Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Лабыч, А. П. Старовойтов, Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 7, 107–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:34:01

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

Ю. А. Лабыч, А. П. Старовойтов

Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье

Установлены достаточные условия регулярности убывания коэффициентов ряда Фурье $f(x) = a_0/2 + \sum a_n \cos kx$, при которых тригонометрические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(x; f)$ приближают функцию f в равномерной норме со скоростью, асимптотически равной наилучшей. Дано приложение полученных результатов к задачам, связанным с нахождением точных констант рациональной аппроксимации.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: ряд Фурье, тригонометрические аппроксимации Паде, аппроксимации Паде–Чебышёва, наилучшие рациональные приближения.

§ 1. Введение

Будем рассматривать вещественные непрерывные 2π -периодические функции f , разлагающиеся в сходящийся ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.1)$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k – действительные числа. Для удобства ряд Фурье (1.1) запишем в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (1.2)$$

полагая $c_k = (a_k - ib_k)/2$, $c_0 = a_0/2$, $c_{-k} = \bar{c}_k$.

Последовательность $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ содержит всю информацию об f , поэтому принципиально возможным является описание различных свойств этой функции непосредственно в терминах, определяемых через коэффициенты ее рядов Фурье (1.1) или (1.2). В рамках настоящей статьи исследуются аппроксимационные свойства непрерывных функций f , у которых последовательности коэффициентов Фурье $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ убывают достаточно регулярно.

Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}^t$ класс всех тригонометрических рациональных функций $r(x) = p_n(x)/q_m(x)$, у которых числитель $p_n(x)$ и знаменатель $q_m(x)$ являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами и $\deg p_n \leq n$, $\deg q_m \leq m$, $q_m \not\equiv 0$. Определим наилучшие равномерные тригонометрические рациональные приближения f :

$$R_{n,m}^t(f) := \inf \{ \|f - r\| : r \in \mathcal{R}_{n,m}^t \} = \|f - r_{n,m}^*\|,$$

где $\|g\| = \max\{|g(x)| : x \in [0, 2\pi]\}$, $r_{n,m}^*$ – тригонометрическая рациональная функция наилучшего равномерного приближения f дробями из $\mathcal{R}_{n,m}^t$. Хорошо известно, что $r_{n,m}^*$ существует и единственна (см., например, [1]).

Тригонометрической аппроксимацией Паде функции f назовем такую рациональную функцию $\pi_{n,m}^t(x) = \pi_{n,m}^t(x; f) = p_n^t(x)/q_m^t(x)$ из $\mathcal{R}_{n,m}^t$, числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию

$$q_m^t(x)f(x) - p_n^t(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx), \quad (1.3)$$

где $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ – действительные числа.

Введем в рассмотрение некоторые матрицы и определители, элементами которых служат коэффициенты Фурье функции f . Для этого каждому $k \in \mathbb{Z}$ и каждому действительному x поставим в соответствие матрицы-строки

$$C_k = \|c_{k-j}\|, \quad E(x) = \|e^{ijx}\|, \quad j = -m, \dots, m.$$

Здесь и далее в выражениях e^{ijx} , e^{ikx} , e^{ix} i – мнимая единица. Полагаем

$$d_{n,m}(x) = \det \begin{bmatrix} C_{n+m} \\ \dots \\ C_{n+1} \\ E(x) \\ C_{-n-1} \\ \dots \\ C_{-n-m} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $d_{n,m,k}$ определитель, полученный из $d_{n,m}$ заменой строки $E(x)$ на C_k , а через $\Delta_{n,m}$ – определитель $2m$ -го порядка, полученный из $d_{n,m}(x)$ после вычеркивания $(m+1)$ -й строки и $(m+1)$ -го столбца.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть функция f задана рядом (1.2). Тогда для любых натуральных n и m существует тригонометрическая аппроксимация Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$. Если $\Delta_{n,m} \neq 0$, то дробь $\pi_{n,m}^t(x; f) = p_n^t(x; f)/q_m^t(x; f)$ единственна, а ее числитель и знаменатель определяются равенствами

$$p_n^t(x) = \sum_{k=-n}^n d_{n,m,k} e^{ikx}, \quad q_m^t(x) = d_{n,m}(x). \quad (1.4)$$

В случае, когда $m = 0$, $\pi_{n,0}^t(\cdot; f)$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ совпадают с частичными суммами Фурье функции f . Формулы (1.4) остаются в силе, если считать, что определитель нулевого порядка по определению равен 1. При $m > 0$ заключение утверждения 1 о существовании и единственности тригонометрической аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$ и ее представлении в виде (1.4) не является новым (см., например, [2]–[4]). Как известно, тригонометрические полиномы $p_n^t(x)$ и $q_m^t(x)$ и дробь $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$, являющаяся их отношением, равенством (1.3) определяются не однозначно. В дальнейшем будем считать, что p_n^t и q_m^t определяются равенствами (1.4). В этом случае

$$L_{n,m}^t(x; f) := q_m^t(x)f(x) - p_n^t(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\tilde{c}_k e^{ikx} + \tilde{c}_{-k} e^{-ikx}), \quad (1.5)$$

где $\tilde{c}_k = d_{n,m,k}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку f – вещественная функция, то $\overline{\tilde{c}_k} = c_{-k}$. В этом случае $\overline{d_{n,m}(x)} = d_{n,m}(x)$ и $\overline{d_{n,m,k}} = d_{n,m,-k}$. Это означает, что тригонометрические полиномы p_n^t и q_m^t также вещественны.

Аналогично, как и в [5], определим тригонометрические аппроксимации Паде в смысле Бейкера. А именно, *тригонометрической аппроксимацией Паде–Бейкера* для функции f , определяемой равенством (1.1), назовем аналитическую на отрезке $[0, 2\pi]$ рациональную функцию $\hat{\pi}_{n,m}^t(x; f) = \hat{p}_n^t(x)/\hat{q}_m^t(x)$ из $\mathcal{R}_{n,m}^t$, представимую своим рядом Фурье и имеющую максимально возможный (по числу свободных параметров) порядок касания к ряду (1.1), т.е.

$$f(x) - \widehat{\pi}_{n,m}^t(x; f) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\widehat{a}_k \cos kx + \widehat{b}_k \sin kx),$$

где $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$ – действительные числа. Формально определения тригонометрических аппроксимаций Паде и Паде–Бейкера аналогичны соответствующим определениям в алгебраическом случае. Однако с точки зрения содержания различия между этими понятиями в тригонометрическом случае более существенные. Ситуация здесь во многом аналогична той, которая имеет место для некоторых других обобщений классического случая (см., например, обзор [6]): указанные варианты обобщения приводят к различным рациональным конструкциям.

Действительно, рассмотрим функцию Вейерштрасса, представимую в виде лакунарного ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q^i \cos(2k+1)^i x, \quad 0 < q < 1. \quad (1.6)$$

В классической ситуации между С-таблицей (таблицей, элементами которой являются значения определителей Адамара $C(n/m)$) и таблицей Паде–Бейкера $[\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)]_{n,m=0}^{\infty}$ существует тесная связь (см. [5; гл. 1, § 1.4]). В частности, в С-таблице нули располагаются квадратными блоками, и если при этом $C(n/m) \neq 0$, то для таких n и m существует аппроксимация Паде $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ в смысле Бейкера и она совпадает с классической аппроксимацией Паде $\pi_{n,m}(\cdot; f)$. В периодическом случае аналогом С-таблицы является Δ -таблица, элементами которой являются значения определителей $\Delta_{n,m}$. Положим в (1.6) $q = 1/4$, $k = 1$. Тогда фрагмент Δ -таблицы функции f имеет следующий вид (точные значения элементов фрагмента таблицы вычислены “вручную”, вычисления продублированы на компьютере с помощью прикладного пакета Mathcad):

[illegible]

