Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Золотарёв, Функциональные модели коммутативных систем линейных операторов и пространства де Бранжа на римановой поверхности, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 3, 31–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 11:56:21

УДК 517.983.248

В. А. Золотарёв

Функциональные модели коммутативных систем линейных операторов и пространства де Бранжа на римановой поверхности

Построены функциональные модели коммутативных систем $\{A_1, A_2\}$ линейных ограниченных несамосопряженных операторов, которые не содержат диссипативных операторов, т.е. $\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$ не является диссипативным ни при каких $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. В этом случае существенную роль играют преобразование де Бранжа и классы функций, которые здесь возникают. В работе выделены классы коммутативных систем операторов $\{A_1, A_2\}$, для которых такое построение возможно. Найдены реализации функциональных моделей в специальных пространствах мероморфных функций на римановых поверхностях, которые приводят к разумным аналогам пространств де Бранжа на этих римановых поверхностях. Оказалось, что функции $E(p)$ и $\tilde{E}(p)$, задающие порядок роста в пространствах де Бранжа на римановых поверхностях, в точности совпадают с известными функциями Бейкера–Ахиезера.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: функциональная модель, коммутативная система, пространство де Бранжа.

Введение

Построение функциональных моделей диссипативных операторов, которые являются естественными аналогами спектральных разложений самосопряженных операторов, основано на использовании теории дилатаций Б. Сёкефальви-Надя, Ч. Фояша и теории рассеяния П. Лакса, Р. Филлипса (см. [1]). При этом важную роль играют техника преобразования Фурье и возникающие при этом классы функций. В случае недиссипативности основного оператора естественным представляется применение преобразования де Бранжа (см. [1]), которое и приводит к соответствующим гильбертовым пространствам целых функций де Бранжа (см. [2]).

Исследования по построению модельных представлений для коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов, один из которых является диссипативным, также основаны на использовании преобразования Фурье (см. [3], [4]). Важно отметить, что данные конструкции имеют естественную реализацию в специальных пространствах мероморфных функций на римановых поверхностях (см. [3]–[5]). Вопрос о построении функциональных моделей для коммутативных систем несамосопряженных операторов, которые не содержат диссипативных операторов, до сих пор оставался открытым.

В настоящей работе предложен метод построения функциональных моделей именно для таких коммутативных систем несамосопряженных линейных ограниченных операторов $\{A_1, A_2\}$, что выражение $\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$ не является диссипативным оператором ни при каких $\xi_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$. Ниже выделены специальные классы коммутативных систем, для которых существуют надлежащие функциональные модели в гильбертовых пространствах целых функций. При этом мы естественным образом приходим к аналогам пространств де Бранжа на римановых поверхностях, которые порождаются алгебраическими функциями. Выяснилось, что функции $E(\lambda)$ и $\tilde{E}(\lambda)$ для пространств де Бранжа на римановых поверхностях являются функциями Бейкера–Ахиезера (см. [6]), которые, как известно, играют важную роль в теории интегрирования нелинейных уравнений. Таким образом, естественным аналогом функций, задающих порядок роста в таких пространствах на римановых поверхностях, являются функции Бейкера–Ахиезера.

Отметим, что в работах Д. Алпая и В. Винникова [7], [8] также построены соответствующие аналоги пространств де Бранжа на римановой поверхности. Эти конструкции существенно отличаются от построений, изложенных в настоящей работе, и основаны на другом подходе, который базируется на теории воспроизводящих ядер.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейный ограниченный несамосопряженный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H . Совокупность

$$\Delta = (A; H; \varphi; E; \sigma) \quad (1.1)$$

называется (см. [1], [9]) *локальным узлом*, если выполнено условие

$$A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi, \quad (1.2)$$

где E – некоторое гильбертово пространство, φ – линейный ограниченный оператор из H в E , а σ – самосопряженный ограниченный оператор в E . Очевидно (см. [1], [9]), что для любого линейного ограниченного оператора A , заданного в H , всегда найдутся такие E , φ и σ , что имеет место (1.2).

Обозначим через H_1 подпространство в H ,

$$H_1 = \text{span}\{A^n \varphi^* E : n \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (1.3)$$

Если $H_1 = H$, то узел Δ (1.1) называется *простым* (см. [1], [9]). В случае $H_0 \neq 0$ ($H_0 = H \ominus H_1$) подпространство H_0 приводит оператор A и сужение $A|_{H_0}$ на H_0 индуцирует самосопряженный оператор (см. [1], [3]). Узел

$$\Delta_1 = (A|_{H_1}; H_1; \varphi; E; \sigma),$$

где H_1 имеет вид (1.3), принято (см. [1], [9]) называть *простой частью узла* Δ . Основным инструментом исследования несамосопряженного оператора A (узла Δ (1.1)) является характеристическая функция М. С. Лившица (см. [1], [9])

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* \sigma. \quad (1.4)$$

Предположим, что спектр оператора A веществен, $E = E^n$ есть n -мерное евклидовое пространство, а $\sigma = J$ – инволюция ($J = J^* = J^{-1}$). Тогда (см. [1], [9]) характеристическая функция $S_\Delta(\lambda)$ (1.4) имеет мультипликативное разложение

$$S_\Delta = S_l(\lambda); \quad S_x(\lambda) = \int_0^{\widehat{x}} \exp \left\{ \frac{iJ dF_x}{\lambda - \alpha_\xi} \right\}, \quad (1.5)$$

где α_x – вещественная неубывающая ограниченная функция на $[0, l]$ ($l = \text{tr } \varphi \varphi^*$, $0 < l < \infty$), F_x – неубывающая матрица-функция ($n \times n$) на $[0, l]$ такая, что $\text{tr } F_x \equiv x$. Зная разложение (1.5) функции $S_\Delta(\lambda)$, построим гильбертово пространство

$$L_{n,l}^2(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in E^n : \int_0^l \langle f(x) dF_x, f(x) \rangle_{E^n} < \infty \right\}, \quad (1.6)$$

которое получено после замыкания в метрике (1.6) линейной оболочки непрерывных функций с надлежащей факторизацией по ядру этой же метрики (см. [1]). Определим оператор $\overset{\circ}{A}$ в $L_{n,l}^2(F_x)$:

$$(\overset{\circ}{A}f)(x) = \alpha_x f(x) + i \int_x^l f(\xi) dF_\xi \cdot J. \quad (1.7)$$

Нетрудно видеть (см. [1]), что совокупность

$$\overset{\circ}{\Delta} = (\overset{\circ}{A}; L_{n,l}^2(F_x); \overset{\circ}{\varphi}; E^n; J) \quad (1.8)$$

является локальным узлом, где оператор $\overset{\circ}{\varphi}$ из $L_{n,l}^2(F_x)$ в E^n имеет вид

$$\overset{\circ}{\varphi}f(x) = \int_0^l f(x) dF_x. \quad (1.9)$$

Основной результат о треугольных представлениях оператора A , принадлежащий М. С. Лившицу (см. [1], [9]), состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть Δ (1.1) – простой узел, причем $E = E^n$ является n -мерным евклидовым пространством, а $\sigma = J$ – инволюция. Тогда узел Δ унитарно эквивалентен простой части узла $\overset{\circ}{\Delta}$.

