Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Шарыгин, Локальные формулы для характеристических классов главного GL_n -расслоения, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 10, 127–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 06:55:57

УДК 515.145.253+512.7

Г. И. Шарыгин

Локальные формулы для характеристических классов главного GL_n -расслоения

Пусть P – главное GL_n -расслоение над гладким компактным многообразием X , заданное при помощи конечного атласа $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ с функциями перехода $g_{\alpha\beta}$. Описан способ построения коциклов, соответствующих классам Чженя расслоения P , в комплексе Чеха с коэффициентами в пучке форм де Рама на многообразии, ассоциированном с атласом $\mathcal{U}$. Доказано, что для любого рационального характеристического класса c расслоения P существует коцикл в указанном комплексе, зависящий только от функций переклейки, соответствующий классу c при каноническом отождествлении коомологий указанного комплекса и коомологий де Рама многообразия X (приведен несложный алгоритм, позволяющий вычислить этот коцикл в явной форме). Одной из ключевых идей, приводящей к указанным результатам, является идея использовать для построения коциклов понятие скручивающей коцепи.

Библиография: 14 названий.

Введение

В современной математике существует множество различных подходов и приемов, применяемых для работы с расслоениями, в том числе и главными. Некоторые из них являются в большей степени топологическими, другие – дифференциально-геометрическими. Существует множество геометрических методов, позволяющих получать информацию о топологии расслоения, и наоборот. Одним из понятий, используемых в топологии и имеющих широкое геометрическое применение, является понятие характеристического класса как векторного, так и главного расслоения. В самом деле, равенство нулю (или отличие от нуля) того или иного характеристического класса часто свидетельствует о возможности (или невозможности) редукции структурной группы расслоения к той или иной подгруппе и т.п. Для приложений важно иметь формулы, выражающие характеристические классы через дифференциально-геометрические объекты. Такие формулы имеются в большом количестве. Например, хорошо известно, как связаны характеристические классы, классы Чженя и Понтрягина со связностями в расслоениях (векторных или главных). Ниже мы определим конструкцию так называемого *гомоморфизма Вейля* – отображения из алгебры Вейля в комплекс де Рама пространства расслоения. Это отображение часто используют для построения характеристических классов по связности. Мы не будем обсуждать здесь свойства гомоморфизма Вейля – желающие

Работа выполнена при поддержке Программы европейского сообщества ТОК Noncommutative Geometry and Quantum Groups (грант № MKTD-СТ-2004-509794) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-8004.2006.2).

могут найти соответствующие результаты в § 2. Укажем только, что гомоморфизм Вейля обобщает следующую известную конструкцию Чженя: если $A = \{A_\alpha\}$ – некоторая линейная связность на векторном расслоении E (здесь U_α – тривиализующее покрытие), $F = \{F_\alpha\}$ – ее кривизна, $T(x_1, \dots, x_k)$ – произвольная инвариантная (относительно сопряженного действия GL_n) симметричная функция на алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$, а φ_α – разбиение единицы, то $2k$ -форма

$$T(X_1, \dots, X_{2k}) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2k!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} T(F_{\alpha}(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \dots, F_{\alpha}(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})) \varphi_{\alpha}$$

корректно определена и задает характеристический класс расслоения E . Здесь X_i – векторные поля на базе, а σ пробегает множество всех перестановок из $2k$ элементов.

Кроме указанных конструкций, достаточно широко известны формулы, позволяющие вычислять классы Чженя векторного расслоения, исходя из проекторнозначной функции на базе, задающей это расслоение. Например, если $p(x) \in \mathrm{Mat}_N(C^\infty(X))$ – проектор, задающий векторное расслоение E как подрасслоение некоторого тривиального расслоения, то можно ввести на E так называемую “грассманову связность” $p dp$ (это выражение следует рассматривать как матричнозначную 1-форму на базе). Кривизна этой связности выражается матричнозначной 2-формой $\mathcal{F} = (1 + p) dp dp$. Теперь можно выразить характеристические классы E через формы $\mathrm{Tr}(\mathcal{F}^k)$, $k = 1, \dots, n$, где n – ранг расслоения E .

Однако оба эти подхода не всегда легко использовать: и связность, и, тем более, проектор являются глобальными объектами, отыскать которые в явном виде часто бывает нелегко, особенно если расслоение задано в виде набора карт и функций замены координат между ними. В этом случае часто приходится прибегать к такому не очень явно заданному объекту, как разбиение единицы. Например, проектор можно построить, “склеивая” между собой с помощью разбиения единицы различные тривиализации данного расслоения. Про разбиение единицы обычно известно лишь, что оно существует, а написать функции из такого разбиения в явном виде – крайне сложная задача. Более того, часто такое разбиение в заданном классе функций просто отсутствует, например как в случае комплексно-аналитических функций. В таких случаях способы задания характеристических классов часто отличаются от обычных – в них могут появляться те или иные классы, препятствующие существованию глобальных связностей, такие как класс Атьи и т.п. (см., например [1] или [2]; в статье [2] обсуждаются характеристические классы слоений – еще одна ситуация, в которой глобальная связность может отсутствовать).

Настоящая работа в определенной степени дает возможность написать формулу, выражающую характеристический класс как раз в случае “локально заданного” главного расслоения, т.е. расслоения, представленного в виде набора карт и функций перехода между ними. А именно, в ней предложен алгоритм, позволяющий по любому наперед заданному коциклу в базисной подалгебре комплекса Вейля построить соответствующий ему элемент в комплексе Чеха базы с коэффициентами в пучке форм де Рама. Точнее, этот алгоритм позволяет

получить элемент (коцикл) в (би)комплексе $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega^*)$, который строится по тривиализующему покрытию $\mathcal{U}$ данного главного расслоения. (Один из дифференциалов этого бикомплекса – дифференциал де Рама, а второй – дифференциал Чеха, ассоциированный с покрытием. Далее мы будем называть этот комплекс *комплексом Чеха–де Рама*.) Отметим, что, во-первых, все выражения, встречающиеся в построенных элементах, – многочлены от матричных элементов функций переклейки $g_{\alpha\beta}$ и их дифференциалов. Во-вторых, они будут сконцентрированы под диагональю и над первой строкой бикомплекса $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega^*)$ (см. (4); теорема 8). Кроме того, в работе приведены формулы, которые алгоритм выдает в малых размерностях. Как известно, комплекс $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega^*)$ квазиизоморфен обычной алгебре форм де Рама на базе, однако отображение “глобализации”, задающее этот квазиизоморфизм, зависит от выбора разбиения единицы. Поэтому сравнить получающуюся формулу с известными формулами не всегда просто. Однако часто по такой локальной записи можно сказать, тривиален ли класс, соответствующий рассмотренному коциклу.

Заметим, что аналогичные формулы появлялись и раньше (см., например, последнюю главу книги [3] и статью [4]). Подход, представленный там, отличается от использованного нами: в этих работах коцепь в комплексе Чеха, соответствующая классу Чженя c_i , получаются при помощи интегрирования по стандартным симплексам некоторых вспомогательных выражений. При этом получающееся выражение сосредоточено в той же части бикомплекса Чеха–де Рама, что и построенные нами коциклы. В связи с этим интересно сравнить наши результаты с формулами, получающимися описанным выше способом. Частичный ответ на этот вопрос дан в § 4, где доказано, что коцепи, построенные Боттом, могут быть получены применением части нашей конструкции к некоторому конкретно заданному элементу кобар-резольвенты.

Отметим также, что наша конструкция, как и конструкция Ботта, существенным образом отличается от рассмотренной О’Брайном, Толедо и Тонгом (см. [5], [6]). В результатах, полученных в этих статьях, существенным образом используются особые свойства алгебраических и комплексно-аналитических многообразий: существование комплекса Дольбо и его связь с сингулярными когомологиями, комплексная аналитичность функций переклейки и прочее. Само определение скручивающей коцепи, используемое этими авторами, несколько отличается от принятого в алгебраической топологии и используемого нами, хотя, несомненно, между этими двумя объектами существует связь. Было бы интересно исследовать эту связь, однако такое исследование выходит за рамки настоящей статьи.

Основным понятием, приводящим нас к искомым формулам, является понятие “скручивающей коцепи” (систематическое использование этого подхода – главная особенность настоящей статьи). Известное топологам с конца 50-х годов прошлого века, оно почему-то очень редко использовалось в геометрии. По-видимому, это связано с тем, что большинство теорем, позволяющих применять его в топологии, – это в той или иной мере теоремы существования. В настоящей статье активно используются скручивающие коцепи. При этом мы предлагаем несложную конструкцию, позволяющую выразить скручивающую

коцепь, соответствующую главному расслоению, через функции переклейки (в доступной литературе подобной конструкции обнаружить не удалось). Для сравнения мы также даем конструкцию, выражающую искомую скручивающую коцепь через локальные калибровочные потенциалы произвольной связности на главном расслоении.

Построенная скручивающая коцепь позволяет определить отображение из кобар-резольвенты F алгебры полиномиальных дифференциальных форм на группе GL_n в комплекс Чеха. Характеристические классы теперь можно находить как образ коциклов в F при указанном отображении. Это утверждение хорошо известно топологам и доказывать его можно по-разному. Для полноты картины мы приводим его доказательство. Одним из достоинств этого доказательства является то, что оно содержит алгоритм, позволяющий находить элементы в F , соответствующие искомым классам.

Статья имеет следующую структуру. В § 1 дано определение комплекса Чеха многообразия со значениями в пучке дифференциальных форм де Рама и определение скручивающей коцепи, а также даны две конструкции таких коцепей, соответствующих главному расслоению. В § 2 приведено доказательство теоремы о том, что когомологические классы, построенные с помощью полученной коцепи, являются классами Чженя главного расслоения (см. теорему 7). В качестве полезного следствия получен вышеупомянутый алгоритм, позволяющий находить требуемые элементы в кобар-резольвенте. Этот алгоритм подробно описан в начале § 3 (см. формулы (24) и обсуждение, следующее за ними, в частности, теорему 8). Кроме того, в § 3 приведено несколько примеров вычисления классов на основании предложенного алгоритма. В частности, разобран случай касательного расслоения комплексного проективного пространства.

Наконец, в § 4 проведено исследование связи между построенными нами элементами и элементами, полученными Боттом в цитированной статье. А именно, показано, что чеховские коцепи, полученные Боттом, лежат в образе нашего отображения из кобар-резольвенты в комплекс Чеха. Для этого использованы общие конструкции реализации косимплициальной алгебры в категории алгебр и в категории комплексов (см. лемму 10 и обсуждение перед ней). Ее применение к косимплициальной кобар-конструкции, позволяет получить затем требуемые элементы в F с помощью интегрирования.

§ 1. Скручивающие коцепи и комплекс Чеха

Пусть X – гладкое замкнутое n -мерное многообразие, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ – конечное покрытие X открытыми множествами. Напомним, что *комплексом Чеха с коэффицентами в пучке форм де Рама на X , соответствующим покрытию $\mathcal{U}$* , называется следующая прямая сумма:

$$\check{C}_{\mathcal{U}}^m(X; \Omega) = \bigoplus_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ p+q=n}} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}), \quad (1)$$

где, как обычно, символ $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ обозначает пересечение открытых множеств $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$. При этом считаем, что индексы α_k упорядочены так, что $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_p$. Элементы комплекса Чеха обозначим через $\{h^q\}_p$, а значения

этих элементов на пересечении $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ – через $h_{\alpha_0 \dots \alpha_p}^q$. Дифференциал d в этом комплексе равен по определению сумме двух частных дифференциалов d' и d'' , задаваемых следующими формулами:

$$d'(\{h_p^q\})_{\alpha_0 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i h_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_{p+1}}^q, \quad (2)$$

где знак $\widehat{}$ означает, что соответствующий элемент отсутствует. Кроме того, для краткости мы не будем делать различия между значением элемента h_p^q на $U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_{p+1}}$ и его ограничением на $\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}$ (во втором случае ни одного индекса не пропущено). Второй дифференциал d'' является дифференциалом де Рама,

$$d''(\{h_p^q\})_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = (-1)^p dh_{\alpha_0 \dots \alpha_p}^q. \quad (3)$$

Знак $(-1)^p$ в правой части этого равенства необходим для того, чтобы дифференциалы d' и d'' антикоммутировали. Заметим, что этот комплекс на самом деле является тотальным комплексом следующего бикомплекса:

$$\begin{array}{ccccccc} & \dots & & \dots & & \dots & \\ & \uparrow d' & & \uparrow d' & & \uparrow d' & \\ \check{C}_{\mathcal{U}}^2(X; \Omega^0) & \xrightarrow{d''} & \check{C}_{\mathcal{U}}^2(X; \Omega^1) & \xrightarrow{d''} & \check{C}_{\mathcal{U}}^2(X; \Omega^2) & \xrightarrow{d''} & \dots \\ & \uparrow d' & & \uparrow d' & & \uparrow d' & \\ \check{C}_{\mathcal{U}}^1(X; \Omega^0) & \xrightarrow{d''} & \check{C}_{\mathcal{U}}^1(X; \Omega^1) & \xrightarrow{d''} & \check{C}_{\mathcal{U}}^1(X; \Omega^2) & \xrightarrow{d''} & \dots \\ & \uparrow d' & & \uparrow d' & & \uparrow d' & \\ \check{C}_{\mathcal{U}}^0(X; \Omega^0) & \xrightarrow{d''} & \check{C}_{\mathcal{U}}^0(X; \Omega^1) & \xrightarrow{d''} & \check{C}_{\mathcal{U}}^0(X; \Omega^2) & \xrightarrow{d''} & \dots \end{array} \quad (4)$$

Это замечание позволяет связать гомологии построенного комплекса с когомологиями де Рама (см. теорему 1).