Как видим, нулевые элементы Δ -таблицы не всегда образуют квадратные блоки. Кроме этого, из того, что $\Delta_{n,m} \neq 0$, вообще говоря, не следует совпадение тригонометрических аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$ и $\hat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f)$ в том случае, если последняя существует. Так, $\Delta_{0,2} \neq 0$, однако легко проверить, что

$$\pi_{0,2}^t(x; f) = \frac{0}{5 - 8 \cos 2x} \equiv 0$$

(полиномы $p_0^t(x) = 0$ и $q_2^t(x) = 5 - 8 \cos 2x$ удовлетворяют условию (1.3)) не является тригонометрической аппроксимацией Паде в смысле Бейкера. Аналогично, $\Delta_{6,6} \neq 0$, но

$$\pi_{6,6}^t(x; f) = \frac{80 \cos x + 75 \cos 3x + 52 \cos 5x}{64 + 128 \cos 4x - 32 \cos 6x}$$

не представима рядом Фурье, так как в некоторой точке отрезка $[0, 2\pi]$ знаменатель обращается в нуль. По этой причине $\pi_{6,6}^t(x; f)$ и $\hat{\pi}_{6,6}^t(x; f)$ не могут совпадать.¹

Если $m = 0$, то аппроксимации Паде $\pi_{n,0}^t(\cdot; f)$, $\hat{\pi}_{n,0}^t(\cdot; f)$ всегда существуют и тождественно равны соответствующей частичной сумме ряда Фурье (1.1). Согласно теореме Бернштейна (см. [8]) для функции Вейерштрасса (1.6) тригонометрическим полиномом наилучшего равномерного приближения порядка не выше n является соответствующая частичная сумма Фурье ряда (1.6), т.е. $r_{n,0}^*(x; f) = \pi_{n,0}^t(x; f) = \hat{\pi}_{n,0}^t(x; f)$. Теорему Бернштейна можно дополнить. А именно, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q^i \cos(2k+1)^i x$ — функция Вейерштрасса. Зафиксируем n и найдем s из условий

$$(2k+1)^s \leq n \leq (2k+1)^{s+1} - 1.$$

Тогда если $0 \leq m \leq 2k(2k+1)^s - 1$ и $0 \leq i+j \leq 2k(2k+1)^s - 1$, то существует $\hat{\pi}_{(2k+1)^s+i,j}^t(x; f)$ и

$$r_{n,m}^*(x; f) = \hat{\pi}_{(2k+1)^s+i,j}^t(x; f) = \pi_{(2k+1)^s+i,j}^t(x; f) = \pi_{(2k+1)^s,0}^t(x, f), \quad (1.7)$$

$$R_{n,m}^t(f) = \frac{q^{s+1}}{1-q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\pi_{(2k+1)^s,0}^t(x, f) = \sum_{i=0}^s q^i \cos(2k+1)^i x$ является тригонометрической рациональной функцией наилучшего приближения в классе $\mathcal{R}_{n,m}^t$. Для этого достаточно доказать (см. [1; гл. 7, § 3, теорема 2.10]), что она имеет $2(n+m-d)+2$ точек альтернанса, где $d = \min\{n - (2k+1)^s; m\}$. Рассмотрим два случая. Пусть $d = m$, т.е.

$$0 \leq m \leq n - (2k+1)^s \leq (2k+1)^{s+1} - 1 - (2k+1)^s = 2k(2k+1)^s - 1.$$

Тогда $2(n+m-d)+2 = 2(n+1)$. В точках

$$x_i = \frac{i\pi}{(2k+1)^{s+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, 2(2k+1)^{s+1} - 1,$$

¹Рецензент обратил наше внимание на работу [7], в которой исследуется эффект Гиббса для обобщенных аппроксимаций Паде функции знака $\operatorname{sgn} x$ и, в частности, найдены явные выражения для дробей $\pi_{n,m}^t(x; s)$, $\hat{\pi}_{n,m}^t(x; s)$, где $s(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$, из которых следует, что эти дроби различны при всех $m \geq 1$.

имеем

$$f(x_i) - \pi_{(2k+1)^s, 0}^t(x_i, f) = (-1)^i \frac{q^{s+1}}{1-q}.$$

Поскольку $2(n+1) \leq 2(2k+1)^{s+1}$, то нужное число точек альтернанса имеется. Если $d = n - (2k+1)^s$, то

$$2(n+m-d) + 2 = 2(m + (2k+1)^s) + 2.$$

Учитывая ограничения на m в условиях утверждения, получим, что

$$2(m + (2k+1)^s) + 2 \leq 2(2k+1)^{s+1}.$$

Следовательно, $r_{n,m}^*(x; f) = \pi_{(2k+1)^s, 0}^t(x; f)$. Осталось доказать существование аппроксимации Паде $\hat{\pi}_{(2k+1)^s+i, j}^t(x; f)$ при $0 \leq i+j \leq 2k(2k+1)^s - 1$ и ее совпадение с $\pi_{(2k+1)^s+i, j}^t(x; f)$ и $\pi_{(2k+1)^s, 0}^t(x; f)$. Для этого достаточно показать, что

$$(2k+1)^s + i + j + 1 \leq (2k+1)^{s+1}.$$

Это так, поскольку

$$(2k+1)^s + i + j + 1 \leq (2k+1)^s + 2k(2k+1)^s = (2k+1)^{s+1}.$$

Утверждение 2 доказано.

Перейдем к постановке задачи. Последовательность коэффициентов Фурье $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ряда (1.2) однозначно определяет коэффициенты числителя и знаменателя дроби $r_{n,m}^*(\cdot; f)$. Однако получение для этих коэффициентов явных выражений в общем случае является в настоящее время правтически неразрешимой задачей. Даже при $m = 0$ единственной неэлементарной функцией, для которой это удастся сделать, является функция Вейерштрасса. Для дроби $\hat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f)$ ситуация аналогичная. Вместе с тем точные значения коэффициентов числителя и знаменателя классической тригонометрической аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$ можно вычислить с помощью равенств (1.4). Нашей ближайшей целью является нахождение таких условий на коэффициенты ряда Фурье (1.2), при которых тригонометрические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$ (при $m = 0$ $\pi_{n,0}^t(\cdot; f)$ – частичные суммы ряда Фурье (1.2)) приближают функцию f в равномерной норме со скоростью, асимптотически равной наилучшей. В таком случае бесконечно малые при $n+m \rightarrow \infty$ величины $\|f - r_{n,m}^*\|$ и $\|f - \pi_{n,m}^t\|$ эквивалентны.² Поэтому, описав асимптотику убывания последовательности $\|f - \pi_{n,m}^t\|$ в терминах коэффициентов Фурье ряда (1.1), мы в известном смысле решаем задачу о наилучшей рациональной аппроксимации функции f .

Данный подход к исследованию аппроксимационных свойств периодических функций инициирован В. Н. Русаком. Ему принадлежит общая постановка задач. Классы функций f , для которых тригонометрические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$ обладают указанными выше экстремальными свойствами, впервые были обнаружены Л. Л. Берёзкиной [9] и Та Хонг Куангом [10]. В алгебраическом случае аналогичные задачи изучались А. Левиным и Д. Любински

²Бесконечно малые $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

(см. [11]–[14]) в связи с анализом результатов Э. Саффа (см. [15], [16]), относящихся к рациональной аппроксимации экспоненты. В работах [11]–[14], [17]–[19] найдены широкие классы целых функций, для которых классические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(\cdot; f)$ приближают f в единичном круге со скоростью, асимптотически равной наилучшей, т.е. наблюдается так называемый эффект Саффа (подробнее см. [19]). К настоящему времени наиболее общие результаты в алгебраическом случае получены в работе [20]. В § 2 и § 3 настоящей статьи для тригонометрических аппроксимаций Паде будут доказаны аналоги основных теорем из работы [20].

