Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Экстремальные метрики на двух многообразиях Фано, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 1, 97–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:19:37

УДК 512.7

И. А. Чельцов

Экстремальные метрики на двух многообразиях Фано

В работе доказывается существование метрики Кэлера–Эйнштейна на общей гиперповерхности в $\mathbb{P}(1^3, 2, 2)$ степени 6 и общей гиперповерхности в $\mathbb{P}(1^3, 2, 3)$ степени 7.

Библиография: 49 названий.

Ключевые слова: многообразия Фано, метрика Кэлера–Эйнштейна, лог-канонический порог, альфа-инвариант Тиана.

§ 1. Введение

Кратностью ненулевого многочлена $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ в начале координат $O \in \mathbb{C}^n$ принято называть число $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, которое может быть определено посредством равенства

$$m = \min \left\{ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \frac{\partial^m \varphi(z_1, \dots, z_n)}{\partial^{m_1} z_1 \partial^{m_2} z_2 \dots \partial^{m_n} z_n}(O) \neq 0 \right\},$$

откуда следует, что $m \neq 0 \iff \varphi(O) = 0$. Аналогичным инвариантом является число

$$c_0(\varphi) = \sup \left\{ \varepsilon \in \mathbb{Q} \mid \text{функция } \frac{1}{|\varphi|^{2\varepsilon}} \text{ локально интегрируема в окрестности точки } O \in \mathbb{C}^n \right\} \in \mathbb{Q},$$

которое называют *экспонентой* комплексной особенности многочлена φ в точке O .

ПРИМЕР 1.1. Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^n z_i^{m_i}$ для некоторых натуральных чисел $m_1, \dots, m_n$. Тогда

$$c_0(\varphi) = \min \left(1, \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right).$$

ПРИМЕР 1.2. Пусть $\varphi = \prod_{i=1}^n z_i^{m_i}$ для некоторых натуральных чисел $m_1, \dots, m_n$. Тогда

$$c_0(\varphi) = \min \left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_n} \right).$$

Пусть X – алгебраическое многообразие¹, которое имеет не более чем лог-терминальные особенности (например, неособое), пусть $Z \subseteq X$ – некоторое

¹Рассматриваемые многообразия считаются проективными нормальными и определенными.

замкнутое подмногообразие, и пусть D – эффективный $\mathbb{Q}$ -картье $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии X . Тогда число

$$\mathrm{lct}_Z(X, D) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, \lambda D) \text{ лог-канонична вдоль } Z \} \in \mathbb{Q}$$

называется *лог-каноническим порогом* дивизора D вдоль Z . В работе [1] показано, что

$$\mathrm{lct}_O(\mathbb{C}^n, (\varphi = 0)) = c_0(\varphi),$$

откуда следует, что $\mathrm{lct}_Z(X, D)$ – алгебраический аналог числа $c_0(\varphi)$. Отметим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{lct}_X(X, D) &= \inf \{ \mathrm{lct}_P(X, D) \mid P \in X \} \\ &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, \lambda D) \text{ лог-канонична} \}, \end{aligned}$$

и можно положить $\mathrm{lct}(X, D) = \mathrm{lct}_X(X, D)$ для простоты обозначений².

ПРИМЕР 1.3. Предположим, что $X = \mathbb{P}^2$ и $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|$. Тогда

$$\mathrm{lct}(X, D) = \begin{cases} 1, & \text{если } D \text{ – кривая с не более чем обыкновенными} \\ & \text{двойными точками,} \\ 5/6, & \text{если } D \text{ – кривая с одной каспидальной особой точкой,} \\ 3/4, & \text{если } D \text{ состоит из неприводимой коники} \\ & \text{и касающейся ее прямой,} \\ 2/3, & \text{если } D \text{ состоит из трех прямых, пересекающихся} \\ & \text{в одной точке,} \\ 1/2, & \text{если множество } \mathrm{Supp}(D) \text{ состоит из двух прямых,} \\ 1/3, & \text{если множество } \mathrm{Supp}(D) \text{ состоит из одной прямой.} \end{cases}$$

Предположим теперь дополнительно, что X является многообразием Фано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Глобальный лог-канонический порог* многообразия X есть число

$$\begin{aligned} \mathrm{lct}(X) &= \inf \{ \mathrm{lct}(X, D) \mid D \text{ – эффективный } \mathbb{Q}\text{-дивизор на } X \text{ такой,} \\ &\quad \text{что } D \equiv -K_X \} \geq 0. \end{aligned}$$

Число $\mathrm{lct}(X)$ является алгебраическим аналогом так называемого α -инварианта многообразия X , который был определен в работе [3]. Легко видеть, что выполнено равенство

$$\mathrm{lct}(X) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, \lambda D) \text{ имеет лог-канонические особенности} \\ \text{для каждого эффективного } \mathbb{Q}\text{-дивизора } D \equiv -K_X \}.$$

ПРИМЕР 1.5. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $m < n$. Тогда

$$\mathrm{lct}(X) = \frac{1}{n+1-m}$$

согласно работе [4]. В частности, выполнено равенство $\mathrm{lct}(\mathbb{P}^n) = 1/(n+1)$.

²Лог-канонические пороги были введены В. В. Шокуровым в работе [2].

ПРИМЕР 1.6. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, d)$ степени $2d \geq 2$. Тогда

$$\mathrm{lct}(X) = \frac{1}{n+1-d}$$

в случае, когда $2 \leq d \leq n-1$ (см. [5]).

ПРИМЕР 1.7. Пусть X – рациональное однородное пространство такое, что

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[D],$$

где D – обильный дивизор. Тогда выполнено соотношение

$$-K_X \sim rD$$

для некоторого натурального числа $r \geq 1$. В работе [6] показано, что $\mathrm{lct}(X) = 1/r$.

В общем случае число $\mathrm{lct}(X)$ меняется при малых деформациях многообразия X .

ПРИМЕР 1.8. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$ степени 6. Тогда

$$\mathrm{lct}(X) \in \left\{ \frac{5}{6}, \frac{43}{50}, \frac{13}{15}, \frac{33}{38}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{13}{14}, \frac{15}{16}, \frac{17}{18}, \frac{19}{20}, \frac{21}{22}, \frac{29}{30}, 1 \right\}$$

согласно работам [7] и [8]. Причем все возможные значения числа $\mathrm{lct}(X)$ реализуются.

ПРИМЕР 1.9. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ степени $2n$. Тогда

$$1 \geq \mathrm{lct}(X) \geq \frac{2n-1}{2n}$$

согласно работе [8]. Более того, выполнено равенство $\mathrm{lct}(X) = 1$, если X общее и $n \geq 3$.

ПРИМЕР 1.10. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 2$. Тогда

$$1 \geq \mathrm{lct}(X) \geq \frac{n-1}{n}$$

согласно работе [4]. В работах [7] и [8] показано, что если гиперповерхность X общая, то

$$\mathrm{lct}(X) \geq \begin{cases} 1, & \text{если } n \geq 6, \\ 22/25, & \text{если } n = 5, \\ 16/21, & \text{если } n = 4, \\ 3/4, & \text{если } n = 3, \end{cases}$$

при этом выполнено равенство $\mathrm{lct}(X) = 1 - 1/n$, если X содержит конус размерности $n-2$.

В общем случае не известно, рационально ли число $\mathrm{lct}(X)$, но многие примеры это подтверждают.

ПРИМЕР 1.11. Пусть X – неособая поверхность дель Пеццо. В работе [9] показано, что

$$\mathrm{lct}(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_X^2 = 1 \text{ и } |-K_X| \text{ не содержит каспидальную кривую,} \\ 5/6, & \text{если } K_X^2 = 1 \text{ и } |-K_X| \text{ содержит каспидальную кривую,} \\ 5/6, & \text{если } K_X^2 = 2 \text{ и } |-K_X| \text{ не содержит такнодальную кривую,} \\ 3/4, & \text{если } K_X^2 = 2 \text{ и } |-K_X| \text{ содержит такнодальную кривую,} \\ 3/4, & \text{если } X \text{ является кубикой в } \mathbb{P}^3, \text{ не содержащей точек Эккарда} \\ 2/3, & \text{если } X \text{ является кубикой в } \mathbb{P}^3 \text{ с точкой Эккарда либо } K_X^2 = 4 \\ 1/2, & \text{если } X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ или } K_X^2 \in \{5, 6\}, \\ 1/3 & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.12. Пусть X – особая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$. В работе [10] показано, что

$$\mathrm{lct}(X) = \begin{cases} 2/3, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{A}_1\}, \\ 1/3, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) \supseteq \{\mathbb{A}_4\}, \\ 1/3, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{D}_4\}, \\ 1/3, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) \supseteq \{\mathbb{A}_2, \mathbb{A}_2\}, \\ 1/4, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) \supseteq \{\mathbb{A}_5\}, \\ 1/4, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{D}_5\}, \\ 1/6, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{E}_6\}, \\ 1/2 & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Естественно высказать следующее предположение³ (ср. [11; вопрос 1]).

ГИПОТЕЗА 1.13. Существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \equiv -K_X$ на X такой, что

$$\mathrm{lct}(X) = \mathrm{lct}(X, D) \in \mathbb{Q}.$$

Имеет место следующий глубокий результат (см. [3], [12], [13]).

ТЕОРЕМА 1.14. *Предположим, что X имеет факторособенности. Тогда из неравенства*

$$\mathrm{lct}(X) > \frac{\dim(X)}{\dim(X) + 1}$$

следует, что многообразие X обладает орбиформальной метрикой Кэлера–Эйнштейна.

На многообразии, которое имеет не более чем факторособенности, может существовать орбиформальная метрика Кэлера–Эйнштейна только в следующих трех случаях:

- когда канонический класс многообразия численно тривиален;
- когда канонический класс многообразия обилен (многообразие общего типа);
- когда канонический класс многообразия антибилен (многообразие Фано).

³На данный момент утверждение гипотезы 1.13 не доказано даже для поверхностей дель Пеццо.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.15. На многообразии с факторособенностями, чей канонический класс численно тривиален или обилен, существует метрика Кэлера–Эйнштейна (см. [14]–[16]).

Если $\text{Sing}(X) = \emptyset$, то X не обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна в следующих случаях:

- если группа $\text{Aut}(X)$ не редуктивна (см. [17]);
- если касательное расслоение многообразия X не является прямой суммой расслоений, стабильных относительно антиканонического дивизора $-K_X$ (см. [18]);
- если инвариант Футаки голоморфных векторных полей на X не нулевой (см. [19]).

СЛЕДСТВИЕ 1.16. *Метрика Кэлера–Эйнштейна не существует:*

- на раздутии $\mathbb{P}^2$ в одной или двух различных точках (см. [17]);
- на неособом трехмерном многообразии Фано $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ (см. [20]);
- на неособом четырехмерном многообразии Фано

$$\mathbb{P}(\alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \oplus \beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))),$$

где $\alpha: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\beta: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ суть естественные проекции (см. [19]).

Существуют более тонкие препятствия к существованию метрик Кэлера–Эйнштейна.

ПРИМЕР 1.17. Пусть X – неособое трехмерное многообразие Фано такое, что

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$$

и выполнено равенство $-K_X^3 = 22$. Тогда имеет место следующее:

- касательное расслоение многообразия X стабильно (см. [20]);
- группа $\text{Aut}(X)$ тривиальна, если многообразие X общее;
- существует X с тривиальной группой автоморфизмов, на котором не существует метрики Кэлера–Эйнштейна (см. [21]);
- если $\text{Aut}(X) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$, то на X существует метрика Кэлера–Эйнштейна (см. [22]).

Проблема существования метрик Кэлера–Эйнштейна на неособых торических многообразиях Фано полностью решена. Имеет место следующий результат (см. [23]–[26]).

ТЕОРЕМА 1.18. *Если X неособое и торическое, то следующие условия эквивалентны:*

- многообразие Фано X обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна;
- инвариант Футаки голоморфных векторных полей на X обращается в нуль;
- барицентр рефлексивного многогранника многообразия X является нулем.

Однако в целом известно не много многообразий Фано с метриками Кэлера–Эйнштейна.

ПРИМЕР 1.19. Из [3], [12], [27], [28] следует, что метрика Кэлера–Эйнштейна существует:

- на неособой поверхности дель Пеццо с редуктивной группой автоморфизмов;
- на гиперповерхности Ферма в $\mathbb{P}^n$ степени $d \leq n$ при $d \geq n/2$;
- на неособом многообразии X , которое является двулистным накрытием $\mathbb{P}^n$, разветвленным в неособой гиперповерхности степени $2d$ при $n \geq d > (n+1)/2$;
- на неособом полном пересечении двух гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ степени 2.

Вопрос существования орбиформальных метрик Кэлера–Эйнштейна на особых многообразиях Фано, имеющих факторособенности, недостаточно изучен даже в размерности 2.

ПРИМЕР 1.20. Пусть X – кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$. Тогда:

- поверхность X обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна, если $\text{Sing}(X) = \emptyset$ (см. [27]);
- поверхность X не обладает орбиформальной метрикой Кэлера–Эйнштейна в случае, когда поверхность X имеет особую точку, отличную от точек типа $\mathbb{A}_1$ или $\mathbb{A}_2$ (см. [29]);
- кубическая поверхность, заданная уравнением

$$xyz + xyt + xzt + yzt = 0 \subseteq \mathbb{P}^3 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна и имеет четыре особых точки типа $\mathbb{A}_1$ (см. [10]);

- кубическая поверхность, заданная уравнением

$$xyz = t^3 \subseteq \mathbb{P}^3 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна и имеет три особых точки типа $\mathbb{A}_2$ (см. [10]);

- в оставшихся случаях не известно, существует ли метрика Кэлера–Эйнштейна на X .

Основные примеры особых многообразий Фано, имеющих факторособенности и обладающих орбиформальной метрикой Кэлера–Эйнштейна, строятся с применением теоремы 1.14.

ПРИМЕР 1.21. Пусть X – квазигладкая поверхность в $\mathbb{P}(a_0, a_1, a_2, a_3)$ степени $\sum_{i=0}^3 a_i - 1$, где $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Тогда $\text{lct}(X) > 2/3$, если X общая и особая (см. [13], [30]–[32]).

