Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Дик, О ра-
венстве подгрупп $J(E(A))A$ и $\text{Rad}(E(A)A)$ в группе A ,
Матем. сб., 2010, том 201, номер 8, 23–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:35:49

УДК 512.541

А. П. Дик

О равенстве подгрупп $J(E(A))A$ и $\text{Rad}(E(A)A)$ в группе A

Исследуется вопрос о равенстве подгрупп $J(E(A))A$ и $\text{Rad}(E(A)A)$ в группе A . Найдены максимальные вполне характеристические подгруппы некоторых абелевых групп.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо эндоморфизмов, радикал Джекобсона.

Пусть A – абелева группа, $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A , $J(E(A))$ – радикал Джекобсона кольца $E(A)$, $\text{Rad}(A)$ – радикал Джекобсона модуля $E(A)A$, причем группа A рассматривается естественным образом как левый $E(A)$ -модуль. П. А. Крылов в работе [1; проблема 20а] сформулировал следующий вопрос: для каких групп A справедливо равенство $J(E(A))A = \text{Rad}(A)$? В настоящей работе эта задача решается для редуцированных p -групп (теорема 1) и для делимых групп (следствие 1). Все понятия и обозначения, которые не поясняются, являются стандартными и можно найти их, например, в [1] и [2]. Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми.

Каш (см. [2; теорема 9.2.1]) доказал справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть R – кольцо, $M = M_R$ – правый R -модуль. Тогда

$$M \text{Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(M).$$

Аналогичный результат будет справедлив и для левых R -модулей. Так как любую абелеву группу можно рассматривать как левый модуль над своим кольцом эндоморфизмов, то $J(E(A))A \subseteq \text{Rad}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть ${}_S A$ – левый S -модуль, R – некоторое кольцо, и пусть существует эпиморфизм $\varphi: R \rightarrow S$. Тогда левый S -модуль ${}_S A$ можно превратить в левый R -модуль ${}_R A$, если ввести операцию умножения на элементы кольца R следующим образом: для любых $r \in R$, $a \in A$ по определению $r \circ a = \varphi(r)a$. Нетрудно видеть, что эти два модуля совпадают (см. [2; раздел 3, п. 3.2]).

ЛЕММА 1. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i , $i \in I$, – вполне характеристические подгруппы. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) $J(E(A_i))A_i = \text{Rad}(E(A_i)A_i)$ для любого $i \in I$;
- (б) $J(E(A))A = \text{Rad}(E(A)A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $J(E(A))A = \bigoplus_{i \in I} J(E(A_i))A_i$. В силу вполне характеристичности подгрупп A_i , $i \in I$, справедливо равенство

$$J(E(A))A = J(E(A)) \bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} J(E(A))A_i.$$

Для любого $i \in I$ имеем

$$J(E(A))A_i = \langle M_1 \rangle, \quad J(E(A_i))A_i = \langle M_2 \rangle,$$

где $M_1 = \{\alpha(a) \mid \alpha \in J(E(A)), a \in A_i\}$, $M_2 = \{\beta(a) \mid \beta \in J(E(A_i)), a \in A_i\}$.

Так как A_i – вполне характеристическая подгруппа, то для любого $\alpha(a) \in M_1$ можем записать $\alpha(a) = (\pi\alpha\rho)(a)$, где $\pi: A \rightarrow A_i$ – каноническая проекция, $\rho: A_i \rightarrow A$ – каноническое вложение. Так как $\pi\alpha\rho \in J(E(A_i))$ (см. [1; гл. 4, § 20, лемма 20.1]), то $M_1 \subseteq M_2$.

Для любого $\beta(a) \in M_2$ имеем $\beta(a) = \beta'(a)$, где β' – такой эндоморфизм группы A , что $\beta'|_{A_i} = \beta$, $\beta'A_j = 0$ при $j \neq i$. Так как $\beta' \in J(E(A))$ (см. [1; гл. 4, § 20, лемма 20.1]), то $M_2 \subseteq M_1$.