Введем необходимые классы функций. Далее будем рассматривать четные непрерывные 2π -периодические функции f . Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (1.8)$$

и в комплексной форме ряда Фурье (1.2) коэффициенты $c_k = c_{-k} = a_k/2$ – действительные числа. При таких ограничениях $\tilde{c}_k = \tilde{c}_{-k} = d_{n,m,k} = d_{n,m,-k}$. Поэтому, учитывая (1.5), получим, что

$$L_{n,m}^t(x; f) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_{n+m+k} (e^{i(n+m+k)x} + e^{-i(n+m+k)x}). \quad (1.9)$$

Через $T_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$, обозначим множество функций f , представимых в виде (1.8), коэффициенты Фурье $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ которых не равны нулю и удовлетворяют следующим ограничениям: для любого j , $1 \leq j \leq m(n)$, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^{2+\beta}}{n} = 0, \quad (1.10)$$

существует такая последовательность действительных чисел $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, что равномерно по всем $k = 1, 2, \dots$

$$|b_k^{(j)}| \leq (cj^{\beta})^k, \quad c = \text{const}, \quad (1.11)$$

и при $n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+j}}{a_n} = \left(\frac{q}{n^{\alpha}}\right)^j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{(j)}}{n^k}\right). \quad (1.12)$$

Условие (1.12) задает скорость убывания коэффициентов Фурье функции f и вместе с (1.11) является некоторым условием регулярности (правильности) их убывания.³ Из (1.11) и (1.12), в частности, следует, что f является действительной частью сужения на $\mathbb{R}$ целой функции

$$\hat{f}(z) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inz}.$$

В некоторых частных случаях проверку условий (1.11), (1.12) можно упростить. Действительно, обозначим через $T(\alpha, q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$, множество всех

³Подчеркнем, что последовательность $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ определяется только значением j и не зависит от n , а c – абсолютная константа, причем одна и та же для всех j .

таких функций f , представимых в виде (1.8), для которых $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и существует такая последовательность действительных чисел $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что при $n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q}{n^\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{n^k} \right), \quad |b_k| \leq M^k, \quad M = \text{const}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно теореме 5.1 из работы [20] $T(\alpha, q) \subset T_2^\alpha(q)$. Учитывая это, например, получим, что функция

$$f_h(x) = e^{h \cos x} \cos(h \sin x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \cos nx, \quad h \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

принадлежит классу $T_2^1(h)$.

Будем говорить, что g принадлежит $T_\beta^\alpha(q, d)$, если $g(x) = f(dx)$, где $f \in T_\beta^\alpha(q)$, $d \in \mathbb{N}$. Например, функция

$$g_h(x) = \text{ch}(h \cos x) \cos(h \sin x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(2n)!} \cos 2nx \quad (1.14)$$

принадлежит классу $T_2^2(h^2/4; 2)$. Основываясь на определении тригонометрических аппроксимаций Паде, нетрудно показать, что если $g \in T_\beta^\alpha(q, d)$ и $g(x) = f(dx)$, то при $0 \leq i + j \leq d - 1$ имеем $\pi_{dn+i, dm+j}^t(x; g) = \pi_{n,m}^t(dx; f)$ и, следовательно,

$$g(x) - \pi_{dn+i, dm+j}^t(x; g) = f(dx) - \pi_{n,m}^t(dx; f). \quad (1.15)$$

Одним из основных результатов настоящей работы (см. §3) является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция f принадлежит $T_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} (m(n))^{2+\beta}/n = 0$, то для любых $x \in \mathbb{R}$ равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$f(x) - \pi_{n,m}^t(x; f) = (-1)^m m! a_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m \text{Re}\{e^{i(n+m+1)x} (1 + o(1))\},$$

$$R_{n,m}^t(f) \sim \|f - \pi_{n,m}^t(\cdot; f)\| \sim m! |a_{n+1}| \left(\frac{\alpha |q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m.$$

В §4 будет дано приложение теоремы 1 и других полученных в §3 результатов к задачам, связанным с нахождением точных констант рациональной аппроксимации (в этой связи см. работы Д. Браесса [21], А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [22], Г. Штала [23], [24], А. И. Аптекарева [25]). В частности, доказан рациональный аналог теоремы Бернштейна (см. [26; работа 3, гл. 5, §54]), устанавливающей асимптотику убывания наилучших алгебраических полиномиальных приближений функций, представимых рядом Фурье–Чебышёва с регулярно убывающими коэффициентами.

Авторы благодарят В. Н. Русака за полезные советы и внимание к работе.

§ 2. Асимптотика определителей адамаровского типа

Рассмотрим m степенных рядов, сходящихся в круге $D_\rho = \{z : |z| < \rho\}$ и имеющих следующий вид:

$$f_{m-i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m-i)} z^k, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{cases} a_k^{(i)} = 0, & 1 \leq i \leq m-1, \quad k < \alpha i, \\ a_{\alpha i}^{(i)} = 1, & 1 \leq i \leq m-1, \\ a_0^{(0)} = 1, \quad a_k^{(0)} = 0, & k \geq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Будем считать, что остальные коэффициенты степенных рядов (2.1) подчинены следующим ограничениям:

$$|a_k^{(i)}| \leq (ci^\beta)^{k-\alpha i}, \quad c = \text{const}, \quad k > \alpha i, \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (2.3)$$

Для $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_j \in D_\rho$, $j = 1, \dots, m$, рассмотрим определители

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) := |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m.$$

Доказательство следующего утверждения имеется в [20].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $c_1, c_2 > 0$, $\beta \geq 1$,

$$\frac{1}{c_1 n + c_2 m} \leq \lambda_j \leq \frac{1}{c_1 n - c_2 m}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

и выполняется условие (1.10), то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) \sim W_m(\vec{\lambda}^\alpha),$$

где

$$W_m(\vec{\lambda}) = |\lambda_j^{m-i}|_{i,j=1}^m = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j)$$

– определитель Вандермонда порядка m от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, а $\vec{\lambda}^\alpha = (\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \dots, \lambda_m^\alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение 3 остается в силе равномерно по всем $k = 1, 2, 3, \dots$, если

$$\frac{1}{c_1(n+k) + c_2 m} \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{c_1(n+k) - c_2 m},$$

а остальные λ_j удовлетворяют прежним условиям (2.4).

Действительно, в этом случае

$$\frac{c_1(n+k) + c_2 m}{c_1(n+k) - c_2 m} \leq \frac{c_1 n + c_2 m}{c_1 n - c_2 m},$$

и теорема 2.1 из [20] справедлива и при сделанных в замечании предположениях.

Введем в рассмотрение две квадратные матрицы $(m+1)$ -го порядка:

$$\tilde{A}(k) = \begin{bmatrix} 2c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1} + c_{n+m+k+1} & \dots & c_{n+k} + c_{n+2m+k} \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1} + c_{n+m+1} & \dots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

$$A(y) = \begin{bmatrix} 2 & y^{-1} + y & \dots & y^{-m} + y^m \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1} + c_{n+m+1} & \dots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

и две квадратные матрицы m -го порядка:

$$A_0 = \begin{bmatrix} c_{n+2} + c_n & c_{n+3} + c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1} + c_{n-m+1} \\ c_{n+3} + c_{n+1} & c_{n+4} + c_n & \dots & c_{n+m+2} + c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} + c_{n+m-1} & c_{n+m+2} + c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m} + c_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c_{n+2} - c_n & c_{n+3} - c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1} - c_{n-m+1} \\ c_{n+3} - c_{n+1} & c_{n+4} - c_n & \dots & c_{n+m+2} - c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} - c_{n+m-1} & c_{n+m+2} - c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m} - c_n \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее $c_k = 2a_k$, где a_k — коэффициенты Фурье ряда (1.8).