ПРИМЕР 1.22. Пусть X – квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_4)$ степени $\sum_{i=0}^4 a_i - 1$, где $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. В работе [33] показано, что:

- выполнено неравенство $\text{lct}(X) > 3/4$ для не менее чем 1936 пятерок $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$;
- выполнено неравенство $\text{lct}(X) \geq 1$ для не менее чем 1605 пятерок $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Из примеров 1.9–1.11, 1.21, 1.22 видно, что число $\text{lct}(X)$ играет важную роль в кэлеровой геометрии. Число $\text{lct}(X)$ также играет важную роль в бирациональной геометрии.

ПРИМЕР 1.23. Предположим, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & \bar{V} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ Z & \xlongequal{\quad} & Z \end{array}$$

такая, что V и $\bar{V}$ – многообразия, имеющие не более чем терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, Z – неособая кривая, π и $\bar{\pi}$ – плоские морфизмы, а ρ – бирациональное отображение, которое индуцирует изоморфизм

$$V \setminus X \cong \bar{V} \setminus \bar{X},$$

где X и $\bar{X}$ – соответственно схемные слои π и $\bar{\pi}$ над точкой $O \in Z$. Предположим, что:

- схемные слои X и $\bar{X}$ неприводимы и приведены;
- дивизоры $-K_V$ и $-K_{\bar{V}}$ являются π -обильным и $\bar{\pi}$ -обильным соответственно;
- многообразия X и $\bar{X}$ имеют не более чем лог-терминальные особенности;

а отображение ρ не является изоморфизмом. Тогда из работ [34] и [10] следует, что

$$\text{lct}(X) + \text{lct}(\bar{X}) \leq 1, \quad (*)$$

где X и $\bar{X}$ являются многообразиями Фано согласно формуле присоединения.

Несложно видеть, что в общем случае неравенство $(*)$ нельзя усилить.

ПРИМЕР 1.24. Пусть $\pi: V \rightarrow Z$ – субъективный плоский морфизм такой, что:

- многообразие V неособо и $\dim(V) = 3$;
- многообразие Z является неособой кривой;
- дивизор $-K_V$ является π -обильным;

и пусть X – схемный слой морфизма π над точкой $O \in Z$. Предположим, что X – неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ такая, что X содержит прямые L_1 , L_2 , L_3 , которые пересекаются в одной точке $P \in V$. В работе [35] показано, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & U & \xrightarrow{\psi} & \bar{U} & \\ \alpha \swarrow & & & & \searrow \beta \\ V & \xrightarrow{\rho} & \bar{V} & & \\ \pi \searrow & & & & \swarrow \bar{\pi} \\ & Z & \xlongequal{\quad} & Z & \end{array}$$

где α – раздутие точки P , отображение ψ является антифлипом в собственных прообразах прямых L_1 , L_2 , L_3 , а β – стягивание собственного прообраза поверхности X . Тогда:

- бирациональное отображение ρ не является изоморфизмом;
- многообразие $\bar{V}$ имеет терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности;

- дивизор $-K_{\bar{V}}$ является $\bar{\pi}$ -обильным дивизором Картье;
- отображение ρ индуцирует изоморфизм $V \setminus X \cong \bar{V} \setminus \bar{X}$, где $\bar{X}$ – схемный слой морфизма $\bar{\pi}$ над точкой O .

Тогда $\bar{X}$ – кубическая поверхность с одной особой точкой типа $\mathbb{D}_4$, откуда $\text{lct}(X) = 2/3$ и $\text{lct}(\bar{X}) = 1/3$ (см. примеры 1.11 и 1.12).

Опишем еще одно применение числа $\text{lct}(X)$. Предположим дополнительно, что многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные и терминальные особенности и $\text{rk Pic}(X) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.25. Многообразие Фано X *бirationально сверхжестко*⁴, если для каждой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, особенности лог-пары $(X, \mathcal{M})$ канонические, где λ – такое рациональное число, что $K_X + \lambda \mathcal{M} \equiv 0$.

Из бирациональной сверхжесткости многообразия X следует, что:

- не существует рационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что общий слой расслоения ρ рационально связан, и выполнено неравенство $\dim(Y) \geq 1$;
- не существует небирегулярного бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что Y имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, и $\text{rk Pic}(Y) = 1$;
- многообразие X нерационально.

ПРИМЕР 1.26. Следующие неособые многообразия Фано бирационально сверхжестки:

- общая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 4$ (см. [38], [39]);
- неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ степени $2n \geq 6$ (см. [40], [41]).

Пусть $X_1, \dots, X_r$ – многообразия Фано, имеющие $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, и $\text{rk Pic}(X_i) = 1$ при всех $i = 1, \dots, r$. В работе [7] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.27. *Предположим, что многообразие X_i является бирационально сверхжестким и выполнено неравенство $\text{lct}(X_i) \geq 1$ при всех $i = 1, \dots, r$. Тогда*

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r),$$

многообразие $X_1 \times \dots \times X_r$ нерационально, а для каждого рационального доминантного отображения $\rho: X_1 \times \dots \times X_r \dashrightarrow Y$, чей общий слой рационально связан, существуют некоторое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_r & & \\ \pi \downarrow & \searrow \rho & \\ X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} & \xrightarrow{\xi} & Y \end{array}$$

где ξ – бирациональное отображение, а π – естественная проекция.

⁴Известно несколько определений бирациональной сверхжесткости (см. [36], [37]).

Известно, что бирационально сверхжесткие многообразия Фано, удовлетворяющие условиям теоремы 1.27, действительно существуют (см. примеры 1.9, 1.10, 1.26).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.28. Многообразие X называется *бирационально жестким*⁵, если для каждой непустой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, существует бирациональный автоморфизм $\xi \in \text{Bir}(X)$ такой, что лог-пара

$$(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$$

имеет канонические особенности, где λ – такое рациональное число, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Из бирациональной жесткости многообразия X вытекают следующие утверждения:

- не существует рационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что общий слой отображения ρ рационально связан, и выполнено неравенство $\dim(Y) \geq 1$;
- не существует бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что $Y \not\cong X$, многообразие Y имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, и $\text{rk Pic}(Y) = 1$;
- многообразие X нерационально.

ПРИМЕР 1.29. Следующие трехмерные многообразия Фано бирационально жестки:

- общее трехмерное полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$ (см. [42]);
- трехмерное неособое многообразие, которое является двойным накрытием неособой трехмерной квадрики с ветвлением в неособой поверхности степени 8 (см. [40]).

Существование бирационального автоморфизма в определении 1.28 обычно проверяют для некоторого набора автоморфизмов, что приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.30. Подмножество $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$ *откручивает все максимальные особенности* на многообразии X , если для каждой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, существует автоморфизм $\xi \in \Gamma$ такой, что лог-пара

$$(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$$

имеет канонические особенности, где λ – такое рациональное число, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Из существования подмножества $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$, которое откручивает все максимальные особенности, следует, что группа $\text{Bir}(X)$ порождена Γ и бирегулярными автоморфизмами.

ПРИМЕР 1.31. Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 5$, обладающая особой точкой O , которая является обыкновенной особой точкой кратности $n - 2$. Проекция

$$\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

⁵Известно несколько определений бирациональной жесткости (см. [36], [37]).

из точки O задает инволюцию, которая откручивает все максимальные особенности (см. [43]).

Теперь покажем, как обобщить теорему 1.27 для бирационально жестких многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.32. Многообразие X называется *универсально бирационально жестким*, если для любого многообразия U многообразие

$$X \otimes \operatorname{Spec}(\mathbb{C}(U))$$

бirationально жестко над полем рациональных функций $\mathbb{C}(U)$ многообразия U .

Отметим, что определение 1.28 очевидным образом обобщается для многообразий Фано, определенных над произвольным совершенным полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.33. Подмножество $\Gamma \subset \operatorname{Bir}(X)$ *универсально откручивает все максимальные особенности*, если для любого многообразия U индуцированная подгруппа

$$\Gamma \subset \operatorname{Bir}(X) \subseteq \operatorname{Bir}(X \otimes \operatorname{Spec}(\mathbb{C}(U)))$$

откручивает все максимальные особенности на многообразии $X \otimes \operatorname{Spec}(\mathbb{C}(U))$, которое определено над полем рациональных функций $\mathbb{C}(U)$ многообразия U .

Легко видеть, что любое подмножество в $\operatorname{Aut}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если многообразие Фано X является бирационально сверхжестким.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.34. Как отметил Я. Коллар, при $\dim(X) \geq 2$ подмножество $\Gamma \subset \operatorname{Bir}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности в том и только том случае, когда подмножество Γ откручивает все максимальные особенности, а группа $\operatorname{Bir}(X)$ счетна.

Пусть $X_1, \dots, X_r$ – многообразия Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями такие, что $\operatorname{rk} \operatorname{Pic}(X_i) = 1$ при всех $i = 1, \dots, r$. Рассмотрим проекцию

$$\pi_i: X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_r \longrightarrow X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \widehat{X_i} \times X_{i+1} \times \dots \times X_r$$

и обозначим символом $\sqcup_i$ общий слой проекции π_i в схемном смысле.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.35. Многообразие $\sqcup_i$ является многообразием Фано, которое определено над полем всех рациональных функций многообразия

$$X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \widehat{X_i} \times X_{i+1} \times \dots \times X_r.$$

Имеются естественные вложения групп

$$\prod_{i=1}^r \operatorname{Bir}(X_i) \subseteq \langle \operatorname{Bir}(\sqcup_1), \dots, \operatorname{Bir}(\sqcup_r) \rangle \subseteq \operatorname{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r),$$

а в работе [44] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.36. *Предположим, что многообразия $X_1, \dots, X_r$ являются универсально бирационально жесткими и выполнено неравенство $\text{lct}(X_i) \geq 1$ для всех $i = 1, \dots, r$. Тогда*

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \langle \text{Bir}(\square_1), \dots, \text{Bir}(\square_r), \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r) \rangle,$$

многообразие $X_1 \times \dots \times X_r$ нерационально и для любого отображения $\rho: X_1 \times \dots \times X_r \dashrightarrow Y$, чей общий слой является рационально связным многообразием, существуют подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_r & \xrightarrow{\sigma} & X_1 \times \dots \times X_r \\ \pi \downarrow & & \searrow \rho \\ X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} & \xrightarrow{\xi} & Y \end{array}$$

где π – естественная проекция, а ξ и σ – бирациональные отображения.

СЛЕДСТВИЕ 1.37. *Предположим, что существует подгруппа $\Gamma_i \subseteq \text{Bir}(X_i)$, универсально откручивающая все максимальные особенности, и $\text{lct}(X_i) \geq 1$ для всех $i = 1, \dots, r$. Тогда*

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \left\langle \prod_{i=1}^r \Gamma_i, \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r) \right\rangle.$$

Пусть X – общая квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^4 a_i$, имеющая не более чем терминальные особенности, где $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Тогда

$$-K_X \equiv \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)}(1),$$

а группа $\text{Cl}(X)$ порождена дивизором $-K_X$. Мы видим, что X – многообразие Фано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.38. Для четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) имеется 95 возможностей (см. [33], [45]).

В работе [46] найдены инволюции $\tau_1, \dots, \tau_k \in \text{Bir}(X)$ и доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.39. *Группа $\langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$ универсально откручивает максимальные особенности.*

СЛЕДСТВИЕ 1.40. *Многообразие X универсально бирационально жестко.*

В работе [47] найдены соотношения между бирациональными инволюциями $\tau_1, \dots, \tau_k$ и показано, что существует точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle \longrightarrow \text{Bir}(X) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow 1,$$

а в работах [44] и [48] доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.41. *Предположим, что $-K_X^3 \leq 1$. Тогда $\text{lct}(X) = 1$.*

В частности, многообразия, удовлетворяющие условиям теоремы 1.36 и следствия 1.37, но не являющиеся бирационально сверхжесткими, действительно существуют.

ПРИМЕР 1.42. Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 10)$ степени 20. Тогда существует точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \prod_{i=1}^m (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \text{Bir}(\underbrace{X \times \cdots \times X}_m \text{ сомножителей}) \longrightarrow S_m \longrightarrow 1,$$

где $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ – бесконечная группа диэдра.

Цель настоящей работы – доказать следующие два результата.

ТЕОРЕМА 1.43. Пусть $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 2)$. Тогда $\text{lct}(X) \geq 4/5$.

ТЕОРЕМА 1.44. Пусть $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 3)$. Тогда $\text{lct}(X) \geq 6/7$.

В работе [48] показано, что $\text{lct}(X) \geq 7/9$ при $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 1, 2)$, но

$$-K_X^3 > 1 \iff (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 2, 3)\},$$

откуда, в частности, следует такое следствие (см. примеры 1.10 и 1.9).

СЛЕДСТВИЕ 1.45. Общая квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, \dots, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^4 a_i$, имеющая терминальные особенности, обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна.

Мы докажем теорему 1.43 в § 3, а теорему 1.44 в § 4.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть V – многообразие, имеющее не более чем факторособенности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть H – численно эффективный дивизор на V , а $B \neq T$ – эффективные и неприводимые дивизоры на V . Допустим, что $\dim(V) = 3$. Положим

$$B \cdot T = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i L_i + \Delta,$$

где L_i – неприводимая кривая, ε_i – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, чей носитель не содержит кривых $L_1, \dots, L_r$. Тогда

$$\sum_{i=1}^r \varepsilon_i H \cdot L_i \leq B \cdot T \cdot H.$$

Пусть D – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на V такой, что лог-пара (V, D) не лог-канонична.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть B – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии V такой, что особенности лог-пары (V, B) являются лог-каноническими. Тогда особенности лог-пары

$$\left(V, \frac{1}{1-\alpha}(D - \alpha B)\right)$$

не являются лог-каноническими при всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ таких, что $0 \leq \alpha < 1$.

Пусть P – точка многообразия V такая, что лог-пара (V, D) не лог-канонична в ней.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Предположим, что P – особая точка многообразия V типа $\frac{1}{r}(1, a, r-a)$, где a и r – натуральные числа такие, что $(a, r) = 1$ и $r > 2a$. Пусть $\alpha: U \rightarrow V$ – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, a, r-a)$. Существует рациональное число μ такое, что

$$\overline{D} \equiv \alpha^*(D) - \mu E,$$

где $\overline{D}$ – собственный прообраз дивизора D на многообразии U , а E – α -исключительный дивизор. Тогда выполнено неравенство $\mu > 1/r$ согласно [1; лемма 8.12].