Таким образом, $M_1 = M_2$, а значит,

$$J(E(A))A_i = J(E(A_i))A_i.$$

Тогда $\bigoplus_{i \in I} J(E(A))A_i = \bigoplus_{i \in I} J(E(A_i))A_i$. Окончательно получаем

$$J(E(A))A = \bigoplus_{i \in I} J(E(A_i))A_i.$$

Если $J(E(A_i))A_i = \text{Rad}_{(E(A_i))A_i}$ для любого $i \in I$, то

$$\text{Rad}_{(E(A))A} = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}_{(E(A_i))A_i} = \bigoplus_{i \in I} J(E(A_i))A_i = J(E(A))A,$$

т.е. из (а) следует (б).

Обратно, пусть $\text{Rad}_{(E(A))A} = J(E(A))A$. Следовательно,

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Rad}_{(E(A_i))A_i} = \bigoplus_{i \in I} J(E(A_i))A_i.$$

Допустим, что $\text{Rad}_{(E(A_r))A_r} \neq J(E(A_r))A_r$ для некоторого $r \in I$. Тогда существует $x \in \text{Rad}_{(E(A_r))A_r} \setminus J(E(A_r))A_r$. Так как $x \in \bigoplus_{i \in I} J(E(A_i))A_i$, то $x = a_{i_1} + \dots + a_{i_n}$, где $a_{i_k} \in J(E(A_{i_k}))A_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$; причем для некоторого $i_m \neq r$ имеем $a_{i_m} \neq 0$. Пусть $\pi_m: A \rightarrow A_{i_m}$ – каноническая проекция. Тогда для эндоморфизма π_m группы A имеем $\pi_m(x) = a_{i_m} \in J(E(A_{i_m}))A_{i_m}$. Так как $J(E(A_{i_m}))A_{i_m} \subseteq A_{i_m}$, то получаем противоречие с вполне характеристичностью подгруппы A_r . Следовательно, для любого $r \in I$ выполняется равенство $\text{Rad}_{(E(A_r))A_r} = J(E(A_r))A_r$.

Лемма 1 позволяет свести рассмотрение периодических абелевых групп к рассмотрению их p -компонент.

Введем следующие обозначения: (n, m) – наибольший общий делитель натуральных чисел n и m ; $H_p^A(a)$ – индикатор элемента a в p -группе A ; $o(a)$ – порядок элемента a ; $A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$, где n – натуральное число.

Следующая лемма дает описание максимальных вполне характеристических подгрупп абелевых p -групп.

ЛЕММА 2. *Для редуцированной абелевой p -группы A справедливы следующие утверждения:*

- (а) если A – неограниченная p -группа, то A не содержит максимальных вполне характеристических подгрупп;
- (б) если A – ограниченная p -группа, то подгруппа $A[p^{k-1}]$ является единственной максимальной вполне характеристической подгруппой группы A , где $p^k = \max\{o(a) \mid a \in A\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть A – неограниченная p -группа. Допустим, что существует максимальная вполне характеристическая подгруппа M группы A . Тогда существует $a_k \in A \setminus M$, $o(a_k) = p^k$.

Рассмотрим подгруппу $B_k = \{a \in A \mid o(a) \leq p^k\}$. Следовательно, $M + B_k$ является вполне характеристической подгруппой группы A как сумма вполне характеристических подгрупп. Так как M – максимальная вполне характеристическая подгруппа группы A , то $M \subsetneq M + B_k = A$. Рассмотрим множество $F = \{x \in M \mid A = \langle x \rangle \oplus A'\}$. Так как $0 \in F$, то множество F непусто.