ЛЕММА 1. Пусть функция f представима рядом (1.8). Тогда

$$\Delta_{n,m} = \det A_0 \cdot \det B, \quad (2.5)$$

$$\tilde{c}_{n+m+k} = \frac{1}{2} \det \tilde{A}(k) \cdot \det B, \quad (2.6)$$

$$q_m^t(x) = \frac{1}{2} \det A(y) \cdot \det B, \quad y = e^{ix}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $c_j = c_{-j}$, заменим c_{-j} на c_j в строках определителя $\Delta_{n,m}$, начиная с $(m+1)$ -й. Тогда

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} c_{n+2m} & \dots & c_{n+m+1} & c_{n+m-1} & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & \dots & c_{n+2} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-m+1} & \dots & c_n & c_{n+2} & \dots & c_{n+m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m+1} & \dots & c_{n+2m} \end{vmatrix}.$$

Поменяем в этом определителе $(m+1)$ -ю строку с последней, $(m+2)$ -ю — с предпоследней и т.д., а затем в полученном определителе поменяем местами $(m+1)$ -й столбец с последним, $(m+2)$ -й — с предпоследним и т.д. После этих

преобразований получим

$$\Delta_{n,m} = \left| \begin{array}{ccc|ccc} c_{n+2m} & \cdots & c_{n+m+1} & c_n & \cdots & c_{n+m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+m+1} & \cdots & c_{n+2} & c_{n-m+1} & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & c_{n+m-1} & c_{n+2m} & \cdots & c_{n+m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-m+1} & \cdots & c_n & c_{n+m+1} & \cdots & c_{n+2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} P & Q \\ Q & P \end{array} \right|,$$

где P и Q – матрицы m -го порядка, расположенные соответственно в первых m столбцах и m строках и первых m строках и последних m столбцах. Преобразуем последний определитель, прибавив к первому столбцу $(m+1)$ -й, ко второму – $(m+2)$ -й и т.д., наконец, к m -му прибавим $2m$ -й. После этого в полученном определителе вычтем из $(m+1)$ -й строки первую, из $(m+2)$ -й – вторую и т.д., наконец, из последней вычтем m -ю. Тогда из свойств определителей следует, что

$$\Delta_{n,m} = \left| \begin{array}{cc} P+Q & Q \\ 0 & P-Q \end{array} \right| = \det(P+Q) \cdot \det(P-Q),$$

где

$$\det(P+Q) = \det A_0, \quad \det(P-Q) = \det B.$$

Равенство (2.5) установлено.

Теперь докажем (2.6). Заменяем в определителе $d_{n,m,n+m+k}$ коэффициенты c_{-j} на c_j , начиная с $(m+2)$ -й строки. Тогда

$$\tilde{c}_{n+m+k} = \left| \begin{array}{ccccccc} c_{n+2m} & \cdots & c_{n+m+1} & c_{n+m} & c_{n+m-1} & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+m+1} & \cdots & c_{n+2} & c_{n+1} & c_n & \cdots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2m+k} & \cdots & c_{n+m+k+1} & c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1} & \cdots & c_{n+k} \\ c_{n-m+1} & \cdots & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & c_{n+m-1} & c_{n+m} & c_{n+m+1} & \cdots & c_{n+2m} \end{array} \right|.$$

Применяя элементарные преобразования строк и столбцов, аналогичные предыдущим, будем иметь

$$\tilde{c}_{n+m+k} = \left| \begin{array}{cc} X & Y \\ 0 & Z \end{array} \right| = \det X \cdot \det Z,$$

где

$$\det X = \frac{1}{2} \det \tilde{A}(k), \quad \det Z = \det B.$$

Равенство (2.6) доказано. Аналогично доказывается равенство (2.7).

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $n_i, i = 1, \dots, m$, – различные натуральные числа и

$$\gamma_1 n - \gamma_2 m \leq n_i \leq \gamma_1 n + \gamma_2 m, \quad i = 1, \dots, m,$$

где γ_1, γ_2 – положительные константы, не зависящие от n и m . Тогда если функция f представима в виде (1.8) и $f \in T_\beta^\alpha(q)$, то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\left| \begin{array}{cccc} c_{n_1} & c_{n_2} & \dots & c_{n_m} \\ c_{n_1+1} & c_{n_2+1} & \dots & c_{n_m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_1+m-1} & c_{n_2+m-1} & \dots & c_{n_m+m-1} \end{array} \right| \sim q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^m c_{n_i} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (n_j^{-\alpha} - n_i^{-\alpha}). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через C определитель в (2.8). Тогда с помощью элементарных преобразований получим, что

$$\begin{aligned} C &= (-1)^{m(m-1)/2} \left| \begin{array}{cccc} c_{n_1+m-1} & c_{n_2+m-1} & \dots & c_{n_m+m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_1+1} & c_{n_2+1} & \dots & c_{n_m+1} \\ c_{n_1} & c_{n_2} & \dots & c_{n_m} \end{array} \right| \\ &= (-1)^{m(m-1)/2} c_{n_1} c_{n_2} \dots c_{n_m} \cdot C', \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$C' = \left| \begin{array}{cccc} \frac{c_{n_1+m-1}}{c_{n_1}} & \frac{c_{n_2+m-1}}{c_{n_2}} & \dots & \frac{c_{n_m+m-1}}{c_{n_m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{c_{n_1+1}}{c_{n_1}} & \frac{c_{n_2+1}}{c_{n_2}} & \dots & \frac{c_{n_m+1}}{c_{n_m}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right|.$$

Равенства (1.12) можно переписать в виде

$$\frac{c_{n+j}}{c_n} = q^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k^j \frac{1}{n^{k+\alpha j}}. \quad (2.10)$$

Если теперь часть коэффициентов степенных рядов (2.1) определить как и в (2.2), а остальные доопределить, полагая,

$$a_k^{(i)} = b_{k-\alpha i}^{(i)}, \quad k > \alpha i, \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

то при таком выборе из (1.11) следует выполнение условий (2.3). Учитывая теперь равенства (2.10) и выбор коэффициентов степенных рядов (2.1), будем иметь

$$C' = q^{m(m-1)/2} |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m,$$

где $\lambda_j = 1/n_j$, $j = 1, \dots, m$. Из утверждения 3 следует, что

$$C' \sim q^{m(m-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha).$$

Отсюда и из (2.9) окончательно получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C &\sim (-q)^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^m c_{n_i} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (n_i^{-\alpha} - n_j^{-\alpha}) \\ &= q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^m c_{n_i} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (n_j^{-\alpha} - n_i^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Пусть

$$A_1 := \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} + c_{n+3} & \dots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} + c_{n+m+2} & \dots & c_{n+1} + c_{n+2m+1} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 3. Если функция f представима в виде (1.8) и $f \in T_\beta^\alpha(q)$, то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$A_1 \sim A^0 := \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} & \dots & c_{n+1} \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим A_1 в виде суммы 2^m определителей, полученных в результате разбиения столбцов

$$A_1 = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m} \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n_1} & \dots & c_{n_m} \\ c_{n+2} & c_{n_1+1} & \dots & c_{n_m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n_1+m} & \dots & c_{n_m+m} \end{vmatrix}, \quad (2.12)$$