Очевидно, что $\text{mult}_P(D) > 1$ в случае, когда $P \notin \text{Sing}(V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Предположим, что $P \notin \text{Sing}(V)$ и $\dim(V) = 2$. Пусть

$$D = mC + \Omega,$$

где C – неприводимая кривая, m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности V , носитель которого не содержит кривой C . Тогда

$$C \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega|_C) > 1$$

по [1; теорема 7.5] в случае, когда $P \in C \setminus \text{Sing}(C)$ и $m \leq 1$.

Предположим теперь дополнительно, что $\dim(V) = 3$, а точка P является неособой точкой многообразия V . Пусть $\pi: U \rightarrow V$ – раздутие точки P . Тогда

$$\overline{D} \equiv \alpha^*(D) - \text{mult}_P(D)E,$$

где E – α -исключительный дивизор, а $\overline{D}$ – собственный прообраз D на U .

ЛЕММА 2.5. *Либо $\text{mult}_P(D) > 2$, либо существует прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^2$ такая, что*

$$\text{mult}_L(\overline{D}) + \text{mult}_P(D) > 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия V , проходящее через точку P , а $\overline{H}$ – собственный прообраз дивизора H на многообразии U . Тогда

$$\overline{H} \equiv \alpha^*(D) - E,$$

и мы можем считать, что дивизор $\overline{H}$ очень обилен. Из соотношения

$$K_U + \overline{D} + (\text{mult}_P(D) - 2)E \equiv \alpha^*(K_V + D)$$

следует, что $(U, \overline{D} + (\text{mult}_P(D) - 2)E)$ не лог-канонична в окрестности E . Лог-пара

$$(U, \overline{D} + (\text{mult}_P(D) - 1)E)$$

также не лог-канонична в окрестности дивизора E . Наконец, лог-пара

$$(U, \overline{D} + (\text{mult}_P(D) - 1)E + \overline{H})$$

также не лог-канонична в окрестности дивизора E . Отметим, что $\text{mult}_P(D) > 1$.

Положим $\beta = \alpha|_{\bar{H}}: \bar{H} \rightarrow H$ и $\bar{E} = E|_{\bar{H}}$. Тогда выполнено соотношение

$$K_{\bar{H}} + \bar{D}|_{\bar{H}} + (\text{mult}_P(D) - 1)\bar{E} \equiv \beta^*(K_H + D|_H),$$

а носитель дивизора $\bar{D}|_{\bar{H}}$ не содержит кривой $\bar{E}$ в силу общности дивизора H . Тогда

$$\text{mult}_P(D|_H) = \text{mult}_P(D),$$

а собственный прообраз дивизора $D|_H$ на поверхности $\bar{H}$ является дивизором $\bar{D}|_{\bar{H}}$.

Лог-пара $(H, D|_H)$ не лог-канонична в точке P по [1; теорема 7.5]. Тогда

$$(\bar{H}, \bar{D}|_{\bar{H}} + (\text{mult}_P(D) - 1)\bar{E})$$

не лог-канонична в окрестности кривой $\bar{E}$.

Предположим, что $\text{mult}_P(D) < 2$. Из принципа связности (см. [1; теорема 7.5]) следует, что существует единственная точка $Q_{\bar{H}} \in \bar{E}$ такая, что лог-пара

$$(\bar{H}, \bar{D}|_{\bar{H}} + (\text{mult}_P(D) - 1)\bar{E})$$

не лог-терминальна в точке $Q_{\bar{H}}$, но лог-терминальна вне $Q_{\bar{H}}$ в окрестности $\bar{E}$. В силу общности поверхности H можно считать, что $\bar{H}$ – общее гиперплоское сечение многообразия U . Значит, существует кривая $L \subset E$ такая, что $L \cap \bar{H} = Q_{\bar{H}}$, а лог-пара

$$(U, \bar{D} + (\text{mult}_P(D) - 1)E)$$

не лог-терминальна в общей точке кривой L , но лог-терминальна вне L в окрестности $Q_{\bar{H}}$.

Кривая L является прямой в $\mathbb{P}^2$, поскольку $L \cap \bar{H}$ состоит из одной точки. Тогда

$$\text{mult}_L(\bar{D}) + (\text{mult}_P(D) - 1)\text{mult}_L(E) \geq 1,$$

откуда следует, что $\text{mult}_L(\bar{D}) + \text{mult}_P(D) \geq 2$.

Итак, показано, что либо $\text{mult}_P(D) \geq 2$, либо существует прямая $L \subset E$ такая, что

$$\text{mult}_L(\bar{D}) + \text{mult}_P(D) \geq 2,$$

но $(V, \lambda D)$ не лог-канонична в точке P для некоторого положительного рационального числа $\lambda < 1$. Применяя полученное утверждение к $(V, \lambda D)$, мы получаем требуемое строгое неравенство. Лемма доказана.

Утверждение леммы 2.5 является несложным обобщением следствия 3.5 работы [36].

§ 3. Трехмерное многообразие Фано степени 3/2

Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$ степени 6. Тогда X имеет три особые точки O_1, O_2, O_3 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Пусть D – произвольный дивизор в полной линейной системе $|-nK_X|$, где n – натуральное число. Положим $\lambda = 4/(5n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для доказательства теоремы 1.43 достаточно показать, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ лог-канонические, поскольку D – произвольный дивизор в $|-nK_X|$.

Предположим, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Можно считать, что D неприводим (см. замечание 2.2).

ЛЕММА 3.2. *Выполнено неравенство $n \neq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 1$. Тогда лог-пара (X, D) лог-канонична каждой особой точке гиперповерхности X по [1; лемма 8.12 и предложение 8.14]. Имеем $a_1 = 1$.

Предположим, что лог-пара (X, D) не является лог-канонической в некоторой неособой точке P гиперповерхности X . Покажем, что сделанное предположение противоречиво.

Рассмотрим множество пар

$$\mathcal{S} = \{(O, F) \mid O \in \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2), F \in H^0(\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)}(6))\}$$

с проекциями $\pi: \mathcal{S} \rightarrow H^0(\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)}(6))$ и $\zeta: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$. Положим

$$\mathcal{J} = \{(O, F) \in \mathcal{S} \mid F(O) = 0, \text{ а гиперповерхность } F = 0 \text{ квазигладка и неособа в } O\}.$$

Предположим, что точка O задается уравнениями $x = y = w = t = 0$ в

$$\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$ и $\text{wt}(t) = \text{wt}(w) = 2$. Тогда

$$F = z^5 q_1(x, y) + z^4 q_2(x, y, t, w) + z^3 q_3(x, y, t, w) + z^2 q_4(x, y, t, w) + z q_5(x, y, t, w) + q_6(x, y, t, w),$$

где $q_i(x, y, t, w)$ – некоторый квазиоднородный многочлен степени i .

Скажем, что O – *плохая* точка на $F = 0$, если $q_2(0, 0, t, w) = 0$, а гиперплоское сечение гиперповерхности F , которое высекается на $F = 0$ уравнением $q_1(x, y) = 0$, имеет особенности в точке O хуже дювалевских (канонических).

Пусть Q – точка в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$, а Ω – слой проекции π над точкой Q . Тогда

$$\dim(\Omega) = \dim(H^0(\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)}(6))),$$

и мы можем положить

$$\mathcal{Y} = \{(O, F) \in \mathcal{J} \mid \text{точка } O \text{ плохая на гиперповерхности } F = 0\}.$$

Ограничение $\pi|_{\mathcal{Y}}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$ сюръективно. Из простых вычислений следует, что

$$\dim(\Omega \cap \mathcal{Y}) \leq \dim(\Omega) - 5,$$

откуда сразу следует, что ограничение

$$\zeta|_{\mathcal{Y}}: \mathcal{Y} \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)}(6))$$

не сюръективно. У общей гиперповерхности в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$ степени 6 нет плохих точек.

По предположению лог-пара (X, D) не является лог-каноничной в точке P , которая является неособой точкой гиперповерхности X . В частности, поверхность D особа в P , но мы можем считать, что поверхность D имеет дювалевскую особенность в точке P .

Особенности поверхности D не лог-канонические в P по [1; теорема 7.5], что является противоречием, поскольку особенности D в точке P канонические. Лемма доказана.

Из результатов работы [49] следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_1 & \xleftarrow{\beta_1} & Y_1 \\
 & \nearrow \sigma_1 & \downarrow \alpha_1 & & \nwarrow \gamma_1 \\
 V_1 & & X & & W_1 \\
 & \searrow \omega_1 & \swarrow \xi_1 & \searrow \psi & \downarrow \eta \\
 & & \mathbb{P}(1, 1, 1, 2) & \xrightarrow{\chi_1} & \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

где ξ_1 , ψ и χ_1 – проекции, морфизм α_1 – раздутие точки O_1 с весами $(1, 1, 1)$, β_1 – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ точки, доминирующей точку O_2 , γ_1 – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ точки, доминирующей точку O_3 , морфизм η – эллиптическое расслоение, морфизм ω_1 – двулистное накрытие, а σ_1 – бирациональный морфизм, стягивающий 24 кривых $\overline{C}_1^1, \dots, \overline{C}_{24}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Кривые $\overline{C}_1^1, \dots, \overline{C}_{24}^1$ неособы, неприводимы и рациональны.

Положим $C_i^1 = \alpha_1(\overline{C}_i^1)$ для всех $i = 1, \dots, 24$. Рациональное отображение ξ_1 не определено только в точке O_1 и стягивает кривые $C_1^1, \dots, C_{24}^1$. Отметим, что ψ – естественная проекция.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Слой проекции ψ над точкой $\psi(C_i^1)$ состоит из неособой рациональной кривой C_i^1 и еще одной неособой неприводимой и рациональной кривой Z_i^1 такой, что

$$C_i^1 \ni O_1 \notin Z_i^1, \quad Z_i^1 \ni O_2 \notin C_i^1, \quad Z_i^1 \ni O_3 \notin C_i^1,$$

кривые C_i^1 и Z_i^1 трансверсально пересекаются в двух точках, и выполнены равенства

$$-K_X \cdot Z_i^1 = -2K_X \cdot C_i^1 = 1.$$

Аналогично, можно построить отображения $\xi_2: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ и $\xi_3: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, которые не определены только в O_2 и O_3 соответственно. Построенные рациональные отображения ξ_2 и ξ_3 стягивают 48 кривых $C_1^2, \dots, C_{24}^2$ и $C_1^3, \dots, C_{24}^3$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Пусть Z – кривая на многообразии X такая, что $-K_X \cdot Z = 1/2$. Тогда

$$Z \in \{C_1^1, \dots, C_{24}^1, C_1^2, \dots, C_{24}^2, C_1^3, \dots, C_{24}^3\}.$$

Аналогичным образом можно показать существование неприводимых рациональных неособых кривых $Z_1^2, \dots, Z_{24}^2$ и $Z_1^3, \dots, Z_{24}^3$, которые являются компонентами слоев отображения ψ над точками $\psi(C_1^2), \dots, \psi(C_{24}^2)$ и $\psi(C_1^3), \dots, \psi(C_{24}^3)$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Пусть F – приводимый слой отображения ψ . Тогда

$$F \in \{C_1^1 \cup Z_1^1, \dots, C_{24}^1 \cup Z_{24}^1, C_1^2 \cup Z_1^2, \dots, C_{24}^2 \cup Z_{24}^2, C_1^3 \cup Z_1^3, \dots, C_{24}^3 \cup Z_{24}^3\}.$$

Пусть P – точка многообразия V такая, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-каноничной в точке P , а F – схемный слой проекции ψ , который проходит через точку P .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Если $P \notin \text{Sing}(X)$, то слой F однозначно определен.

Отметим, что слой F приведен. Пусть S – общая поверхность в $|-K_X|$ такая, что $P \in S$.

ЛЕММА 3.8. *Предположим, что $\text{Sing}(X) \not\ni P \notin \text{Sing}(F)$. Тогда F приводим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F неприводим. Пусть $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – раздутие точки P . Тогда

$$\bar{D} \equiv \pi^*(D) - \text{mult}_P(D)E,$$

где E – π -исключительный дивизор, $\bar{D}$ – собственный прообраз дивизора D на $\bar{X}$.

Отметим, что $\text{mult}_P(D) > n$. Предположим, что $\text{mult}_P(D) > 3n/2$. Положим

$$D|_S = mF + \Omega,$$

где m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривой F . Тогда

$$\frac{3n}{2} = F \cdot (mF + \Omega) = \frac{3m}{2} + F \cdot \Omega \geq \frac{3m}{2} + \text{mult}_P(\Omega) > \frac{3m}{2} + \frac{3n}{2} - m = \frac{3n}{2} + \frac{m}{2},$$

что является противоречием. Итак, показано, что $\text{mult}_P(D) \leq 3n/2$.

Из леммы 2.5 следует, что существует прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^2$ такая, что

$$\text{mult}_L(\bar{D}) + \text{mult}_P(D) > \frac{2}{\lambda} = \frac{5n}{2}.$$

Из неособости кривой F в точке P следует, что линейная система $|-K_X|$ не содержит поверхностей, имеющих особенность в точке P . Отсюда следует, что

$$H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\pi^*(-2K_X) - 2E)) \cong \mathbb{C}^4,$$

а стандартная точная последовательность

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\pi^*(-2K_X) - 3E)) &\longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\pi^*(-2K_X) - 2E)) \\ &\longrightarrow H^0(\mathcal{O}_E(-2E|_E)) \cong \mathbb{C}^5 \end{aligned}$$

влечет либо существование поверхности $T \in |-2K_X|$ такой, что $\text{mult}_P(T) \geq 3$, либо существование поверхности $R \in |-2K_X|$ такой, что $\text{mult}_P(R) = 2$ и $L \subset \bar{R}$,

где $\bar{R}$ – собственный прообраз поверхности R на многообразии $\bar{X}$. Из несложного подсчета параметров (см. доказательство леммы 3.2) следует, что первый случай не реализуется.