Далее, порядки элементов из F не ограничены в совокупности. Действительно, так как A – неограниченная группа, то A обладает циклическими прямыми слагаемыми сколь угодно большого порядка (см. [3; гл. V, § 27, упражнение 1]). Тогда существует $a \in A$, $o(a) = p^t$, $t > k$, $A = \langle a \rangle \oplus A'$. Так как $A = M + B_k$, то $a = m + b$, где $m \in M$, $b \in B_k$. Следовательно, $p^{t-1}a = p^{t-1}m$, т.е. $o(a) = o(m)$. Так как $h_p^A(p^{t-1}a) = h_p^A(p^{t-1}m) = t - 1$ и последовательность высот $h_p^A(p^i m)$, $i = 0, \dots, t - 1$, строго возрастает, то $H_p^A(m) = (0, 1, 2, \dots, t - 1, \infty, \dots)$. Покажем, что $\langle m \rangle \cap p^t A = 0$. Пусть $0 \neq x \in \langle m \rangle \cap p^t A$. Тогда $x = p^s l m$, где $s < t$, $(l, p) = 1$. Так как $h_p^A(p^s m) = s$, то $x \in p^s A \setminus p^{s+1} A$, что противоречит тому, что $x \in p^t A$. Таким образом, $\langle m \rangle \cap p^t A = 0$ и $A = \langle m \rangle \oplus A''$ (см. [3; § 27, предложение 27.1]), т.е. $m \in F$.

Так как F – непустое множество и порядки элементов из F не ограничены в совокупности, то найдется $m \in F$ такой, что $o(m) = p^l > p^k$. Тогда существует ненулевой гомоморфизм $\phi \in \text{Hom}(\langle m \rangle, \langle a_k \rangle)$, для которого $\phi(m) = a_k$. Отображение $\phi\pi: A \rightarrow A$, где $\pi: A \rightarrow \langle m \rangle$ – каноническая проекция, является эндоморфизмом группы A . Имеем $\phi\pi(m) = a_k \in A \setminus M$, что противоречит вполне характеристичности подгруппы M . Таким образом, группа A не содержит собственных максимальных вполне характеристических подгрупп.

(б) Пусть теперь A – ограниченная p -группа. Покажем, что если C – собственная вполне характеристическая подгруппа группы A , то C не содержит элементов порядка p^k , где p^k – максимальный порядок элементов группы A .

Допустим противное, т.е. существует $c \in C$ такой, что $o(c) = p^k$. Так как $\langle c \rangle \cap p^k A = \langle c \rangle \cap 0 = 0$, то $A = \langle c \rangle \oplus A'$ для некоторой подгруппы A' (см. [3; гл. V, § 27, предложение 27.1]). Так как подгруппа $\langle c \rangle$ выделяется прямым слагаемым в группе A , то индикатор элемента c в группе A имеет вид $H_p^A(c) = (0, 1, 2, \dots, k - 1, \infty, \dots)$. Пусть $a \in A \setminus C$. Очевидно, что $o(a) \leq p^k$ и $H_p^A(c) \leq H_p^A(a)$. Тогда (см. [4; гл. XI, § 65, лемма 65.5]) существует эндоморфизм φ группы A такой, что $\varphi(c) = a \notin C$. Это противоречит тому, что C – вполне характеристическая подгруппа.

Таким образом, максимальный порядок элементов любой вполне характеристической подгруппы группы A строго меньше максимального порядка элементов группы A и подгруппа $A[p^{k-1}]$ является единственной максимальной вполне характеристической подгруппой группы A .

Следующие теоремы дают решение поставленной задачи в случае редуцированных ограниченных p -групп и делимых групп.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – редуцированная p -группа. Справедливо равенство $J(E(A))A = \text{Rad}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

(I) Пусть A – ограниченная p -группа. Рассмотрим сначала группу вида $A = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle$, где $o(a_1) = p^k$, $o(a_2) = p^l$. Кольцо эндоморфизмов группы A имеет следующий вид:

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(\langle a_1 \rangle) & \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle) \\ \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle) & E(\langle a_2 \rangle) \end{pmatrix}.$$

Тогда (см. [5; теорема 3]) получаем, что

$$J(E(A)) \cong \begin{pmatrix} J(E(\langle a_1 \rangle)) & A_r(\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)) \\ A_r(\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)) & J(E(\langle a_2 \rangle)) \end{pmatrix},$$