Отметим также, что на комплексе $\check{C}_{\mathcal{U}}^n(X; \Omega)$ можно ввести ассоциативное (но не коммутативное) умножение, превращающее его в DG-алгебру с единицей:

$$(\{h_p^q\} \cdot \{h_{p'}^{q'}\})_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+p'}} = (-1)^{qp'} h_{\alpha_0 \dots \alpha_p}^q \wedge h_{\alpha_{p+1} \dots \alpha_{p+p'}}^{q'}. \quad (5)$$

Здесь символ $\wedge$ обозначает обычное внешнее произведение форм. Как обычно, мы для краткости не делаем различия между формой и ее ограничением на меньшее открытое подмножество.

Основным утверждением о построенном выше комплексе Чеха является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Построенный комплекс Чеха как DG-алгебра квазиизоморфен алгебре $\Omega^*(X)$ дифференциальных форм де Рама на X . Квазиизоморфизм задается следующим отображением j :*

$$\omega \xrightarrow{j} \{\omega|_{U_\alpha}\} \in \bigoplus_{\alpha} \Omega^q(U_\alpha) \quad (6)$$

для всех $\omega \in \Omega^q(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что *квазиизоморфизмом* DG-алгебр называется такой их гомоморфизм, который индуцирует изоморфизм на гомологиях. Именно это и надо показать. То, что отображение (6) является гомоморфизмом, следует непосредственно из формулы (5). То, что оно индуцирует изоморфизм на гомологиях, можно доказать, рассмотрев спектральную последовательность, начинающуюся с гомологий $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega)$ относительно дифференциала d' (т.е. сначала рассматриваются когомологии столбцов бикомплекса (4)): так как пучок дифференциальных форм на гладком многообразии является вялым (в силу существования разбиения единицы), то эта спектральная последовательность сходится к когомологиям X уже на члене E^2 .

Именно в комплексе Чеха, описанном нами, будут принимать значения формулы для классов Чжэня, которые мы выпишем в дальнейшем. Для того чтобы это сделать, нам потребуется еще одно важное понятие – понятие скручивающей коцепи.

Напомним определение скручивающей коцепи (отметим, что мы работаем в когомологиях, поэтому приводимое ниже определение двойственно общепринятому).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A – DG-алгебра, а K – аугментированная DG-коалгебра¹ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Аугментацией коалгебры* называется гомоморфизм $\eta: \mathbb{R} \rightarrow K$, где слева стоит тривиальная 1-мерная коалгебра. *Скручивающей коцепью* на K со значениями в A называется такое однородное линейное отображение $\phi: K \rightarrow A$ степени один, для которого выполняется следующее:

- (i) условие нормировки $\phi \circ \eta = 0$;
- (ii) уравнение нулевой кривизны $d\phi + \phi \cup \phi = 0$.

Второе равенство из определения 1 следует пояснить. Во-первых, напомним, что для любого однородного линейного отображения f между двумя комплексами (цепными или коцепными) *дифференциалом* df называется градуированный коммутатор f с дифференциалами в этих комплексах. Во-вторых, чашка-произведение $\phi \cup \phi$ есть не что иное, как отображение $K \rightarrow A$, $k \mapsto \pm \phi(k^{(1)}) \cdot \phi(k^{(2)})$. Здесь символ $\cdot$ обозначает умножение в алгебре A , а $k \mapsto k^{(1)} \otimes k^{(2)}$ – коумножение в K , знак $\pm$ зависит от четности $k^{(1)}$. Заметим, что $\cup$ -произведение может быть определено для произвольных отображений $a, b: K \rightarrow A$.

Наконец, приведем простой пример ненулевой (хотя в определенном смысле эквивалентной нулевой, см. ниже определение 2) скручивающей коцепи. Пусть $P = X \times \mathrm{GL}_n$ – тривиальное главное расслоение. Рассмотрим произвольную связность в P . В силу тривиальности P можно считать, что она является глобально-определенной матричнозначной дифференциальной 1-формой на X . Пусть

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} e^{ij}$$

¹на самом деле для работы можно выбрать любое основное поле или даже кольцо, но так как мы работаем исключительно с гладкими многообразиями, то мы не будем здесь рассматривать общую теорию.

– разложение этой связности по базису лево-инвариантных векторных полей на GL_n . Зададим скручивающую коцепь ϕ на алгебре дифференциальных форм (обычных или полиномиальных, см. ниже) на GL_n по формуле

$$\phi(\omega) = \sum_{i,j} A_{ij} e^{ij}(\omega) \Big|_e,$$

где e – единица в GL_n . Несложное вычисление показывает, что отображение ϕ является скручивающей коцепью тогда и только тогда, когда кривизна связности ω равна нулю.

Основной конструкцией, связанной со скручивающими коцепями, является скрученное тензорное произведение. А именно, в ситуации, описанной в определении 1, *скрученным (twisted) тензорным произведением коалгебры K и алгебры A* называется комплекс $K \otimes_{\phi} A$, изоморфный как векторное пространство градуированному тензорному произведению K и A , но с другим дифференциалом

$$d_{\phi}(k \otimes a) = dk \otimes a + (-1)^{|k|} k \otimes da + k \cap_{\phi} a, \quad (7)$$

где $k \cap_{\phi} a = (-1)^{|k^{(1)}|} k^{(1)} \otimes \phi(k^{(2)})a$. Условие (ii) из определения 1 гарантирует, что квадрат дифференциала d_{ϕ} равен нулю. Отметим, что первые два слагаемых в формуле (7) задают стандартный дифференциал в тензорном произведении комплексов K и A .

Теперь легко объяснить, когда две скручивающие коцепи (с одинаковыми областями определения и значений) эквивалентны. Грубо говоря, они эквивалентны, если задаваемые ими скрученные тензорные произведения изоморфны. Точное определение их эквивалентности следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скручивающие коцепи $\phi: K \rightarrow A$ и $\phi': K \rightarrow A$ называются *эквивалентными*, если существует такое линейное отображение $c: K \rightarrow A$ степени нуль, что выполняется равенство

$$c \cup \phi - \phi' \cup c = dc. \quad (8)$$

При этом отображение c должно быть обратимым относительно умножения $\cup$.

Предлагаем читателю самостоятельно найти отображение c , задающее эквивалентность между скручивающей коцепью на тривиальном расслоении с плоской связностью, описанной выше, и тождественно нулевым отображением.

Значение скручивающих коцепей для топологии объясняется, прежде всего, следующей теоремой (см. [7]):

ТЕОРЕМА 2. Для любого топологического главного расслоения P с базой X и слоем G (мы предполагаем, что G – топологическая группа, хотя можно было бы потребовать и меньшего) и любых DG-алгебры A и коалгебры K , квазиизоморфных алгебре коцепей на X и (полной) коалгебре коцепей на G соответственно, существует единственная с точностью до эквивалентности скручивающая коцепь ϕ такая, что гомологии комплекса $K \otimes_{\phi} A$ изоморфны когомологиям P .

Хотя это утверждение в разной форме доказывалось и передоказывалось много раз, оно очень редко применялось для исследований за пределами алгебраической топологии. Одной из причин этого является, по-видимому, тот факт, что эта теорема в значительной мере является теоремой существования. Чтобы до некоторой степени восполнить недостаток явных конструкций, мы в настоящей статье приведем две конструкции скручивающей коцепи, соответствующей некоторому главному GL_n -расслоению (вместо GL_n можно рассматривать любую гладкую матричную подгруппу $G \subseteq GL_n$). В первом случае мы основываемся на идеях, изложенных в работе Ши (см. [8]). Вторая конструкция, в отличие от первой, требует выбора связности на расслоении P . Хотя из-за этого она становится не столь инвариантной, мы тем не менее даем ее в замечании, приведенном в конце параграфа.

Построенные скручивающие коцепи будут принимать значения в описанном выше комплексе Чеха, а областью определения этих коцепей будет алгебра полиномиальных дифференциальных форм на группе. Иными словами, алгебра дифференциальных форм, которые в стандартных координатах u_{ij} на $G \subseteq GL_n$ записываются в виде полиномов (в более общем случае – формальных степенных рядов) от u_{ij} и du_{ij} (элементы du_{ij} имеют степень один). Кроме того, к этим переменным надо добавить формальное обращение детерминанта. Мы будем обозначать DG-алгебру таких форм через $\Omega_{\text{poly}}^*(G)$.

Как известно из алгебраической геометрии, когомологии алгебры полиномиальных форм на гладкой алгебраической группе совпадают, как алгебра, с обычными когомологиями де Рама этой группы. Введем на $\Omega_{DR}^*(G)$ дополнительную структуру коумножения. Для этого определим его на образующих u^{ij} и du^{ij} . Положим

$$u^{ij} \mapsto \sum_k u^{ik} \otimes u^{kj}, \quad (9)$$

$$du^{ij} \mapsto \sum_k (du^{ik} \otimes u^{kj} + u^{ik} \otimes du^{kj}) \quad (10)$$

(несложно понять, что элемент, обратный к детерминанту, должен быть групповым). Коединица на $\Omega_{\text{poly}}^*(G)$ задается по формулам $\varepsilon(u^{ij}) = \delta_{ij}$, $\varepsilon(du^{ij}) = 0$. Заметим, что коумножение и коединица в $\Omega_{\text{poly}}^*(G)$ заданы так, что выполняются следующие равенства:

$$\omega^{(1)}(g)\omega^{(2)}(h) = \omega(gh), \quad \omega \in \Omega_G, \quad g, h \in G, \quad (11)$$

$$\varepsilon(\omega) = \omega(1). \quad (12)$$

Из определения коумножения на когомологиях группы следует, что построенное отображение индуцирует на когомологиях ту же структуру коалгебры, что и стандартная конструкция.

Итак, пусть теперь $\mathcal{U}$ – покрытие X картами главного расслоения P . Чтобы построить скручивающую коцепь $\phi: \Omega_{\text{poly}}^*(G) \rightarrow \check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega)$, соответствующую P в смысле теоремы 2, рассмотрим открытое покрытие P цилиндрическими подмножествами $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ (π – проекция расслоения $P \rightarrow X$). Рассмотрим чеховский комплекс P , соответствующий покрытию $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$,

с коэффициентами в пучке Ω_{vpoly} дифференциальных форм на P , полиномиальных вдоль слоя, т.е. таких форм, которые в любой карте представляются в виде линейной комбинации выражений вида $\alpha(x)\beta(u_{ij})$, где $\alpha(x)$ – произвольная форма на базе, а $\beta(u_{ij})$ – полиномиальная форма на G . Так как расслоение – главное, то функции переклейки сохраняют множество форм такого вида. Следовательно, можно даже говорить об алгебре таких форм на P . Заметим, что когомологии такой алгебры совпадают с когомологиями P в силу сказанного выше о когомологиях G .

Так как $\mathcal{V}$ – “цилиндрическое” покрытие расслоения P , то в силу данного определения Ω_{vpoly} имеем следующий изоморфизм комплекса Чеха как векторного пространства со следующим тензорным произведением:

$$\check{C}_{\mathcal{V}}^*(P; \Omega_{\text{vpoly}}) \xrightarrow{\chi} \check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega) \otimes \Omega_{\text{poly}}^*(G).$$

Этот изоморфизм не перестановочен ни с произведением, ни с дифференциалами, но перестановочен с умножением на элементы $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega)$ и с действием $\Omega_{\text{poly}}^*(G)$. Тем не менее, он чрезвычайно важен для построения скручивающей коцепи.

А именно, рассмотрим композицию $\chi \circ (d' + d'') \circ \chi^{-1}$:

$$\begin{aligned} \check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega) \otimes \Omega_{\text{poly}}^*(G) &\xrightarrow{\chi^{-1}} \check{C}_{\mathcal{V}}^*(P; \Omega_{\text{vpoly}}) \xrightarrow{d' + d''} \check{C}_{\mathcal{V}}^*(P; \Omega_{\text{vpoly}}) \\ &\xrightarrow{\chi} \check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega) \otimes \Omega_{\text{poly}}^*(G). \end{aligned}$$

Пусть $d^{\otimes}$ – стандартный дифференциал в тензорном произведении комплексов $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega) \otimes \Omega_{\text{poly}}^*(G)$. Рассмотрим разность $\chi \circ (d' + d'') \circ \chi^{-1} - d^{\otimes}$ и применим полученный оператор к элементам коалгебры $\Omega_{\text{poly}}^*(G) = 1 \otimes \Omega_{\text{poly}}^*(G)$ внутри тензорного произведения. Полученный результат с помощью коединицы на $\Omega_{\text{poly}}^*(G)$ спроектируем на $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega)$.