Итак, показано, что существует (возможно, приводимая) поверхность $R \in |-2K_X|$ такая, что выполнены равенство $\text{mult}_P(R) = 2$ и включение $L \subset \bar{R}$, где $\bar{R}$ – собственный прообраз найденной поверхности R на многообразии $\bar{X}$. Тогда $D \not\subset \text{Supp}(R)$, поскольку $\text{mult}_P(D) > n$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{mult}_P(R \cdot D) &\geq \text{mult}_L(\bar{D}) \text{mult}_L(\bar{R}) + \text{mult}_P(D) \text{mult}_P(R) \\ &\geq \text{mult}_L(\bar{D}) + 2 \text{mult}_P(D) > 3n. \end{aligned}$$

Положим $R \cdot D = \varepsilon F + \Delta$, где $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, а Δ – эффективный 1-цикл, носитель которого не содержит кривой F . Тогда $\Delta \not\subset \text{Supp}(S)$ и $\text{mult}_P(\Delta) > 3n - \varepsilon$. Имеем

$$3n = S \cdot R \cdot D = \frac{3\varepsilon}{2} + S \cdot \Delta > \frac{3\varepsilon}{2} - 3n - \varepsilon = 3n + \frac{\varepsilon}{2},$$

что является противоречием. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.9. *Предположим, что $P \notin \text{Sing}(X)$. Тогда F приводим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть слой F неприводим. Тогда кривая F особа в точке P по лемме 3.8, откуда следует, что существует $T \in |-K_X|$ такой, что $\text{mult}_P(T) \geq 2$. Тогда $T \neq D$ по лемме 3.2, а из общности гиперповерхности X следует, что $\text{mult}_P(F) = 2$.

Положим теперь $T \cdot D = \varepsilon F + \Delta$, где $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, а Δ – эффективный 1-цикл, носитель которого не содержит кривой F . Тогда $\Delta \not\subset \text{Supp}(S)$ и $\text{mult}_P(\Delta) > 2n - 2\varepsilon$. Имеем

$$\frac{3n}{2} = S \cdot T \cdot D = \frac{3\varepsilon}{2} + S \cdot \Delta > \frac{3\varepsilon}{2} + 2n - 2\varepsilon = 2n - \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что $\varepsilon > n$, что противоречит замечанию 2.1.

ЛЕММА 3.10. *Точка P является особой точкой гиперповерхности X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – неособая точка гиперповерхности X . Тогда слой F приводим согласно лемме 3.9, а из замечания 3.6 следует, что

$$F \in \{C_1^1 \cup Z_1^1, \dots, C_{24}^1 \cup Z_{24}^1, C_1^2 \cup Z_1^2, \dots, C_{24}^2 \cup Z_{24}^2, C_1^3 \cup Z_1^3, \dots, C_{24}^3 \cup Z_{24}^3\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $F = C_1^1 \cup Z_1^1$. Положим

$$D|_S = m_1 C_1^1 + m_2 Z_1^1 + \Omega \equiv -nK_X|_S,$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривых C_1^1 и Z_1^1 . Тогда особенности лог-пары

$$(S, \lambda m_1 C_1^1 + \lambda m_2 Z_1^1 + \lambda \Omega)$$

не являются лог-каноническими в точке P по [1; теорема 7.5]. Покажем, что последнее приводит к противоречию с численной эквивалентностью $m_1 C_1^1 + m_2 Z_1^1 + \Omega \equiv -nK_X|_S$.

Особенности лог-пары $(S, C_1^1 + Z_1^1)$ являются лог-каноническими в точке P в силу общности выбора гиперповерхности X . Таким образом, из численной эквивалентности

$$C_1^1 + Z_1^1 \equiv -K_X|_S$$

и замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что либо $m_1 = 0$, либо $m_2 = 0$.

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = C_1^1 \cdot (m_2 Z_1^1 + \Omega) = 2m_2 + C_1^1 \cdot \Omega \geq 2m_2,$$

откуда следует, что $m_2 \leq n/4$. Имеем $P \notin C_1^1$, поскольку в противном случае

$$\frac{n}{2} = C_1^1 \cdot (m_2 Z_1^1 + \Omega) = 2m_2 + C_1^1 \cdot \Omega > 2m_2 + \frac{1}{\lambda} \geq \frac{5n}{4}$$

согласно замечанию 2.4. Итак, показано, что $P \in Z_1^1$. Тогда

$$n = Z_1^1 \cdot (m_2 Z_1^1 + \Omega) = -m_2 + Z_1^1 \cdot \Omega > -m_2 + \frac{1}{\lambda} \geq -m_2 + \frac{5n}{4}$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_2 > n/4$, но $m_2 \leq n/4$. Противоречие.

Итак, мы видим, что $m_2 = 0$. Как и в предыдущем случае, мы видим, что

$$n = Z_1^1 \cdot (m_1 C_1^1 + \Omega) = 2m_1 + Z_1^1 \cdot \Omega \geq 2m_1,$$

откуда $m_1 \leq n/2$. Тогда $P \notin Z_1^1$, поскольку в противном случае

$$n = Z_1^1 \cdot (m_1 C_1^1 + \Omega) = 2m_1 + Z_1^1 \cdot \Omega > 2m_1 + \frac{1}{\lambda} \geq \frac{5n}{4}$$

согласно замечанию 2.4. Итак, показано, что $P \in C_1^1$. Тогда

$$\frac{n}{2} = C_1^1 \cdot (m_1 C_1^1 + \Omega) = -\frac{3m_1}{2} + C_1^1 \cdot \Omega > -\frac{3m_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \geq -\frac{3m_1}{2} + \frac{5n}{4}$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_1 > n/2$, но $m_1 \leq n/2$. Противоречие. Лемма доказана.

Без ограничения общности можно считать, что $P = O_1$. Тогда $-K_{U_1}^3 = 1$ и

$$\overline{D} \equiv \alpha_1^*(D) - \mu E_1,$$

где E_1 – α_1 -исключительный дивизор, $\overline{D}$ – собственный прообраз дивизора D на многообразии U_1 , а μ – рациональное число. Тогда $\mu > n/(2\lambda)$ согласно замечанию 2.3. Имеем

$$K_{U_1} + \lambda \overline{D} + \left(\lambda \mu - \frac{1}{2} \right) E_1 \equiv \alpha_1^*(K_X + \lambda D).$$

ЛЕММА 3.11. *Выполнено неравенство $\mu \leq 3n/4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка O_1 может быть задана уравнениями $x = y = z = t = 0$, а гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2 t + w f_4(x, y, z, t) + f_6(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$ и $\text{wt}(t) = \text{wt}(w) = 2$, а f_4 и f_6 – квазиоднородные многочлены степени 4 и 6 соответственно. В выбранных координатах кривые $C_1^1, \dots, C_{24}^1$ высекаются на гиперповерхности X уравнениями

$$t = f_4(x, y, z, t) = f_6(x, y, z, t) = 0.$$

Пусть R – поверхность на X , которая высекается уравнением $t = 0$, а $\bar{R}$ – собственный прообраз поверхности R на многообразии U_1 . Поверхность R неприводима и

$$\bar{R} \equiv \alpha_1^*(-2K_X) - 2E,$$

но лог-пара $(X, \frac{1}{2}R)$ имеет лог-канонические особенности в точке O_1 по [1; лемма 8.12 и предложение 8.14], поскольку можно считать, что гиперповерхность X достаточно общая.

Лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична в точке P , где $\lambda = 4/5$. Отсюда следует, что $R \neq D$ и

$$0 \leq -K_{U_1} \cdot \bar{R} \cdot \bar{D} = 3n - 4\mu,$$

потому что $-K_{U_1}$ численно эффективен. Значит, выполнено неравенство $\mu \leq 3n/4$. Лемма доказана.

В частности, существует точка $Q \in E$ такая, что лог-пара

$$\left(U_1, \lambda \bar{D} + \left(\lambda \mu - \frac{1}{2} \right) E_1 \right)$$

не лог-канонична в Q . Пусть $\bar{S}$ – общая поверхность в $|-K_{U_1}|$ такая, что $Q \in \bar{S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Собственный прообраз поверхности E_1 на многообразии W_1 является сечением эллиптического расслоения η . В частности, поверхность $\bar{S}$ неособа в точке Q .

Пусть $\bar{Z}_i^k$ – собственный прообраз кривой Z_i^k на U_1 , где $k = 1, 2, 3$ и $i = 1, \dots, 24$.

ЛЕММА 3.13. Точка Q не содержится в $\bigcup_{i=1}^{24} \bar{C}_i^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Q \in \bigcup_{i=1}^{24} \bar{C}_i^1$. Можно считать, что $Q \in \bar{C}_1^1$. Положим

$$\bar{D}|_{\bar{S}} + \left(\mu - \frac{n}{2} \right) E|_{\bar{S}} = m_1 \bar{C}_1^1 + m_2 \bar{Z}_1^1 + \Omega \equiv -nK_{U_1}|_{\bar{S}},$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\bar{S}$, носитель которого не содержит кривых $\bar{C}_1^1$ и $\bar{Z}_1^1$. Лог-пара

$$\left(\bar{S}, \frac{m_1}{n} \bar{C}_1^1 + \frac{m_2}{n} \bar{Z}_1^1 + \frac{1}{n} \Omega \right)$$

не лог-канонична в точке Q по [1; теорема 7.5]. Покажем, что последнее невозможно.

Лог-пара $(\bar{S}, \bar{C}_1^1 + \bar{Z}_1^1)$ лог-канонична в точке Q . Таким образом, из эквивалентности

$$\bar{C}_1^1 + \bar{Z}_1^1 \equiv -K_{U_1}|_{\bar{S}}$$

и замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что либо $m_1 = 0$, либо $m_2 = 0$.

Из замечания 2.4 следует, что

$$0 = \overline{C}_1^1 \cdot (m_1 \overline{C}_1^1 + m_2 \overline{Z}_1^1 + \Omega) = 2m_2 + \overline{C}_1^1 \cdot \Omega > 2m_2 + n \geq n$$

в случае, когда выполнено равенство $m_1 = 0$. Итак, мы можем считать, что $m_2 = 0$. Тогда

$$n = \overline{Z}_1^1 \cdot (m_1 \overline{C}_1^1 + \Omega) = 2m_1 + \overline{Z}_1^1 \cdot \Omega \geq 2m_1,$$

откуда следует, что $m_1 \leq n/2$. Мы видим, что

$$0 = \overline{C}_1^1 \cdot (m_1 \overline{C}_1^1 + \Omega) = -2m_1 + \overline{C}_1^1 \cdot \Omega > -2m_1 + n \geq -2m_1 + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_1 > n/2$, но $m_1 \leq n/2$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\overline{C}_i^k$ – собственный прообраз кривой C_i^k на U_1 , где $k = 2, 3$ и $i = 1, \dots, 24$.

ЛЕММА 3.14. Точка Q не содержится в $\bigcup_{i=1}^{24} \overline{Z}_i^2$ и не содержится в $\bigcup_{i=1}^{24} \overline{Z}_i^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что либо точка Q содержится в $\bigcup_{i=1}^{24} \overline{Z}_i^2$, либо Q содержится в $\bigcup_{i=1}^{24} \overline{Z}_i^3$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Без ограничения общности можно считать, что $Q \in \overline{Z}_1^2$. Тогда $Q \notin \overline{C}_1^2$. Положим

$$\overline{D}|_{\overline{S}} + \left(\mu - \frac{n}{2} \right) E|_{\overline{S}} = m_1 \overline{C}_1^2 + m_2 \overline{Z}_1^2 + \Omega \equiv -nK_{U_1}|_{\overline{S}},$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\overline{S}$, носитель которого не содержит кривых $\overline{C}_1^2$ и $\overline{Z}_1^2$.

Из [1; теорема 7.5] следует, что лог-пара

$$\left(\overline{S}, \frac{m_1}{n} \overline{C}_1^2 + \frac{m_2}{n} \overline{Z}_1^2 + \frac{1}{n} \Omega \right)$$

не лог-канонична в точке Q . Покажем, что последнее утверждение невозможно.

Лог-пара $(\overline{S}, \overline{C}_1^2 + \overline{Z}_1^2)$ лог-канонична в точке Q , но выполнена численная эквивалентность

$$\overline{C}_1^2 + \overline{Z}_1^2 \equiv -K_{U_1}|_{\overline{S}},$$

откуда следует, что мы можем считать, что либо $m_1 = 0$, либо $m_2 = 0$ (см. замечание 2.2).

Предположим, что $m_2 = 0$. Тогда из замечания 2.4 следует, что

$$\frac{n}{2} = \overline{Z}_1^2 \cdot (m_1 \overline{C}_1^2 + \Omega) = 2m_1 + \overline{Z}_1^2 \cdot \Omega > 2m_1 + n \geq \frac{5n}{4},$$

что является противоречием. Итак, мы можем считать, что $m_1 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \overline{C}_1^2 \cdot (m_2 \overline{Z}_1^2 + \Omega) = 2m_2 + \overline{C}_1^2 \cdot \Omega \geq 2m_2,$$

откуда следует, что $m_2 \leq n/4$. Мы видим, что

$$\frac{n}{2} = \bar{Z}_1^2 \cdot (m_2 \bar{Z}_1^2 + \Omega) = -\frac{3m_2}{2} + \bar{Z}_1^2 \cdot \Omega > -\frac{3m_2}{2} + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_2 > n/3$, но $m_2 \leq n/4$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\bar{F}$ – схемный слой рационального отображения $\psi \circ \alpha_1$, который проходит через точку Q . Показано, что $\bar{F}$ неприводим. Слой $\bar{F}$ неособ в точке Q . Положим

$$\bar{D}|_{\bar{S}} + \left(\mu - \frac{n}{2}\right) E|_{\bar{S}} = m\bar{F} + \Omega,$$

где m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\bar{S}$, носитель которого не содержит кривой $\bar{F}$. Тогда

$$n = \bar{F} \cdot (m\bar{F} + \Omega) = m + \bar{F} \cdot \Omega \geq m + \text{mult}_Q(\Omega) > m + n - m = n,$$

что является противоречием. Утверждение теоремы 1.43 доказано.

§ 4. Трехмерное многообразие Фано степени 7/6

Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$ степени 7. Тогда X имеет две особые точки O_1 и O_1 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно. Есть коммутативная диаграмма

где π , ψ и ζ – проекции, α_1 – раздутие точки O_1 с весами $(1, 1, 1)$, морфизм β_1 – раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки, доминирующей точку O_2 , γ_1 – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ особой точки, доминирующей точку O_2 , η – эллиптическое расслоение, ω_1 – двулистное накрытие, а σ_1 – бирациональный морфизм, стягивающий 35 кривых $\bar{C}_1^1, \dots, \bar{C}_{35}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Кривые $\bar{C}_1^1, \dots, \bar{C}_{35}^1$ неособы, неприводимы и рациональны.