где

$$A_r(\text{Hom}(\langle a_i \rangle, \langle a_j \rangle)) = \{ \alpha \in \text{Hom}(\langle a_i \rangle, \langle a_j \rangle) \mid \alpha \text{Hom}(\langle a_j \rangle, \langle a_i \rangle) \subseteq J(E(\langle a_j \rangle)) \}, \\ i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Известно, что $J(E(\langle a_i \rangle)) = pE(\langle a_i \rangle)$, $i = 1, 2$. Найдем $A_r(\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle))$ и $A_r(\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle))$.

Предположим, что $k < l$. Тогда $\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$ и $\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$ – циклические группы. Гомоморфизм $\alpha \in \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$, где $\alpha(a_2) = a_1$ является образующим группы $\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$; образующим группы $\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$ является гомоморфизм $\beta \in \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$, где $\beta(a_1) = p^{l-k}a_2$. Пусть $\gamma \in \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$, $\gamma = n\beta$. Тогда для элемента a_1 имеем:

$$(\alpha\gamma)(a_1) = n(\alpha\beta)(a_1) = np^{l-k}a_1,$$

т.е. $\alpha\gamma \in pE(\langle a_1 \rangle)$. Так как для любого $\delta \in \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$ можно записать $\delta = m\alpha$, то включение $\delta \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle) \subseteq pE(\langle a_1 \rangle) = J(E(\langle a_1 \rangle))$ справедливо для любого $\delta \in \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$. Следовательно,

$$A_r(\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)) = \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle).$$

Аналогично получаем, что для любого $\delta \in \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$ и для любого $\gamma \in \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$ имеем $\delta = m\beta$, $\gamma = n\alpha$ и тогда

$$(\delta\gamma)(a_2) = mn(\beta\alpha)(a_2) = mnp^{l-k}a_2.$$

Следовательно, $\delta\gamma \in pE(\langle a_2 \rangle) = J(E(\langle a_2 \rangle))$ и

$$A_r(\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)) = \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle).$$

Таким образом, при $k \neq l$ имеем

$$J(E(A)) \cong \begin{pmatrix} pE(\langle a_1 \rangle) & \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle) \\ \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle) & pE(\langle a_2 \rangle) \end{pmatrix}.$$

Пусть $k = l$. Тогда $\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$ и $\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$ – циклические группы с образующими элементами $\alpha(a_2) = a_1$ и $\beta(a_1) = a_2$ соответственно. Если $\delta \in \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)$, $\delta = n\alpha$ и $(n, p) = 1$, то $(\delta\beta)(a_1) = n(\alpha\beta)(a_1) = na_1$, т.е. $\delta\beta \notin pE(\langle a_1 \rangle)$, а значит, $\delta \notin A_r(\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle))$. Таким образом,

$$A_r(\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)) \subseteq p\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle).$$

Включение $p\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle) \subseteq A_r(\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle))$ очевидно. Окончательно получаем, что

$$A_r(\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle)) = p\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle).$$

Аналогично, если $\gamma \in \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$, $\gamma = m\beta$ и $(m, p) = 1$, то $(\gamma\alpha)(a_2) = m(\beta\alpha)(a_2) = ma_2$, т.е. $\gamma\alpha \notin pE(\langle a_2 \rangle)$ и $\gamma \notin A_r(\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle))$. Следовательно,

$$A_r(\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)) \subseteq p\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle),$$

что вместе с включением $p\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle) \subseteq A_r(\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle))$ дает равенство

$$A_r(\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)) = p\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle).$$

Таким образом, при $k = l$ получаем

$$\begin{aligned} J(E(A)) &\cong \begin{pmatrix} pE(\langle a_1 \rangle) & p\text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle) \\ p\text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle) & pE(\langle a_2 \rangle) \end{pmatrix} \\ &= p \begin{pmatrix} E(\langle a_1 \rangle) & \text{Hom}(\langle a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle) \\ \text{Hom}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle) & E(\langle a_2 \rangle) \end{pmatrix} \cong pE(A). \end{aligned}$$