где n_i принимает либо значение $n+1-i$, либо значение $n+1+i$, $i = 1, \dots, m$. Через $A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j$, $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_j \leq m$, $j = 1, \dots, m$, обозначим тот определитель в сумме (2.12), у которого $n_{v_1} = n+1+v_1$, $n_{v_2} = n+1+v_2, \dots$, $n_{v_j} = n+1+v_j$, а остальные значения есть $n_i = n+1-i$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq v_1, v_2, \dots, v_j$. Тогда (2.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= A^0 + \sum_{v_1} A_{v_1}^1 + \sum_{v_1 < v_2} A_{v_1, v_2}^2 + \dots + \sum_{v_1 < \dots < v_j} A_{v_1, \dots, v_j}^j + \dots + A_{1, 2, \dots, m}^m \\ &= A^0 + S^1 + S^2 + \dots + S^j + \dots + S^m = A^0 \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{S^j}{A^0} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где сумма S^j состоит ровно из $C_m^j = m!/(j!(m-j)!)$ слагаемых. Далее, полагаем $\lambda_i^+ = (n+1+i)^{-\alpha}$, $\lambda_i^- = (n+1-i)^{-\alpha}$. Из леммы 2 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A^0 &\sim q^{m(m+1)/2} \prod_{i=0}^m c_{n+1-i} \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^- - \lambda_i^-), \\ A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j &\sim q^{m(m+1)/2} \prod_{p=1}^j \frac{c_{n+1+v_p}}{c_{n+1-v_p}} \prod_{i=0}^m c_{n+1-i} \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^- - \lambda_i^-) \\ &\times \prod_{k=1}^j \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq v_1, v_2, \dots, v_{k-1}}}^{v_k-1} \frac{\lambda_{v_k}^+ - \lambda_i^-}{\lambda_{v_k}^- - \lambda_i^-} \prod_{\substack{i=v_k+1 \\ i \neq v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_j}}^m \frac{\lambda_i^- - \lambda_{v_k}^+}{\lambda_i^- - \lambda_{v_k}^-} \right\} \prod_{k=2}^j \prod_{i=k}^j \frac{\lambda_{v_j}^+ - \lambda_{v_{k-1}}^+}{\lambda_{v_j}^- - \lambda_{v_{k-1}}^-}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=0}^{v_1-1} \frac{\lambda_{v_1}^+ - \lambda_i^-}{\lambda_{v_1}^- - \lambda_i^-} \right| &\leq \prod_{i=0}^{v_1-1} \frac{\frac{\alpha}{(n+1-i)^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{n+1-i} - \frac{1}{n+1+v_1} \right)}{\frac{\alpha}{(n+1-i)^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{n+1-v_1} - \frac{1}{n+1-i} \right)} = \prod_{i=0}^{v_1-1} \frac{v_1+i}{v_1-i} \frac{n+1-v_1}{n+1+v_1} \\ &\leq \prod_{i=0}^{v_1-1} \frac{v_1+i}{v_1-i} = C_{2v_1-1}^{v_1} \leq v_1^{v_1}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $C_{m+r-1}^r \leq m^r$. Аналогично показывается, что при $k = 2, 3, \dots, j$

$$\left| \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq v_1, v_2, \dots, v_{k-1}}}^{v_k-1} \frac{\lambda_{v_k}^+ - \lambda_i^-}{\lambda_{v_k}^- - \lambda_i^-} \right| \leq v_k^{v_k}.$$

Далее, опять с помощью теоремы Лагранжа получаем

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{i=v_1+1 \\ i \neq v_2, v_3, \dots, v_j}}^m \frac{\lambda_i^- - \lambda_{v_1}^+}{\lambda_i^- - \lambda_{v_1}^-} &\leq \prod_{i=v_1+1}^m \frac{\lambda_i^- - \lambda_{v_1}^+}{\lambda_i^- - \lambda_{v_1}^-} \leq C_{m+v_1}^{2v_1} \left(\frac{n+1-v_1}{n+1-m} \right)^{(\alpha-1)(m-v_1)} \\ &\leq m^{2v_1} \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{(\alpha-1)m}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что при $k = 2, 3, \dots, j$

$$\prod_{\substack{i=v_k+1 \\ i \neq v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_j}}^m \frac{\lambda_i^- - \lambda_{v_k}^+}{\lambda_i^- - \lambda_{v_k}^-} \leq m^{2v_k} \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{(\alpha-1)m}.$$

Поскольку для всех $1 \leq v_p < v_k \leq m$

$$\left| \frac{\lambda_{v_k}^+ - \lambda_{v_p}^+}{\lambda_{v_k}^- - \lambda_{v_p}^-} \right| \leq \left(\frac{n+1-v_p}{n+1+v_p} \right)^{\alpha-1} \frac{(n+1-v_k)(n+1-v_p)}{(n+1+v_k)(n+1+v_p)} \leq 1,$$

то в последней строке формулы (2.14) крайний справа множитель по модулю не превышает 1.

Наконец, учитывая (1.12), получаем, что при $n \geq n_0$

$$\prod_{p=1}^j \frac{c_{n+1+v_p}}{c_{n+1-v_p}} \leq \prod_{p=1}^j \left(\frac{2q}{(n+1-v_p)^\alpha} \right)^{2v_p} \leq \left(\frac{2q}{(n+1-m)^\alpha} \right)^{2 \sum_{k=1}^j v_k}.$$

Из полученных неравенств и (2.14) следует

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j}{A^0} \right| &\leq \prod_{p=1}^j (v_p m^2)^{v_p} \cdot \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{jm(\alpha-1)} \left(\frac{2q}{(n+1-m)^\alpha} \right)^{2 \sum_{k=1}^j v_k} \\ &\leq \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{jm(\alpha-1)} \left(\frac{2qm^{3/2}}{(n+1-m)^\alpha} \right)^{2 \sum_{k=1}^j v_k}. \end{aligned}$$

Заметим, что $S^j \leq C_m^j \max_{v_1, v_2, \dots, v_j} |A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j|$ и $C_m^j \leq m^j$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{S^j}{A^0} &\leq \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{m^2(\alpha-1)} \sum_{j=1}^m m^j \left(\frac{2qm^{3/2}}{(n+1-m)^\alpha} \right)^{2j} \\ &\leq \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{m^2(\alpha-1)} \sum_{j=1}^m \left(\frac{2qm^2}{(n+1-m)^\alpha} \right)^{2j}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В силу ограничений (1.10) равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{m^2(\alpha-1)} = 1.$$

Поэтому из (2.15) окончательно получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$A_1 = A^0 \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{S^j}{S^0} \right) = A^0 \left[1 + O \left(\frac{m^4}{(n+1-m)^{2\alpha}} \right) \right].$$

Лемма 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если функция f представима в виде (1.8) и $f \in T_\beta^\alpha(q)$, то при $0 \leq m \leq m(n)$ и $n > n_0$ $\det A_0 \neq 0$, $\det B \neq 0$, $\Delta_{n,m} \neq 0$.

Это утверждение непосредственно следует из анализа доказательства леммы 3, равенства (2.5) и леммы 2.

ЛЕММА 4. Если функция f представима в виде (1.8) и $f \in T_\beta^\alpha(q)$, то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\det \tilde{A}(1) \sim 2(-1)^m q^{m(m+1)/2} \prod_{i=0}^m c_{n+1-i} \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^- - \lambda_i^-), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \det \tilde{A}(k) &\sim 2q^{m(m+1)/2} c_{n+k} \prod_{i=1}^m c_{n+1-i} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^- - \lambda_i^-) \\ &\times \prod_{j=1}^m \{(n+k)^{-\alpha} - (n+1-j)^{-\alpha}\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\det A(y) \sim 2q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^m c_{n+1-i} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^- - \lambda_i^-), \quad (2.18)$$

где $y = e^{ix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 3, устанавливается, что при $n \rightarrow \infty$

$$\det \tilde{A}(k) \sim 2(-1)^m \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \dots & c_n \\ c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1} & \dots & c_{n+k} \end{vmatrix}.$$

Отсюда с помощью элементарных преобразований легко показать, что

$$\det \tilde{A}(k) \sim 2(-1)^m \begin{vmatrix} c_{n+k} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+k-1} & c_{n+m-1} & \dots & c_n \\ c_{n+m+k} & c_{n+m} & \dots & c_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Учитывая замечание 1, применим к определителю в правой части последнего соотношения лемму 2. В результате получим (2.17). Эквивалентность (2.16) следует из (2.17) при $k = 1$.