Напомним, что унитарная эквивалентность означает, что существует такой унитарный оператор U из H в $L_{n,r}^2(F_x)$, что $UA = \overset{\circ}{A}U$, $\overset{\circ}{\varphi}U = \varphi$ (см. [1], [9]).

Рассмотрим локальный узел Δ (1.1) вида

$$\Delta = (A; H; \varphi; E^2; j_N), \quad (1.10)$$

где E^2 – двумерное евклидово пространство, а инволюция j_N имеет вид

$$j_N = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Предположим, что спектр оператора A сосредоточен в нуле. Тогда, зная характеристическую функцию $S_\Delta(\lambda)$ (1.4), мы, используя мультипликативное представление (1.5), найдем F_x – неубывающую матрицу-функцию (2×2) , заданную на конечном отрезке $[0, l]$.

Обозначим через $L_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$ вектор-строку, которая является решением интегрального уравнения

$$L_x(\lambda) + i\lambda \int_0^x L_t(\lambda) dF_t \cdot j_N = [1, 0], \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.12)$$

Вектор-строке $L_x(\lambda)$ отвечает пара функций

$$E_x(\lambda) = A_x(\lambda) - iB_x(\lambda), \quad \tilde{E}_x(\lambda) = A_x(\lambda) + iB_x(\lambda), \quad (1.13)$$

которые в каждой точке $x \in [0, l]$ удовлетворяют соотношениям (см. [1])

$$|E_x(\lambda)| - |\tilde{E}_x(\lambda)| = \begin{cases} > 0, & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ = 0, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ < 0, & \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \quad (1.14)$$

где $\mathbb{C}_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} \lambda > 0\}$.

Произвольной функции $f(x)$ из $L^2_{2,l}(F_x)$ (1.6) сопоставим при помощи преобразования де Бранжа $\mathcal{B}_L$ целую функцию (см. [1], [2])

$$F(\lambda) = \mathcal{B}_L(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^l f(x) dF_x \cdot L_x^*(\bar{\lambda}), \quad (1.15)$$

где $L_x(\lambda)$ – решение интегрального уравнения (1.12). Данное линейное многообразие функций $F(\lambda)$ задает гильбертово пространство, формальное определение которого состоит в следующем.

Пусть $E(\lambda) (= E_l(\lambda))$ и $\tilde{E}(\lambda) (= \tilde{E}_l(\lambda))$ – целые функции, для которых имеет место (1.14).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Пространством де Бранжа $\mathcal{B}(A, B)$ называется такое линейное многообразие целых функций $F(\lambda)$, что:*

- а) $F(\lambda)/E(\lambda)$ (соответственно $F(\lambda)/\tilde{E}(\lambda)$) является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в верхней $\mathbb{C}_+$ (нижней $\mathbb{C}_-$) полуплоскости;
- б) $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{F(x)}{E(x)} \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{F(x)}{\tilde{E}(x)} \right|^2 dx < \infty$.

Функция $g(z)$ называется (см. [1], [2]) *функцией ограниченного вида в полуплоскости $\mathbb{C}_+$* , если она является частным двух голоморфных ограниченных в $\mathbb{C}_+$ функций. Для таких $g(z)$ средний тип h вычисляется по формуле

$$h = \lim_{y \uparrow \infty} \frac{\ln |g(iy)|}{y}.$$

Аналогичным образом определяется функция ограниченного вида в $\mathbb{C}_-$ и ее средний тип.

Как известно (см. [1], [2]), пространство $\mathcal{B}(A, B)$ является гильбертовым, скалярное произведение в котором задается следующим образом:

$$\langle F(\lambda), G(\lambda) \rangle_{\mathcal{B}(A, B)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x)\overline{G(x)}}{|E(x)|^2} dx.$$

Важно то, что преобразование де Бранжа $\mathcal{B}_L$ (1.15) устанавливает изоморфизм между пространствами $L_{2,l}^2(F_x)$ и $\mathcal{B}(A, B)$ (см. [1], [2]), при этом ядро

$$K(\lambda, w) = \frac{i}{2\pi(\lambda - \bar{w})} \{E(\lambda)\overline{E(w)} - \tilde{E}(\lambda)\overline{\tilde{E}(w)}\} \quad (1.16)$$

является воспроизводящим в $\mathcal{B}(A, B)$ в том смысле, что

$$\langle F(\lambda), K(\lambda, w) \rangle_{\mathcal{B}(A, B)} = F(w) \quad (1.17)$$

для любых $F(\lambda) \in \mathcal{B}(A, B)$ и любых $w \in \mathbb{C}$.

Определим теперь модельный узел

$$\tilde{\Delta} = (\tilde{A}; \mathcal{B}(A, B); \tilde{\varphi}; E^2; j_N), \quad (1.18)$$

где оператор $\tilde{A}$ имеет вид

$$(\tilde{A}F)(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(0)}{\lambda}, \quad (1.19)$$

а $\tilde{\varphi}$, отображающий $\mathcal{B}(A, B)$ в E^2 , имеет вид

$$\tilde{\varphi}F(\lambda) = \sum_{k=1}^2 \langle F(\lambda), e_k(\lambda) \rangle_{\mathcal{B}(A, B)} e_k, \quad (1.20)$$

причем

$$e_1(\lambda) = \frac{1 - \alpha\lambda}{\lambda} B^*(\bar{\lambda}), \quad e_2(\lambda) = \frac{1 - \alpha\lambda}{\lambda} (1 - A^*(\bar{\lambda}))$$

и $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [1]). *Предположим, что Δ (1.10) – простой узел и его характеристическая функция $S(\lambda)$ (1.4) имеет вид (1.5), причем $\alpha_x \equiv 0$. Тогда узел Δ (1.10) унитарно эквивалентен функциональной модели $\tilde{\Delta}$ (1.18), где $A(\lambda) = A_l(\lambda)$, $B(\lambda) = B_l(\lambda)$, при этом $L_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$ – решение интегрального уравнения типа (1.12).*

Рассмотрим коммутативную систему линейных ограниченных несамосопряженных операторов $\{A_1, A_2\}$, действующих в гильбертовом пространстве H . Следуя [3], [4], сопоставим данной системе операторов коммутативный узел

$$\Delta = (\{A_1, A_2\}; H; \varphi; E; \{\sigma_1, \sigma_2\}; \gamma^-; \gamma^+), \quad (1.21)$$

для которого выполняются условия

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= 0, \\ A_k - A_k^* &= i\varphi^* \sigma_k \varphi, \quad k = 1, 2, \\ \sigma_1 \varphi A_2^* - \sigma_2 \varphi A_1^* &= \gamma^- \varphi, \\ \gamma^+ &= \gamma^- + i(\sigma_1 \varphi \varphi^* \sigma_2 - \sigma_2 \varphi \varphi^* \sigma_1), \end{aligned} \quad (1.22)$$

где E – некоторое гильбертово пространство, φ – линейный ограниченный оператор из H в E , а $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^-, \gamma^+$ – самосопряженные ограниченные операторы в E . Как известно (см. [3], [4]), для произвольной коммутативной системы линейных ограниченных операторов в H всегда найдутся такое пространство E и соответствующие операторы $\varphi, \sigma_1, \sigma_2, \gamma^-, \gamma^+$, что будут выполняться узловые соотношения (1.22).