Построенное сквозное отображение $\Omega_{\text{poly}}^*(G) \rightarrow \check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega)$ обозначим через ϕ_1 . Несложно найти явную формулу, задающую отображение ϕ_1 . Напомним, что $1 \in \check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{DR}(U))$ задается Чеховской 0-коцепью $\{1_{\alpha}\}$ (здесь 1_{α} обозначает функцию на U_{α} , тождественно равную единице). Поэтому для всех $\omega \in \Omega_{\text{poly}}^*(G)$ имеем

$$d^{\otimes}(\{1_{\alpha}\} \otimes \omega) = \{1_{\alpha}\} \otimes d\omega,$$

так как $d'(\{1_{\alpha}\}) = d''(\{1_{\alpha}\}) = 0$. Кроме того, заметим, что дифференциал d'' в $\check{C}_{\mathcal{V}}^*(P; \Omega_{\text{vpoly}})$ при изоморфизме χ отождествляется со следующей суммой дифференциалов в тензорном произведении $d'' \otimes 1 + 1 \otimes d$ (это следует из того, что изоморфизм χ индуцирован гомеоморфизмом $V_{\alpha} \cong U_{\alpha} \times G$). С другой стороны, переход от одной тривиализации к другой на пересечении карт U_{α} и U_{β} в главном расслоении производится по формуле

$$(x, g) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)g).$$

Следовательно, учитывая формулу (11), заключаем, что дифференциал d'' в $\check{C}_{\mathcal{V}}^*(P; \Omega_{\text{vpoly}})$ под действием изоморфизма χ превращается в следующее отображение на $\check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega_{\text{poly}}) \otimes \Omega_{\text{poly}}^*$:

$$\{h_p^q\} \otimes \omega \mapsto \{h_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}}^q\} \otimes \omega + \sum (-1)^i \{h_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_{p+1}}^q \wedge g_{\alpha_0 \alpha_i}^* (\omega^{(1)})\} \otimes \omega^{(2)}$$

(в правой части указано значение Чеховской коцепи на открытом множестве $U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}$, значки ограничения, как обычно, пропущены). Здесь $g_{\alpha\beta}^*(\omega)$ обозначает обратный образ формы ω при отображении $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow G$.

Таким образом, суммируя сказанное выше и учитывая свойства коединицы в коалгебре, получаем следующую простую формулу для отображения ϕ_1 :

$$\phi_1(\omega) = \{\varepsilon(\omega)1_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^*(\omega)\}. \quad (13)$$

Итак, $\phi_1(\omega)$ является Чеховской 1-коцепью со значениями в формах де Рама, в правой части равенства (13) стоит значение этой коцепи на $U_{\alpha\beta}$.

Основной теоремой этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 3. *Построенное отображение ϕ_1 является скручивающей коцепью, соответствующей расслоению P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что отображение ϕ_1 имеет степень один, и то, что условие (i) из определения 1 выполняется, – очевидно (так как дифференциалы зануляются на единице алгебры). Проверим условие (ii). Для этого, используя формулу (13), вычисляем

$$\begin{aligned} d\phi_1(\omega) + \phi_1(d\omega) &= (d' + d'')\phi_1(\omega) + \phi_1(d\omega) \\ &= d' \{\varepsilon(\omega)1_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^*(\omega)\} + d'' \{\varepsilon(\omega)1_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^*(\omega)\} - \{\varepsilon(d\omega)1_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^*(d\omega)\} \\ &= d' \{\varepsilon(\omega)1_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^*(\omega)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь использован тот факт, что дифференциал де Рама коммутирует с коединицей и взятием обратного образа. Далее, пользуясь формулой для d' , находим, что

$$d\phi_1(\omega) + \phi_1(d\omega) = \{\varepsilon(\omega)1_{\alpha\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}^*(\omega) + g_{\alpha\gamma}^*(\omega) - g_{\alpha\beta}^*(\omega)\}.$$

С другой стороны, используя данное выше определение умножения в комплексе Чеха, формулу (11) и условие коцикла для $g_{\alpha\beta}$ ($g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$), получаем

$$\phi_1 \cup \phi_1(\omega) = -\{\varepsilon(\omega)1_{\alpha\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}^*(\omega) + g_{\alpha\gamma}^*(\omega) - g_{\alpha\beta}^*(\omega)\}.$$

Следовательно, условие (ii) выполняется.

Проверим, наконец, что скрученное тензорное произведение, построенное с помощью ϕ_1 , соответствует исходному главному расслоению P . Для этого заметим, что из определения следует, что $d_{\phi_1}(\{h_p^q\} \otimes \omega) = \chi \circ (d' + d'') \circ \chi^{-1}(\{h_p^q\} \otimes \omega)$. Иными словами, дифференциал d_{ϕ_1} есть не что иное, как образ $d' + d''$ при изоморфизме χ . Отсюда следует требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хотя коцепь ϕ_1 зависит от выбора коцикла $g_{\alpha\beta}$, представляющего данное расслоение, тем не менее можно доказать, что при выборе другого коцикла на том же покрытии $\mathcal{U}$, эквивалентного исходному, получающаяся коцепь будет эквивалентна построенной выше коцепи в смысле определения 2. В случае, если новая коцепь будет соответствовать другому атласу расслоения, надо для начала перейти к измельчению покрытий и использовать соответствующий ему морфизм комплексов Чеха.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведем еще одну конструкцию скручивающей коцепи, соответствующей данному главному GL_n -расслоению (ту же самую конструкцию можно использовать для других групп, но мы не будем перегружать текст обозначениями). Для этого выберем связность A на этом расслоении. Пусть $\{A^\alpha\}$ – набор локальных калибровочных потенциалов этой связности. Так как ограничение расслоения P на U_α тривиально, то мы можем представить любой элемент из этого набора в виде

$$A^\alpha = \sum A_{ij}^\alpha e^{ij}$$

(см. пример, следующий за определением скручивающей коцепи). Пусть $F^\alpha = \sum F_{ij}^\alpha e^{ij}$ – кривизна связности A (в карте U_α). Положим

$$\phi_2(\omega) = \left\{ \sum [A_{ij}^\alpha \varepsilon(e^{ij}(\omega)) - F_{ij}^\alpha \varepsilon(\iota_{e^{ij}}(\omega))] \right\} + \{ \varepsilon(\omega) 1_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^*(\omega^0) \}.$$

Здесь $\iota_{e^{ij}}(\omega)$ – свертка формы ω с векторным полем e^{ij} на группе GL_n , а ω^0 – проекция ω на подпространство форм степени нуль (т.е. функций). В частности, если ω – однородная форма степени больше нуля, то $\omega^0 = 0$. Таким образом, $\phi_2(\omega)$ является суммой чеховских 0- и 1-коцепей. Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что построенное отображение – скручивающая коцепь, эквивалентная ϕ_1 .

§ 2. Характеристические классы и алгебра Вейля

Прежде всего напомним, что *приведенной кобар-резольвентой дифференциальной градуированной коалгебры K* называется комплекс

$$F(K) = \bigoplus_{k \geq 1} \bar{K}^{\otimes k}$$

с дифференциалом, равным сумме дифференциала тензорного произведения комплексов, обозначаемого через $d^\otimes$, и кобар-дифференциала, задаваемого следующей формулой:

$$\delta(k_1 \otimes \cdots \otimes k_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_i} k_1 \otimes \cdots \otimes k_i^{(1)} \otimes k_i^{(2)} \otimes \cdots \otimes k_n.$$

Здесь $\bar{K}$ обозначает фактор-коалгебру K по образу коаугментации, $\varepsilon_i = \sum_{l=1}^{i-1} (|k_l| - 1)$.

Этот комплекс с топологической точки зрения следует рассматривать как “классифицирующее пространство” коалгебры K : известно, что в случае, когда K является алгеброй коцепей на группе G , когомологии $F(K)$ совпадают с когомологиями пространства BG (для этого должны выполняться некоторые условия, которые мы опускаем). Ниже мы докажем этот факт в интересующем нас случае, когда G является группой GL_n или компактной подгруппой GL_n .

Итак, пусть $\phi: K \rightarrow A$ скручивающая коцепь. Рассмотрим отображение

$$\phi^\otimes: F(K) \rightarrow A, \quad \phi^\otimes(k_1 \otimes \cdots \otimes k_n) = \phi(k_1) \cdots \phi(k_n).$$

Следующее утверждение является непосредственным следствием определения скручивающей коцепи, эквивалентности скручивающих коцепей и формулы (8).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Отображение $\phi^{\otimes}$ коммутирует с дифференциалами. Более того, если ϕ и ϕ' – две эквивалентные скручивающие коцепи, то отображения $\phi^{\otimes}$ и $\phi'^{\otimes}$ цепно-гомотопны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства этих фактов хорошо известны и не особенно сложны (см. [7] или [9]). Первое утверждение является непосредственным следствием из определения скручивающей коцепи. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно рассмотреть в качестве гомотопии отображение

$$H = \sum_{n, i+j=n-1} \phi^{\otimes i} \otimes c \otimes \phi'^{\otimes j},$$

где c – это коцепь, задающая эквивалентность между ϕ и ϕ' .

Теперь объясним, что мы называем характеристическими классами, построенными по скручивающей коцепи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть α – коцикл в $F(K)$ (соответствующий класс когомологий обозначим через $[\alpha]$). *Характеристическим классом в когомологиях A , соответствующим $[\alpha]$, назовем класс когомологий коцикла $\phi^{\otimes}(\alpha)$.*

В частности, если выбрать в качестве скручивающей коцепи коцепь ϕ_1 из § 1, то $\phi_1^{\otimes}(\alpha)$ будет лежать в комплексе Чеха базы. Более того, так как коцепь ϕ_1 была построена исключительно по локальным данным – по коциклу $g_{\alpha\beta}$, задающему данное главное расслоение, образ отображения $\phi_1^{\otimes}$ будет записан в терминах функций $g_{\alpha\beta}$. С другой стороны, как было указано выше, гомотопии комплекса Чеха совпадают с когомологиями базы расслоения. Таким образом, построенные нами характеристические классы будут лежать в когомологиях базы, как им и положено.

Остается пока открытым вопрос о том, совпадают ли построенные классы с известными характеристическими классами главного расслоения, например с классами, получающимися с помощью конструкции Чженя–Вейля. То, что это так в общем случае (т.е. для любой конструкции скручивающей коцепи и любой алгебры A и коалгебры K в качестве моделей для базы и слоя), можно доказать, исходя из общих соображений (того, что кобар-резольвента является моделью классифицирующего пространства группы и т.п.). Однако мы докажем этот факт в рассматриваемом случае непосредственно, с помощью прямой проверки, основанной на свойствах нашей конструкции. Важным преимуществом выбранного нами пути является возможность непосредственно “контролировать” получающиеся формулы. А именно, в § 3 мы приведем несложный алгоритм построения коциклов в $F(K)$, соответствующих тем или иным классам Чженя.

Сначала напомним, что такое алгебра Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По определению алгеброй Вейля $W(\mathfrak{g})$ называется тензорное произведение симметрической и внешней алгебр двойственного пространства алгебры $\mathfrak{g}$, т.е.

$$W(\mathfrak{g}^*) = \Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*).$$

Образующие внешней степени в указанном тензорном произведении обозначим через a_X , а образующие симметрической алгебры – через f_X . В обоих случаях $X \in \mathfrak{g}^*$ – некоторый элемент, причем оба символа линейны по аргументу X . Чтобы ввести в $W(\mathfrak{g})$ дифференциал, выберем базис X_i , $i = 1, \dots, n$, в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и пусть C_{jk}^i – структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, т.е. скобка Ли в $\mathfrak{g}$ задается по формуле

$$[X_j, X_k] = \sum_i C_{jk}^i X_i.$$

Пусть X^i – двойственный базис пространства $\mathfrak{g}^*$. Заметим, что дифференциал в $W(\mathfrak{g})$ достаточно задать на образующих $a_i = a_{X^i}$, $f_i = f_{X^i}$, $i = 1, \dots, n$. Положим

$$\partial a_i = f_i - \frac{1}{2} C_i^{jk} a_j a_k, \quad \partial f_i = C_i^{jk} f_j a_k. \quad (15)$$

Кроме того, на алгебре $W(\mathfrak{g})$ действуют два важных класса градуированных дифференцирований: θ_X , $X \in \mathfrak{g}$, степени ноль и ι_X , $X \in \mathfrak{g}$, степени минус один. Чтобы их определить, достаточно знать их значения на образующих. Мы полагаем, что

$$\begin{aligned} \theta_X(a_{Y^*}) &= a_{\text{ad}_X^*(Y^*)}, & \theta_X(f_{Y^*}) &= f_{\text{ad}_X^*(Y^*)}, \\ \iota_X(a_{Y^*}) &= Y^*(X), & \iota_X(f_{Y^*}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь ad_X^* – коприсоединенное действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на своем двойственном пространстве, а $Y^*(X)$ – значение линейного функционала Y^* на X . Несложно доказать, что введенные операторы ∂ , θ_X и ι_X удовлетворяют классическим тождествам Картана, т.е.

$$\begin{aligned} [\theta_X, \theta_Y] &= \theta_{[X, Y]}, & [\partial, \theta_X] &= 0, \\ [\iota_X, \theta_Y] &= \iota_{[X, Y]}, & [\iota_X, \iota_Y] &= 0, \end{aligned}$$

и

$$[\partial, \iota_X] = \theta_X.$$

Заметим, кстати, что операторы θ_X задают действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на алгебре $W(\mathfrak{g})$, которое интегрируется до действия группы Ли G (на уровне элементов a_{X^*} , f_{X^*} это действие совпадает с коприсоединенным).