Из результатов работы [49] следует, что существует коммутативная диаграмма

где ξ , ψ и χ – проекции, α_2 – раздутие точки O_2 с весами $(1, 1, 2)$, морфизм β_2 – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ особой точки многообразия U_2 , доминирующей точку O_2 , γ_2 – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ точки, доминирующей точку O_1 , η – эллиптическое расслоение, ω_2 – двулистное накрытие, а σ_2 – бирациональный морфизм, стягивающий 14 кривых $\overline{C}_1^2, \dots, \overline{C}_{14}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Кривые $\overline{C}_1^2, \dots, \overline{C}_{14}^2$ неособы, неприводимы и рациональны.

Положим $C_i^1 = \alpha_1(\overline{C}_i^1)$ для всех $i = 1, \dots, 35$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Слой проекции ψ над точкой $\psi(C_i^1)$ состоит из неособой рациональной кривой C_i^1 и еще одной неособой неприводимой и рациональной кривой Z_i^1 такой, что

$$C_i^1 \ni O_1 \notin Z_i^1, \quad Z_i^1 \ni O_2 \notin C_i^1,$$

а C_i^1 и Z_i^1 трансверсально пересекаются в двух точках, но $-K_X \cdot Z_i^1 = 2/3$ и $-K_X \cdot C_i^1 = 1/2$.

Положим $C_i^2 = \alpha_2(\overline{C}_i^2)$ для всех $i = 1, \dots, 14$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Слой проекции ψ над точкой $\psi(C_i^2)$ состоит из неособой рациональной кривой C_i^2 и еще одной неособой неприводимой и рациональной кривой Z_i^2 такой, что

$$C_i^2 \ni O_2 \in Z_i^1, \quad Z_i^2 \ni O_1 \notin C_i^2,$$

кривые C_i^1 и Z_i^1 пересекаются в точке O_2 , кривые C_i^1 и Z_i^1 трансверсально пересекаются в неособой точке многообразия X , и выполнены равенства $-K_X \cdot Z_i^1 = 5/6$ и $-K_X \cdot C_i^1 = 1/3$.

Пусть D – дивизор в $|-nK_X|$, где $n \in \mathbb{N}$. Положим $\mu = 6/(7n)$ и $\lambda = 1/n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Для доказательства теоремы 1.44 достаточно показать, что особенности лог-пары $(X, \mu D)$ лог-канонические, поскольку D – произвольный дивизор в $|-nK_X|$.

Прежде чем доказывать теорему 1.44, опишем приводимые слои отображения ψ .

ЛЕММА 4.6. Пусть F – приводимый слой рационального отображения ψ . Тогда

$$F \in \{C_1^1 \cup Z_1^1, \dots, C_{35}^1 \cup Z_{35}^1, C_1^2 \cup Z_1^2, \dots, C_{14}^2 \cup Z_{14}^2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – неприводимая кривая на гиперповерхности. Тогда

$$C \in \{C_1^1, \dots, C_{35}^1\},$$

если $-K_X \cdot C = 1/2$, поскольку собственный прообраз кривой C на многообразии U_1 имеет тривиальное пересечение с дивизором $-K_{U_1}$ в случае выполнения равенства $-K_X \cdot C = 1/2$.

Отметим, что равенство $-K_X \cdot C = 1/6$ невозможно, поскольку в противном случае собственный прообраз кривой C на многообразии U_1 имел бы отрицательное пересечение с дивизором $-K_{U_1}$, который, как легко видеть, является численно эффективным.

Пусть $-K_X \cdot C = 1/3$. Пусть $\bar{C}$ – собственный прообраз кривой C на U_2 . Тогда

$$0 \leq -K_{U_2} \cdot \bar{C} = \left(\alpha_2^*(-K_X) - \frac{1}{3} E \right) \cdot \bar{C} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} E_2 \cdot \bar{C},$$

где E_2 – исключительный дивизор раздутия α_2 . С другой стороны, число $2E_2 \cdot \bar{C}$ натуральное, откуда следует, что $E_2 \cdot \bar{C} = 1/2$ или $E_2 \cdot \bar{C} = 1$. Равенство $E_2 \cdot \bar{C} = 1/2$ влечет

$$-K_{U_2} \cdot \bar{C} = \left(\alpha_2^*(-K_X) - \frac{1}{3} E \right) \cdot \bar{C} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} E_2 \cdot \bar{C} = \frac{1}{6},$$

что является противоречием, поскольку $-2K_{U_2}$ – дивизор Картье. Значит, выполнено равенство $E_2 \cdot \bar{C} = 1$, откуда следует, что $-K_{U_2} \cdot \bar{C} = 0$. Таким образом, мы видим, что

$$C \in \{C_1^2, \dots, C_{14}^2\},$$

поскольку неприводимые рациональные кривые $\bar{C}_1^2, \dots, \bar{C}_{14}^2$ суть единственные кривые на многообразии U_1 , которые имеют тривиальное пересечение с дивизором $-K_{U_2}$.

Отметим, что $-K_X \cdot F = 7/6$. Пусть C – компонента кривой F такая, что $-K_X \cdot C$ минимально. Тогда $-K_X \cdot C = 1/2$ или $-K_X \cdot C = 1/3$, так как $-6K_X \cdot C \in \mathbb{N}$. Тогда

$$C \in \{C_1^1, \dots, C_{35}^1, C_1^2, \dots, C_{14}^2\},$$

откуда сразу следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Предположим, что лог-пара $(X, \mu D)$ не лог-канонична. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Можно считать, что D неприводим (см. замечание 2.2).

ЛЕММА 4.7. *Выполнено неравенство $n \neq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая, как и в доказательстве леммы 3.2, получим требуемый результат.

Пусть P – точка многообразия V такая, что лог-пара $(X, \mu D)$ не является лог-каноничной в точке P , а F – схемный слой проекции ψ , который проходит через точку P .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Если $P \notin \text{Sing}(X)$, то слой F однозначно определен.

Отметим, что слой F приведен. Пусть S – общая поверхность в $|-K_X|$ такая, что $P \in S$.

ЛЕММА 4.9. *Предположим, что $\text{Sing}(X) \not\ni P \notin \text{Sing}(F)$. Тогда F приводим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F неприводим. Пусть $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – раздутие точки P . Тогда

$$\bar{D} \equiv \pi^*(D) - \text{mult}_P(D)E,$$

где E – π -исключительный дивизор, $\bar{D}$ – собственный прообраз дивизора D на $\bar{X}$.

Отметим, что $\text{mult}_P(D) > 1/\mu = 7n/6$. Положим

$$D|_S = mF + \Omega,$$

где m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривой F . Тогда

$$\frac{7n}{6} = F \cdot (mF + \Omega) = \frac{7m}{6} + F \cdot \Omega \geq \frac{7m}{6} + \text{mult}_P(\Omega) > \frac{7m}{6} + \frac{7n}{6} - m = \frac{7n}{6} + \frac{m}{6},$$

что является противоречием. Лемма доказана.

Лог-пара $(X, \lambda D)$ также не лог-канонична в точке P . В оставшейся части данного параграфа мы покажем, что последнее предположение также приводит к противоречию.

ЛЕММА 4.10. *Предположим, что $P \notin \text{Sing}(X)$. Тогда F приводим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что слой F неприводим. Тогда в силу леммы 4.9 выполняется $\text{mult}_P(F) \neq 1$, а из общности гиперповерхности X следует, что $\text{mult}_P(F) = 2$.

Легко видеть, что найдется поверхность $T \in |-K_X|$ такая, что $\text{mult}_P(T) \geq 2$. Положим

$$T \cdot D = \varepsilon F + \Delta,$$

где ε – неотрицательное рациональное число, а Δ – эффективный 1-цикл, носитель которого не содержит кривой F . Тогда $\Delta \not\subseteq \text{Supp}(S)$ и $\text{mult}_P(\Delta) > 2n - 2\varepsilon$. Имеем

$$\frac{7n}{6} = S \cdot T \cdot D = \frac{7\varepsilon}{6} + S \cdot \Delta > \frac{7\varepsilon}{6} + 2n - 2\varepsilon,$$

откуда следует, что $\varepsilon > n$. Последнее невозможно согласно замечанию 2.1. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.11. *Точка P является особой точкой гиперповерхности X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – неособая точка гиперповерхности X . Тогда слой F приводим согласно лемме 4.10, а из леммы 4.6 следует, что

$$F \in \{C_1^1 \cup Z_1^1, \dots, C_{35}^1 \cup Z_{35}^1, C_1^2 \cup Z_1^2, \dots, C_{14}^2 \cup Z_{14}^2\},$$

и без ограничения общности мы можем считать, что либо $F = C_1^1 \cup Z_1^1$, либо $F = C_1^2 \cup Z_1^2$.

Предположим, что $F = C_1^1 \cup Z_1^1$. Тогда

$$C_1^1 \cdot C_1^1 = -\frac{3}{2}, \quad C_1^1 \cdot Z_1^1 = 2, \quad Z_1^1 \cdot Z_1^1 = -\frac{4}{3}$$

на поверхности S . Положим

$$D|_S = m_1 C_1^1 + m_2 Z_1^1 + \Omega \equiv -nK_X|_S,$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривых C_1^1 и Z_1^1 . Тогда особенности лог-пары

$$(S, \lambda m_1 C_1^1 + \lambda m_2 Z_1^1 + \lambda \Omega)$$

не являются лог-каноническими в точке P по [1; теорема 7.5]. Покажем, что последнее приводит к противоречию с численной эквивалентностью

$$m_1 C_1^1 + m_2 Z_1^1 + \Omega \equiv -nK_X|_S,$$

учитывая, что $C_1^1 + Z_1^1 \equiv -K_X|_S$ на поверхности S . Лог-пара $(S, C_1^1 + Z_1^1)$ лог-канонична в точке P в силу общности выбора гиперповерхности X . Таким образом, мы можем считать, что $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$ согласно замечанию 2.2.

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = C_1^1 \cdot (m_2 Z_1^1 + \Omega) = 2m_2 + C_1^1 \cdot \Omega \geq 2m_2,$$

откуда следует, что $m_2 \leq n/4$. Имеем $P \notin C_1^1$, поскольку в противном случае

$$\frac{n}{2} = C_1^1 \cdot (m_2 Z_1^1 + \Omega) = 2m_2 + C_1^1 \cdot \Omega > 2m_2 + \frac{1}{\lambda} \geq n$$

согласно замечанию 2.4. Итак, показано, что $P \in Z_1^1$. Тогда

$$\frac{2n}{3} = Z_1^1 \cdot (m_2 Z_1^1 + \Omega) = -\frac{4m_2}{3} + Z_1^1 \cdot \Omega > -\frac{4m_2}{3} + \frac{1}{\lambda} \geq -\frac{4m_2}{3} + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_2 > n/4$, но $m_2 \leq n/4$. Противоречие.

Предположим, что $m_2 = 0$. Как и в предыдущем случае, из замечания 2.4 и равенства

$$\frac{2n}{3} = Z_1^1 \cdot (m_1 C_1^1 + \Omega) = 2m_1 + Z_1^1 \cdot \Omega$$

следует, что $m_1 \leq n/3$ и $P \notin Z_1^1$. Тогда $P \in C_1^1$ и

$$\frac{n}{2} = C_1^1 \cdot (m_1 C_1^1 + \Omega) = -\frac{3m_1}{2} + C_1^1 \cdot \Omega > -\frac{3m_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \geq -\frac{3m_1}{2+n}$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_1 > n/3$, но $m_1 \leq n/3$. Противоречие.

Итак, мы видим, что $F = C_1^2 \cup Z_1^2$. Тогда

$$C_1^2 \cdot C_1^2 = -\frac{4}{3}, \quad C_1^2 \cdot Z_1^2 = \frac{5}{3}, \quad Z_1^2 \cdot Z_1^2 = -\frac{5}{6}$$

на поверхности S . Как и в предыдущем случае, положим

$$D|_S = n_1 C_1^2 + n_2 Z_1^2 + \Delta \equiv -nK_X|_S,$$

где n_1 и n_2 – неотрицательные рациональные числа, а Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривых C_1^2 и Z_1^2 . Тогда особенности лог-пары

$$(S, \lambda n_1 C_1^2 + \lambda n_2 Z_1^2 + \lambda \Delta)$$

не являются лог-каноническими в точке P по [1; теорема 7.5]. Покажем, что последнее приводит к противоречию с численными эквивалентностями

$$n_1 C_1^2 + n_2 Z_1^2 + \Delta \equiv n(C_1^2 + Z_1^2) \equiv -nK_X|_S$$

на поверхности S . Мы можем считать, что $n_1 n_2 = 0$ согласно замечанию 2.2, поскольку особенности лог-пары $(S, C_1^2 + Z_1^2)$ являются лог-каноническими в точке P .

Предположим, что $n_1 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{3} = C_1^2 \cdot (n_2 Z_1^2 + \Delta) = \frac{5n_2}{3} + C_1^2 \cdot \Delta \geq \frac{5n_2}{3},$$

откуда следует, что $n_2 \leq n/5$. Имеем $P \notin C_1^2$, поскольку в противном случае

$$\frac{n}{3} = C_1^2 \cdot (n_2 Z_1^2 + \Delta) = \frac{5n_2}{3} + C_1^2 \cdot \Delta > \frac{5n_2}{3} + \frac{1}{\lambda} \geq n$$

согласно замечанию 2.4. Итак, показано, что $P \in Z_1^2$. Тогда

$$\frac{5n}{6} = Z_1^2 \cdot (n_2 Z_1^2 + \Delta) = -\frac{5n_2}{6} + Z_1^2 \cdot \Delta > -\frac{5n_2}{6} + \frac{1}{\lambda} \geq -\frac{5n_2}{6} + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $n_2 > n/5$, но $n_2 \leq n/5$. Противоречие.

Предположим, что $n_2 = 0$. Как и в предыдущем случае, из замечания 2.4 и равенства

$$\frac{5n}{6} = Z_1^1 \cdot (n_1 C_1^2 + \Delta) = \frac{5n_1}{3} + Z_1^2 \cdot \Delta$$

следует, что $n_1 \leq n/2$ и $P \notin Z_1^2$. Тогда $P \in C_1^2$ и

$$\frac{n}{3} = C_1^2 \cdot (n_1 C_1^2 + \Delta) = -\frac{4n_1}{3} + C_1^2 \cdot \Delta > -\frac{4n_1}{3} + \frac{1}{\lambda} \geq -\frac{4n_1}{3} + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $n_1 > n/2$, но $n_1 \leq n/2$. Противоречие. Лемма доказана.