Предположим, что $\dim E = r < \infty$, а $\sigma_1 = J$ – инволюция, и, кроме того, пусть спектр оператора A_1 веществен. Тогда, используя мультипликативную структуру (1.5) характеристической функции оператора A_1 , мы находим вещественную функцию α_x и неубывающую матрицу-функцию F_x на конечном отрезке $[0, l]$. Пусть F_x абсолютно непрерывна, а $dF_x = a_x dx$, где $a_x \geq 0$, $\text{tr } a_x = 1$. Рассмотрим $\gamma(x)$ – матрицу-функцию $(r \times r)$, которая удовлетворяет соотношениям (см. [4])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \gamma(x) J &= i[Ja_x, \sigma_2 J], \quad \gamma(0) = \gamma^+, \\ [Ja_x, (\sigma_2 \alpha_x + \gamma(x)) J] &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Следуя [4], построим треугольную модель коммутативного узла Δ (1.21). Для этого в гильбертовом пространстве $L^2_{r,l}(F_x)$ (1.6), где $dF_x = a_x dx$, зададим коммутативную систему операторов

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{A}_1 f)(x) &= \alpha_x f(x) + i \int_x^l f(t) dF_t \cdot J, \\ (\overset{\circ}{A}_2 f)(x) &= f(x) J (\sigma_2 \alpha_x + \gamma(x)) + i \int_x^l f(t) dF_t \cdot \sigma_2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

причем $\gamma(x)$ удовлетворяет соотношениям (1.23). Определим теперь коммутативный узел

$$\overset{\circ}{\Delta} = (\{\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2\}; L^2_{r,l}(F_x); \overset{\circ}{\varphi}; E^r; \{J, \sigma_2\}; \gamma(l); \gamma^+), \quad (1.25)$$

где операторы $\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2$ имеют вид (1.24), а $\overset{\circ}{\varphi}$ действует из $L^2_{r,l}(F_x)$ в E^r стандартным образом (1.9). Коммутативный узел Δ (1.21) называется *простым*, если $H_1 = H$, где

$$H_1 = \text{span}\{A_1^{n_1} A_2^{n_2} \varphi^* E : n_k \in \mathbb{Z}_+, k = 1, 2\}.$$

Сужение системы $\{A_1, A_2\}$ на приводящее подпространство $H_0 = H \ominus H_1$ дает коммутативную систему самосопряженных операторов (см. [3], [4]). Поэтому сужение узла Δ на H_1 мы назовем *простой частью узла Δ* .

ТЕОРЕМА 1.3 (см. [4]). Пусть задан простой коммутативный узел Δ (1.21), причем $\dim E = r < \infty$, а $\sigma_1 = J$ – инволюция. Тогда если спектр оператора A_1 веществен, а матрица-функция α_x и $dF_x = a_x dx$ из мультипликативного представления (1.5) характеристической функции $S(\lambda)$ (1.4) оператора A_1 таковы, что разрешимы нелинейные уравнения (1.23), то узел Δ (1.21) унитарно эквивалентен простой части узла $\overset{\circ}{\Delta}$ (1.25).

§ 2. Функциональная модель коммутативной системы операторов

В этом параграфе мы построим функциональную модель коммутативной системы операторов, не предполагая, что система операторов $\{A_1, A_2\}$ содержит диссипативный оператор. Если хотя бы при каком-нибудь $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ оператор $A_t = t_1 A_1 + t_2 A_2$ диссипативен, то соответствующие функциональные модели уже построены (см. [3], [4]), и их конструкция опирается на технику преобразования Фурье.

Рассмотрим модельный узел $\overset{\circ}{\Delta}$ (1.25), полагая, что $r = 2$, $\alpha_x \equiv 0$, а J имеет вид (1.11). Тогда из (1.5) следует, что матрица-функция $S_x^*(1/\bar{\lambda})$ является решением интегрального уравнения

$$S_x^*\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) + i\lambda \int_0^x S_t^*\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) dF_t \cdot j_N = I_{E^2}, \quad (2.1)$$

а вектор-функция $L_x(\lambda)$ (1.12) имеет вид

$$[1, 0]S_x^*\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = L_x(\lambda) \quad (2.2)$$

и представляет собой первую строку матрицы $S_x^*(1/\bar{\lambda})$. Легко видеть (см. [4]), что соотношения (1.23) эквивалентны тому, что для $S_x^*(1/\bar{\lambda})$ имеет место

$$S_x^*\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)j_N(\sigma_2 + \lambda\gamma(x)) = j_N(\sigma_2 + \lambda\gamma^+)S_x^*\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) \quad (2.3)$$

при любых $x \in [0, l]$. Как следует из § 1, оператор $\overset{\circ}{A}_1$ (1.24) после преобразования (1.15) переходит в оператор сдвига $\tilde{A}_1$ (1.19). Выясним, как преобразуется оператор $\overset{\circ}{A}_2$ (1.24) под действием отображения $\mathcal{B}_L$ (1.15). Легко видеть, что

$$\mathcal{B}_L(\overset{\circ}{A}_2 f) = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \overset{\circ}{A}_2^* L_x(\bar{\lambda}) \rangle_{L_{2,l}^2(F_x)}, \quad (2.4)$$

где

$$\overset{\circ}{A}_2^* L_x(\bar{\lambda}) = L_x(\bar{\lambda})j_N\gamma(x) - i \int_0^x L_t(\bar{\lambda}) dF_t \cdot \sigma_2. \quad (2.5)$$

Из (1.12) и (1.23) вытекает, что

$$\frac{d}{dx} L_x(\bar{\lambda})j_N\gamma(x) = -iL_xj_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma(x))a_xj_N + iL_x(\bar{\lambda})a_x\sigma_2,$$

поэтому

$$L_x(\bar{\lambda})j_N\gamma(x) - i \int_0^x L_t(\bar{\lambda}) dF_t \cdot \sigma_2 = [1, 0]j_N\gamma^+ - i \int_0^x L_t(\bar{\lambda})j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma(t)) dF_t \cdot j_N.$$

А так как

$$L_x(\bar{\lambda})j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma(x)) = [1, 0]j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma^+)S_x^*\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right),$$

то для выражения (2.5) мы получим, что

$$\overset{\circ}{A}_2^* L_x(\bar{\lambda}) = [1, 0]j_N\gamma^+ - i[1, 0]j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma^+) \int_0^x S_t^*\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) dF_t \cdot j_N.$$

Используя теперь интегральное уравнение (2.1), мы окончательно будем иметь

$$\mathring{A}_2 L_x(\bar{\lambda}) = \frac{1}{\bar{\lambda}} [1, 0] \left\{ j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma^+) S_x^* \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} \right) - j_N \sigma_2 \right\}. \quad (2.6)$$

Разложим вектор-строку $[1, 0] j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma^+)$ по стандартному базису в E^2 :

$$[1, 0] j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma^+) = \overline{\alpha(\bar{\lambda})} [1, 0] + \overline{\beta(\bar{\lambda})} [0, 1], \quad (2.7)$$

где $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ – скалярные функции от λ ,