По определению *базисными элементами алгебры $W(\mathfrak{g})$* называются элементы, на которых обнуляются все операторы θ_X и ι_X . Из тождеств Картана следует, что множество базисных элементов является дифференциальной подалгеброй в $W(\mathfrak{g})$. Обозначим ее через $W(\mathfrak{g})^{\text{bas}}$. Важность алгебры $W(\mathfrak{g})^{\text{bas}}$ обусловлена следующей теоремой (см., например, [10]):

ТЕОРЕМА 5. *Алгебра $W(\mathfrak{g})$ с введенным выше дифференциалом ∂ стягиваема. В то же время дифференциал, индуцированный на подалгебре $W(\mathfrak{g})^{\text{bas}}$ равен нулю и (при условии, что $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли компактной полупростой группы G) алгебра $W(\mathfrak{g})^{\text{bas}}$ изоморфна когомологиям (с вещественными или комплексными коэффициентами) классифицирующего пространства BG .*

Кроме этого утверждения нам потребуется еще классическая конструкция гомоморфизма Вейля. А именно, пусть $P \rightarrow X$ – произвольное главное расслоение над многообразием X со структурной группой G . Пусть ω – $\mathfrak{g}$ -значная форма на P , форма связности на рассматриваемом расслоении, а F – тоже глобально-определенная $\mathfrak{g}$ -значная форма на P , форма кривизны связности ω . Тогда можно определить гомоморфизм дифференциальных алгебр так:

$$ch_W: W(\mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^*(P), \quad ch_W(a_{X^*}) = X^*(\omega), \quad ch_W(f_{X^*}) = X^*(F).$$

Здесь X^* – элемент двойственного пространства к алгебре $\mathfrak{g}$. Несложно доказать, что базисные элементы алгебры $W(\mathfrak{g})$ отображаются при гомоморфизме ch_W в дифференциальные формы на P , являющиеся поднятиями однозначно определенных форм на базе. Именно эти формы на базе (которые автоматически являются замкнутыми) и задают классы Чженя (или Чженя–Вейля) главного расслоения. Будем обозначать соответствующие классы когомологий X символами $ch(\alpha)$, $\alpha \in W(\mathfrak{g})^{\text{bas}}$.

Наша цель – доказать, что для каждого класса $ch(\alpha)$ в когомологиях базы существует коцикл $\beta \in F(K)$, где K – биалгебра $\Omega_{\text{poly}}(G)$, такой, что класс когомологий элемента $\phi_1^{\otimes}(\beta)$ в комплексе Чеха совпадает при изоморфизме теоремы 1 с классом $ch(\alpha)$. Для этого вспомним, что рассматриваемая нами группа G – алгебраическая подгруппа в матричной группе, и поэтому можно дуализировать ее действие на $W(\mathfrak{g})$, т.е. указать такой гомоморфизм

$$\Delta_R: W(\mathfrak{g}) \rightarrow W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\text{poly}}^{\circ}(G), \quad \alpha \mapsto \alpha^{(0)} \otimes \alpha^{(1)},$$

что для любых элементов $g \in G$, $\alpha \in W(\mathfrak{g})$ выполняется равенство $g(\alpha) = \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}(g)$. Далее мы приведем явные формулы для случая GL_n (общий случай получается ограничением соответствующих формул на подгруппы в универсальной матричной группе).

Заметим, что коинварианты кодействия Δ_R не совпадают с базисной частью алгебры Вейля: как несложно проверить, элемент $w \in W(\mathfrak{g})$ является коинвариантом Δ_R , только когда $\theta_X(w) = 0$. Однако отсюда не следует, что и $\iota_X(w) = 0$. Чтобы можно было определить базисные элементы в $W(\mathfrak{g})$ на языке подобного рода отображений, надо слегка подправить Δ_R так, чтобы новое кодействие учитывало дифференцирования ι_X . Искомое кодействие будет гомоморфизмом $\tilde{\Delta}_R: W(\mathfrak{g}) \rightarrow W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\text{poly}}(G)$, задаваемым на уровне образующих следующими формулами:

$$\tilde{\Delta}_R(a_{X^*}) = \Delta_R(a_{X^*}) + 1 \otimes \omega_{X^*}, \quad \tilde{\Delta}_R(f_{X^*}) = \Delta_R(f_{X^*}).$$

Здесь ω_{X^*} – (лево)инвариантная 1-форма группы G , соответствующая элементу $X^* \in \mathfrak{g}^*$. Обозначим результат применения кодействия $\tilde{\Delta}_R$ к элементу $x \in W(\mathfrak{g})$ символом $\tilde{x}^{(0)} \otimes \tilde{x}^{(1)}$.

Как несложно убедиться, базисные элементы $W(\mathfrak{g})$ совпадают с подмножеством коинвариантов действия $\tilde{\Delta}_R$, т.е. таких элементов $x \in W(\mathfrak{g})$, что $\tilde{\Delta}_R(x) = x \otimes 1$. Строго обосновать этот факт можно, например, так: элемент x будет базисным, только когда для любого произведения операторов $D = \theta_{X_1} \cdots \theta_{X_p} \iota_{Y_1} \cdots \iota_{Y_q}$ выполняется равенство $D(x) = 0$. Но, как нетрудно

убедиться, это выражение равно $\tilde{x}^{(0)}D(\tilde{x}^{(1)})(e)$, где мы полагаем, что θ_X действует на дифференциальных формах на G как производная Ли, а ι_X – как свертка с соответствующим векторным полем.

Рассмотрим теперь приведенную кобар-резольвенту $K = \Omega_{\text{poly}}(G)$ с коэффициентами в комодуле $W(\mathfrak{g})$:

$$F(W(\mathfrak{g}), \Omega_{\text{poly}}(G)) = \bigoplus_{k \geq 0} W(\mathfrak{g}) \otimes \overline{\Omega}_{\text{poly}}(G)^{\otimes k}.$$

Здесь $\overline{\Omega}_{\text{poly}}(G)$ обозначает фактор-коалгебру $\Omega_{\text{poly}}(G)$ по образу коаугментации (напомним, что в нашем случае коаугментация задается вложением единицы в $\Omega_{\text{poly}}(G)$). Для краткости обозначим этот комплекс буквой F . Как и в случае $F(K)$, дифференциал в F равен сумме дифференциала тензорного произведения комплексов, обозначаемого через $d^{\otimes}$, и кобар-дифференциала, задаваемого следующей формулой:

$$\begin{aligned} \delta(w[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]) &= \tilde{w}^{(0)}[\tilde{w}^{(1)} \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n] \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tilde{\varepsilon}_i} w[a_1 \otimes \cdots \otimes a_i^{(1)} \otimes a_i^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_n] \end{aligned} \quad (16)$$

для всех $w \in W(\mathfrak{g})$ и $a_i \in \overline{\Omega}_{\text{poly}}(G)$. Здесь $a^{(1)} \otimes a^{(2)}$ – образ элемента a при коумножении и знак $\tilde{\varepsilon}_i$ зависит от степеней элементов $w, a_1, \dots, a_{i-1}$.

Заметим, что $F(\Omega_{\text{poly}}(G))$ можно вложить в F при помощи отображения i_1 :

$$i_1([a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]) = 1[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]. \quad (17)$$

С другой стороны, множество базисных элементов $W(\mathfrak{g})^{\text{bas}}$ алгебры Вейля тоже вкладывается в F :

$$i_2(w) = w[]. \quad (18)$$

Здесь символ $[]$ обозначает пустое тензорное произведение. Очевидно, вложения i_1 и i_2 коммутируют с дифференциалами. Далее нам потребуется следующая лемма о комплексе F .

ЛЕММА 6. *Вложения i_1 и i_2 индуцируют изоморфизм на уровне когомологий. В частности, когомологии кобар-резольвенты алгебры $\Omega_{\text{poly}}(G)$ изоморфны когомологиям классифицирующего пространства группы G (при указанных в теореме 5 ограничениях на G).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что вложение i_1 индуцирует изоморфизм на уровне когомологий. Для этого рассмотрим фильтрацию f' комплекса F :

$$f'_p F = \{w[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n] \mid \deg w \leq p\}.$$

Рассмотренная фильтрация, очевидно, исчерпывающая. Следовательно, спектральная последовательность сходится к когомологиям комплекса F . Так как алгебра $W(\mathfrak{g})$ ациклична, то член E_2 спектральной последовательности, ассоциированной с этой фильтрацией, равен когомологиям кобар-резольвенты $F(K)$, сконцентрированным в первой вертикали. Следовательно, эта спектральная

последовательность вырождается после второго члена и мы заключаем, что когомологии F совпадают с когомологиями $F(K)$. При этом вложение i_1 совпадает с граничным гомоморфизмом спектральной последовательности.

Аналогично, чтобы доказать утверждение о вложении i_2 , рассмотрим фильтрацию f'' комплекса F :

$$f_q'' F = \{w[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n] \mid n \leq q\}.$$

Член E_1 спектральной последовательности, ассоциированной с этой фильтрацией, равен когомологиям комплекса F с кобар-дифференциалом (без дифференциала тензорного произведения). Докажем, что эти когомологии совпадают с пространством базисных элементов в $W(\mathfrak{g})$. Для этого рассмотрим следующее действие (неградуированное!) алгебры $\Omega_{\text{poly}}(G)$ на алгебре Вейля (если нужно, пополненной таким образом, чтобы в нее попадали формальные ряды из элементов a_X, f_X). Функция на G будет действовать на $W(\mathfrak{g})$ как умножение на элемент в $S^*(\mathfrak{g}^*)$, равный обратному образу этой функции на $\mathfrak{g}$ при экспоненциальном отображении, а дифференциальная форма ω_{X^*} – как умножение на a_{X^*} . Так как указанные дифференциальные формы свободно порождают всю алгебру $\Omega_{\text{poly}}(G)$ как модуль над функциями, заданное действие корректно определено. Заметим, что это отображение перестановочно с действием группы G . На двойственном языке это означает, что выполняется равенство

$$w \cdot \omega = \tilde{w}^{(0)} \cdot a^{(1)} \otimes \tilde{w}^{(1)} a^{(2)},$$

т.е. $W(\mathfrak{g})$ является хопфовым модулем над алгеброй Хопфа $\Omega_{\text{poly}}(G)$. Как хорошо известно (см. [11]), все такие модули, как комодули над алгеброй Хопфа, изоморфны тензорному произведению пространства коинвариантов и самой алгебры Хопфа. Таким образом, $W(\mathfrak{g}) \cong W(\mathfrak{g})^{\text{bas}} \otimes \Omega_{\text{poly}}(G)$. Из этого следует требуемое утверждение. Более того, вложение i_2 индуцирует изоморфизм пространства базисных форм с членом E_1 . Из доказанного следует, что член E_2 рассматриваемой спектральной последовательности равен когомологиям пространства базисных элементов и что i_2 задает требуемый изоморфизм.

Таким образом, получаем, что для каждого класса когомологий в пространстве базисных элементов алгебры Вейля $[\alpha]$ найдется такой класс $[\beta]$ в кобар-резольвенте $F(\Omega_{\text{poly}}(G))$, что выполняется равенство $i_1^*([\beta]) = i_2^*([\alpha])$. Если α и β – коциклы, представляющие соответствующие классы, то из доказанного следует, что существует такая коцепь γ в комплексе F , что $(d^\otimes + \delta)\gamma = i_2(\alpha) - i_1(\beta)$. В следующем параграфе мы покажем на примере группы GL_n , как можно находить элементы β и γ по заданному коциклу α (а именно, мы предложим несложный алгоритм, который по любому наперед заданному базисному коциклу в $W(\mathfrak{g})$ строит соответствующий ему коцикл β в кобар-резольвенте и задающий гомотопию элемента γ в комплексе F).

Чтобы теперь воспользоваться этими наблюдениями, рассмотрим главное G -расслоение $P \rightarrow X$ с атласом $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ и соответствующим ему коциклом $g_{\alpha\beta}$. Выберем связность на P . Пусть A_α, F_α – локальные калибровочные потенциалы и формы кривизны выбранной связности в картах атласа $\mathcal{U}$. Рассмотрим отображение $\xi: F \rightarrow \check{C}_{\mathcal{U}}^*(X, \Omega)$, определенное следующим образом:

$$\xi(w[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]) = \xi(w)\phi_1^\otimes([a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]).$$

При этом $\xi: W(\mathfrak{g}) \rightarrow \check{C}_{\mathcal{W}}^*(X, \Omega)$ – гомоморфизм, заданный на образующих алгебры $W(\mathfrak{g})$ формулами

$$\xi(a_{X^*}) = \{X^*(A_\alpha)\}, \quad \xi(f_{X^*}) = \{X^*(F_\alpha)\}.$$

В обоих случаях получаются чеховские 0-коцепи со значениями в 1- и 2-формах соответственно.

Несложное вычисление показывает, что построенное отображение ξ коммутирует с дифференциалами. Для этого достаточно проверить это на образующих комплекса Вейля, для чего достаточно воспользоваться тождествами Бьянки

$$F_\alpha = dA_\alpha - A_\alpha \wedge A_\alpha, \quad dF_\alpha = [F_\alpha, A_\alpha] \quad (19)$$

и формулами преобразования связности и кривизны при замене координат

$$A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}, \quad F_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} F_\alpha g_{\alpha\beta}. \quad (20)$$

С другой стороны, очевидно, что композиция вложения i_1 с ξ совпадает с композицией $j \circ ch_W$ (здесь j – квазиизоморфизм теоремы 1, см. формулу (6)), а композиция ξ и i_2 по определению равна $\phi_1^\otimes$. Учитывая сделанное выше замечание (после доказательства леммы 6), получаем требуемое утверждение: для любого характеристического класса $ch(\alpha)$ существует коцикл β в $F(\Omega_{\text{poly}}(G))$ такой, что элемент $\phi_1^\otimes(\beta)$ когомологичен $ch(\alpha)$. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Для любого характеристического класса $x \in H^*(X)$ главного GL_n -расслоения P существует коцикл $\tilde{x}$ в комплексе $\check{C}_{\mathcal{W}}^*(X; \Omega)$, соответствующий x при изоморфизме когомологий, задаваемом отображением j (см. теорему 1). При этом все коэффициенты – дифференциальные формы, встречающиеся в выражении для $\tilde{x}$, можно выбрать в виде многочленов от матричных элементов функций переклейки $g_{\alpha\beta}$ и их дифференциалов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если x представлен в виде $x = ch(\alpha)$, то достаточно взять в качестве $\tilde{x}$ коцикл $\phi_1^\otimes(\beta)$, где β соответствует α в вышеуказанном смысле. Вторая часть теоремы (о том, в каком виде можно выбрать коэффициенты в выражении для $\tilde{x}$) следует из полученной нами явной формулы для коцепи ϕ_1 : для любой полиномиальной формы ω на GL_n выражение $g_{\alpha\beta}^*(\omega)$ будет полиномом от матричных элементов $g_{\alpha\beta}$ и их дифференциалов де Рама.