Итак, показано, что либо $P = O_1$, либо $P = O_2$. Предположим, что $P = O_1$. Тогда

$$D_1 \equiv \alpha_1^*(D) - \mu_1 E_1,$$

где E_1 — α_1 -исключительный дивизор, D_1 — собственный прообраз дивизора D на многообразии U_1 , а μ_1 — рациональное число. Тогда $\mu_1 > n/2$ согласно замечанию 2.3. Имеем

$$K_{U_1} + \lambda D_1 + \left(\lambda \mu_1 - \frac{1}{2} \right) E_1 \equiv \alpha_1^*(K_X + \lambda D).$$

ЛЕММА 4.12. *Выполнено неравенство $\mu_1 \leq 7n/10$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка O_1 может быть задана уравнениями $x = y = z = w = 0$, а гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$t^2 w + t f_5(x, y, z, w) + f_7(x, y, z, w) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$, $\text{wt}(t) = 2$ и $\text{wt}(w) = 2$, а f_5 и f_7 — квази-однородные многочлены степени 5 и 7 соответственно. В выбранных координатах кривые $C_1^1, \dots, C_{35}^1$ высекаются на гиперповерхности X уравнениями $w = f_5(x, y, z, w) = f_7(x, y, z, w) = 0$.

Пусть R — поверхность на X , которая высекается уравнением $w = 0$, а $\bar{R}$ — собственный прообраз поверхности R на многообразии U_1 . Поверхность R неприводима и

$$\bar{R} \equiv \alpha_1^*(-3K_X) - \frac{5}{2} E_1,$$

но лог-пара $(X, \frac{1}{3}R)$ имеет лог-канонические особенности в точке O_1 по [1; лемма 8.12 и предложение 8.14], поскольку можно считать, что X достаточно общая.

Лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична в точке P , где $\lambda = 1/n$. Отсюда следует, что $R \neq D$ и

$$0 \leq -K_{U_1} \cdot \bar{R} \cdot D_1 = \frac{7n}{2} - 5\mu_1,$$

потому что $-K_{U_1}$ численно эффективен. Значит, выполнено неравенство $\mu_1 \leq 7n/10$. Лемма доказана.

В частности, существует точка $Q_1 \in E_1$ такая, что лог-пара

$$\left(U_1, \lambda D_1 + \left(\lambda \mu_1 - \frac{1}{2} \right) E_1 \right)$$

не лог-канонична в Q_1 . Пусть S_1 — общая поверхность в $|-K_{U_1}|$ такая, что $Q_1 \in \bar{S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.13. Собственный прообраз поверхности E_1 на многообразии W_1 является сечением эллиптического расслоения η . В частности, поверхность S_1 неособа в точке Q_1 .

Пусть $\bar{Z}_i^1$ — собственный прообраз кривой Z_i^1 на многообразии U_1 , где $i = 1, \dots, 35$.

ЛЕММА 4.14. Точка Q_1 не содержится в $\bigcup_{i=1}^{35} \bar{C}_i^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Q_1 \in \bigcup_{i=1}^{35} \bar{C}_i^1$. Можно считать, что $Q_1 \in \bar{C}_1^1$. Положим

$$D_1|_{S_1} + \left(\mu_1 - \frac{n}{2} \right) E_1|_{S_1} = m_1 \bar{C}_1^1 + m_2 \bar{Z}_1^1 + \Omega \equiv -nK_{U_1}|_{S_1},$$

где m_1 и m_2 — неотрицательные рациональные числа, а Ω — эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S_1 , носитель которого не содержит кривых $\bar{C}_1^1$ и $\bar{Z}_1^1$. Лог-пара

$$(S_1, \lambda m_1 \bar{C}_1^1 + \lambda m_2 \bar{Z}_1^1 + \lambda \Omega)$$

не лог-канонична в Q_1 по [1; теорема 7.5]. Покажем, что последнее невозможно.

Лог-пара $(S_1, \bar{C}_1^1 + \bar{Z}_1^1)$ лог-канонична в точке Q_1 . Из замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что либо $m_1 = 0$, либо $m_2 = 0$, поскольку $\bar{C}_1^1 + \bar{Z}_1^1 \equiv -K_{U_1}|_{S_1}$.

Из замечания 2.4 следует, что

$$0 = \bar{C}_1^1 \cdot (m_1 \bar{C}_1^1 + m_2 \bar{Z}_1^1 + \Omega) = 2m_2 + \bar{C}_1^1 \cdot \Omega > 2m_2 + n$$

в случае, когда выполнено равенство $m_1 = 0$. Итак, мы можем считать, что $m_2 = 0$. Тогда

$$\frac{2n}{3} = \bar{Z}_1^1 \cdot (m_1 \bar{C}_1^1 + \Omega) = 2m_1 + \bar{Z}_1^1 \cdot \Omega \geq 2m_1,$$

откуда следует, что $m_1 \leq n/3$. Мы видим, что

$$0 = \overline{C}_1^1 \cdot (m_1 \overline{C}_1^1 + \Omega) = -2m_1 + \overline{C}_1^1 \cdot \Omega > -2m_1 + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_1 > n/2$, но $m_1 \leq n/3$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\dot{C}_i^2$ и $\dot{Z}_i^2$ – собственные прообразы C_i^2 и Z_i^2 на U_1 соответственно, где $i = 1, \dots, 14$.

ЛЕММА 4.15. Точка Q_1 не содержится в $\bigcup_{i=1}^{14} \dot{Z}_i^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка Q_1 содержится в $\bigcup_{i=1}^{14} \dot{Z}_i^2$. Покажем, что сделанное предположение противоречиво. Можно считать, что $Q_1 \in \dot{Z}_1^2$. Тогда

$$\dot{C}_1^2 \cdot \dot{C}_1^2 = \dot{Z}_1^2 \cdot \dot{Z}_1^2 = -\frac{4}{3}, \quad \dot{C}_1^2 \cdot \dot{Z}_1^2 = \frac{5}{3}$$

на поверхности S_1 . Отметим, что $Q_1 \notin \dot{C}_1^2$. Положим

$$D_1|_{S_1} + \left(\mu_1 - \frac{n}{2}\right)E_1|_{S_1} = m_1 \dot{C}_1^2 + m_2 \dot{Z}_1^2 + \Omega \equiv -nK_{U_1}|_{S_1},$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S_1 , носитель которого не содержит кривых $\dot{C}_1^2$ и $\dot{Z}_1^2$.

Из [1; теорема 7.5] следует, что лог-пара

$$(S_1, \lambda m_1 \dot{C}_1^2 + \lambda m_2 \dot{Z}_1^2 + \lambda \Omega)$$

не лог-канонична в точке Q_1 . Покажем, что последнее утверждение невозможно.

Лог-пара $(S_1, \dot{C}_1^2 + \dot{Z}_1^2)$ лог-канонична в точке Q_1 . Из замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что либо $m_1 = 0$, либо $m_2 = 0$, поскольку $\dot{C}_1^2 + \dot{Z}_1^2 \equiv -K_{U_1}|_{S_1}$.

Предположим, что $m_2 = 0$. Тогда из замечания 2.4 следует, что

$$\frac{n}{3} = \dot{Z}_1^2 \cdot (m_1 \dot{C}_1^2 + \Omega) = \frac{5m_1}{3} + \dot{Z}_1^2 \cdot \Omega > \frac{5m_1}{3} + \frac{1}{\lambda} \geq n,$$

что является противоречием. Итак, мы можем считать, что $m_1 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{3} = \dot{C}_1^2 \cdot (m_2 \dot{Z}_1^2 + \Omega) = \frac{5m_2}{3} + \dot{C}_1^2 \cdot \Omega \geq \frac{5m_2}{3},$$

откуда следует, что $m_2 \leq n/5$. Мы видим, что

$$\frac{n}{3} = \dot{Z}_1^2 \cdot (m_2 \dot{Z}_1^2 + \Omega) = -\frac{4m_2}{3} + \dot{Z}_1^2 \cdot \Omega > -\frac{4m_2}{3} + \frac{1}{\lambda} \geq -\frac{4m_2}{3} + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_2 > n/2$, но $m_2 \leq n/5$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть F_1 – схемный слой рационального отображения $\psi \circ \alpha_1$, который проходит через точку Q_1 . Из лемм 4.6, 4.14 и 4.15 следует, что слой F_1 неприводим (см. замечание 4.13).

Кривая F_1 неособа в точке Q_1 согласно замечанию 4.13. Положим

$$D_1|_{S_1} + \left(\mu_1 - \frac{n}{2}\right)E_1|_{S_1} = mF_1 + \Omega,$$

где m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S_1 , носитель которого не содержит кривой F_1 . Тогда

$$\frac{2n}{3} = F_1 \cdot (mF_1 + \Omega) = \frac{2m}{3} + F_1 \cdot \Omega \geq \frac{2m}{3} + \text{mult}_{Q_1}(\Omega) > \frac{2m}{3} + n - m,$$

откуда $m > n$, что невозможно по замечанию 2.1. Предположение $P = O_1$ противоречиво.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.16. Показано, что $P = O_2$.

Пусть D_2 – собственный прообраз дивизора D на многообразии U_2 . Тогда

$$D_2 \equiv \alpha_2^*(D) - \mu_2 E_2,$$

где E_2 – α_2 -исключительный дивизор, а μ_2 – рациональное число. Имеем

$$K_{U_2} + \lambda D_2 + \left(\lambda\mu - \frac{1}{3}\right)E_2 \equiv \alpha_2^*(K_X + \lambda D),$$

где $\lambda\mu - 1/3 > 0$ согласно замечанию 2.3.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2x + wf_4(x, y, z, t) + f_7(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$, $\text{wt}(t) = 2$ и $\text{wt}(w) = 3$, а f_4 и f_7 – квазиоднородные многочлены степени 4 и 7 соответственно. Тогда O_2 задается уравнениями $x = y = z = t = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.17. Кривые $C_1^2, \dots, C_{14}^2$ пересекаются на X уравнениями $x = f_4 = f_7 = 0$.

Пусть R – поверхность на X , которая высекается уравнением $x = 0$, а $\bar{R}$ – собственный прообраз поверхности R на U_2 . Тогда R неприводима, выполнено соотношение

$$\bar{R} \equiv \alpha_2^*(-K_X) - \frac{4}{3}E_2,$$

а поверхность $\bar{R}$ неособа в окрестности дивизора E_2 в силу общности гиперповерхности X .

ЛЕММА 4.18. *Выполнено неравенство $\mu_2 \leq 7n/12$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.7 следует, что $R \neq D$. Тогда

$$0 \leq -K_{U_2} \cdot \bar{R} \cdot D_2 = \frac{7n}{6} - 2\mu_2,$$

потому что $-K_{U_2}$ численно эффективен. Значит, выполнено неравенство $\mu_2 \leq 7n/12$. Лемма доказана.

В частности, существует точка $Q_2 \in E_2$ такая, что лог-пара

$$\left(U_2, \lambda D_2 + \left(\lambda \mu_2 - \frac{1}{3} \right) E_2 \right)$$

не лог-канонична в Q_2 . Пусть S_2 – общая поверхность в $|-K_{U_2}|$ такая, что $Q_2 \in S_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.19. Отображение ψ задается вложением градуированных алгебр

$$\mathbb{C}[x, y, z] \subset \mathbb{C}[x, y, z, t, w],$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$, $\text{wt}(t) = 2$, $\text{wt}(w) = 3$, а E_2 и $\bar{R}$ стягиваются отображением

$$\psi \circ \alpha_2: U_2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

на прямую в $\mathbb{P}^2 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z])$, заданную уравнением $x = 0$.

Пусть $\bar{Z}_i^2$ – собственный прообраз кривой Z_i^2 на многообразии U_2 , где $i = 1, \dots, 14$.

ЛЕММА 4.20. Точка Q_2 не содержится в $\bigcup_{i=1}^{14} \bar{C}_i^2$ и точка Q_2 не содержится в $\bigcup_{i=1}^{14} \bar{Z}_i^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q_2 \in \bigcup_{i=1}^{14} \bar{C}_i^2$ или $Q_2 \in \bigcup_{i=1}^{14} \bar{Z}_i^2$. Без ограничения общности можно считать, что $Q_2 \in \bar{C}_1^2 \cup \bar{Z}_1^2$. Поверхность $\bar{R}$ содержит кривые $\bar{C}_1^2$ и $\bar{Z}_1^2$. Положим

$$D_1|_{\bar{R}} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3} \right) E_2|_{\bar{R}} = m_1 \bar{C}_1^2 + m_2 \bar{Z}_1^2 + \Omega \equiv -nK_{U_2}|_{\bar{R}},$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\bar{R}$, носитель которого не содержит кривых $\bar{C}_1^2$ и $\bar{Z}_1^2$. Лог-пара

$$(\bar{R}, \lambda m_1 \bar{C}_1^2 + \lambda m_2 \bar{Z}_1^2 + \lambda \Omega)$$

не лог-канонична в Q_2 по [1; теорема 7.5]. Покажем, что последнее невозможно.

Лог-пара $(\bar{R}, \bar{C}_1^2 + \bar{Z}_1^2)$ лог-канонична в точке Q_2 и $\bar{C}_1^2 + \bar{Z}_1^2 \equiv -K_{U_2}|_{\bar{R}}$, откуда следует, что мы можем считать, что $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$ (см. замечание 2.2).

На поверхности $\bar{R}$ выполнены равенства

$$\bar{C}_1^2 \cdot \bar{C}_1^2 = -1, \quad \bar{Z}_1^2 \cdot \bar{C}_1^2 = 1, \quad \bar{Z}_1^2 \cdot \bar{Z}_1^2 = -\frac{1}{2}.$$

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда $m_2 = 0$, поскольку

$$0 = \bar{C}_1^2 \cdot (m_2 \bar{Z}_1^2 + \Omega) = m_2 + \bar{C}_1^2 \cdot \Omega \geq m_2,$$

а из замечания 2.4 следует, что $0 = \bar{C}_1^2 \cdot \Omega > n$, если $Q_2 \in \bar{C}_1^2$. Мы видим, что $Q_2 \in \bar{Z}_1^2$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \bar{Z}_1^2 \cdot \Omega > \frac{1}{\lambda} = n$$

согласно замечанию 2.4. Из полученного противоречия следует, что $m_1 \neq 0$.