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= [1, 0](\sigma_2 + \lambda\gamma^+) j_N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \beta(\lambda) &= [0, 1](\sigma_2 + \lambda\gamma^+) j_N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тогда

$$[1, 0] j_N(\sigma_2 + \bar{\lambda}\gamma^+) S_x^* \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} \right) = \overline{\alpha(\bar{\lambda})} L_x(\bar{\lambda}) + \overline{\beta(\bar{\lambda})} N_x(\bar{\lambda}), \quad (2.9)$$

при этом $L_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$ есть решение (1.12), а $N_x(\lambda) = [C_x(\lambda), D_x(\lambda)]$ является второй строкой

$$[0, 1] S_x^* \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} \right) = N_x(\lambda) \quad (2.10)$$

матрицы $S_x^*(1/\bar{\lambda})$ и удовлетворяет интегральному уравнению

$$N_x(\lambda) + i\lambda \int_0^x N_t(\lambda) dF_t \cdot j_N = [0, 1]. \quad (2.11)$$

Аналогично (1.13) сопоставим $N_x(\lambda)$ две скалярных функции

$$G_x(\lambda) = D_x(\lambda) + iC_x(\lambda), \quad \tilde{G}_x(\lambda) = D_x(\lambda) - iC_x(\lambda), \quad (2.12)$$

которые, как нетрудно видеть (см. [1], [2]), также удовлетворяют соотношениям (1.14). При помощи вектор-строки $N_x(\lambda)$ (аналогично (1.15)) определим отображение де Бранжа

$$\tilde{F}(\lambda) = \mathcal{B}_N(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^l f(x) dF_x \cdot N_x^*(\bar{\lambda}), \quad (2.13)$$

которое представляет собой изоморфизм между $L_{2,t}^2(dF_x)$ и $\mathcal{B}(D, C)$, где пространство де Бранжа $\mathcal{B}(D, C)$ задается стандартным образом в силу определения 1.1. Следует отметить, что между гильбертовыми пространствами $\mathcal{B}(A, B)$ и $\mathcal{B}(D, C)$, которые порождаются первой строкой $L_x(\lambda)$ (2.2) и второй строкой $N_x(\lambda)$ (2.10) j_N -сжимающей матрицы-функции $S_x^*(1/\bar{\lambda})$, существует изоморфизм (см. [1], [2]). Теория целых функций де Бранжа (см. [1]) дает конструктивное решение задачи о “достройке” вектор-строки $L_x(\lambda)$ до матрицы-функции (2×2) , удовлетворяющей условию j_N -сжимаемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Принадлежащая пространству $\mathcal{B}(D, C)$ функция $F^*(\lambda)$ называется *двойственной* функцией к $F(\lambda)$ из $\mathcal{B}(A, B)$, если существует такое $f(x) \in L^2_{2,l}(F_x)$, что $F(\lambda) = \mathcal{B}_L(f)$ и $F^*(\lambda) = \mathcal{B}_N(f)$.

Так как прообразы отображений $\mathcal{B}_L$ и $\mathcal{B}_N$ совпадают, то из равенства Парсеваля для преобразования де Бранжа следует, что $\|F(\lambda)\|_{\mathcal{B}(A,B)} = \|F^*(\lambda)\|_{\mathcal{B}(D,C)}$. Учитывая (2.4), (2.6) и (2.9), мы получим формулу для оператора $\tilde{A}_2$ в $\mathcal{B}(A, B)$

$$(\tilde{A}_2 F)(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (\alpha(\lambda)F(\lambda) + \beta(\lambda)F^*(\lambda) - \alpha(0)F(0) - \beta(0)F^*(0)), \quad (2.14)$$

где $F^*(\lambda)$ – двойственная функция к $F(\lambda)$, а $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ – линейные не зависящие от $F(\lambda)$ и $F^*(\lambda)$ функции (2.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Двойственная функция $F^*(\lambda)$ не обязательно принадлежит пространству $\mathcal{B}(A, B)$, но тем не менее всегда существуют такие (не зависящие от $F(\lambda)$ и $F^*(\lambda)$) линейные функции, что выражение

$$\frac{1}{\lambda} (\alpha(\lambda)F(\lambda) + \beta(\lambda)F^*(\lambda) - \alpha(0)F(0) - \beta(0)F^*(0))$$

уже принадлежит $\mathcal{B}(A, B)$. Это легко следует из ограниченности оператора $\tilde{A}_2$ (1.24) в пространстве $L^2_{2,l}(F_x)$.

Построим теперь коммутативный узел

$$\tilde{\Delta} = (\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}; \mathcal{B}(A, B); \tilde{\varphi}; E^2; \{j_N, \sigma_2\}; \gamma(l); \gamma^+), \quad (2.15)$$

где операторы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ имеют соответственно вид (1.19) и (2.14), а оператор $\tilde{\varphi}$ задан формулой (1.20).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Δ – простой коммутативный узел Δ (1.21), причем $\dim E = 2$, $\sigma_1 = j_N$ (1.11) и спектр оператора A_1 лежит в нуле. Тогда если $dF_x = a_x dx$ и матрица-функция a_x из интеграла (1.5) характеристической функции $S(\lambda)$ (1.4) такова, что существует решение $\gamma(x)$ (1.23) ($\alpha_x \equiv 0$), то узел Δ (1.21) унитарно эквивалентен простой части узла $\tilde{\Delta}$ (2.15).

§ 3. Функциональные модели на римановой поверхности

В этом параграфе мы построим функциональные модели коммутативной системы операторов $\{A_1, A_2\}$ на римановой поверхности и естественным образом придем к аналогу пространства де Бранжа на римановой поверхности. На протяжении данного параграфа мы будем изучать следующий важный случай выбора параметров треугольной модели (1.24).

Предположим, что $r = 2n$ четно, и пусть a_x имеет вид

$$a_x = I_n \otimes \hat{a}_x, \quad (3.1)$$

где I_n – единичный оператор в E_n , а $\hat{a}_x$ – неотрицательная матрица (2×2) такая, что $\text{tr } \hat{a}_x = n^{-1}$. Очевидно, что гильбертово пространство $L^2_{2n,l}(F_x)$ (1.6) образуют такие вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, что

$$\int_0^l f_k(x) \hat{a}_x f_k^*(x) dx < \infty$$

для всех k , $1 \leq k \leq n$, где $f_k(x) \in E^2$ при каждом $x \in [0, l]$. И пусть $\sigma_1 = J$, σ_2 и γ^+ имеют соответственно вид

$$J = I_n \otimes j_N, \quad \sigma_2 = \sigma \otimes j_N, \quad \gamma^+ = \gamma \otimes j_N, \quad (3.2)$$

причем σ , γ – самосопряженные операторы в E^n , а j_N имеет вид (1.11). Из уравнения (1.23) для $\gamma(x)$ следует, что

$$\gamma'(x) = i(Ja_x \sigma_2 - \sigma_2 a_x J) = i(\sigma \otimes j_n \hat{a}_x j_n - \sigma \otimes j_N \hat{a}_x j_N) = 0$$

и, значит, $\gamma(x) = \gamma^+ = \gamma \otimes j_N$. Второе соотношение в (1.23) выполняется автоматически, так как

$$[Ja_x, (\sigma_2 \alpha_x + \gamma(x))J] = [Ja_x, \gamma^+ J] = \gamma \otimes j_N \hat{a}_x - \gamma \otimes j_N \hat{a}_x = 0.$$