§ 3. Вычисления и примеры

В этом параграфе ради сокращения количества обозначений рассмотрим в качестве структурной группы исключительно группу GL_n . Так как все классические группы являются подгруппами GL_n для тех или иных значений n , то это условие не ограничивает общности наших рассуждений.

В указанном случае удобно выбрать стандартный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, состоящий из матричных единиц e_{ij} . Будем обозначать соответствующие элементам e_{ij} (а точнее – элементам двойственного базиса $e^{ij} = e_{ij}^*$) образующие

элементы алгебры Вейля символами a^{ij} и f^{ij} соответственно. Тогда дифференциал ∂ в $W(\mathfrak{gl}_n)$ принимает вид

$$\partial a^{ij} = f^{ij} - \sum_{k=1}^n a^{ik} a^{kj}, \quad \partial f^{ij} = \sum_{k=1}^n \{f^{ik} a^{kj} - a^{ik} f^{kj}\}.$$

В дальнейшем мы обычно будем пропускать значок суммирования по совпадающим индексам. В рассматриваемом базисе легко написать формулы, отвечающие кодействию Δ_R . Введем для краткости следующее обозначение:

$$\omega^{pq} = (u^{-1})^{pk} du^{kq}$$

(здесь знак суммирования опущен). В этой формуле $(u^{-1})^{ij}$ – функции на группе, равные матричным элементам обратного линейного преобразования (они выражаются в виде полиномов от u^{ij} и элемента, обратного к детерминанту). Формы ω^{pq} – матричные элементы формы Маурера–Картана группы GL_n . Во введенных обозначениях имеем следующие формулы:

$$\tilde{\Delta}_R(a^{ij}) = a^{pq} \otimes (u^{-1})^{ip} u^{qj} + 1 \otimes \omega^{ij}, \quad \tilde{\Delta}_R(f^{ij}) = f^{pq} \otimes (u^{-1})^{ip} u^{qj}.$$

Напомним некоторые факты о коомологиях классических групп. Пусть $\omega = (\omega^{pq})_{p,q=1}^n$ – матричнозначная форма на GL_n , форма Маурера–Картана. Ее можно рассматривать как лево-инвариантную форму на GL_n со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$. Известно (см., например, книгу [10]), что коомологии группы $GL_n(\mathbb{C})$ над полем рациональных чисел свободно порождены как алгебра классами коомологий форм $\text{Tr}(\omega)$, $\text{Tr}(\omega^{\wedge 3})$, $\dots$, $\text{Tr}(\omega^{\wedge [n/2]})$. Коомологии группы $GL_n(\mathbb{R})$ устроены несколько сложнее: надо отбросить все нечетные классы и добавить (в случае четного n) класс, соответствующий пфаффиану (многочлену, равному квадратному корню из детерминанта кососимметрической матрицы). В дальнейшем мы будем много работать с формами ω^{pq} , поэтому напомним основные формулы, по которым они преобразуются.

Во-первых, форма ω удовлетворяет уравнению Маурера–Картана:

$$d\omega = -\omega \wedge \omega,$$

или, в координатной форме,

$$d\omega^{ij} = -\omega^{ik} \wedge \omega^{kj}. \quad (21)$$

Во-вторых, нам надо будет знать, чему равно копроизведение формы ω^{pq} . Для этого можно воспользоваться формулами (9), (10), однако проще поступить следующим образом: запишем форму ω в виде $\omega_g = g^{-1} dg$, где $g = (u^{ij})_{i,j=1}^n$ – общий элемент в группе GL_n (по-другому g можно рассматривать как матричнозначную функцию на группе GL_n). Чтобы определить коумножение, согласно формуле (11) заменим g на gh (h – другой абстрактный элемент в группе GL_n). Получим

$$(gh)^{-1} d(gh) = h^{-1}(g^{-1} dg)h + h^{-1} dh = h^{-1}\omega_g h + \omega_h.$$

Учитывая формулу (11), это равенство можно переписать в координатах следующим образом:

$$(\omega^{pq})^{(1)} \otimes (\omega^{pq})^{(2)} = \omega^{ij} \otimes (u^{-1})^{pi} u^{jq} + 1 \otimes \omega^{pq}. \quad (22)$$

Заметим, что формулу Маурера–Картана можно было бы доказать, тоже воспользовавшись представлением $\omega = g^{-1}dg$.

Кроме формы Маурера–Картана нам понадобится аналогичная право-инвариантная матричнозначная форма на группе $-dg g^{-1}$. Обозначим ее через $\tilde{\omega}$. Матричные элементы этой формы обозначим $\tilde{\omega}^{pq}$. Так же как и для ω^{pq} , можно доказать следующие формулы:

$$d\tilde{\omega}^{ij} = \tilde{\omega}^{ik} \wedge \tilde{\omega}^{kj}, \quad (\tilde{\omega}^{pq})^{(1)} \otimes (\tilde{\omega}^{pq})^{(2)} = \tilde{\omega}^{pq} \otimes 1 + u^{pi}(u^{-1})^{jq} \otimes \tilde{\omega}^{ij}.$$

Как было доказано в предыдущем параграфе, характеристические классы главных расслоений соответствуют классам когомологий комплекса $F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n))$. Таким образом, чтобы написать формулы, выражающие классы Чженя в терминах функций перехода, надо уметь выписывать соответствующие классы в кобар-резольвенте алгебры полиномиальных форм на GL_n .

Конечно, можно попытаться подобрать такие классы “вручную”. Например, из формулы Маурера–Картана и (22) следует, что форма $\text{Tr}(\omega) = \sum_i \omega^{ii}$ – примитивная, т.е. ее копроизведение равно $1 \otimes \text{Tr}(\omega) + \text{Tr}(\omega) \otimes 1$. Это означает, что соответствующая ей коцепь $[\text{Tr}(\omega)]$ в кобар-резольвенте замкнута. Рассмотрим образ этого коцикла при отображении $\phi_1^{\otimes}$. Он будет 1-коциклом Чеха со значениями в 1-мерных формах де Рама:

$$c_1^{\phi_1} = -\{g_{\alpha\beta}^{-1}(x)^{ik} dg_{\alpha\beta}(x)^{ki}\}.$$

Здесь $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{GL}_n$ – коцикл, задающий расслоение P ($g_{\alpha\beta}(x)^{ij}$ – матричные элементы). Несложно показать, что построенный коцикл при изоморфизме когомологий комплекса Чеха и комплекса де Рама будет соответствовать 1-му классу Чженя с точностью до нормировочного множителя. В самом деле, известно, что класс c_1 представляется замкнутой формой $(\pi\sqrt{-1})^{-1}\text{Tr}(F)$, где F – кривизна некоторой связности на P (ее можно рассматривать как матричнозначную 2-форму на P). При отображении j (теорема 1) эта форма переходит в 0-мерную коцепь $\{F_{\alpha}^{ii}\}$. Как несложно доказать, используя тождества Бьянки и закон преобразования связности при замене координат (см. формулы (19), (20)), эта 0-коцепь с точностью до знака когомологична $c_1^{\phi_1}$:

$$\{F_{\alpha}^{ii}\} + \{g_{\alpha\beta}^{-1}(x)^{ik} dg_{\alpha\beta}(x)^{ki}\} = (d' + d'')\{A_{\alpha}^{ii}\}.$$

Здесь $A = \{A_{\alpha}\}$ – связность, соответствующая кривизне F (локальные калибровочные потенциалы A_{α} мы рассматриваем как матричнозначные 1-формы на соответствующих открытых подмножествах). Отметим, что получающееся выражение совпадает с выражением, получающимся при использовании методов, описанных в [3] (см. последний параграф последней главы). В общем случае сравнить эти выражения не так просто. Некоторые замечания о связи наших результатов и конструкции Ботта приведены в § 4 (см. также теорему 8).

Перейдем теперь к остальным классам Чженя, точнее, к классам, лежащим в образе гомоморфизма Вейля. Однако найти соответствующие им коциклы в комплексе $F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n))$ вручную намного сложнее. Достаточно очевидно, например, что выражение, соответствующее k -й степенной сумме c_k (которая задается дифференциальной формой $\text{Tr}(F^k)$, где F – кривизна произвольной связности в данном расслоении), должно начинаться (с точностью до коэффициента) со слагаемого

$$[\text{Tr}(\omega^{\wedge(2k-1)})] = \sum_{i_1, \dots, i_{2k-1}} [\omega^{i_1 i_2} \wedge \omega^{i_2 i_3} \wedge \dots \wedge \omega^{i_{2k-1} i_1}]$$

(это следует, в частности, из конструкции трансгрессии, см. [10], [3]). Однако, как видно из формул (21) и (22), эта коцепь в кобар-резольвенте незамкнута. Поэтому к ней требуется прибавить еще какие-то поправочные члены, лежащие в высших тензорных произведениях, чтобы получить требуемый класс. Иногда это можно сделать непосредственным подбором. Например, можно показать, что коцепь

$$[\text{Tr}(\omega^{\wedge 3})] - 3\text{Tr}([\omega \otimes \tilde{\omega}]),$$

где $\text{Tr}([\omega \otimes \tilde{\omega}]) = \sum_{i,k} [\omega^{ik} \otimes \tilde{\omega}^{ki}]$, замкнута и соответствует (с точностью до пропорциональности) второй степенной сумме c_2 . А именно, при гомоморфизме $\phi_1^{\otimes}$ эта коцепь переходит в следующий элемент в комплексе Чеха:

$$c_2^{\phi_1} = \{g_{\alpha\beta}^{-1}(x)^{i_1 i_2} dg_{\alpha\beta}(x)^{i_2 i_3} g_{\alpha\beta}^{-1}(x)^{i_3 i_4} dg_{\alpha\beta}(x)^{i_4 i_5} g_{\alpha\beta}^{-1}(x)^{i_5 i_6} dg_{\alpha\beta}(x)^{i_6 i_1}\}_{\alpha\beta} - 3\{g_{\alpha\beta}^{-1}(x)^{j_1 j_2} d(g_{\alpha\beta}(x)^{j_2 j_3}) d(g_{\beta\gamma}(x)^{j_3 j_4}) g_{\beta\gamma}^{-1}(x)^{j_4 j_1}\}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Напомним, что здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Несложно заметить, что размерность этого элемента равна четырем: первое слагаемое является 1-коцепью Чеха со значениями в 3-формах де Рама, а второе слагаемое – 2-коцепью со значениями в 2-формах. Несложное вычисление, основанное на тех же формулах, что и прежде, показывает, что, во-первых, коцепь $c_2^{\phi_1}$ замкнута, а во-вторых, что она когомологична 0-коциклу

$$j(3\text{Tr}(F^2)) = 3\{F_{\alpha}^{i_1 i_2} \wedge F_{\alpha}^{i_2 i_1}\}_{\alpha}$$

– второй степенной сумме, умноженной на три. При этом разница между $j(3\text{Tr}(F^2))$ и $c_2^{\phi_1}$ равна полному дифференциалу (т.е. $d' + d''$) следующего элемента:

$$\{3F_{\alpha}^{i_1 i_2} \wedge A_{\alpha}^{i_2 i_1} - A_{\alpha}^{i_1 i_2} \wedge A_{\alpha}^{i_2 i_3} \wedge A_{\alpha}^{i_3 i_1}\}_{\alpha} - \{A_{\alpha}^{i_1 i_2} \wedge d(g_{\alpha\beta}(x)^{i_2 i_3}) g_{\alpha\beta}^{-1}(x)^{i_3 i_1}\}_{\alpha\beta}.$$

В общем случае даже для третьей степенной суммы c_3 отыскать требуемые поправочные члены “вручную” не представляется возможным. Поэтому мы опишем алгоритм, позволяющий за определенное время найти по данному классу в когомологиях $W(\mathfrak{gl}_n)^{\text{bas}}$ соответствующую ему в смысле леммы 6 замкнутую коцепь в кобар-резольвенте алгебры Хопфа $\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)$.

Сократим дифференциал в кобар-конструкциях $F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n))$, F (см. предыдущий параграф, лемму 6) до дифференциала $d^{\otimes}$ в тензорном произведении

комплексов (иными словами, “отбросим” вторую часть дифференциала, задаваемую формулой (16), обозначенную через δ). Тогда, как следует из акцильности комплекса Вейля, когомологии всего комплекса F окажутся изоморфными когомологиям его подкомплекса $i_2(F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)))$, причем отображение, гомотопически обратное к i_2 , задается проектированием p комплекса Вейля на свою нулевую компоненту. Пусть h – гомотопия, стягивающая весь комплекс F на $i_2(F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)))$.