Перейдем к доказательству эквивалентности (2.18). Раскладывая определитель $\det A(y)$ по элементам первой строки, а затем применяя лемму 3, получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \det A(y) \sim & 2 \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \dots & c_n \end{vmatrix} \\ & - 2(y^{-1} + y) \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n-1} & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-2} & \dots & c_n \end{vmatrix} + \dots \\ & + 2(-1)^m (y^{-m} + y^m) \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \dots & c_{n+1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что $y = e^{ix}$, с помощью леммы 2, как и при доказательстве леммы 3, устанавливаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \det A(y) \sim & 2 \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \dots & c_n \end{vmatrix} \\ \sim & 2q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^m c_{n+1-i} \prod_{1 \leq i < j \leq m} \{(n+1-j)^{-\alpha} - (n+1-i)^{-\alpha}\}. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

§ 3. Тригонометрические аппроксимации Паде функций класса $T_\beta^\alpha(q)$

Перейдем к доказательствам основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f представима рядом Фурье (1.8) и $f \in T_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} (m(n))^{2+\beta}/n = 0$, то для любых $x \in \mathbb{R}$ равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$f(x) - \pi_{n,m}^t(x; f) = (-1)^m m! a_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m \operatorname{Re} \{ e^{i(n+m+1)x} (1 + o(1)) \}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая равенство (1.9), для любых $x \in \mathbb{R}$ будем иметь

$$\begin{aligned} f(x) - \pi_{n,m}^t(x; f) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{q_m^t(x)} (e^{i(n+m+k)x} + e^{-i(n+m+k)x}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{q_m^t(x)} e^{i(n+m+k)x} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q_m^t(x)} e^{i(n+m+1)x} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} e^{i(k-1)x} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из леммы 1 и леммы 4 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q_m^t(x)} &= \frac{\det \tilde{A}(1)}{\det A(y)} \sim (-q)^m c_{n+1} \prod_{j=1}^m \{(n+1-j)^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}\} \\ &\sim (-q)^m m! c_{n+1} \left(\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} \right)^m = (-1)^m m! c_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m \end{aligned} \quad (3.3)$$

и

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} = \frac{\det \tilde{A}(k)}{\det \tilde{A}(1)} \sim \frac{c_{n+k}}{c_{n+1}} \prod_{j=1}^m \frac{(n+1-j)^{-\alpha} - (n+k)^{-\alpha}}{(n+1-j)^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}}.$$

Опираясь на последнюю эквивалентность и дословно повторяя рассуждения, используемые при доказательстве неравенства (4.4) в работе [20], получаем при $n \geq n_0$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} \right| \leq c \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2|q|(m+1)}{n^{\alpha}} \right)^{k-1} = O\left(\frac{m}{n^{\alpha}} \right). \quad (3.4)$$

Так как $2c_{n+1} = a_{n+1}$, то из (3.2)–(3.4) следует асимптотическое равенство (3.1).

Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $g \in T_{\beta}^{\alpha}(q; d)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(dx)$ и f представима рядом Фурье (1.8). Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} (m(n))^{2+\beta}/n = 0$, то для любых $x \in \mathbb{R}$ равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$g(x) - \pi_{dn+i, dm+j}^t(x; g) = (-1)^m m! a_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m \operatorname{Re} \{ e^{i(n+m+1)dx} (1 + o(1)) \},$$

где $0 \leq i + j \leq d - 1$.

Утверждение теоремы 3 следует из равенств (1.15) и (3.1).

Покажем теперь, что тригонометрические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$ приближают функции f из рассматриваемых классов со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

ТЕОРЕМА 4. Пусть f представима рядом Фурье (1.8) и $f \in T_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} (m(n))^{2+\beta}/n = 0$, то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}^t(f) \sim \|f - \pi_{n,m}^t(\cdot; f)\| \sim m! |a_{n+1}| \left(\frac{\alpha |q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varphi(x) = (-1)^m m! a_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m e^{i(n+m+1)x}.$$

При достаточно больших n знак разности $f(x) - \pi_{n,m}^t(x; f)$ совпадает со знаком $\operatorname{Re} \varphi(x)$. Когда x пробегает весь промежуток $[0, 2\pi)$, $(n+m+1)x$ пробегает весь промежуток $[0, 2\pi(n+m+1))$. Поэтому существует $2(n+m+1)$ действительных чисел x_j , $j = 1, 2, \dots, 2(n+m+1)$, таких, что

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2(n+m+1)} < 2\pi, \quad \varphi(x_j) = (-1)^{m+j} m! a_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m.$$

Тогда в точках x_j разность $f(x) - \pi_{n,m}^t(x; f)$ принимает значения с чередующимися знаками. В таком случае согласно тригонометрическому рациональному аналогу теоремы Валле Пуссена (см., например, [1], [27])

$$R_{n,m}^t(f) \geq \min_{1 \leq j \leq 2(n+m+1)} |f(x_j) - \pi_{n,m}^t(x_j; f)| \geq m! |a_{n+1}| \left(\frac{\alpha |q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m (1 - |o(1)|).$$

С другой стороны,

$$R_{n,m}^t(f) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \pi_{n,m}^t(x; f)| \leq m! |a_{n+1}| \left(\frac{\alpha |q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m (1 + |o(1)|).$$

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 является следствием теорем 2 и 4.

Аналогично доказывается и следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $g \in T_\beta^\alpha(q; d)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(dx)$ и f представима рядом Фурье (1.8). Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} (m(n))^{2+\beta}/n = 0$, то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{dn+i, dm+j}^t(g) \sim \|g - \pi_{dn, dm}^t(\cdot; g)\| \sim m! |a_{n+1}| \left(\frac{\alpha |q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m,$$

где $0 \leq i + j \leq d - 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $m(n) = o(n^{1/4})$. Тогда равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{n,m}^t(f_h) &\sim \|f_h - \pi_{n,m}^t(\cdot; f_h)\| \sim \frac{m! h^m}{n^{2m}} R_{n,0}^t(f_h) \sim \frac{m! h^{n+m+1}}{n^{2m}(n+1)!}, \\ R_{2n+i, 2m+j}^t(g_h) &\sim \|g_h - \pi_{2n+i, 2m+j}^t(\cdot; g_h)\| \sim \frac{m! h^{2m}}{(2n^3)^m} R_{2n,0}^t(g_h) \\ &\sim \frac{m! h^{2(n+m+1)}}{2^m n^{3m} (2(n+1))!}, \end{aligned}$$

где $0 \leq i + j \leq 1$, а функции f_h и g_h определяются равенствами (1.13), (1.14).

В связи с одной из гипотез В. К. Дзядыка (см. [28]) в [20] было установлено ухудшение аппроксимационных свойств аппроксимаций Паде в сравнении с многочленами Тейлора для сумм f степенных рядов при усилении их лакунарности. Анализируя результаты следствия 2 и учитывая, что ряд (1.14) получается из ряда (1.13) вычеркиванием в нем слагаемых с нечетными номерами, нетрудно заметить, что аналогичное явление наблюдается и в периодическом случае. Действительно, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\|f_h - \pi_{2n+1, 2m}^t(\cdot; f_h)\|}{\|f_h - \pi_{2(n+m)+1, 0}^t(\cdot; f_h)\|} &\sim \frac{(2m)! h^{2(n+m+1)}}{(2n)^{4m} (2n+2)!} \frac{(2n+2m+2)!}{h^{2(n+m+1)}} \\ &= (2m)! \frac{(2n+2m+2)!}{(2n)^{4m} (2n+2)!} \sim (2m)! \left(\frac{1}{2n}\right)^{2m} \sim \sqrt{4\pi m} \left(\frac{1}{e} \frac{m}{n}\right)^{2m}, \end{aligned}$$

в то время как

$$\begin{aligned} \frac{\|g_h - \pi_{2n+1, 2m}^t(\cdot; g_h)\|}{\|g_h - \pi_{2(n+m)+1, 0}^t(\cdot; g_h)\|} &\sim \frac{m! h^{2(n+m+1)}}{(2n^3)^m (2n+2)!} \frac{(2n+2m+2)!}{h^{2(n+m+1)}} \\ &\sim m! (4n^2)^m \frac{1}{(2n^3)^m} \sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{2}{e} \frac{m}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

Таким образом, тригонометрические аппроксимации Паде в сравнении с суммами Фурье для g_h имеют выигрыш в $(2en/m)^m / \sqrt{2}$ раз меньше, чем у функции f_h . Для функции $P_h \in T_2^4(h^4/256; 4)$, представимой в виде

$$P_h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{4k}}{(4k)!} \cos 4kx,$$

при $0 \leq i + j \leq 3$ согласно теореме 5 имеем

$$\begin{aligned} R_{4n+i, 4m+j}^t(P_h) &\sim \|P_h - \pi_{4n, 4m}^t(\cdot; P_h)\| \sim m! \frac{h^{4(n+m+1)}}{(64n^5)^m (4n+4)!} \\ &\sim \frac{m! h^{4m}}{(64n^5)^m} R_{4n, 0}^t(P_h). \end{aligned}$$

Теперь легко показать, что при $n \rightarrow \infty$ указанный выигрыш для P_h меньше выигрыша для f_h уже в $(4en/m)^m / \sqrt{2}$ раз.