Итак, мы можем считать, что $m_2 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \bar{Z}_1^2 \cdot (m_1 \bar{C}_1^2 + \Omega) = m_1 + \bar{Z}_1^1 \cdot \Omega \geq m_1,$$

откуда следует, что $m_1 \leq n/2$. Из замечания 2.4 следует, что

$$\frac{n}{2} = \bar{Z}_1^2 \cdot (m_1 \bar{C}_1^2 + \Omega) = m_1 + \bar{Z}_1^1 \cdot \Omega > m_1 + \frac{1}{\lambda} \geq n$$

в случае, когда $Q_2 \in \bar{Z}_1^2$, откуда следует, что $Q_2 \in \bar{C}_1^2$. Тогда

$$0 = \bar{C}_1^2 \cdot (m_1 \bar{C}_1^1 + \Omega) = -m_1 + \bar{C}_1^1 \cdot \Omega > -m_1 + n$$

согласно замечанию 2.4. Мы видим, что $m_1 > n$, но $m_1 \leq n/2$. Противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что поверхность $\bar{R}$ не содержит особую точку поверхности E_2 .

ЛЕММА 4.21. *Поверхность $\bar{R}$ не содержит точку Q_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Q_2 \in \bar{R}$. Тогда из леммы 4.20 следует, что

$$S_2|_{\bar{R}} = Z \equiv -K_{U_2}|_{\bar{R}},$$

где Z – неособая кривая такая, что $Q_2 \in Z$. Тогда $Z \cdot Z = 1/2$ на поверхности $\bar{R}$. Положим

$$D_1|_{\bar{R}} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3}\right)E_2|_{\bar{R}} = mZ + \Omega \equiv -nK_{U_2}|_{\bar{R}},$$

где m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\bar{R}$, носитель которого не содержит кривой Z . Тогда лог-пара

$$(\bar{R}, \lambda mZ + \lambda \Omega)$$

не лог-канонична в Q_2 по [1; теорема 7.5]. Покажем, что последнее невозможно.

Лог-пара $(\bar{R}, Z)$ лог-канонична в точке Q_2 . Таким образом, из замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что $m = 0$. Тогда $n/2 = Z \cdot \Omega > n$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть O_3 – особая точка поверхности $E_2 \cong \mathbb{P}(1, 1, 2)$, а $\dot{C}_i^1$ и $\dot{Z}_i^1$ – собственные прообразы кривых C_i^2 и Z_i^2 на многообразии U_2 соответственно, где $i = 1, \dots, 14$. Тогда

$$\dot{Z}_1^2 \cap E_2 = \dots = \dot{Z}_{14}^2 \cap E_2 = O_3, \quad \dot{C}_1^2 \cap E_2 = \dots = \dot{C}_{14}^2 \cap E_2 = \emptyset.$$

ЛЕММА 4.22. *Выполнено равенство $Q_2 = O_3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Q_2 \neq O_3$. Пусть F_2 – схемный слой рационального отображения $\psi \circ \alpha_2$, который проходит через точку Q_2 . Тогда либо

$$F_2 = L + \bar{C}_i^2 + \bar{Z}_i^2$$

для некоторого $i = 1, \dots, 14$, либо $F_1 = L + Z$, где L – неприводимая кривая, содержащаяся в дивизоре E_2 , а Z – неприводимая кривая, не содержащаяся в дивизоре E_2 .

Предположим, что $F_1 = L + Z$. Тогда на поверхности S_2 выполнены равенства

$$L \cdot L = Z \cdot Z = -\frac{3}{2}, \quad L \cdot Z = 2,$$

а из леммы 4.21 следует, что $Q_2 \in L$ и $Q_2 \notin Z$, так как $Z = \bar{R} \cap S_2$. Положим

$$D_2|_{S_2} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3}\right)E_2|_{S_2} = m_1L + m_2Z + \Omega \equiv -nK_{U_2}|_{S_2},$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S_2 , носитель которого не содержит кривых L и Z .

Из [1; теорема 7.5] следует, что лог-пара

$$(S_2, \lambda m_1L + \lambda m_2Z + \lambda\Omega)$$

не лог-канонична в точке Q_2 . Покажем, что последнее утверждение невозможно.

Лог-пара $(S_2, L + Z)$ лог-канонична в Q_2 . На поверхности S_2 выполнена эквивалентность

$$L + Z \equiv -K_{U_2}|_{S_2},$$

откуда следует, что мы можем считать, что либо $m_1 = 0$, либо $m_2 = 0$ (см. замечание 2.2).

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда из замечания 2.4 следует, что

$$\frac{n}{2} = L \cdot (m_2Z + \Omega) = 2m_2 + L \cdot \Omega > 2m_2 + \frac{1}{\lambda} \geq n,$$

что является противоречием. Итак, мы можем считать, что $m_2 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = Z \cdot (m_1L + \Omega) = 2m_1 + Z \cdot \Omega \geq 2m_1,$$

откуда следует, что $m_1 \leq n/4$. Мы видим, что

$$\frac{n}{2} = L \cdot (m_1L + \Omega) = -\frac{3m_1}{2} + L \cdot \Omega > -\frac{3m_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \geq -\frac{3m_1}{2} + n$$

согласно замечанию 2.4. Выполнено неравенство $m_1 > n/3$, но $m_1 \leq n/4$. Противоречие.

Показано, что $F_2 = L + \bar{C}_i^2 + \bar{Z}_i^2$ для некоторого $i = 1, \dots, 14$, где L – неприводимая кривая, содержащаяся в исключительном дивизоре E_2 такая, что

$$\bar{R}|_{S_2} = L + \bar{C}_i^2 + \bar{Z}_i^2 \equiv -K_{U_2}|_{S_2}.$$

Мы можем считать, что $F_2 = L + \bar{C}_1^2 + \bar{Z}_1^2$. Тогда

$$L \cdot \bar{C}_1^2 = L \cdot \bar{Z}_1^2 = \bar{C}_1^2 \cdot \bar{Z}_1^2 = 1, \quad \bar{C}_1^2 \cdot \bar{C}_1^2 = -2, \quad \bar{Z}_1^2 \cdot \bar{Z}_1^2 = L \cdot L = -\frac{3}{2}$$

на поверхности S_2 . Из леммы 4.21 следует, что $Q_2 \in L$ и $\bar{C}_1^2 \not\ni Q_2 \notin \bar{Z}_1^2$. Положим

$$D_2|_{S_2} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3}\right)E_2|_{S_2} = m_1L + m_2\bar{C}_1^2 + m_3\bar{Z}_1^2 + \Omega \equiv -nK_{U_2}|_{S_2},$$

где m_1, m_2 и m_3 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S_2 , носитель которого не содержит кривых $L, \bar{C}_1^2$ и $\bar{Z}_1^2$.

Из [1; теорема 7.5] следует, что лог-пара

$$(S_2, \lambda m_1 L + \lambda m_2 \bar{C}_1^2 + \lambda \bar{Z}_1^2 + \lambda \Omega)$$

не лог-канонична в точке Q_2 . Покажем, что последнее утверждение противоречиво.

Лог-пара $(S_2, L + \bar{C}_1^2 + \bar{Z}_1^2)$ лог-канонична в точке Q_2 . Из эквивалентности

$$L + \bar{C}_1^2 + \bar{Z}_1^2 \equiv -K_{U_2}|_{S_2}$$

и замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что $m_1 m_2 m_3 = 0$.

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда из замечания 2.4 следует, что

$$\frac{n}{2} = L \cdot (m_2 \bar{C}_1^2 + m_3 \bar{Z}_1^2 + \Omega) = m_2 + m_3 + L \cdot \Omega > m_2 + m_3 + \frac{1}{\lambda} \geq n,$$

что является противоречием. Итак, мы можем считать, что $m_1 \neq 0$.

Предположим, что $m_2 = 0$. Тогда

$$0 = \bar{C}_1^2 \cdot (m_1 L + m_3 \bar{Z}_1^2 + \Omega) = m_1 + m_3 + \bar{C}_1^2 \cdot \Omega \geq m_1 + m_3,$$

откуда следует, что $m_1 = m_3 = 0$. Но мы показали, что $m_1 \neq 0$. Противоречие.

Итак, показано что $m_1 \neq 0$ и $m_2 \neq 0$, откуда следует, что $m_3 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \bar{Z}_1^2 \cdot (m_1 L + m_2 \bar{C}_1^2 + \Omega) = m_1 + m_2 + \bar{Z}_1^2 \cdot \Omega \geq m_1 + m_2,$$

поскольку $\bar{Z}_1^2 \cdot \Omega \geq 0$. С другой стороны, из замечания 2.4 следует, что

$$\frac{n}{2} = L \cdot (m_1 L + m_2 \bar{C}_1^2 + \Omega) = -\frac{3m_1}{2} + m_2 + L \cdot \Omega > -\frac{3m_1}{2} + m_2 + n,$$

поскольку $m_1 \leq n/2$. Из полученных неравенств еще не следует противоречие, но

$$0 = \bar{C}_1^2 \cdot (m_1 L + m_2 \bar{C}_1^2 + \Omega) = m_1 - 2m_2 + \bar{C}_1^2 \cdot \Omega \geq m_1 - 2m_2,$$

откуда следует, что $m_2 \geq m_1/2$. Полученные неравенства несовместны. Лемма доказана.

Показано, что $Q_2 = O_3$. Пусть $\check{D}$ – собственный прообраз дивизора D на Y_2 . Тогда

$$\check{D} \equiv (\alpha_2 \circ \beta_2)^*(D) - \mu_2 \alpha_2^*(E_2) - \varepsilon G,$$

где G – β_2 -исключительный дивизор, а ε – рациональное число. Тогда

$$K_{Y_2} + \lambda \check{D} + \left(\lambda \mu_2 - \frac{n}{3} \right) \check{E}_2 + \left(\lambda \varepsilon + \frac{\lambda \mu_2}{2} - \frac{2}{3} \right) G \equiv (\alpha_2 \circ \beta_2)^*(K_X + \lambda D) \equiv 0,$$

где $\check{E}_2$ – собственный прообраз поверхности E_2 на многообразии Y . Тогда

$$\varepsilon + \frac{\mu_2}{2} > \frac{2n}{3}$$

согласно замечанию 2.3. Теперь ограничим число $\varepsilon + \mu_2/2$ сверху.

ЛЕММА 4.23. *Выполнено неравенство $\varepsilon + \mu_2/2 \leq 7n/6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – достаточно общий слой отображения $\psi \circ \alpha_2 \circ \beta_2$. Тогда

$$0 \leq \check{D} \cdot F = \left((\alpha_2 \circ \beta_2)^*(D) - \mu_2 \check{E}_2 - \left(\varepsilon + \frac{\mu_2}{2} \right) G \right) \cdot F = \frac{7n}{6} - \varepsilon - \frac{\mu_2}{2},$$

откуда следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

Таким образом, существует точка $Q \in G$ такая, что лог-пара

$$\left(Y_2, \lambda \check{D} + \left(\lambda \mu_2 - \frac{n}{3} \right) \check{E}_2 + \left(\lambda \varepsilon + \frac{\lambda \mu_2}{2} - \frac{2}{3} \right) G \right)$$

не лог-канонична в точке Q . Пусть $\check{S}$ – общая поверхность в $|-K_{Y_2}|$ такая, что $Q \in \check{S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.24. Поверхность $\check{S}$ неособа в точке Q .

Пусть $\check{F}$ – слой отображения $\psi \circ \alpha_2 \circ \beta_2$, содержащий точку Q . Тогда $Q \notin \text{Sing}(\check{F})$.

ЛЕММА 4.25. *Слой $\check{F}$ приводим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\check{F}$ неприводим. Положим

$$\overline{D}|_{\check{S}} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3} \right) \check{E}_2|_{\check{S}} + \left(\varepsilon + \frac{\mu_2}{2} - \frac{2n}{3} \right) G|_{\check{S}} = m\check{F} + \Omega \equiv -nK_{Y_2}|_{\check{S}},$$

где m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\check{S}$, носитель которого не содержит кривой $\check{F}$.

Из [1; теоремы 7.5] следует, что лог-пара

$$(\check{S}, \lambda m\check{F} + \lambda\Omega)$$

не лог-канонична в точке Q_2 . Покажем, что последнее невозможно.

Заметим, что выполнено неравенство $m \leq n$, поскольку

$$m\check{F} + \Omega \equiv n\check{F} \equiv -nK_{Y_2}|_{\check{S}}$$

на поверхности $\check{S}$. Из замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что $m = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \check{F} \cdot \Omega > \frac{1}{\lambda} = n$$

согласно замечанию 2.4. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\check{C}_i^1$ и $\check{Z}_i^1$ – собственные прообразы C_i^1 и Z_i^1 на Y_2 соответственно, где $i = 1, \dots, 35$.

ЛЕММА 4.26. *Слой $\check{F}$ не содержит ни одной кривой среди кривых*

$$\check{C}_1^1, \dots, \check{C}_{35}^1, \check{Z}_1^1, \dots, \check{Z}_{35}^1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что носитель кривой $\check{F}$ содержит одну из перечисленных выше кривых. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Можно считать, что $\check{F}$ содержит $\check{C}_1^1$ или $\check{Z}_1^1$. Тогда $\check{F} = \check{C}_1^1 + \check{Z}_1^1$. Выполнены равенства

$$\check{C}_1^1 \cdot \check{Z}_1^2 = 2, \quad \check{C}_1^1 \cdot \check{C}_1^1 = -\frac{3}{2}, \quad \check{Z}_1^1 \cdot \check{Z}_1^1 = -2$$

на поверхности $\check{S}$. Имеем $\check{C}_1^1 \not\equiv Q \in \check{Z}_1^1$. Как обычно, положим

$$\check{D}|_{\check{S}} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3}\right)\check{E}_2|_{\check{S}} + \left(\varepsilon + \frac{\mu_2}{2} - \frac{2n}{3}\right)G|_{\check{S}} = m_1\check{C}_1^1 + m_2\check{Z}_1^1 + \Omega \equiv n\check{C}_1^1 + n\check{Z}_1^1,$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\check{S}$, носитель которого не содержит кривых $\check{C}_1^1$ и $\check{Z}_1^1$.

Из [1; теорема 7.5] следует, что лог-пара

$$(\check{S}, \lambda m_1\check{C}_1^1 + \lambda m_2\check{Z}_1^1 + \lambda\Omega)$$

не лог-канонична в точке Q . Покажем, что последнее утверждение противоречиво.