Согласно лемме о возмущении (см., например, [12]) если отображения i_2, h, p удовлетворяют соотношениям

$$h \circ h = 0, \quad h \circ i_2 = 0, \quad p \circ h = 0, \quad i_2 \circ p - Id = d^{\otimes} \circ h + h \circ d^{\otimes} \quad (23)$$

(последнее равенство – просто выражение того факта, что h – гомотопия, стягивающая комплекс F на образ вложения i_2), то в комплексе $F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n))$ можно ввести новый дифференциал d' и подправить отображения i_2, p так, что они станут гомотопически-обратными друг другу отображениями комплексов $F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n))$ и F с дифференциалами $d^{\otimes} + d'$ и $d^{\otimes} + \delta$ соответственно. При этом новый дифференциал d' на $F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n))$, вложения i'_2 и p' и стягивающая гомотопия h' будут явным образом выражаться через i_2, p и h :

$$\begin{aligned} d' &= p \delta i_2 + p \delta h \delta i_2 + \dots, & i'_2 &= i_2 + h \delta i_2 + h \delta h \delta i_2 + \dots, \\ p' &= p + p \delta h + p \delta h \delta h + \dots, & h' &= h + h \delta h + h \delta h \delta h + \dots. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим прежде всего, что в нашем случае отображение p на самом деле коммутирует с кобар-дифференциалом δ , поэтому из приведенных формул следует, что $d' = \delta$ и $i'_2 = i_2$. Поэтому отображение p' будет гомотопически-обратным вложению i_2 из леммы 6. Именно оно нам и нужно. В самом деле, пусть α – произвольный коцикл в $W(\mathfrak{gl}_n)$. Тогда элементу $p'(i_1(\alpha)) \in F(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n))$ будет соответствовать при изоморфизме леммы 6 тот же класс когомологий, что и α , а разность между $i_1(\alpha)$ и $i_2(p'(i_1(\alpha)))$ будет равна дифференциалу от $h'(\alpha)$.

Так как условие $p \circ i_2 = Id$ в рассматриваемом случае, очевидно, выполнено, то нам надо только найти гомотопию h , удовлетворяющую условиям (23). Так как в доступной литературе примеров стягивающих гомотопий алгебры $W(\mathfrak{gl}_n)$ обнаружить не удалось, мы приведем конструкцию такой гомотопии целиком. К тому же она позволит читателю проследить за проводимыми вычислениями.

Для того чтобы построить стягивающую гомотопию, рассмотрим вспомогательную DG-алгебру $\widetilde{W}(\mathfrak{gl}_n)$, порожденную, как и $W(\mathfrak{gl}_n)$, двумя типами элементов: $\tilde{a}^{ij}$ и $\tilde{f}^{ij}$ размерностей один и два соответственно, но с другим дифференциалом:

$$\tilde{\partial} \tilde{a}^{ij} = \tilde{f}^{ij}, \quad \tilde{\partial} \tilde{f}^{ij} = 0.$$

Для произвольного однородного элемента x алгебры $\widetilde{W}(\mathfrak{gl}_n)$ назовем его весом количество сомножителей вида $\tilde{a}^{ij}$ или $\tilde{f}^{ij}$ в представляющем его мономе. Обозначим вес элемента x символом $w(x)$.

Алгебра $\widetilde{W}(\mathfrak{gl}_n)$ очевидным образом стягиваема. Стягивающая гомотопия $\tilde{h}$ задается как композиция дифференцирования $\tilde{\partial}$, равного на образующих элементах

$$\tilde{h}(\tilde{a}^{ij}) = 0, \quad \tilde{h}(\tilde{f}^{ij}) = a^{ij},$$

и линейного отображения $n: \widetilde{W}(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow \widetilde{W}(\mathfrak{gl}_n)$, переводящего однородный элемент x в $x/w(x)$. Конечно, $\widetilde{h}(1) = 0$. С другой стороны, алгебра Вейля $W(\mathfrak{gl}_n)$ изоморфна алгебре $\widetilde{W}(\mathfrak{gl}_n)$. Изоморфизм задается отображением s , равном на образующих

$$s(a^{ij}) = \widetilde{a}^{ij}, \quad s(f^{ij}) = \widetilde{f}^{ij} - \widetilde{a}^{ik} \widetilde{a}^{kj}.$$

Несложно проверить, что $\widetilde{\partial}s = s\partial$. Также несложно описать обратный к s изоморфизм: на образующих он должен задаваться формулами

$$s^{-1}(\widetilde{a}^{ij}) = a^{ij}, \quad s^{-1}(\widetilde{f}^{ij}) = f^{ij} + a^{ik} a^{kj}.$$

Положим $h = s^{-1} \circ \widetilde{h} \circ s$. То, что получившееся отображение – стягивающая гомотопия для $W(\mathfrak{gl}_n)$, – очевидное следствие из аналогичного утверждения для $\widetilde{W}(\mathfrak{gl}_n)$. Проверим оставшиеся условия. Действительно, $h \circ h = s^{-1} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{h} \circ s = 0$, так как это верно для $\widetilde{h}$ (следует из определения). Также имеем $h(1) = s^{-1}(\widetilde{h}(1)) = 0$ и $p \circ h = 0$, потому что образ h не содержит единицы алгебры $W(\mathfrak{gl}_n)$.

Интересным следствием предложенной конструкции является следующая

ТЕОРЕМА 8. *Для любого характеристического класса x главного GL_n -расслоения P соответствующий ему коцикл $\widetilde{x}$ можно выбрать таким образом, что он будет сосредоточен строго над первой строкой бикомплекса (4), и если $x = ch(\alpha)$, $\alpha \in W(\mathfrak{gl}_n)^{\text{bas}}$, причем в полиноме от a^{ij} и f^{kl} , выражающем α , не содержится мономов с более чем p переменными f^{ij} , то $\widetilde{x}$ можно выбрать не выше p -й строки этого же бикомплекса. В частности, если в выражении для α содержатся только элементы f^{kl} (например, x – класс Чженя), то коцикл $\widetilde{x}$ будет сосредоточен не выше диагонали бикомплекса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ϕ_1 принимает значения во второй строке бикомплекса $\check{C}_{\mathcal{W}}^p(X; \Omega^q)$, а введенное умножение (5) является биградуированным, то первое утверждение очевидно. Возможность выбрать элемент $\widetilde{x}$ не выше строки с номером p следует из описания проекции p' (см. формулы (24)). В самом деле, введем в комплексе Вейля вспомогательную фильтрацию – количество сомножителей f^{kl} – и заметим, что построенная нами гомотопия h уменьшает эту фильтрацию на единицу.

Осталось привести пример формул, которые могут быть получены при использовании нашей конструкции. Рассмотрим элемент

$$\text{Tr}(f^3) \in W(\mathfrak{gl}_n), \quad \text{Tr}(f^3) = \sum_{i,j,k} f^{ij} f^{jk} f^{ki}.$$

Как несложно заметить, этот элемент является базисным, причем при гомоморфизме Вейля он дает третью степенную сумму c_3 . Применяя к нему отображение $p' \circ i_1$, получим следующий элемент:

$$\begin{aligned} c_3^{\otimes} &= \frac{1}{10} [\omega^{ij} \wedge \omega^{jk} \wedge \omega^{kl} \wedge \omega^{lm} \wedge \omega^{mi}] - \frac{1}{2} [\omega^{ij} \wedge \omega^{jk} \wedge \omega^{kl} \otimes \widetilde{\omega}^{li}] \\ &\quad + \frac{1}{6} [\omega^{ij} \wedge \omega^{jk} \wedge \omega^{li} \otimes \widetilde{\omega}^{kl}] - \frac{1}{6} [\omega^{ij} \wedge \omega^{kl} \wedge \omega^{li} \otimes \widetilde{\omega}^{jk}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}[\omega^{ij} \wedge \omega^{jk} \otimes \tilde{\omega}^{kl} \wedge \tilde{\omega}^{li}] - \frac{1}{4}[\omega^{ij} \wedge \omega^{li} \otimes \tilde{\omega}^{jk} \wedge \tilde{\omega}^{kl}] \\
& + \frac{1}{4}[\omega^{ij} \wedge \omega^{kl} \otimes \tilde{\omega}^{jk} \wedge \tilde{\omega}^{li}] - \frac{1}{2}[\omega^{ij} \otimes \tilde{\omega}^{jk} \wedge \tilde{\omega}^{kl} \wedge \tilde{\omega}^{li}] \\
& - \frac{1}{2}[\omega^{ij} \otimes u^{jk} d(u^{-1})^{li} \otimes \tilde{\omega}^{kl}] + \frac{1}{2}[\omega^{ij} \otimes (u^{-1})^{li} du^{jk} \otimes \tilde{\omega}^{kl}],
\end{aligned}$$

для упрощения вычислений мы воспользовались формулами

$$u^{ik} \omega^{kl} (u^{-1})^{lj} = \tilde{\omega}^{ij}, \quad u^{ik} \tilde{\omega}^{kl} (u^{-1})^{lj} = \omega^{ij}.$$

При гомоморфизме $\phi_1^\otimes$ этот элемент переходит (с точностью до множителя) в следующее выражение (здесь $g_{\alpha\beta}(x)$ – коцикл, задающий расслоение P ; при вычислениях мы воспользовались тем, что для следов матриц выполняется равенство $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{10} \{ \text{Tr}((g_{\alpha\beta}^{-1}(x) dg_{\alpha\beta}(x))^{\wedge 5}) \}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \{ \text{Tr}((g_{\alpha\beta}^{-1}(x) dg_{\alpha\beta}(x))^{\wedge 3} dg_{\beta\gamma}(x) g_{\beta\gamma}^{-1}(x)) \}_{\alpha\beta\gamma} \\
& + \frac{1}{4} \{ \text{Tr}((g_{\alpha\beta}^{-1}(x) dg_{\alpha\beta}(x) dg_{\beta\gamma}(x) g_{\beta\gamma}^{-1}(x))^{\wedge 2}) \}_{\alpha\beta\gamma} \\
& - \frac{1}{2} \{ \text{Tr}(g_{\alpha\beta}^{-1}(x) dg_{\alpha\beta}(x) (dg_{\beta\gamma}(x) g_{\beta\gamma}^{-1}(x))^{\wedge 3}) \}_{\alpha\beta\gamma} \\
& - \frac{1}{2} \{ \text{Tr}(g_{\alpha\beta}^{-1}(x) dg_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) dg_{\gamma\delta}(x) g_{\gamma\delta}^{-1}(x) dg_{\beta\gamma}^{-1}(x)) \}_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
& + \frac{1}{2} \{ \text{Tr}(g_{\alpha\beta}^{-1}(x) dg_{\alpha\beta}(x) dg_{\beta\gamma}(x) dg_{\gamma\delta}(x) g_{\gamma\delta}^{-1}(x) g_{\beta\gamma}^{-1}(x)) \}_{\alpha\beta\gamma\delta}.
\end{aligned}$$

В заключение разберем следующий пример: вычислим явные выражения, в которые превращаются рассмотренные формулы в случае касательного расслоения (а точнее – расслоения реперов) над комплексной проективной плоскостью $\mathbb{C}P^2$. Как известно, для любого n в качестве карт на $\mathbb{C}P^n$ (а следовательно, и на его расслоении реперов) можно взять множества $U_i = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid z_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots, n$. На множестве U_i можно ввести следующие (комплексные) координаты:

$$x_j^i = \frac{z_{j-1}}{z_i}, \quad j < i, \quad x_j^i = \frac{z_j}{z_i}, \quad j > i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Функции замены координат в таком атласе будут определены на подмножествах $U_k \cap U_l = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid z_k \neq 0, z_l \neq 0\}$, $k < l$, и будут задаваться формулами:

$$x_j^k = \begin{cases} \frac{x_j^l}{x_{k+1}^l}, & j < k, \\ \frac{x_{j+1}^l}{x_{k+1}^l}, & k \leq j < l, \\ \frac{1}{x_{k+1}^l}, & j = l, \\ \frac{x_j^k}{x_{k+1}^l}, & l \leq j. \end{cases}$$

Как хорошо известно, из всех классов Чжэня на $\mathbb{C}P^2$ ненулевыми являются только c_1 и c_2 (это следует из размерностных соображений). Для упрощения выкладок обозначим координаты в карте U_i через $x^i, y^i, i = 0, 1, 2$. Тогда коцикл, соответствующий рассматриваемому расслоению, будет задаваться следующими тремя матричнозначными функциями (мы выписываем их в координатах x^i, y^i с меньшим индексом):

$$g_{01} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x^1}{\partial y^0} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^0} & \frac{\partial y^1}{\partial y^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x^0)^2} & 0 \\ -\frac{y^0}{(x^0)^2} & \frac{1}{x^0} \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$g_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^1} & -\frac{x^1}{(y^1)^2} \\ 0 & -\frac{1}{(y^1)^2} \end{pmatrix}, \quad g_{02} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(y^0)^2} \\ \frac{1}{y^0} & -\frac{x^0}{(y^0)^2} \end{pmatrix}.$$

Обратные матрицы тогда будут иметь следующий вид:

$$g_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} -(x^0)^2 & 0 \\ -y^0 x^0 & x^0 \end{pmatrix}, \quad g_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} y^1 & -x^1 y^1 \\ 0 & -(y^1)^2 \end{pmatrix}, \quad g_{02}^{-1} = \begin{pmatrix} -x^0 y^0 & y^0 \\ -(y^0)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим, например, $g_{01}^{-1} dg_{01}$:

$$g_{01}^{-1} dg_{01} = \begin{pmatrix} -(x^0)^2 & 0 \\ -y^0 x^0 & x^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2dx^0}{(x^0)^3} & 0 \\ \frac{2y^0 dx^0}{(x^0)^3} - \frac{dy^0}{(x^0)^2} & -\frac{dx^0}{(x^0)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2dx^0}{x^0} & 0 \\ -dy^0 & -\frac{dx^0}{x^0} \end{pmatrix}.$$

След этой матрицы равен $-3\frac{dx^0}{x^0} = -3d \log x^0$. Аналогично находим

$$\text{Tr}(g_{12}^{-1} dg_{12}) = -3d \log y^1, \quad \text{Tr}(g_{02}^{-1} dg_{02}) = -3d \log y^0.$$

В однородных координатах $(z_0 : z_1 : z_2)$ эти выражения равны соответственно

$$\frac{3dz_0}{z_0} - \frac{3dz_1}{z_1}, \quad \frac{3dz_1}{z_1} - \frac{3dz_2}{z_2}, \quad \frac{3dz_0}{z_0} - \frac{3dz_2}{z_2}.$$

Так как любое координатное (в терминах однородных координат) вложение $\mathbb{C}P^1$ в любое проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ размерности n должно переводить класс c_1 на $\mathbb{C}P^n$ в аналогичный класс на $\mathbb{C}P^1$, то мы заключаем, что на $\mathbb{C}P^n$ класс c_1 задается коциклом, с точностью до постоянного множителя, равного на пересечении $U_i \cap U_j, i < j$, выражению $\frac{dz_i}{z_i} - \frac{dz_j}{z_j}$.