До сих пор мы рассматривали только функции f , представимые в виде ряда Фурье (1.8). Этот случай интересен с точки зрения приложений (см. § 4). На самом деле все предыдущие результаты справедливы также и для функций f , представимых в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (3.5)$$

при прежних условиях регулярности на коэффициенты Фурье. В частности, если

$$\begin{aligned} \tilde{f}_h(x) &= e^{h \cos x} \sin(h \sin x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \sin nx, \\ \tilde{g}_h(x) &= \operatorname{sh}(h \cos x) \sin(h \sin x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(2n)!} \sin 2nx, \end{aligned}$$

то верно

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $m(n) = o(n^{1/4})$. Тогда равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{n,m}^t(\tilde{f}_h) &\sim \|\tilde{f}_h - \pi_{n,m}^t(\cdot; \tilde{f}_h)\| \sim \frac{m! h^m}{n^{2m}} R_{n,0}^t(\tilde{f}_h) \sim \frac{m! h^{n+m+1}}{n^{2m}(n+1)!}, \\ R_{2n+i, 2m+j}^t(\tilde{g}_h) &\sim \|\tilde{g}_h - \pi_{2n+i, 2m+j}^t(\cdot; \tilde{g}_h)\| \sim \frac{m! h^{2m}}{(2n^3)^m} R_{2n,0}^t(\tilde{g}_h) \\ &\sim \frac{m! h^{2(n+m+1)}}{2^m n^{3m} (2(n+1))!}, \end{aligned}$$

где $0 \leq i + j \leq 1$.

Для рядов Фурье вида (3.5) доказательства соответствующих теорем проводятся аналогично и лишь с небольшими техническими изменениями, поэтому мы на них здесь не останавливаемся.

§ 4. Некоторые приложения

Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}$ множество всех алгебраических рациональных функций $r(x) = p_n(x)/q_m(x)$, у которых p_n и q_m – вещественные алгебраические многочлены и $\deg p_n \leq n$, $\deg q_m \leq m$. Для $f \in C[-1, 1]$, т.е. для непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ вещественной функции f , определим ее наилучшие равномерные алгебраические рациональные приближения:

$$R_{n,m}(f) = R_{n,m}(f; [-1, 1]) := \inf\{\|f - r\| : r \in \mathcal{R}_{n,m}\},$$

где $\|g\| = \max\{|g(x)| : x \in [-1, 1]\}$. Каждой $f \in C[-1, 1]$ поставим в соответствие функцию $\psi(x) = f(\cos x)$. Точно так же, как и в полиномиальном случае (см. [8; гл. 5]), доказывается, что для любых n и m

$$R_{n,m}(f; [-1, 1]) = R_{n,m}^t(\psi). \quad (4.1)$$

Предположим, что функция ψ представима рядом Фурье:

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx. \quad (4.2)$$

Тогда f разлагается в соответствующий ряд Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(x). \quad (4.3)$$

Если, кроме этого, f является сужением на $[-1, 1]$ целой функции, то согласно теореме Бернштейна (см. [29; гл. 2, § 2]) найдется подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, для которой

$$R_{n_k,0}(f) \sim |A_{n_k+1}|, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Более того, “для наиболее обычных функций убывание коэффициентов настолько регулярно, что формула (4.4) пригодна для всех n или по крайней

мере для значений n одинаковой четности” (см. [29; гл. 2, § 2]). Условия регулярности сформулированы С. Н. Бернштейном в следующем виде (см. [26; работа 3, гл. 5, § 54]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если f представима рядом (4.3) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \dots}{A_n} = 0, \quad (4.5)$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,0}(f; [-1, 1]) \sim \|f - S_n(\cdot; f)\| \sim |A_{n+1}|,$$

где $S_n(x; f) = A_0/2 + \sum_{k=1}^n A_k T_k(x)$ – частичная сумма ряда (4.3).

С помощью утверждения 4 достаточно просто (см. [26]) устанавливается асимптотика убывания $R_{n,0}(f; [-1, 1])$ при $n \rightarrow \infty$ для большинства элементарных функций ($\exp x$, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ и др.). При $m \geq 1$ нахождение асимптотики поведения $R_{n,m}(f)$ является значительно более трудной задачей. Классические примеры ее решения хорошо известны (см., например, обзор [30]):

$$R_{n,m}(e^x; [-1, 1]) \sim \frac{n! m!}{2^{n+m} (n+m)! (n+m+1)!}, \quad n+m \rightarrow \infty \quad (\text{Браесс [21]});$$

$$R_{n,n}(|x|; [-1, 1]) \sim 8e^{-\pi\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{Шталь [23]});$$

$$R_{n,n}(x^\alpha; [0, 1]) \sim 4^{1+\alpha} |\sin \pi\alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{Шталь [24]});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,n}^{1/n}(e^{-x}; [0, +\infty]) = v \quad (\text{Гончар, Рахманов [22]});$$

$$R_{n,n}(e^{-x}; [0, +\infty]) \sim 2v^{n+1/2}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{Аптекарев [25]});$$

здесь $v = 0.10765\dots$ – постоянная Альфана. Отметим также работу А. А. Гончара [31], из результатов которой следует, что если функция f аналитична на отрезке $[-1, 1]$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_{n,m}^{1/n}(f) = \frac{1}{l_m},$$

где l_m – сумма полуосей максимального эллипса с фокусами в точках ± 1 , во внутренность которого f продолжается как мероморфная функция, имеющая не более m полюсов.

Покажем, что теоремы из § 3 позволяют решать аналогичные задачи для функций f , представимых рядом Фурье–Чебышёва (4.3), при условии, что коэффициенты этого ряда $\{A_k\}_{k=0}^\infty$ убывают достаточно регулярно.

Аппроксимацией Паде–Чебышёва функции f , заданной рядом (4.3), назовем (см., например, [6]) рациональную дробь $\pi_{n,m}^{\text{ch}}(x) = p_n^{\text{ch}}(x)/q_m^{\text{ch}}(x)$ из $\mathcal{R}_{n,m}$, числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию

$$q_m^{\text{ch}}(x)f(x) - p_n^{\text{ch}}(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k T_k(x),$$

где c_k – вещественные числа.

Ясно, что $\pi_{n,0}^{\text{ch}}(x; f) = S_n(x; f)$. При $m \geq 1$ $\pi_{n,m}^{\text{ch}}(x; f)$ являются рациональными аналогами частичных сумм ряда Фурье по многочленам Чебышёва. В этой связи следующую теорему можно рассматривать как обобщение утверждения 4.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f \in C[-1, 1]$, а соответствующая ей функция ψ представима в виде (4.2) и $\psi \in T_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$. Тогда если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^{2+\beta}}{n} = 0,$$

то равномерно по m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(f; [-1, 1]) \sim \|f - \pi_{n,m}^{\text{ch}}(\cdot; f)\| \sim m! |A_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к функции ψ теорему 4, учитывая (4.1) и тождество $\pi_{n,m}^t(\arccos x; \psi) = \pi_{n,m}^{\text{ch}}(x; f)$, получим утверждение теоремы.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in C[-1, 1]$, а соответствующая ей функция ψ представима в виде (4.2) и $\psi \in T_\beta^\alpha(q; d)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$. Тогда если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^{2+\beta}}{n} = 0,$$

то равномерно по m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{dn+i, dm+j}(f; [-1, 1]) \sim \|f - \pi_{dn, dm}^{\text{ch}}(\cdot; f)\| \sim m! |A_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m,$$

где $0 \leq i + j \leq d - 1$.