Пусть теперь $A = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ – ограниченная p -группа, и пусть $\alpha \in J(E(A))$, $\alpha = (\alpha_{ji})$, где $\alpha_{ji} \in \text{Hom}(\langle a_i \rangle, \langle a_j \rangle)$. Обозначим через A_{ij} подгруппу $\langle a_i \rangle \oplus \langle a_j \rangle$ группы A . Пусть $\pi: A \rightarrow A_{ij}$ – каноническая проекция, $\rho: A_{ij} \rightarrow A$ – каноническое вложение. Так как $J(E(A))$ – идеал кольца $E(A)$, то $\alpha\pi \in J(E(A))$. Имеем

$$\pi(\alpha\pi)\rho = \pi(\alpha\pi\pi)\rho = (\pi\alpha\pi)(\pi\rho) = \pi\alpha\pi|_{A_{ij}}.$$

Заметим, что

$$\pi\alpha\pi|_{A_{ij}} = \begin{pmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} \end{pmatrix}$$

и (см. [1; гл. 4, § 20, лемма 20.1]) $\pi\alpha\pi|_{A_{ij}} \in J(E(A_{ij}))$. Тогда

$$\alpha_{ii} \in pE(\langle a_i \rangle), \quad \alpha_{jj} \in pE(\langle a_j \rangle);$$

если $o(a_i) = o(a_j)$, то $\alpha_{ij} \in p\text{Hom}(\langle a_j \rangle, \langle a_i \rangle)$, $\alpha_{ji} \in p\text{Hom}(\langle a_i \rangle, \langle a_j \rangle)$; если же $o(a_i) \neq o(a_j)$, то $\alpha_{ij} \in \text{Hom}(\langle a_j \rangle, \langle a_i \rangle)$, $\alpha_{ji} \in \text{Hom}(\langle a_i \rangle, \langle a_j \rangle)$.

Пусть $i_1, \dots, i_n \in I$. Рассмотрим $J(E(A))A'$, где $A' = \bigoplus_{j=1}^n \langle a_{i_j} \rangle$. Обозначим через H_{kl} , $k, l = 1, \dots, n$, группу $\text{Hom}(\langle a_{i_l} \rangle, \langle a_{i_k} \rangle)$, если $o(a_{i_k}) \neq o(a_{i_l})$,

и $p \text{Hom}(\langle a_{i_l} \rangle, \langle a_{i_k} \rangle)$, если $o(a_{i_k}) = o(a_{i_l})$. Имеем

