

Тогда уравнение (7.3) можно представить в виде обобщенного уравнения Бельтрами

$$L_k \equiv \partial_{\bar{z}} u_k + \mu_k \partial_z u_k + \overline{\mu_k \partial_z u_k} = \frac{f}{2 \operatorname{Tr} \mathbf{a}_k}, \quad (7.6)$$

где

$$\mu_k = \frac{a_{11}^k - a_{22}^k + 2ia_{12}^k}{2 \operatorname{Tr} \mathbf{a}_k},$$

$\operatorname{Tr} \mathbf{a}_k$ – след матрицы коэффициентов $\mathbf{a}_k = \{a_{\ell j}^k\}$. Согласно (7.1) имеем

$$|\mu_k| + |\overline{\mu_k}| = \frac{\lambda_2/\lambda_1 - 1}{\lambda_2/\lambda_1 + 1} \leq \frac{\lambda_0^2 - 1}{\lambda_0^2 + 1} \equiv k_0 < 1.$$

Действительно, пусть $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ – собственные значения матрицы $\mathbf{a}(x)$ (индекс k опущен), $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$. В силу (7.1) имеем $\lambda_0^{-1} \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \lambda_0$, $1 \leq \lambda_2/\lambda_1 \leq \lambda_0^2$. Поскольку $\operatorname{Tr} \mathbf{a} = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det \mathbf{a} = \lambda_1 \lambda_2$, то в силу монотонности функции $\varphi = (t-1)/(t+1)$, $1 \leq t \leq \lambda_0^2$, имеем

$$2|\mu| = \frac{\lambda_2/\lambda_1 - 1}{\lambda_2/\lambda_1 + 1} \leq \frac{\lambda_0^2 - 1}{\lambda_0^2 + 1}.$$

В силу (7.5) имеем

$$u_k \rightarrow u(f) \quad \text{в } L_2(Q) \quad \forall f \in L_2(Q). \quad (7.7)$$

Так как $u_k = \partial_z v_k$, получаем

$$\frac{\partial u_{1k}}{\partial x_2} = \frac{\partial u_{2k}}{\partial x_1} \iff \partial_{\bar{z}} u_k = \partial_z \overline{u_k}.$$

Отсюда в силу (7.5) и (7.7) имеем

$$\partial_{\bar{z}} u = \partial_z \bar{u} \quad \forall f \in L_2(Q). \quad (7.8)$$

Пусть $p_1^k = r_k + is_k$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность элементов ядра оператора, сопряженного оператору периодической задачи, соответствующей (7.6) (см. леммы 2 и 3). При необходимости перейдя к подпоследовательности, можно считать, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} r_k \rightharpoonup r, \quad r_k \mu_k \rightharpoonup \hat{\mu}, \quad r_k (\operatorname{Tr} \mathbf{a}_k)^{-1} &\equiv q_k \rightharpoonup q, \\ q_k \mathbf{a}_k \rightharpoonup \alpha = \{\alpha_{\ell j}\} \quad \text{в } \mathcal{L}_2(\Omega; \mathbb{C}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Легко видеть, что $q(x) > 0$ п.в. в Ω . Действительно, так как в силу (7.1) $(2\lambda_0)^{-1} r_k \leq r_k (\operatorname{Tr} \mathbf{a}_k)^{-1} = q_k \leq 2^{-1} \lambda_0 r_k$, то получим $q_k \rightharpoonup q \geq (2\lambda_0)^{-1} r$. Тогда согласно лемме 3 имеем $q(x) > 0$ п.в. в Ω . Теперь аналогично лемме 5 с учетом вещественности $f \in L_2(Q)$ получим, что $u = u(f)$ (см. (7.7)) удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{Re}(\overline{p_1} \partial_{\bar{z}} u + 2\hat{\mu} \partial_z u) = \frac{1}{2} q f \quad \forall f \in L_2(Q).$$

Следовательно, в силу (7.8) имеем

$$r \partial_{\bar{z}} u + \hat{\mu} \partial_z u + \overline{\hat{\mu} \partial_z u} = \frac{1}{2} q f \quad \forall f \in L_2(Q). \quad (7.10)$$

Согласно (7.9) и (7.6) получим

$$\hat{\mu} = w\text{-}\lim r_k \mu_k = \frac{1}{2} w\text{-}\lim (q_k a_{11}^k - q_k a_{22}^k + 2i q_k a_{12}^k) = \frac{1}{2} (\alpha_{11} - \alpha_{22} + 2i \alpha_{12}),$$