Аналогичные вычисления показывают, что первое слагаемое

$$\{\text{Tr}((g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta})^{\wedge 3})\}$$

в выражении для c_2 тождественно зануляется (для $\mathbb{C}P^2$ это следует из размерностных соображений, но можно проверить, что то же самое выполняется и на $\mathbb{C}P^3$, а следовательно, и на всех $\mathbb{C}P^n$). Второе же слагаемое

$$\{\mathrm{Tr}(g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}dg_{\beta\gamma}g_{\beta\gamma}^{-1})\}$$

превращается (с точностью до множителя) в коцикл, равный на $U_{012} = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_i \neq 0, i = 0, 1, 2\}$ выражению $\frac{dx^0 dy^0}{x^0 y^0}$. В однородных координатах это выражение превращается в следующее:

$$\frac{dz_0 dz_1}{z_0 z_1} - \frac{dz_0 dz_2}{z_0 z_2} + \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2}.$$

Исходя из тех же соображений, что и раньше, заключаем, что на проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ класс c_2 будет задаваться чеховским 2-коциклом, равным на U_{ijk} , $i < j < k$, выражению (с точностью до постоянного множителя)

$$\frac{dz_i dz_j}{z_i z_j} - \frac{dz_i dz_k}{z_i z_k} + \frac{dz_j dz_k}{z_j z_k}.$$

§ 4. Добавление: косимплициальные алгебры и конструкция Ботта

В этом параграфе мы сравним нашу конструкцию локальных формул для характеристических классов с другой известной конструкцией, дающей тот же результат, – с конструкцией Ботта, см. [3], [4], позволяющей выразить характеристические классы через функции переклейки главного расслоения. А именно, мы покажем, что классы Ботта можно получить как образ при построенном нами отображении $\phi_1^\otimes$ неких коциклов в кобар-резольвенте, гомологичных данным характеристическим классам. Вопрос о явном совпадении этих коциклов с полученными в предыдущем параграфе здесь в общем случае не рассматривается.

Прежде всего опишем кратко эту конструкцию (см. последнюю главу книги Ботта и Ту [3]). Пусть $\{U_\alpha\}$ и $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathrm{GL}_n$ – атлас и функции переклейки, задающие расслоение P . Предположим, что $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$. В дальнейшем будем часто заменять мультииндекс $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ на символ $\mathbf{A}$. Рассмотрим следующую конструкцию: для произвольного $(n+1)$ -кратного пересечения $U_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \bigcap_{i=0}^n U_{\alpha_i}$ положим для сокращения обозначений

$$\theta_i^{\mathbf{A}} = g_{\alpha_0 \alpha_i}^{-1} dg_{\alpha_0 \alpha_i} \big|_{U_{\mathbf{A}}}.$$

Таким образом, $\theta_i^{\mathbf{A}}$, $i = 1, \dots, n$, является матричнозначной 1-формой на множестве $U_{\mathbf{A}}$. Введем формальные переменные t_i , $i = 1, \dots, n$, и составим линейную комбинацию форм θ_i :

$$\theta^{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^n t_i \theta_i^{\mathbf{A}}. \quad (25)$$

Форма $\theta^{\mathbf{A}}$ задана на декартовом произведении $U_{\mathbf{A}} \times \mathbb{R}^n$, где пространство $\mathbb{R}^n$ порождено переменными t_i . Рассмотрим теперь матричнозначную 2-форму

$$F^{\mathbf{A}} = d\theta^{\mathbf{A}} + \theta^{\mathbf{A}} \wedge \theta^{\mathbf{A}}. \quad (26)$$

В этой формуле дифференциал d берется по всем направлениям, включая формальные переменные t_i . Таким образом, $F^{\mathbf{A}}$ – 2-форма на $U_{\mathbf{A}} \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим теперь произвольную Ad -инвариантную симметрическую полилинейную функцию φ на $\mathfrak{gl}_n$, $\varphi: S^k \mathfrak{gl}_n \rightarrow \mathbb{R}$. По такой функции для каждого пересечения $U_{\mathbf{A}}$ можно построить $2k$ -форму на $U_{\mathbf{A}} \times \mathbb{R}^n$, рассматривая $\varphi(F^{\mathbf{A}}, \dots, F^{\mathbf{A}})$ (аргумент $F^{\mathbf{A}}$ встречается k раз). Теперь осталось сократить лишние переменные t_i и перейти к комплексу Чеха–де Рама. Для этого сначала ограничим формы $\varphi(F^{\mathbf{A}}, \dots, F^{\mathbf{A}})$ на подпространство $U_{\mathbf{A}} \times \Delta^n$, а потом проинтегрируем их вдоль слоя Δ^n . Здесь Δ^n – стандартный n -мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta^n = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geq 0, \sum t_i \leq 1 \right\}.$$

Таким образом, получаем набор форм $c_{\mathbf{A}}(\varphi)$ размерностей $2k - n$ на пересечениях $U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$. В работе [4] доказана следующая

ТЕОРЕМА 9. *Совокупность форм $\{c_{\mathbf{A}}(\varphi)\}_{\mathbf{A}}$ задает замкнутый элемент размерности n в комплексе Чеха $\{c_{\mathbf{A}}(\varphi)\}_{\mathbf{A}} \in \check{C}_{\mathcal{U}}^{2k}(X; \Omega)$ (замкнутый относительно полного дифференциала $d' + d''$). При переходе к когомологиям этот элемент соответствует классу Чжэня, построенному обычным способом по функции φ (с помощью выбора связности).*

Доказательство этой теоремы, которое мы приведем здесь, имеет то преимущество, что избранный нами подход можно применить и к кобар-конструкциям. Именно таким образом мы и покажем, что классы Ботта могут быть получены с помощью нашей скручивающей коцепи.

Пусть $A^\bullet = \{A^n\}$ – косимплициальная дифференциальная градуированная алгебра, т.е. последовательность дифференциальных градуированных алгебр A^n , $n \geq 0$, и их гомоморфизмов $\delta_i: A^{n-1} \rightarrow A^n$ (операторы (ко)граней) и $\sigma_j: A^{n+1} \rightarrow A^n$ (операторы (ко)вырождений), $i, j = 1, \dots, n$. При этом отображения δ_i, σ_j удовлетворяют стандартному набору соотношений (см., например, книгу [13]). Основным примером такой алгебры для нас является следующий: пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ – конечное открытое покрытие многообразия X (см. выше). Положим

$$\Omega_{\mathcal{U}}^n = \bigoplus_{\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n} \Omega(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}).$$

Здесь прямая сумма берется по всем возможным неубывающим последовательностям индексов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, включая последовательности с повторяющимися индексами; при этом умножение и дифференциал задаются почленно на элементах в прямой сумме. Гомоморфизмы δ_i задаются как прямая сумма ограничений дифференциальной формы ω , заданной на пересечении $U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}$, на пересечения на единицу большего числа окрестностей:

$$\delta_i(\omega) = \oplus \omega|_{U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \beta \alpha_{i+1} \dots \alpha_{n-1}}}.$$

Здесь сумма берется по всем индексам β , удовлетворяющим неравенству $\alpha_{i-1} \leq \beta \leq \alpha_i$ (именно в этом месте требуется предположение о конечности покрытия $\mathcal{U}$). Легко видеть, что эти отображения коммутируют с умножением и

дифференциалами. Аналогично, положим

$$\sigma_j(\omega)|_{\alpha'_0 \dots \alpha'_{j-1} \alpha'_{j+1} \dots \alpha'_n} = \begin{cases} \omega, & \alpha'_0 = \alpha_0, \dots, \\ & \alpha'_{j-1} = \alpha_{j-1}, \alpha'_{j+1} = \alpha_j = \alpha_{j+1}, \dots, \alpha'_n = \alpha_n; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

т.е. действие отображения σ_j заключается в том, что выбрасывается повторяющийся индекс α_j (если он повторяется) и форма рассматривается как форма, заданная на пересечении элементов покрытия, число которых на единицу меньше, чем было первоначально. То, что отображения δ_i, σ_j удовлетворяют симплициальным соотношениям, проверяется автоматически. Обозначим получившуюся косимплициальную алгебру через $\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet$. Отметим, что эту алгебру можно рассматривать как алгебру дифференциальных форм на симплициальном многообразии $\mathcal{N}\mathcal{U} = \{\mathcal{N}\mathcal{U}_p\}$, где

$$\mathcal{N}\mathcal{U}_p = \bigsqcup_{\mathbf{A}, |\mathbf{A}|=p} U_{\mathbf{A}}.$$

Для любой косимплициальной дифференциальной градуированной алгебры $A^\bullet$ можно определить два важных комплекса. Первый комплекс является приведенной реализацией $A^\bullet$ как косимплициального (ко)цепного комплекса (когда структура алгебры игнорируется), а именно:

$$|\mathcal{C}A^\bullet| = \prod_n \bar{A}^n.$$

Здесь $\bar{A}^n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(\sigma_i)$. При этом мы считаем, что размерность элементов из $\bar{A}^n$ повышена на n . Дифференциал в $|\mathcal{C}A^\bullet|$ равен комбинации дифференциалов $\delta = \sum_i (-1)^i \delta_i$ и собственных дифференциалов комплексов A^n (конечно, ограниченных на $\bar{A}^n$). Например, очевидно, что

$$|\mathcal{C}\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet| = \check{C}_{\mathcal{U}}^*(X; \Omega).$$

В данном случае нет разницы между прямым произведением и прямой суммой, так как мы предполагали, что рассматриваемое покрытие конечно.

Вторая конструкция (она является небольшой модификацией конструкции Дюпона; см., например, [14]) основана на использовании алгебры дифференциальных форм на симплексе. А именно, пусть $\{\Delta^n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность геометрических симплексов, рассматриваемая как косимплициальное пространство (операторы кограней и ковырождений задаются как вложения симплексов размерности n в симплексы на единицу большей размерности и как отображения, стягивающие одно из ребер симплекса, соответственно).

Заметим, что последовательность $\Omega^*(\Delta^p)$ алгебр форм де Рама на геометрических симплексах задает симплициальную коммутативную дифференциальную градуированную алгебру. На самом деле вместо всех дифференциальных форм на симплексе достаточно рассматривать только подалгебру полиномиальных форм $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_p^*\}_{p=0}^\infty$, где $\mathcal{A}_p^*$ – алгебра, свободно порожденная переменными $t_0, \dots, t_p$ и их дифференциалами $dt_0, \dots, dt_p$ (напомним, что мы работаем

с фиксированным основным полем характеристики нуль) по модулю соотношения $t_0 + t_1 + \dots + t_p = 1$ (соответственно $dt_1 + \dots + dt_p = 0$). Считаем, что переменные t_i имеют размерность нуль, а dt_i – размерность один, что задает градуировку на алгебре $\mathcal{A}_p^*$. Кроме того, на этой алгебре есть дифференциал d , однозначно определенный соотношением $d(t_i) = dt_i$ и правилом Лейбница. Заметим, что построенная алгебра соответствует представлению симплекса как множества точек $(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что $\sum t_i = 1$ и все переменные неотрицательны. Это представление эквивалентно использовавшемуся выше, но удобнее его, так как не выделяет никакой грани симплекса.

Введем на $\mathcal{A}_\bullet$ структуру симплициальной алгебры, положив

$$\partial_k(t_i) = \begin{cases} t_i, & i < k, \\ 0, & i = k, \\ t_{i-1}, & i > k, \end{cases} \quad s_j(t_i) = \begin{cases} t_i, & i < j, \\ t_i + t_{i+1}, & i = j, \\ t_{i+1}, & i > j. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь следующую конструкцию, которую будем называть *алгебраической реализацией* (или *реализацией Дюпона*) *косимплициальной алгебры* $A^\bullet$:

$$|\mathcal{A}A^\bullet| = \left\{ \{\omega_p \otimes \varphi_p\} \in \prod_{p=0}^{\infty} A^p \otimes \mathcal{A}_p^* \mid \vartheta^* \otimes 1(\{\omega_p \otimes \varphi_p\}) = 1 \otimes \vartheta_*(\{\omega_j \otimes \varphi_j\}) \right\},$$

где ϑ^* – одно (любое) из отображений σ_i, δ_j на $\{A^p\}$, а ϑ_* – соответствующее ему отображение s_i, ∂_j на $\mathcal{A}$.

Очевидно, что для любой косимплициальной алгебры $A^\bullet$ пространство $|\mathcal{A}A^\bullet|$ является алгеброй, причем если $A^\bullet$ – дифференциальная градуированная или коммутативная алгебра, то такой же будет и ее реализация.