$$\begin{aligned} J(E(A))A' &\cong \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & H_{11} & \dots & H_{12} & \dots & H_{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & H_{21} & \dots & H_{22} & \dots & H_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & H_{n1} & \dots & H_{n2} & \dots & H_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dots \\ \langle a_{i_1} \rangle \\ \dots \\ \langle a_{i_2} \rangle \\ \dots \\ \langle a_{i_n} \rangle \\ \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots \\ H_{11}\langle a_{i_1} \rangle + H_{12}\langle a_{i_2} \rangle + \dots + H_{1n}\langle a_{i_n} \rangle \\ \dots \\ H_{21}\langle a_{i_1} \rangle + H_{22}\langle a_{i_2} \rangle + \dots + H_{2n}\langle a_{i_n} \rangle \\ \dots \\ H_{n1}\langle a_{i_1} \rangle + H_{n2}\langle a_{i_2} \rangle + \dots + H_{nn}\langle a_{i_n} \rangle \\ \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если в разложении группы $A = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ порядки всех a_i , $i \in I$, одинаковы, то получим, что $J(E(A))A' = pA'$. Так как $A' = \bigoplus_{j=1}^n \langle a_{i_j} \rangle$, где индексы i_j , $j = 1, \dots, n$, произвольны, то в результате получаем $J(E(A))A \cong pA$. Если же порядки a_i , $i \in I$, различны, то выбираем элемент максимального порядка и полагаем $A' = \bigoplus_{j=1}^n \langle a_{i_j} \rangle$, где элемент a_{i_n} имеет максимальный порядок и для любого $k = 1, \dots, n-1$ выполнено $o(a_{i_n}) > o(a_{i_k})$. Тогда $\text{Hom}(\langle a_{i_n} \rangle, \langle a_{i_k} \rangle)$ для любого $k = 1, \dots, n-1$ — циклическая подгруппа, порожденная гомоморфизмом $\alpha \in \text{Hom}(\langle a_{i_n} \rangle, \langle a_{i_k} \rangle)$, $\alpha(a_{i_n}) = a_{i_k}$. Следовательно, $H_{kn}\langle a_{i_n} \rangle = \langle a_{i_k} \rangle$ при $k \neq n$ и $H_{nn}\langle a_{i_n} \rangle = p\langle a_{i_n} \rangle$. Так как $A' = \bigoplus_{j=1}^n \langle a_{i_j} \rangle$, где индексы i_j , $j = 1, \dots, n-1$, произвольны, то в результате получаем $J(E(A))A \cong \bigoplus_{i \in I} \langle a'_i \rangle$, где $a'_i = a_i$, если $o(a_i) < \max\{o(a) \mid a \in A\}$, и $a'_i = pa_i$ в случае, когда $o(a_i) = \max\{o(a) \mid a \in A\}$. Тогда согласно лемме 2 имеем $J(E(A))A \cong \text{Rad}(A)$. Но в силу единственности максимальной вполне характеристической подгруппы в ограниченной p -группе окончательно получаем $J(E(A))A = \text{Rad}(A)$.

(II) Пусть A — неограниченная редуцированная p -группа, и пусть $x \in A$ — отличный от нуля элемент группы, $o(x) = p^k$. Так как A — неограниченная редуцированная p -группа, то $A = \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle \oplus A_1$, где $p^k < o(y_1) < o(y_2)$. Тогда существует гомоморфизм $\varphi \in \text{Hom}(\langle y_1 \rangle, \langle x \rangle)$ такой, что $\varphi(y_1) = x$ или $x = \varphi\pi_1(y_1)$, где $\pi_1: A \rightarrow \langle y_1 \rangle$ — каноническая проекция и $\varphi\pi_1 \in E(A)$.

Также существует $\varphi_2 \in \text{Hom}(\langle y_2 \rangle, \langle y_1 \rangle)$ такой, что $\varphi_2(y_2) = y_1$. Тогда эндоморфизм φ_2' , который имеет матричное представление

$$\varphi_2' = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

принадлежит радикалу Джекобсона кольца эндоморфизмов $J(E(A_0))$ группы A_0 , где $A_0 = \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle$. Существует эндоморфизм $\bar{\varphi}_2' \in J(E(A))$ (см. [1; гл. 4, § 20, лемма 20.1]) такой, что $\bar{\varphi}_2'|_{A_0} = \varphi_2'$ и $\bar{\varphi}_2'(A_1) = 0$. Тогда имеем

$$x = (\varphi\pi_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\varphi\pi_1) \left(\varphi_2' \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (\varphi\pi_1) \left(\bar{\varphi}_2' \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (\varphi\pi_1) \left(\bar{\varphi}_2' \pi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} \right),$$

где $\pi_0: A \rightarrow A_0$ – каноническая проекция. Так как $(\varphi\pi_1)(\overline{\varphi_2'}\pi_0) \in J(E(A))$, то $x \in J(E(A))A$, т.е. $J(E(A))A = A$. В силу справедливости леммы 2 имеем $\text{Rad}(A) = A$ и получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Для делимой абелевой группы D справедлив изоморфизм подгрупп $J(E(D))D \cong \text{Rad}(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – делимая абелева группа. Известно (см. [3; гл. IV, § 23, теорема 23.1]), что любая делимая абелева группа изоморфна прямой сумме копий группы $\mathbb{Q}$ и группы $Z(p^\infty)$, т.е.