где $w\text{-lim}$ – слабый предел в $L_2(Q; \mathbb{C})$. Положим

$$\mathbf{a} = q^{-1}\alpha = \{q^{-1}\alpha_{\ell j}\} \equiv \{a_{\ell j}\};$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{2} q(a_{11} - a_{22} + 2ia_{12}), \\ r &= w\text{-lim } r_k = w\text{-lim } q_k \operatorname{Tr} \mathbf{a}_k = \alpha_{11} + \alpha_{22} = q \operatorname{Tr} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7.10) получим

$$\partial_{\bar{z}}u + \mu \partial_z u + \overline{\mu \partial_z u} = \frac{f}{2 \operatorname{Tr} \mathbf{a}} \quad \forall f \in L_2(Q),$$

где $\mu = (a_{11} - a_{22} + 2ia_{12})/(2 \operatorname{Tr} \mathbf{a})$. Следовательно, так как $u = u(f) = \partial_z v$, то получим, что для любого $f \in L_2(Q)$ последовательность v_k решений задачи Дирихле

$$A_k v_k = f \in L_2(Q), \quad v_k \in \mathring{W}_2^1(Q),$$

слабо в $\mathring{W}_2^1(Q)$ сходится (см. (7.5)) к решению задачи Дирихле

$$Av \equiv \sum_{\ell j}^2 a_{\ell j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\ell \partial x_j} = f \in L_2(Q), \quad v \in \mathring{W}_2^1(Q).$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что матрица $\mathbf{a} = q^{-1}\alpha$ удовлетворяет условию (7.1), но это следует из

$$q_k \lambda_0^{-1} |\xi|^2 \leq q_k a_{\ell j}^k \xi_\ell \xi_j \leq q_k \lambda_0 |\xi|^2$$

после предельного перехода с учетом (7.9). Теорема 11 доказана.

Список литературы

- [1] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993; англ. пер.: V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleĭnik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [2] S. Spagnolo, “Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all’equazione del calore”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **21** (1967), 657–699.
- [3] S. Spagnolo, “Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **22** (1968), 571–597.
- [4] E. De Giorgi, S. Spagnolo, “Sulla convergenza degli integrali dell’energia per operatori ellittici del secondo ordine”, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **8** (1973), 391–411.
- [5] В. В. Жиков, М. М. Сиражудинов, “О G-компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:4 (1981), 718–733; англ. пер.: V. V. Žikov, M. M. Siražudinov, “On G-compactness of a class of nondivergence elliptic operators of second order”, *Math. USSR-Izv.*, **19**:1 (1982), 27–40.

- [6] В. В. Жиков, М. М. Сиражудинов, “Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши”, *Матем. сб.*, **116(158)**:2(10) (1981), 166–186; англ. пер.: V. V. Žikov, M. M. Sirazhudinov, “The averaging of nondivergence second order elliptic and parabolic operators and the stabilization of solutions of the Cauchy problem”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:2 (1983), 149–166.
- [7] М. М. Сиражудинов, “ G -сходимость и усреднение некоторых недивергентных эллиптических операторов высокого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **19**:11 (1983), 1949–1956; англ. пер.: M. M. Sirazhudinov, “The G -convergence and averaging of some high-order nondivergence elliptic operators”, *Differential Equations*, **19**:11 (1983), 1429–1435.
- [8] М. М. Сиражудинов, “О G -компактности одного класса эллиптических систем первого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **26**:2 (1990), 298–305; англ. пер.: M. M. Sirazhudinov, “ G -compactness of a class of first-order elliptic systems”, *Differential Equations*, **26**:2 (1990), 229–235.
- [9] T. Iwaniec, F. Giannetti, G. Moscarrello, C. Sbordone, L. Kovalev, “On G -compactness of the Beltrami operators”, *Nonlinear homogenization and its applications to composites, polycrystals and smart materials*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **170**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, 107–138.
- [10] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, 2-е изд., Наука, М., 1988; англ. пер. 1-го изд.: I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*, Pergamon, London–Paris–Frankfurt; Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.
- [11] Б. В. Боярский, “Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **43(85)**:4 (1957), 451–503.
- [12] В. В. Жиков, М. М. Сиражудинов, “Усреднение системы уравнений Бельтрами”, *Дифференц. уравнения*, **24**:1 (1988), 64–73; англ. пер.: V. V. Zhikov, M. M. Sirazhudinov, “The averaging of a system of Beltrami equations”, *Differential Equations*, **24**:1 (1988), 50–56.
- [13] М. М. Сиражудинов, *Краевые задачи для эллиптических систем на плоскости*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Изд-во Моск. ун-та, М., 2002.
- [14] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.

М. М. Сиражудинов (M. M. Sirazhudinov)
 Дагестанский государственный университет,
 Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала
 E-mail: sirazh_magomed@mail.dgu.ru,
sirazhmagomed@rambler.ru

Поступила в редакцию
 11.05.2006 и 30.01.2008