Осуществим теперь преобразование де Бранжа $\mathcal{B}_L$ (1.15) каждой из компонент $f_k(x) \in L^2_{2,l}(\hat{a}_x dx)$ вектор-функции $f(x)$ из $L^2_{2n,l}(F_x)$, считая, что a_x имеет вид (3.1),

$$F_k(\lambda) = \mathcal{B}_L(f_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^l f_k(x) \hat{a}_x L_x^*(\bar{\lambda}) dx, \quad (3.3)$$

где $L_x(\lambda)$ – решение (1.12) по мере $dF_x = \hat{a}_x dx$. Таким образом, мы приходим к гильбертову пространству $\mathcal{B}^n(A, B) = E^n \otimes \mathcal{B}(A, B)$, которое образуют вектор-функции $F(\lambda) = (F_1(\lambda), \dots, F_n(\lambda))$:

$$\mathcal{B}^n(A, B) = \{F(\lambda) = (F_1(\lambda), \dots, F_n(\lambda)) : F_k(\lambda) \in \mathcal{B}(A, B), 1 \leq k \leq n\}, \quad (3.4)$$

а скалярное произведение в $\mathcal{B}^n(A, B)$ задается формулой

$$\langle F(\lambda), G(\lambda) \rangle_{\mathcal{B}^n(A, B)} = \sum_{k=1}^n \langle F_k(\lambda), G_k(\lambda) \rangle_{\mathcal{B}(A, B)}. \quad (3.5)$$

Из (1.19) и вида матриц a_x (3.1) и J (3.2) следует, что преобразование де Бранжа (1.15) переводит оператор $\overset{\circ}{A}_1$ (1.19) в оператор сдвига

$$(\tilde{A}_1 F)(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (F(\lambda) - F(0)) \quad \forall F(\lambda) \in \mathcal{B}^n_\alpha(A, B). \quad (3.6)$$

Учитывая теперь структуру σ_2 , γ^+ (3.2) и то, что $\gamma(x) = \gamma^+$, мы получим, что оператор $\overset{\circ}{A}_2$ (1.24) в этом случае имеет вид

$$(\overset{\circ}{A}_2 f)(x) = (\overset{\circ}{A}_1 f)(x) J \sigma_2 + f(x) J \gamma^+.$$

Поэтому после преобразования де Бранжа (1.15) мы получим, что

$$(\tilde{A}_2 F)(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(F(\lambda) - F(0))\sigma + F(\lambda)\gamma,$$

или

$$(\tilde{A}_2 F)(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\{F(\lambda)(\sigma + \lambda\gamma) - F(\lambda)(\sigma + \lambda\gamma)|_0\}, \quad (3.7)$$

где $F(\lambda)(\sigma + \lambda\gamma)|_0 = F(0)\sigma$. Определим теперь коммутативный узел

$$\tilde{\Delta} = (\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}; \mathcal{B}_\alpha^n(A, B); \tilde{\varphi}; E^{2n}; \{J, \sigma_2\}; \gamma^-; \gamma^+), \quad (3.8)$$

при этом J, σ_2, γ^+ имеют вид (3.2), $\gamma^- = \gamma^+$, а оператор $\tilde{\varphi}$ на каждую из компонент $F_k(\lambda)$ действует по формуле (1.20).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть Δ (1.21) – простой коммутативный узел такой, что: $\dim E = 2n < \infty$; $\sigma_1 = J, \sigma_2, \gamma^+$ имеют вид (3.2); а спектр оператора A_1 лежит в нуле. Кроме того, предположим, что $dF_x = a_x dx$ и матрица-функция a_x из мультипликативного представления (1.5) характеристической функции $S(\lambda)$ (1.4) оператора A_1 имеет вид (3.1). Тогда узел Δ (1.21) унитарно эквивалентен функциональной модели $\tilde{\Delta}$ (3.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Функциональные модели для коммутативной системы операторов могут быть также построены в случае, если $\dim E = 2n$, a_x имеет вид (3.1), а матрицы J, σ_2, γ^+ имеют соответственно вид

$$J = I_n \otimes j_N, \quad \sigma_2 = \sigma \otimes \hat{\sigma}_2, \quad \gamma^+ = \gamma \otimes \hat{\gamma}^+,$$

где, как и ранее, σ и γ , а также $\hat{\sigma}_2$ и $\hat{\gamma}$ – самосопряженные операторы в E^n и E^2 соответственно. Для этого следует рассмотреть тензорное произведение построенных выше функциональных моделей (2.15) и (3.8).

Рассмотрим собственные векторы (самосопряженного при $\lambda \in \mathbb{R}$) пучка $\sigma + \lambda\gamma$

$$h(P)(\sigma + \lambda\gamma) = wh(P), \quad (3.9)$$

где $P = (\lambda, w)$ принадлежит алгебраической кривой $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \{P = (\lambda, w) \in \mathbb{C}^2 : \mathbb{Q}(\lambda, w) = 0\}, \quad (3.10)$$

которую задает полином

$$\mathbb{Q}(\lambda, w) = \det(\sigma + \lambda\gamma - wI_n). \quad (3.11)$$

Предположим, что кривая $\mathbb{Q}$ (3.10) неособая (см. [6]). Тогда $\lambda = \lambda(P)$ и $w = w(P)$ являются соответственно “ l -значной” и “ n -значной” функциями на $\mathbb{Q}$ ($l = \text{rank } \gamma$). Рациональную вектор-функцию $h(P)$ (3.9) будем нормировать, полагая, что $h_n(P) = 1$, где $h_n(P)$ – “ n -я” компонента вектора $h(P)$. Нетрудно показать (см. [4]), что количество полюсов (с учетом кратности) вектор-функции

$h(P)$ равно $N = g + n - 1$, где g – род римановой поверхности $\mathbb{Q}$ (3.10). На римановой поверхности (3.10) выделим правильные аналоги полуплоскостей $\mathbb{C}_{\pm}$ и оси $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Q}^{\pm} = \{P = (\lambda, w) \in \mathbb{Q} : \pm \operatorname{Im} \lambda(P) > 0\}, \quad \mathbb{Q}^0 = \partial \mathbb{Q}^{\pm}. \quad (3.12)$$

Каждую из функций $F(\lambda) \in \mathcal{B}^n(A, B)$ разложим по ортогональному (при $\lambda \in \mathbb{R}$) базису $h(P_k)$:

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n g(P_k) \|h(P_k)\|_{E^n}^{-2} h(P_k),$$

где $P_k = (\lambda, w^k(\lambda)) \in \mathbb{Q}$, $\{w^k(\lambda)\}_1^n$ – различные корни полинома $\mathbb{Q}(\lambda, w) = 0$ (3.11) в силу неособенности кривой $\mathbb{Q}$ (3.10), $g(P_k) = \langle F(\lambda), h(P_k) \rangle_{E^n}$, $1 \leq k \leq n$. Очевидно, что $w^k(P)$, как $h(P_k)$ и $g(P_k)$, представляют собой ветви “ n -значных” алгебраических функций $w(P)$, $h(P)$, $g(P)$. Поэтому последнее равенство означает, что

$$F(P) = F(\lambda(P)) = g(P) \|h(P)\|_{E^n}^{-2} h(P), \quad (3.13)$$

а так как базис $h(P)$ в E^n фиксирован, то данную вектор-функцию $F(P)$ определяет скалярная компонента $g(P)$. Функция $g(P)$ является мероморфной функцией на $\mathbb{Q}$ (3.10), полюса которой могут лежать только в полюсах $h(P)$ (3.9), а их суммарная кратность не превосходит $N = g + n - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть на неособой алгебраической кривой $\mathbb{Q}$ (3.10) задана рациональная вектор-функция $h(P) \in E^n$ (3.9), $P = (\lambda, w) \in \mathbb{Q}$, с неспециальным дивизором полюсов D , $\deg D = g + n - 1$ (g – род $\mathbb{Q}$), а $E(\lambda)$, $\tilde{E}(\lambda)$ – целые функции от λ , для которых имеет место (1.14).