$$D \cong \bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right].$$

Так как максимальной вполне характеристической подгруппой группы D будет $\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]$, то $\text{Rad}(D) = \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]$. Кроме того (см. [1; гл. 1, § 3, теорема 3.11]),

$$E(D) \cong \begin{pmatrix} E\left(\bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q}\right) & 0 \\ \text{Hom}\left(\bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q}, \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right) & E\left(\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right) \end{pmatrix}.$$

Из [5; теорема 3] вытекает, что

$$J(E(D)) \cong \begin{pmatrix} J\left(E\left(\bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q}\right)\right) & 0 \\ \text{Hom}\left(\bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q}, \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right) & J\left(E\left(\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $J(E(\bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q})) = 0$ (см. [1; гл. 4, § 21]), получаем

$$J(E(D)) \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{Hom}\left(\bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q}, \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right) & J\left(E\left(\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(E(D))D &\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{Hom}\left(\bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q}, \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right) & J\left(E\left(\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]\right)\right) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \bigoplus_{r_0(D)} \mathbb{Q} \\ \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right] + J \left(E \left(\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right] \right) \right) \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right] \right) \\
&\cong \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right] + J \left(E \left(\bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right] \right) \right) \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right] \\
&= \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right],
\end{aligned}$$

т.е. $J(E(D))D \cong \text{Rad}(D)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для делимой абелевой группы D справедливо равенство $\text{Rad}(D) = J(E(D))D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $\text{Rad}(D) = 0$, требуемое равенство следует из включения $J(E(D))D \subseteq \text{Rad}(D)$.

Пусть $\text{Rad}(D) \neq 0$. Допустим, что $\text{Rad}(D) \neq J(E(D))D$. Пусть существует $y \in \text{Rad}(D) \setminus J(E(D))D$. В силу теоремы 2 имеем $\text{Rad}(D) \stackrel{\psi}{\cong} J(E(D))D$. Следовательно, найдется единственный $x \in J(E(D))D$ такой, что $y = \psi(x)$. Так как $\text{Rad}(D) = \bigoplus_p \left[\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty) \right]$ – прямое слагаемое группы D , то существует $\pi: D \rightarrow \text{Rad}(D)$ – каноническая проекция. Тогда для эндоморфизма $\psi\pi$ группы D имеем: $(\psi\pi)(x) = \psi(x) = \psi(\psi^{-1}(y)) = (\psi\psi^{-1})(y) = y$. Получаем противоречие с вполне характеристичностью группы $J(E(D))D$.

Список литературы

- [1] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Связи абелевых групп и их кольца эндоморфизмов*, ТГУ, Томск, 2002; [англ. пер.: P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, A. A. Tuganbaev, Endomorphism rings of abelian groups, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.](#)
- [2] Ф. Каш, *Модули и кольца*, Мир, М., 1981; [пер. с нем.: F. Kasch, Moduln und Ringe, Teubner, Stuttgart, 1977.](#)
- [3] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, М., 1974; [пер. с англ.: L. Fuchs, Infinite abelian groups, vol. I, Pure and Applied Mathematics, 36, Academic Press, New York–London, 1970.](#)
- [4] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 2, Мир, М., 1977; [пер. с англ.: L. Fuchs, Infinite abelian groups, vol. II, Pure and Applied Mathematics, 36, Academic Press, New York–London, 1973.](#)
- [5] Е. Ю. Каравдина, “Радикал Джекобсона кольца обобщенных матриц порядка 2”, *Международная конференция по математике и механике: избранные доклады*, Томский гос. ун-т, Томск, 2003, 19–27.

А. П. Дик (A. P. Dik)
Томский государственный университет
E-mail: Dik.Aron@gmail.com

Поступила в редакцию
01.02.2008 и 22.12.2009