Особенности лог-пары $(\check{S}, \check{C}_1^1 + \check{Z}_1^1)$ являются лог-каноническими в точке Q , откуда следует, что мы можем считать, что $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$ согласно замечанию 2.2.

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \check{C}_1^1 \cdot (m_2\check{Z}_1^1 + \Omega) = 2m_2 + \check{C}_1^1 \cdot \Omega \geq 2m_2,$$

откуда следует, что $m_2 \leq n/2$. Теперь из замечания 2.4 следует, что

$$0 = \check{Z}_1^1 \cdot (m_2\check{Z}_1^1 + \Omega) = -2m_2 + \check{Z}_1^1 \cdot \Omega > -2m_2 + n,$$

откуда следует, что $m_2 > n/2$. Последнее противоречит неравенству $m_2 \leq n/2$.

Итак, для завершения доказательства мы можем считать, что $m_1 \neq 0$ и $m_2 = 0$. Тогда

$$0 = \check{Z}_1^1 \cdot (m_1\check{C}_1^1 + \Omega) = 2m_1 + \check{Z}_1^1 \cdot \Omega \geq 2m_1,$$

что противоречит неравенству $m_1 \neq 0$. Лемма доказана.

Пусть $\check{C}_i^2$ и $\check{Z}_i^2$ – собственные прообразы C_i^2 и Z_i^2 на Y_2 соответственно, где $i = 1, \dots, 14$.

ЛЕММА 4.27. *Слой $\check{F}$ не содержит ни одной кривой среди кривых*

$$\check{C}_1^2, \dots, \check{C}_{14}^2, \check{Z}_1^2, \dots, \check{Z}_{14}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что носитель кривой $\check{F}$ содержит одну из перечисленных выше кривых. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Можно считать, что $\check{F}$ содержит $\check{C}_1^2$ или $\check{Z}_1^2$. Тогда

$$\check{F} = \check{L} + \check{C}_1^2 + \check{Z}_1^2,$$

где $\check{L}$ – неприводимая кривая такая, что $\check{L} \subset \check{E}_2$. Тогда

$$\check{L} \cdot \check{C}_1^2 = \check{L} \cdot \check{Z}_1^2 = \check{C}_1^2 \cdot \check{Z}_1^2 = 1, \quad \check{C}_1^2 \cdot \check{C}_1^2 = \check{L} \cdot \check{L} = -2, \quad \check{Z}_1^2 \cdot \check{Z}_1^2 = -\frac{3}{2}$$

на поверхности $\check{S}$. Мы знаем, что $Q \in \check{L}$ и $\check{C}_1^2 \not\equiv Q \notin \check{Z}_1^2$. Положим

$$\begin{aligned} \check{D}|_{\check{S}} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3}\right)\check{E}_2|_{\check{S}} + \left(\varepsilon + \frac{\mu_2}{2} - \frac{2n}{3}\right)G|_{\check{S}} \\ = m_1\check{L} + m_2\check{C}_1^2 + m_3\check{Z}_1^2 + \Omega \equiv n\check{L} + n\check{C}_1^2 + n\check{Z}_1^2, \end{aligned}$$

где m_1, m_2 и m_3 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\check{S}$, носитель которого не содержит кривых $\check{L}, \check{C}_1^2$ и $\check{Z}_1^2$.

Из [1; теорема 7.5] следует, что лог-пара

$$(\check{S}, \lambda m_1\check{L} + \lambda m_2\check{C}_1^2 + \lambda m_3\check{Z}_1^2 + \lambda\Omega)$$

не лог-канонична в точке Q . Покажем, что последнее утверждение противоречиво.

Лог-пара $(\check{S}, \check{L} + \check{C}_1^2 + \check{Z}_1^2)$ лог-канонична в точке Q , откуда следует, что мы можем считать, что либо $m_1 = 0$, либо $m_2 = 0$, либо $m_3 = 0$ (см. замечание 2.2).

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда из замечания 2.4 следует, что

$$0 = \check{L} \cdot (m_2\check{C}_1^2 + m_3\check{Z}_1^2 + \Omega) = m_2 + m_3 + \check{L} \cdot \Omega > m_2 + m_3 + n,$$

что является противоречием. Итак, мы можем считать, что $m_1 \neq 0$.

Предположим, что $m_2 = 0$. Тогда

$$0 = \check{C}_1^2 \cdot (m_1\check{L} + m_3\check{Z}_1^2 + \Omega) = m_1 + m_3 + \check{C}_1^2 \cdot \Omega \geq m_1 + m_3,$$

откуда следует, что $m_1 = m_3 = 0$, но выполнено неравенство $m_1 \neq 0$. Противоречие.

Итак, показано что $m_1 \neq 0$ и $m_2 \neq 0$. Мы можем считать, что $m_3 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \check{Z}_1^2 \cdot (m_1\check{L} + m_2\check{C}_1^2 + \Omega) = m_1 + m_2 + \check{Z}_1^2 \cdot \Omega \geq m_1 + m_2,$$

откуда следует, в частности, что $m_1 \leq n/2$. Теперь из замечания 2.4 следует, что

$$0 = \check{L} \cdot (m_1\check{L} + m_2\check{C}_1^2 + \Omega) = -2m_1 + m_2 + \check{L} \cdot \Omega > -2m_1 + m_2 + n,$$

откуда следует, что $m_1 > n/2$. Последнее противоречит неравенству $m_1 \leq n/2$. Лемма доказана.

Из лемм 4.25–4.27 следует, что $\check{F} = \check{L} + \check{Z}$, где $\check{L}$ и $\check{Z}$ – неприводимые кривые такие, что $\check{L} \subset \check{E}_2$ и $\check{Z} \not\subset \check{E}_2$. Отметим, что $\check{Z} \not\equiv Q \in \check{L}$, поскольку $\check{Z} \cap G = \emptyset$. Тогда

$$\check{L} \cdot \check{Z} = 2, \quad \check{Z} \cdot \check{Z} = -\frac{3}{2}, \quad \check{L} \cdot \check{L} = -2$$

на поверхности $\check{S}$. Как обычно, положим

$$\check{D}|_{\check{S}} + \left(\mu_2 - \frac{n}{3}\right)\check{E}_2|_{\check{S}} + \left(\varepsilon + \frac{\mu_2}{2} - \frac{2n}{3}\right)G|_{\check{S}} = m_1\check{L} + m_2\check{Z} + \Omega \equiv n\check{L} + n\check{Z},$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\check{S}$, носитель которого не содержит кривых $\check{L}$ и $\check{Z}$.

Из [1; теорема 7.5] следует, что лог-пара

$$(\check{S}, \lambda m_1\check{L} + \lambda m_2\check{Z} + \lambda\Omega)$$

не лог-канонична в точке Q . Покажем, что последнее утверждение противоречиво.

Из замечания 2.2 следует, что мы можем считать, что $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$, поскольку особенности лог-пары $(\check{S}, \check{L} + \check{Z})$ являются лог-каноническими в точке Q .

Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда из замечания 2.4 следует, что

$$0 = \check{L} \cdot (m_2\check{Z} + \Omega) = 2m_2 + \check{L} \cdot \Omega > 2m_2 + n,$$

что является противоречием. Итак, мы можем считать, что $m_2 = 0$. Тогда

$$\frac{n}{2} = \check{Z} \cdot (m_1\check{L} + \Omega) = 2m_1 + \check{Z} \cdot \Omega \geq 2m_1,$$

откуда следует, что $m_1 \leq n/2$. Теперь из замечания 2.4 следует, что

$$0 = \check{L} \cdot (m_1\check{L} + \Omega) = -2m_1 + \check{L} \cdot \Omega > -2m_1 + n,$$

откуда следует, что $m_1 > n/2$. Противоречие. Утверждение теоремы 1.44 доказано.

Список литературы

- [1] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry*, Proceedings of the Summer Research Institute (Santa Cruz, CA, USA, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
- [2] В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log flips”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 95–202.
- [3] G. Tian, “On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$ ”, *Invent. Math.*, **89**:2 (1987), 225–246.
- [4] И. А. Чельцов, “Лог-канонические пороги на гиперповерхностях”, *Матем. сб.*, **192**:8 (2001), 155–172; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Log canonical thresholds on hypersurfaces”, *Sb. Math.*, **192**:8 (2001), 1241–1257.
- [5] И. А. Чельцов, “Двойные пространства с особенностями”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 131–148; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Double spaces with isolated singularities”, *Sb. Math.*, **199**:2 (2008), 291–306.
- [6] J.-M. Hwang, “Log canonical thresholds of divisors on Fano manifolds of Picard number 1”, *Compos. Math.*, **143**:1 (2007), 89–94.
- [7] А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano direct products”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1225–1255.

- [8] I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Log canonical thresholds of certain Fano hypersurfaces*, <http://arxiv.org/abs/0706.0751>.
- [9] I. Cheltsov, *Log canonical thresholds of del Pezzo surfaces*, [arXiv: math/0703175](https://arxiv.org/abs/math/0703175).
- [10] I. Cheltsov, *On singular cubic surfaces*, [arXiv: abs/0706.2666](https://arxiv.org/abs/0706.2666).
- [11] G. Tian, “On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds”, *J. Differential Geom.*, **32**:1 (1990), 99–130.
- [12] A. M. Nadel, “Multiplier ideal sheaves and Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature”, *Ann. of Math.* (2), **132**:3 (1990), 549–596.
- [13] J.-P. Demailly, J. Kollár, “Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **34**:4 (2001), 525–556.
- [14] T. Aubin, “Équations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes”, *Bull. Sci. Math.* (2), **102**:1 (1978), 63–95.
- [15] Sh.-T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation, I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.
- [16] Sh.-T. Yau, “Review on Kähler–Einstein metrics in algebraic geometry”, *Proceedings of the Hirzebruch 65 conference on algebraic geometry* (Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel, 1993), Israel Math. Conf. Proc., **9**, Ramat Gan, Bar-Ilan Univ., 1996, 433–443.
- [17] Y. Matsushima, “Sur la structure du groupe d’homéomorphismes analytiques d’une certaine variété kaehlérienne”, *Nagoya Math. J.*, **11** (1957), 145–150.
- [18] M. Lübke, “Stability of Einstein–Hermitian vector bundles”, *Manuscripta Math.*, **42**:2–3 (1983), 245–257.
- [19] A. Futaki, “An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics”, *Invent. Math.*, **73**:3 (1983), 437–443.
- [20] A. Steffens, “On the stability of the tangent bundle of Fano manifolds”, *Math. Ann.*, **304**:1 (1996), 635–643.
- [21] G. Tian, “Kähler–Einstein metrics with positive scalar curvature”, *Invent. Math.*, **130**:1 (1997), 1–37.
- [22] S. K. Donaldson, *A note on the α -invariant of the Mukai–Umemura 3-fold*, [arXiv: abs/0711.4357](https://arxiv.org/abs/0711.4357).
- [23] T. Mabuchi, “Einstein–Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties”, *Osaka J. Math.*, **24**:4 (1987), 705–737.
- [24] V. V. Batyrev, E. N. Selivanova, “Einstein–Kähler metrics on symmetric toric Fano manifolds”, *J. Reine Angew. Math.*, **512** (1999), 225–236.
- [25] X.-J. Wang, X. Zhu, “Kähler–Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class”, *Adv. Math.*, **188**:1 (2004), 87–103.
- [26] B. Nill, “Complete toric varieties with reductive automorphism group”, *Math. Z.*, **252**:4 (2006), 767–786.
- [27] G. Tian, “On Calabi’s conjecture for complex surfaces with positive first Chern class”, *Invent. Math.*, **101**:1 (1990), 101–172.
- [28] C. Arezzo, A. Ghigi, G. P. Pirola, “Symmetries, quotients and Kähler–Einstein metrics”, *J. Reine Angew. Math.*, **591** (2006), 177–200.
- [29] W. Ding, G. Tian, “Kähler–Einstein metrics and the generalized Futaki invariant”, *Invent. Math.*, **110**:1 (1992), 315–335.
- [30] J. M. Johnson, J. Kollár, “Kähler–Einstein metrics on log del Pezzo surfaces in weighted projective 3-spaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **51**:1 (2001), 69–79.
- [31] Ch. P. Boyer, K. Galicki, M. Nakamaye, “Sasakian–Einstein structures on $9\#(S^2 \times S^3)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**:8 (2002), 2983–2996.
- [32] C. Araujo, “Kähler–Einstein metrics for some quasi-smooth log del Pezzo surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**:11 (2002), 4303–4312.

- [33] J. M. Johnson, J. Kollár, “Fano hypersurfaces in weighted projective 4-spaces”, *Experiment. Math.*, **10**:1 (2001), 151–158.
- [34] J. Park, “Birational maps of del Pezzo fibrations”, *J. Reine Angew. Math.*, **538** (2001), 213–221.
- [35] A. Corti, “Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes”, *Ann. of Math.* (2), **144**:3 (1996), 641–683.
- [36] A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.
- [37] И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Birationally rigid Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **60**:5 (2005), 875–965.
- [38] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные кватрики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86**(128):1(9) (1971), 140–166; англ. пер.: V. A. Iskovskih, Ju. I. Manin, “Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 141–166.
- [39] A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
- [40] В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 815–868.
- [41] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:1 (1988), 229–239; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of a double space and double quadric”, *Math. USSR-Izv.*, **32**:1 (1988), 233–243.
- [42] V. A. Iskovskih, A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of multidimensional algebraic manifolds”, *J. Math. Sci.*, **82**:4 (1996), 3528–3613.
- [43] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 135–160; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano hypersurfaces with isolated singularities”, *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 445–471.
- [44] I. Cheltsov, “Fano varieties with many selfmaps”, *Adv. Math.*, **217**:1 (2008), 97–124.
- [45] A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 101–173.
- [46] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, “Fano 3-fold hypersurfaces”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 175–258.
- [47] I. Cheltsov, J. Park, “Weighted Fano threefold hypersurfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **600** (2006), 81–116.
- [48] И. А. Чельцов, “Лог-канонические пороги и метрики Кэлера–Эйнштейна на трехмерных гиперповерхностях Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати).
- [49] И. А. Чельцов, “Эллиптические структуры на трехмерных взвешенных гиперповерхностях Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:4 (2007), 115–224; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Elliptic structures on weighted three-dimensional Fano hypersurfaces”, *Izv. Math.*, **71**:4 (2007), 765–862.

И. А. Чельцов (I. A. Cheltsov)

University of Edinburgh, UK

E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию

07.02.2008 и 04.04.2008