Пространством де Бранжа $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h)$ на римановой поверхности $\mathbb{Q}$ (3.10) называется линейное многообразие мероморфных на $\mathbb{Q}$ функций $g(P)$, полюса которых содержатся (с учетом кратности) в точках дивизора D , такое, что:

- а) $g(P)/E(\lambda(P))$ (соответственно $g(P)/\tilde{E}(\lambda(P))$) является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в $\mathbb{Q}^+$ (соответственно в $\mathbb{Q}^-$) (3.12);
- б) $\int_{\mathbb{Q}^0} \left| \frac{g(P)}{E(\lambda(P))} \right|^2 \frac{d\lambda(P)}{\|h(P)\|_{E^n}^2} = \int_{\mathbb{Q}^0} \left| \frac{g(P)}{\tilde{E}(\lambda(P))} \right|^2 \frac{d\lambda(P)}{\|h(P)\|_{E^n}^2} < \infty$; где $P = (\lambda, w) \in \mathbb{Q}$ (3.10).

Из (1.14) следует, что функции $E(P) = E(\lambda(P))$ и $\tilde{E}(P) = \tilde{E}(\lambda(P))$ удовлетворяют соотношениям

$$|E(P)|^2 - |\tilde{E}(P)|^2 = \begin{cases} > 0, & P \in \mathbb{Q}^+, \\ = 0, & P \in \mathbb{Q}^0, \\ < 0, & P \in \mathbb{Q}^-. \end{cases} \quad (3.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Так как функции $E(\lambda) = E_l(\lambda)$ и $\tilde{E}(\lambda) = \tilde{E}_l(\lambda)$ (1.13) обладают существенными особенностями на бесконечности ($\lambda = \infty$), а мероморфная на римановой поверхности $\mathbb{Q}$ (3.10) функция $\lambda(P)$ имеет ровно n полюсов (с учетом кратности), то функции $E(P) = E_l(\lambda(P))$ и $\tilde{E}(P) = \tilde{E}_l(\lambda(P))$ представляют

собой “ n -точечные” функции Бейкера–Ахиезера (см. [6]) на римановой поверхности $\mathbb{Q}$ (3.10).

Ясно, что воспроизводящее ядро $K(P, P')$ в $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h)$ имеет вид

$$K(P, P') = i \frac{E(P)\overline{E(P')} - \widetilde{E}(P)\overline{\widetilde{E}(P')}}{2\pi(\lambda(P) - \lambda(P'))}, \quad (3.15)$$

где $P, P' \in \mathbb{Q}$ (3.10).

Изучим теперь, как в пространстве $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h)$ будут действовать операторы $\widetilde{A}_1$ (3.6) и $\widetilde{A}_2$ (3.7). Из (3.6) и (3.13) следует, что

$$(\widetilde{A}_1 F)(P) = \frac{1}{\lambda(P) - \lambda(P_0)} \{g(P)\|h(P)\|_{E^n}^{-2}h(P) - g(P_0)\|h(P_0)\|_{E^n}^{-2}h(P_0)\},$$

где $P_0 = (0, w) \in \mathbb{Q}$. Разложим вектор $h(P_0)$ по базису $h(P)$:

$$h(P_0) = \langle h(P_0), h(P) \rangle_{E^n} \|h(P)\|_{E^n}^{-2} h(P). \quad (3.16)$$

Тогда

$$(\widetilde{A}_1 F)(P) = \frac{g(P) - \psi(P, P_0)g(P_0)}{\lambda(P) - \lambda(P_0)} \|h(P)\|_{E^n}^{-2} h(P),$$

где функция $\psi(P, P_0)$ имеет вид

$$\psi(P, P_0) = \langle h(P_0), h(P) \rangle_{E^n} \|h(P_0)\|_{E^n}^{-2}. \quad (3.17)$$

Учитывая, что базис $h(P)$ фиксирован, мы получим, что оператор $\widetilde{A}_1$ на функцию $g(P)$ из $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h)$ действует следующим образом:

$$(\widetilde{A}_1 g)(P) = \frac{g(P) - \psi(P, P_0)g(P_0)}{\lambda(P) - \lambda(P_0)}, \quad (3.18)$$

при этом $\psi(P, P_0)$ имеет вид (3.17), а $P_0 = (0, w) \in \mathbb{Q}$ (3.10).

Применение линейного пучка $\sigma + \lambda\gamma$ к $F(P)$ (3.13) состоит в том, что

$$F(P)(\sigma + \lambda\gamma) = g(P)w(P)\|h(P)\|_{E^n}^{-2}h(P)$$

в силу (3.9); тогда, используя (3.7) и (3.16), мы получим, что

$$(\widetilde{A}_2 g)(P) = \frac{w(P)g(P) - \psi(P, P_0)w(P_0)g(P_0)}{\lambda(P) - \lambda(P_0)} \quad (3.19)$$

для всех $g(P) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h)$ и $P = (\lambda, w) \in \mathbb{Q}$ (3.10). Построим теперь коммутативный узел

$$\widetilde{\Delta} = (\{\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2\}; \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h); \widetilde{\varphi}; E^{2n}; \{J, \sigma_2\}; \gamma^-; \gamma^+), \quad (3.20)$$

где J, σ_2, γ^+ имеют вид (3.2), $\gamma^- = \gamma^+$, а оператор $\widetilde{\varphi}$ на функцию $g(P)$ действует следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}g(P) = \sum_{k=1}^2 \langle g(P), e_k(\lambda(P)) \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h)} e_k,$$

при этом $e_k(\lambda)$ совпадают с $e_k(\lambda)$ в (1.20). Отметим, что $\widetilde{\varphi}$ отображает $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(A, B, h)$ в E^{2n} , что легко следует из “ n -значности” функции $g(P)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть задан простой коммутативный узел Δ (1.21), причем $\dim E = 2n$, $\sigma_1 = J$ – инволюция и спектр оператора A_1 сосредоточен в нуле. Тогда если операторы J , σ_2 , γ^+ имеют вид (3.2) и в мультипликативном представлении (1.5) $dF_x = a_x dx$, причем матрица-функция a_x задана формулой (3.1), то узел Δ (1.21) унитарно эквивалентен функциональной модели $\tilde{\Delta}$ (3.20).