Анализируя содержание §§ 1–4, легко обнаружить, что накладываемые на последовательность $(A_n)_{n=0}^\infty$ условия регулярности таковы, что равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_{n,m,2}| + |D_{n,m,3}| + \dots}{D_{n,m,1}} = 0, \quad (4.6)$$

где

$$D_{n,m,k} = \begin{vmatrix} A_{n+1} & A_n & \dots & A_{n-m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n+m} & A_{n+m-1} & \dots & A_n \\ A_{n+m+k} & A_{n+m+k-1} & \dots & A_{n+k} \end{vmatrix}.$$

Поскольку по определению $D_{n,0,k} = A_{n+k}$, то при $m = 0$ условия (4.6) совпадают с условиями Бернштейна (4.5). Заключение утверждения 4 и теоремы 6 в этом случае также совпадают.

Проиллюстрируем возможности применения теорем 6 и 7 на примерах ранее рассматриваемых тригонометрических рядов.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $m(n) = o(n^{1/4})$ и

$$F_h(x) = f_h(\arccos x) := e^{hx} \cos(h\sqrt{1-x^2}).$$

Тогда равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(F_h; [-1, 1]) \sim \frac{m! h^{n+m+1}}{n^{2m}(n+1)!} \sim \frac{m! h^m}{n^{2m}} R_{n,0}(F_h; [-1, 1]).$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $m(n) = o(n^{1/4})$ и

$$G_h(x) = g_h(\arccos x) := \operatorname{ch}(hx) \cos(h\sqrt{1-x^2}).$$

Тогда равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{2n+i, 2m+j}(G_h; [-1, 1]) \sim \frac{m! h^{2(n+m+1)}}{2^m n^{3m} (2(n+1))!} \sim \frac{m! h^{2m}}{2^m n^{3m}} R_{2n,0}(G_h; [-1, 1]),$$

где $0 \leq i + j \leq 1$.

Следствия 4 и 5 доказаны в предположении, что $m(n) = o(n^{1/4})$. Можно показать, что они справедливы при менее ограничительном условии $m(n) = o(n^{2/3})$. Достаточно правдоподобно (см. [19]), что эти следствия верны при $m(n) = o(n)$, причем это последнее условие на $m(n)$ неулучшаемо.

В заключение заметим, что когда f является одной из элементарных функций $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, найти асимптотику убывания $R_{n,m}(f; [-1, 1])$ при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ с помощью теорем 6, 7 не удастся. Вместе с тем есть достаточные основания для оптимизма в отношении метода исследований. Например, в [9] установлено, что если m фиксировано, а $n \rightarrow \infty$, то для перечисленных выше элементарных функций f бесконечно малые величины $R_{n,m}(f; [-1, 1])$ и $\|f - \pi_{n,m}^{\operatorname{ch}}(\cdot; f)\|$ являются эквивалентными.

Список литературы

- [1] G. G. Lorentz, M. von Golitschek, Yu. Makavoz, *Constructive approximation. Advanced problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] Х. Семерджиев, “Аппроксимации Паде для функций, заданных тригонометрическими рядами”, *Науч. тр. Пловд. ун-та*, **13:1** (1975), 409–419.
- [3] Х. Семерджиев, *Тригонометрические аппроксимации Паде и эффект Гиббса*, препринт Р5-1284, Сообщ. ОИЯИ, Дубна, 1979.
- [4] Л. Л. Берёзкина, *О рациональной аппроксимации целых 2π -периодических функций*, деп. в ВИНТИ 7263-B86.
- [5] Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, 1, 2, Мир, М., 1986; пер. с англ.: G. A. Baker, jr.; P. Graves-Morris, *Padé approximants. Part I, II*, Encyclopedia Math. Appl., **13–14**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [6] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57:1** (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russian Math. Surveys*, **57:1** (2002), 43–141.
- [7] G. Németh, G. Páris, “The Gibbs phenomenon in generalized Padé approximation”, *J. Math. Phys.*, **26:6** (1985), 1175–1178.
- [8] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1949; англ. пер.: I. P. Natanson, *Constructive function theory*, vol. I–III, Ungar Publ., New York, 1964–1965.
- [9] Л. Л. Берёзкина, *Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие рациональные приближения*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, БГУ, Минск, 1988.
- [10] Та Хонг Куанг, *Аппроксимации Паде и асимптотики наилучших рациональных приближений*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, БГУ, Минск, 1991.
- [11] D. S. Lubinsky, “Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth”, *Constr. Approx.*, **1:1** (1985), 349–358.

- [12] D. S. Lubinsky, “Uniform convergence of rows of the Padé table for functions with smooth Maclaurin series coefficients”, *Constr. Approx.*, **3**:1 (1987), 307–330.
- [13] D. S. Lubinsky, “Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth. II”, *Constr. Approx.*, **4**:1 (1988), 321–339.
- [14] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, “Best rational approximations of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **293**:2 (1986), 533–545.
- [15] E. B. Saff, “The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function. II”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32**:1 (1972), 187–194.
- [16] E. B. Saff, “On the degree of best rational approximation to the exponential function”, *J. Approximation Theory*, **9**:2 (1973), 97–101.
- [17] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, “Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients”, *Constr. Approx.*, **6**:3 (1990), 257–286.
- [18] Л. Л. Берёзкина, В. Н. Русак, “О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций”, *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1990, № 4, 27–32.
- [19] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, “Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера”, *Матем. сб.*, **198**:7 (2007), 109–122; англ. пер.: A. P. Starovoitov, N. A. Starovoitova, “Padé approximants of the Mittag-Leffler functions”, *Sb. Math.*, **198**:7 (2007), 1011–1023.
- [20] В. Н. Русак, А. П. Старовойтов, “Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора”, *Матем. сб.*, **193**:9 (2002), 63–92; англ. пер.: V. N. Rusak, A. P. Starovoitov, “Padé approximants for entire functions with regularly decreasing Taylor coefficients”, *Sb. Math.*, **193**:9 (2002), 1303–1332.
- [21] D. Braess, “On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x . II”, *J. Approx. Theory*, **40**:4 (1984), 375–379.
- [22] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [23] Г. Шталь, “Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на $[-1, 1]$ ”, *Матем. сб.*, **183**:8 (1992), 85–118; англ. пер.: G. Shtal’, “Best uniform rational approximation of $|x|$ on $[-1, 1]$ ”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:2 (1993), 461–487.
- [24] H. R. Stahl, “Best uniform rational approximation x^α on $[0, 1]$ ”, *Acta Math.*, **190**:2 (2003), 241–306.
- [25] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.
- [26] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений. Т. 1. Конструктивная теория функций*, Изд-во АН СССР, М., 1952.
- [27] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Гостехиздат, М., 1947; англ. пер.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
- [28] В. К. Дзядык, “Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ ”, *Матем. сб.*, **108(150)**:2 (1979), 247–267; англ. пер.: V. K. Dzjadyk, “On the asymptotics of diagonal Padé approximants of the functions $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ and $\operatorname{ch} z$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **36**:2 (1980), 231–249.
- [29] С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной*, ОНТИ, М.–Л., 1937.

- [30] A. A. Pekarskii, “Approximation by rational functions with free poles”, *East J. Approx.*, **13**:3 (2007), 227–319; “Corrigendum”, **13**:4 (2007), 483.
- [31] А. А. Гончар, “Об одной теореме Саффа”, *Матем. сб.*, **94(136)**:1(5) (1974), 152–157; англ. пер.: A. A. Gončar, “On a theorem of Saff”, *Math. USSR-Sb.*, **23**:1 (1974), 149–154.

Ю. А. Лабыч (Yu. A. Labych)

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины

E-mail: jlabych@yandex.ru

Поступила в редакцию

21.02.2008 и 13.01.2009

А. П. Старовойтов (A. P. Starovoitov)

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины

E-mail: svoitov@gsu.by