Важным свойством указанных конструкций является то, что они эквивалентны с точки зрения когомологий. А именно, рассмотрим отображение

$$v = \prod_n \left(\text{Id} \otimes \int_{\Delta^n} \right) : |\mathcal{A}A^\bullet| \rightarrow |\mathcal{C}A^\bullet|,$$

задаваемое почленным интегрированием по симплексам в прямом произведении, задающем $|\mathcal{A}A^\bullet|$ (из определения “алгебраической реализации” следует, что образ интегрирования лежит в ядре операторов вырождения). Несложно проверить, используя формулу Стокса, что это отображение перестановочно с дифференциалами.

ЛЕММА 10. *Отображение v задает изоморфизм на когомологиях.*

Мы не будем приводить здесь подробное доказательство этого утверждения, а лишь наметим его. Прежде всего заметим, что комплекс $|\mathcal{C}A^\bullet|$ может быть получен с помощью конструкции, аналогичной $|\mathcal{A}A^\bullet|$: достаточно рассмотреть вместо алгебры $\mathcal{A}_p^*$ комплекс $\mathcal{C}_p^* = C^*(\Delta^p)$, т.е. комплекс симплициальных коцепей элементарного p -мерного симплекса. Рассмотрим вложение $\mathcal{C}_p^*$ в $\mathcal{A}_p^*$, переводящее характеристическую коцепь произвольной p -мерной гиперграницы, натянутой на вершины $A_{i_0} \dots A_{i_p}$, в форму

$$\frac{1}{p!} \sum_k (-1)^k dt_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dt_{i_k}} \wedge \dots \wedge dt_{i_p}.$$

Несложно заметить, что это отображение коммутирует со всеми структурными отображениями. Если задать отображение $w: |\mathcal{C}A^\bullet| \rightarrow |\mathcal{A}A^\bullet|$ при помощи указанного вложения, то простые вычисления показывают, что $vw = 1$. С другой стороны очевидно, что рассмотренное вложение $\mathcal{C}_p^* \rightarrow \mathcal{A}_p^*$ задает изоморфизм на когомологиях и, более того, можно построить гомотопию (коммутирующую со всеми симплициальными структурами), стягивающую $\mathcal{A}_p^*$ на образ этого вложения. Взяв композицию этого стягивания и тождественного отображения на алгебре $A^\bullet$, получаем требуемую гомотопию между wv и тождественным отображением на $|\mathcal{A}A^\bullet|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что используя умножение в симплициальных коцепях в $\mathcal{C}_p^*$, можно ввести умножение на $|\mathcal{C}A^\bullet|$. Тогда можно доказать, что построенный изоморфизм в когомологиях будет сохранять произведение.

Пусть теперь $A = \Omega_{\mathcal{U}}^\bullet$. Тогда алгебру $|\mathcal{A}A^\bullet|$ можно рассматривать как алгебру полиномиальных дифференциальных форм на реализации топологического симплициального многообразия $\mathcal{N}\mathcal{U}$. Проще всего представлять себе эту реализацию следующим образом: рассмотрим несвязное объединение всех открытых окрестностей, входящих в $\mathcal{U}$. Вклеим цилиндры $U_{\alpha\beta} \times \Delta^1$, соединяющие обе копии всех попарных пересечений $U_{\alpha\beta}$ в U_α и U_β . Далее вклеим двумерные симплексы по всем тройным пересечениям $U_{\alpha\beta\gamma}$ так, чтобы их граница отождествлялась с уже вклеенными частями. Действуя таким образом, получаем некоторое топологическое пространство $|\mathcal{N}\mathcal{U}|$, которое можно очевидным образом спроектировать на X (просто стягивая все вклеенные симплексы в точки). Несложно показать, что эта проекция является гомотопической эквивалентностью.

Пусть теперь $\mathcal{U}$ – тривиализующее покрытие векторного расслоения E над X (можно без ограничения общности рассматривать векторные расслоения вместо GL_n -расслоений). Рассмотрим обратный образ этого расслоения при описанной выше проекции $|\mathcal{N}\mathcal{U}|$ на X . Зададим матричнозначную форму θ на $|\mathcal{N}\mathcal{U}|$ (т.е. элемент $\mathrm{Mat}_n(|\mathcal{A}\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet|)$) как следующую последовательность

$$\theta_{bt} = \left\{ 0, \prod_{p \geq 1} \oplus_{\mathbf{A}, |\mathbf{A}|=p+1} \theta^{\mathbf{A}} \right\} \in \prod_{p=0}^{\infty} \Omega_{\mathcal{U}}^p \otimes \mathcal{A}_p^*.$$

Здесь для фиксированного p сумма берется по всем неубывающим мультииндексам $\mathbf{A} = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$, причем $p > 0$ и формы $\theta^{\mathbf{A}}$ задаются формулами (25) для $g_{\alpha\beta}$, определяющихся по расслоению E . Можно проверить, что для этой последовательности выполняются условия коммутации со структурными отображениями. При этом надо учесть, что по предположению на пересечении $U_{\mathbf{A}}$ расслоение тривиализовано с помощью тривиализации на U_{α_0} . В этом случае при переходе от одной карты индуцированного расслоения к другой для θ будет выполняться стандартный закон преобразований связности. Тогда θ_{bt} можно рассматривать как связность на обратном образе расслоения E на $|\mathcal{N}\mathcal{U}|$. В этом случае и форма F , заданная как набор форм $F^{\mathbf{A}}$ (см. формулы (26)), является кривизной связности θ_{bt} . В свою очередь, комбинация $c_{bt}(\varphi)$ форм $\varphi(F^{\mathbf{A}}, \dots, F^{\mathbf{A}})$ является аналогом форм Чженя. Осталось заметить, что коцепи Ботта являются образом $c_{bt}(\varphi)$ относительно отображения v , из чего следует утверждение теоремы 9.

Чтобы теперь сравнить конструкцию Ботта с конструкцией, определенной с помощью скручивающей коцепи, применим обе конструкции реализации $|\mathcal{A}A^\bullet|$ и $|\mathcal{C}A^\bullet|$ к косимплициальной алгебре $\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^\bullet$: $\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^p = \Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^{\otimes p}$, $p \geq 0$, кограни δ_i задаются формулами

$$\delta_i(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n-1}) = \begin{cases} 1 \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n-1}, & i = 0, \\ k_1 \otimes \cdots \otimes k_i^{(1)} \otimes k_i^{(2)} \otimes \cdots \otimes k_{n-1}, & i = 1, \dots, n-1, \\ k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n-1} \otimes 1, & i = n, \end{cases}$$

а ковырождения – формулами

$$\sigma_j(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) = \varepsilon(k_{j+1})k_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{k_{j+1}} \otimes \cdots \otimes k_{n+1}.$$

Заметим, что “обычная” реализация этого косимплициального комплекса совпадает с рассмотренной нами кобар-резольвентой $F(\Omega_{\text{poly}}^*(\text{GL}_n))$ коалгебры $\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)$. С другой стороны, рассмотрим отображение косимплициальных алгебр

$$\Phi: \Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^\bullet \rightarrow \Omega_{\mathcal{U}}^\bullet,$$

заданное формулой

$$\Phi(k_1 \otimes \cdots \otimes k_n)_{\mathbf{A}} = g_{\alpha_0 \alpha_1}^*(k_1) \wedge \cdots \wedge g_{\alpha_{n-1} \alpha_n}^*(k_n). \quad (27)$$

Несложно проверить, что это отображение коммутирует со всеми структурными отображениями, включая умножение. Следовательно, оно задает отображение на уровне “алгебраических реализаций”:

$$|\mathcal{A}\Phi|: |\mathcal{A}\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^\bullet| \rightarrow |\mathcal{A}\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet|. \quad (28)$$

Заметим, что, как видно из формулы (27), соответствующее Φ отображение на уровне “стандартных реализаций” $|\mathcal{C}\Phi|$ совпадает с построенным выше отображением $\phi_1^\otimes: F(\Omega_{\text{poly}}^*(\text{GL}_n)) \rightarrow \check{C}_{\mathcal{U}}(X; \Omega)$ (где ϕ_1 – рассматриваемая в этой статье скручивающая коцепь). Так как все используемые операции были канонически определены, то мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{A}\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^\bullet| & \xrightarrow{|\mathcal{A}\Phi|} & |\mathcal{A}\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet| \\ v \downarrow & & \downarrow v \\ F(\Omega_{\text{poly}}^*(\text{GL}_n)) & \xrightarrow{\phi^\otimes} & \check{C}_{\mathcal{U}}(X; \Omega). \end{array} \quad (29)$$

Применим теперь конструкцию Чжэня–Вейля к следующей “комбинаторной связности” на $|\mathcal{A}\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^\bullet|$:

$$\text{Mat}_n(|\mathcal{A}\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^\bullet|) \ni \theta_{\text{alg}} = \{\theta_{\text{alg}}^p\},$$

где элемент $\theta_{\text{alg}}^p \in \text{Mat}_n(\Omega_{\text{poly}}(\text{GL}_n)^{\otimes p} \otimes \mathcal{A}^p)$ задается формулой

$$(\theta_{\text{alg}}^p)_{ab} = \sum_{i=0}^p t_i(g^{-1}dg)_{ab}^{(1)} \otimes \cdots \otimes (g^{-1}dg)_{ab}^{(i)} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1.$$

Здесь в конце правой части этой формулы стоит $p - i$ единиц, $(g^{-1}dg)_{ab} = \sum_{c=1}^n u_{ac}^{-1} du_{cb}$, u_{ab} – матричные элементы, соответствующие элементам группы GL_n в выбранном базисе, а u_{ab}^{-1} – элементы обратной матрицы. При этом слагаемые, соответствующие $i < 2$, задаются формулами $\delta_{ab} 1 \otimes \cdots \otimes 1$, $i = 0$, и $(g^{-1}dg)_{ab} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ (единица встречается p и $p - 1$ раз соответственно). В частности, $\theta_{\text{alg}}^0 = I$ – единичная матрица и $\theta_{\text{alg}}^1 = g^{-1}dg$.

Заметим, что $|\mathcal{A}\Phi|(\theta_{\text{alg}}) = \theta_{bt}$. Поэтому если коцикл $c_{\text{alg}}(\varphi) \in |\mathcal{A}\Omega_{\text{poly}}(GL_n)^\bullet|$ получается из связности θ_{alg} и инвариантной полиномиальной функции φ на $\mathfrak{gl}_n$ с помощью конструкции Чженя–Вейля, то, применяя к нему отображение $|\mathcal{A}\Phi|$, мы получим построенный выше элемент $c_{bt}(\varphi)$. Таким образом,

$$\{c_A(\varphi)\}_A = v(c_{bt}(\varphi)) = v(|\mathcal{A}\Phi|(c_{\text{alg}}(\varphi))) = \phi^\otimes(v(c_{\text{alg}}(\varphi))).$$

Итак, элементы Ботта получаются применением скручивающей коцепи к элементам $v(c_{\text{alg}}(\varphi)) \in F(\Omega_{\text{poly}}(GL_n))$, что и требовалось доказать.

Автор выражает свою признательность Л. А. Алани за интерес к настоящей работе, а также А. А. Герасимову, без многочисленных обсуждений с которым результаты не были бы получены. Некоторые части этой статьи были написаны во время визитов автора в Математический институт Польской АН (IMPAN) в Варшаве, где он работал по программе “Некоммутативная геометрия и квантовые группы”, контракт № MKTD-СТ-2004-509794, и в Университет Колорадо. Автор выражает благодарность этим организациям за гостеприимство и прекрасные условия для работы.

Список литературы

- [1] M. Kapranov, “Rozansky–Witten invariants via Atiyah classes”, *Compositio Math.*, **115**:1 (1999), 71–113.
- [2] R. Bott, “Lectures on characteristic classes and foliations”, *Lectures on algebraic and differential topology*, Second Latin American School in Math. (Mexico City, 1971), Lecture Notes in Math., **279**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1972, 1–94.
- [3] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Grad. Texts in Math., **82**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [4] R. Bott, “On the Chern–Weil homomorphism and the continuous cohomology of Lie-groups”, *Advances in Math.*, **11**:3 (1973), 289–303.
- [5] D. Toledo, Y. L. L. Tong, “A parametrix for $\bar{\partial}$ and Riemann–Roch in Čech theory”, *Topology*, **15**:4 (1976), 273–301.
- [6] N. R. O’Brian, D. Toledo, Y. L. L. Tong, “The trace map and characteristic classes for coherent sheaves”, *Amer. J. Math.*, **103**:2 (1981), 225–252.
- [7] Э. Браун, “Скращенные тензорные произведения”, *Математика. Сб. пер.*, **6**:1 (1962), 33–59.
- [8] W. Shih, “Homologie des espaces fibrés”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **13** (1962), 93–176.
- [9] В. А. Смирнов, “Функтор D для скрещенных тензорных произведений”, *Матем. заметки*, **20**:4 (1976), 465–472; англ. пер.: V. A. Smirnov, “ D functor for tensor cross products”, *Math. Notes*, **20**:4 (1976), 819–823.
- [10] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Наука, Физматлит, М., 1995; англ. пер.: A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*, Barth, Leipzig, 1994.

- [11] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Math. Lecture Note Ser., Benjamin, New York, 1969.
- [12] В. А. Смирнов, *Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии*, Факториал, М., 2002; англ. пер.: V. A. Smirnov, *Simplicial and operad methods in algebraic topology*, Transl. Math. Monogr., **198**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [13] J. P. May, *Simplicial methods in algebraic topology*, U. Chicago, 1967.
- [14] J. L. Dupont, “Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles”, *Topology*, **15**:3 (1976), 233–245.

Г. И. Шарыгин (G. I. Sharygin)

Институт теоретической и экспериментальной физики

им. А. И. Алиханова, г. Москва

E-mail: sharygin@itep.ru

Поступила в редакцию

26.02.2008 и 17.06.2008