Униформизируя (см. [6], [10]) алгебраическую кривую $\mathbb{Q}(\lambda, w) = 0$ (3.11), мы приходим к мероморфным в круге K функциям $\lambda(u)$ и $w(u)$, $u \in K$, где K является универсальной накрывающей для $\mathbb{Q}$ (3.10). Функции $\lambda(u)$, $w(u)$ автоморфны относительно группы дробно-линейных преобразований $F_{\mathbb{Q}}$. Мы можем считать, что $\lambda(u)$ и $w(u)$ заданы в фундаментальной области Γ (Γ – многоугольник Пуанкаре поверхности $\mathbb{Q}$), для которой указана “склейка сторон” посредством группы $F_{\mathbb{Q}}$. Обозначим через $\Gamma^{\pm}$ и Γ^0 прообразы $\mathbb{Q}^{\pm}$ и $\mathbb{Q}^0$ (3.12) при данной униформизации.

Рассмотрим пару автоморфных (относительно $F_{\mathbb{Q}}$) мероморфных в Γ функций $E(u) = E(\lambda(u))$, $\tilde{E}(u) = \tilde{E}(\lambda(u))$, удовлетворяющих соотношениям

$$|E(u)| - |\tilde{E}(u)| = \begin{cases} > 0, & u \in \Gamma^+, \\ = 0, & u \in \Gamma^0, \\ < 0, & u \in \Gamma^-. \end{cases}$$

В результате мы приходим к понятию пространства де Бранжа $\mathcal{B}_{\Gamma}(A, B, h)$ в фундаментальной области Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пространством де Бранжа $\mathcal{B}_{\Gamma}(A, B)$ на фундаментальной области Γ римановой поверхности $\mathbb{Q}$ (3.10) называется такое линейное многообразие автоморфных относительно фундаментальной группы $F_{\mathbb{Q}}$ функций $g(u)$, что:

- а) $g(u)/E(u)$ (соответственно $(g(u)/\tilde{E}(u))$) является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в Γ^+ (соответственно в Γ^-);
- б) $\int_{\Gamma_0} \left| \frac{g(u)}{E(u)} \right|^2 \frac{d\lambda(u)}{\|h(u)\|_{E^n}^2} = \int_{\Gamma_0} \left| \frac{g(u)}{\tilde{E}(u)} \right|^2 \frac{d\lambda(u)}{\|h(u)\|_{\tilde{E}^n}^2} < \infty$, где $h(u)$ – векторное поле (3.9), $h(u) = h(\lambda(u), w(u))$, а $\lambda(u)$ и $w(u)$ – мероморфные функции в Γ , униформизирующие $\mathbb{Q}$ (3.11).

Из (3.15) следует, что при этом воспроизводящее ядро $K(u, u')$ в $\mathcal{B}_{\Gamma}(A, B)$ имеет вид

$$K(u, u') = i \frac{E(u)\overline{E(u')} - \tilde{E}(u)\overline{\tilde{E}(u')}}{2\pi(\lambda(u) - \lambda(u'))}, \quad (3.21)$$

где $u, u' \in \Gamma$, а $E(u) = E(\lambda(u))$, $\tilde{E}(u) = \tilde{E}(\lambda(u))$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть выполняются предположения теоремы 3.2. Тогда существует такое векторное поле $h(u)$ из E^n , заданное на фундаментальной

области Γ кривой $\mathbb{Q}$ (3.10) с неспециальным дивизором полюсов D , $\deg D = g + n - 1$ ($g = \text{род } \mathbb{Q}$), что функциональная модель основной системы операторов $\{A_1, A_2\}$ узла Δ (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1 g)(u) &= \frac{g(u) - \psi(u, u_0)g(u_0)}{\lambda(u) - \lambda(u_0)}, \\ (\tilde{A}_2 g)(u) &= \frac{w(u)g(u) - \psi(u, u_0)w(u_0)g(u_0)}{\lambda(u) - \lambda(u_0)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $g(u) \in \mathcal{B}_\Gamma(A, B, h)$. При этом функции $g(u)$, $\lambda(u)$, $w(u)$, $\psi(u, u_0)$ автоморфны относительно фундаментальной группы преобразований $F_\mathbb{Q}$ кривой $\mathbb{Q}$ (3.10), а $\lambda(u)$, $w(u)$ униформизируют кривую $\mathbb{Q}(\lambda, w) = 0$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\dim E = 6$, а операторы σ и γ (3.2) в E^3 таковы:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & \frac{1}{k} - 2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

где $a > 0$, $k \in (0, 1)$, $b = \sqrt{2(1/k - 1)}$. Кривая $\mathbb{Q}$ (3.10) задается полиномом

$$k^2 a^2 \lambda^2 (1 - w) = (1 + w)(1 - k^2 w^2). \quad (3.24)$$

Полагая $\xi = ka\lambda(1 - w)$, мы приходим к алгебраической кривой Лежандра (см. [6], [11])

$$\xi^2 = (1 - w^2)(1 - k^2 w^2). \quad (3.25)$$

Двухлистная риманова поверхность (3.25) имеет род $g = 1$ и образуется склеиванием “крест-накрест” двух w плоскостей $\mathbb{C}$ вдоль разрезов $(-\infty, -1/k] \cup [-1, 1] \cup [1/k, \infty)$. Так как мнимая часть

$$ka \operatorname{Im} \lambda = \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1 + w}{1 - w}} (1 - k^2 w^2)$$

меняет знак лишь на разрезах, то областям $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{Q}^-$ (3.25) отвечает один из листов римановой поверхности $\mathbb{Q}$ (3.10), а $\mathbb{Q}^0 = \partial \mathbb{Q}^\pm$ совпадает с разрезами на $\mathbb{R}$. На поверхности (3.25) существует единственный ($g = 1$) абелев дифференциал первого рода (см. [11])

$$\omega = \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - kw^2)}}. \quad (3.26)$$

При помощи эллиптического интеграла, отвечающего ω ,

$$u(p) = \int_{P_1}^P \omega, \quad p = (\lambda, w) \in \mathbb{Q}, \quad (3.27)$$

зададим конформное отображение (см. [11]) между (3.25) и прямоугольником

$$\Gamma = \{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} u \in [-2K, 2K]; \operatorname{Im} u \in [-K', K']\}, \quad (3.28)$$

где $P_1 = (0, 1)$. Числа $4K$ и $2iK'$ являются периодами замкнутого дифференциала ω (3.26). Обращение эллиптического интеграла (3.27) приводит к униформизации кривой (3.25) в терминах эллиптических функций Якоби (см. [11]), $\xi = \operatorname{sn}' u$, $w = \operatorname{sn} u$. Поэтому для (3.24) мы получим, что

$$\lambda(u) = \frac{\operatorname{sn}' u}{ka(1 - \operatorname{sn} u)}, \quad w(u) = \operatorname{sn} u. \quad (3.29)$$

Собственные векторы $h(P) = h(u)$ (3.9) линейного пучка $h(P)(\sigma + \lambda\gamma) = wh(P)$ имеют вид

$$h(P) = \left[\frac{ka\lambda}{1 + kw}, \frac{b}{w - 1}, 1 \right], \quad h(u) = \left[\frac{\operatorname{sn}' u}{(1 - \operatorname{sn} u)(1 + k \operatorname{sn} u)}, \frac{b}{\operatorname{sn} u - 1}, 1 \right]. \quad (3.30)$$

Вектор $h(P)$ имеет полюс второго порядка в точке $P_1 = (0, 1)$ и первого порядка в $P_2 = (0, -1/k)$ на $\mathbb{Q}$ (3.25), что после униформизации соответствует значениям $u = K$ и $u = -K + iK'$. Изоморфизм (3.27) переводит $\mathbb{Q}^+$ в прямоугольник

$$\Gamma^\pm = \{u \in \Gamma : \pm \operatorname{Im} u \in (0, K')\}, \quad (3.31)$$

при этом

$$\Gamma^0 = \{u \in \Gamma : \operatorname{Im} u = 0\} \cup \{u \in \Gamma : \operatorname{Im} u = K'\}.$$

Фундаментальную группу $F_{\mathbb{Q}}$ кривой (3.25) порождают сдвиги $u \rightarrow u + 4K$, $u \rightarrow u + 2iK'$.

Рассмотрим теперь вектор-строку $L_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$, задаваемую интегральным уравнением

$$L_x(\lambda) + i\lambda \int_0^x L_t(\lambda) \hat{a}_t dt \cdot j_N = [1, 0], \quad (3.32)$$

и определим по $L_x(\lambda)$ пару целых функций (1.13)

$$E_x(\lambda) = A_x(\lambda) - iB_x(\lambda), \quad \tilde{E}_x(\lambda) = A_x(\lambda) + iB_x(\lambda). \quad (3.33)$$

Очевидно, что при $\hat{a}_x = I_2$ решение уравнения (3.32) имеет вид $L_x(\lambda) = [\cos \lambda x, \sin \lambda x]$, а функции $E_x(\lambda)$ и $\tilde{E}_x(\lambda)$ (3.33) имеют вид

$$E_x(\lambda) = e^{-i\lambda x}, \quad \tilde{E}_x(\lambda) = e^{i\lambda x}. \quad (3.34)$$

А так как функция $\lambda(u)$ имеет три простых полюса в точках $u = iK'$, $u = 2K + iK'$, $u = K$, то

$$ka\lambda(u) = \zeta(u - iK') + \zeta(u - 2K - iK') - 2\zeta(u - K),$$

где $\zeta(u)$ – дзета-функция Вейерштрасса (см. [11]). Поэтому функции

$$E(u) = \exp\{-i\lambda(u)l\}, \quad \tilde{E}(u) = \exp\{i\lambda(u)l\} \quad (3.35)$$

имеют существенные особенности при $u = K$, iK' , $2K + iK'$. Таким образом, функции $E(u)$ и $\tilde{E}(u)$ (3.35) являются “3-точечными” функциями Бейкера–Ахиезера (см. [6]).

Сформулируем теперь определение пространства де Бранжа $\mathcal{B}_\Gamma(A, B)$, где Γ является прямоугольником (3.28). Напомним, что вектор-функция $h(u)$ (3.30) имеет полюс второго порядка при $u = -K + iK'$. Именно в этих точках скалярные компоненты $g(u) = g(P)$ (3.13) и могут иметь особенности. Элементарные вычисления показывают, что

$$\frac{d\lambda(u)}{\|h(u)\|_{E^3}^2} = m(u) du = \frac{k \operatorname{sn}' u du}{(1 + \operatorname{sn} u)(1 - k \operatorname{sn} u)}. \quad (3.36)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Пространством де Бранжа $\mathcal{B}_\Gamma(A, B)$ на фундаментальной области Γ (3.28) римановой поверхности кривой (3.25) называется линейное многообразие двоякопериодических мероморфных функций $g(u)$ в прямоугольнике Γ (3.28), которые могут иметь полюсы лишь в точках $u = K$ (не выше второго порядка) и в $u = -K + iK'$ (не выше первого), такое, что:*

- а) $g(u)/E(u)$ (соответственно $g(u)/\tilde{E}(u)$) является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в Γ^+ (соответственно в Γ^-) (3.31);
- б) $\int_{\Gamma_0} \left| \frac{g(u)}{E(u)} \right|^2 m(u) du = \int \left| \frac{g(u)}{\tilde{E}(u)} \right|^2 m(u) du < \infty$;

здесь $m(u) du$ имеет вид (3.36), $E(u) = E_l(\lambda(u))$, $\tilde{E}(u) = \tilde{E}_l(\lambda(u))$, при этом $E_x(\lambda)$ и $\tilde{E}_x(\lambda)$ имеют вид (3.33).

Нетрудно показать, что в этом случае $\Psi(P, P_0) = 1$ и, значит, модельное представление (3.22) системы операторов $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ в $\mathcal{B}_\Gamma(A, B)$ имеет вид

$$(\tilde{A}_1 g)(u) = \frac{g(u) - g(u_0)}{\lambda(u)}, \quad (\tilde{A}_2 g)(u) = \frac{w(u)g(u) - w(u_0)g(u_0)}{\lambda(u)},$$

где функции $\lambda(u)$ и $w(u)$ имеют вид (3.29), а $u_0 = 3K$.

В заключение заметим, что более общая задача, когда $a_x, J, \sigma_2, \gamma^+$ имеют вид, отличный от (3.1), (3.2), требует привлечения дополнительных исследований как в теории пространств де Бранжа, так и в описании решений нелинейной системы уравнений (1.23).

Список литературы

- [1] В. А. Золотарев, *Аналитические методы спектральных представлений несамо сопряженных и неунитарных операторов*, Mag Press, ХНУ, Харьков, 2003.
- [2] L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [3] M. S. Livšic, N. Kravitsky, A. S. Markus, V. Vinnikov, *Theory of commuting non-selfadjoint operators*, Math. Appl., **332**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [4] В. А. Золотарев, “Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности”, *Матем. сб.*, **181**:7 (1990), 965–994; англ. пер.: V. A. Zolotarev, “Time cones and a functional model on a Riemann surface”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:2 (1991), 399–429.
- [5] Б. С. Павлов, С. И. Федоров, “Группа сдвигов и гармонический анализ на римановой поверхности рода один”, *Алгебра и анализ*, **1**:2 (1989), 132–168; англ. пер.: B. S. Pavlov, S. I. Fedorov, “The group of shifts and harmonic analysis on a Riemann surface of genus one”, *Leningrad Math. J.*, **1**:2 (1990), 447–490.

- [6] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2 (1981), 11–80; англ. пер.: В. А. Dubrovin, “Theta functions and non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **36**:2 (1981), 11–92.
- [7] D. Alpay, V. Vinnikov, “Analogues d’espaces de Branges sur des surfaces de Riemann”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **318**:12 (1994), 1077–1082.
- [8] D. Alpay, V. Vinnikov, “Finite dimensional de branges spaces on Riemann surfaces”, *J. Funct. Anal.*, **189**:2 (2002), 283–324.
- [9] М. С. Лившиц, А. А. Янцевич, *Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах*, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1971; англ. пер.: М. S. Livshits, A. A. Yantsevich, *Operator colligations in Hilbert spaces*, Winston & Sons, Washington, DC; A Halsted Press Book, Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
- [10] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.
- [11] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *Elements of the theory of elliptic functions*, Transl. Math. Monogr., **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

В. А. Золотарёв (V. A. Zolotarev)

Харьковский национальный университет

им. В. Н. Каразина, Украина

E-mail: Vladimir.A.Zolotarev@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию

04.02.2008 и 01.12.2008