Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Складов, О точной константе в неравенстве Маркова для веса Лагерра, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 6, 109–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 06:59:27

УДК 517.518.862

В. П. Скляров

О точной константе в неравенстве Маркова для веса Лагерра

Доказано, что многочлен n -й степени, наименее уклоняющийся от нуля в равномерно взвешенной метрике с весом Лагерра, является экстремальным в неравенстве Маркова для нормы производной k -го порядка, причем соответствующая точная константа не превосходит числа

$$\frac{8^k n! k!}{(n-k)! (2k)!}.$$

При фиксированном порядке производной указанная граница остается асимптотически точной при $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: неравенство Маркова, взвешенные полиномиальные неравенства.

Работы братьев Марковых [1], [2] положили начало исследованиям, связанным с получением различных неравенств, позволяющих оценивать норму производной алгебраического многочлена с помощью нормы самого многочлена. Среди многочисленных обобщений неравенства А. А. Маркова, известного с 1884 года [3; гл. 5, § 2, теорема 3], выделим следующие два: неравенство Маркова

$$\|\rho(x)p^{(k)}(x)\| \leq M_n^k \|\rho(x)p(x)\| \quad (1)$$

и неравенство типа Маркова

$$\|(\rho(x)p(x))^{(k)}\| \leq m_n^k \|\rho(x)p(x)\|. \quad (2)$$

Очевидно, что

$$M_n^k = \sup_{p \in P_n, p \neq 0} \frac{\|\rho(x)p^{(k)}(x)\|}{\|\rho(x)p(x)\|}, \quad m_n^k = \sup_{p \in P_n, p \neq 0} \frac{\|(\rho(x)p(x))^{(k)}\|}{\|\rho(x)p(x)\|}. \quad (3)$$

Везде далее P_n – множество алгебраических многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n , $p \in P_n$. Весовую функцию $\rho(x) = e^{-x}$ будем называть *весом Лагерра*, а функцию $\rho(x) = e^{-x^2}$ – *весом Эрмита*. Будем считать, если это не оговорено особо, что норма задана равенством $\|f\| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$, а $\rho(x)$ – вес Лагерра. Использование общих обозначений позволяет в дальнейшем сократить запись, а также сформулировать некоторые утверждения так, чтобы их можно было легко распространить на случай других весов и других числовых промежутков (последнее относится в основном к приведенным ниже леммам 4–6). Отметим, что для случая конечного отрезка, $\rho(x) \equiv 1$ и $k = 1$, утверждение леммы 4 приведено в [1].

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2970.2008.1).

Алгебраический многочлен $T_*(x) = x^n + a_{n-1}^*x^{n-1} + \dots + a_0^*$ такой, что

$$\|\rho(x)T_*(x)\| = \inf_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}} \|\rho(x)(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0)\|, \quad (4)$$

будем называть *многочленом, наименее уклоняющимся от нуля*. Очевидно, что для $\rho(x) \equiv 1$ и нормы, равномерной на отрезке $[-1, 1]$, этот многочлен будет совпадать с чебышёвским многочленом первого рода

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cdot \arccos(x)).$$

Вероятно, первая оценка вида $M_n^1 \leq Cn$ была получена Г. Сегё [4] в 1964 г. Позднее Г. Фройд [5] доказал неравенство

$$\|p'(x)x^{1/2}e^{-x}\| \leq C_1\sqrt{n}\|p(x)e^{-x}\|,$$

не совпадающее по форме с (1), но позволяющее уточнить границу для производной многочлена вне окрестности нуля. Доказанное в 1983 г. В. М. Федоровым [6] неравенство

$$\left\| p'(x) \left(x + \frac{1}{n} \right)^{\gamma+1/2} e^{-x} \right\| \leq C_2\sqrt{n} \left\| p(x) \left(x + \frac{1}{n} \right)^{\gamma} e^{-x} \right\|$$

при $\gamma = 0$ позволило получить упомянутые выше результаты Сегё и Фройда как частные случаи. В [7], [8] была получена оценка

$$\sup_{x \in (-\infty, \infty)} |p'(x)e^{-|x|}| \leq C_3 \ln(n+1) \sup_{x \in (-\infty, \infty)} |p(x)e^{-|x|}|.$$

Таким образом, учитывая утверждения доказанной далее теоремы 3, нетрудно заметить, что неравенства Маркова для веса $\rho(x) = e^{-|x|}$ на вещественной оси и полуоси принципиально различны.

Для неравенств типа Маркова, веса Эрмита и нормы, равномерной на всей вещественной оси, веса Лагерра и нормы, равномерной на полуоси, в работах [9]–[11] было установлено, что экстремальным многочленом будет многочлен, соответствующий рассматриваемому весу, наименее уклоняющийся от нуля. Вопрос об экстремальном многочлене для этих же метрик и неравенств Маркова, насколько известно автору, ранее не рассматривался.

В [12] приведен алгоритм нахождения точных множителей в неравенствах типа Маркова для указанных выше весов, не использующий известного алгоритма Н. Я. Ремеза.

Завершая вводную часть, заметим, что исследования, связанные с неравенствами (1), (2) в метриках, отличных от равномерной, весьма многочисленны (см. подробности в [13]–[15]).

Поскольку в нашем случае единичная сфера в подпространстве алгебраических многочленов степени не выше n компактна, то экстремальный многочлен, реализующий первое из равенств (3), существует. Обозначим его через $p_*(x)$. Пусть x_* – крайний правый корень уравнения $|\rho(x)p_*(x)| = \|\rho(x)p_*(x)\|$. Он существует, так как известно, что множество таких корней имеет правую границу (см. [16; теорема 2.1]). Крайний левый корень уравнения $|\rho(x)p_*^{(k)}(x)| = \|\rho(x)p_*^{(k)}(x)\|$ обозначим через s_* . Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *У любого многочлена, который является экстремальным для первого из равенств (3), точки s_* , x_* удовлетворяют неравенству $s_* \leq x_*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(x, h) = p(x + h)$. Тогда

$$\|\rho(x)p(x, h)\| = e^h \sup_{x \geq h} |\rho(x)p(x)|.$$

Предположим противное, т.е. что $s_* > x_*$. Тогда

$$\frac{\|\rho(x)p_*^{(k)}(x)\|}{\|\rho(x)p_*(x)\|} = M_n^k \geq \frac{\|\rho(x)p_*^{(k)}(x, s_*)\|}{\|\rho(x)p_*(x, s_*)\|} = \frac{\sup_{x \geq s_*} |\rho(x)p_*^{(k)}(x)|}{\sup_{x \geq s_*} |\rho(x)p_*(x)|}.$$

Сравнивая первую и последнюю дроби, легко заметить, что числители у них совпадают, а знаменатель второй строго меньше, чем знаменатель первой. Получаем противоречие. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Среди многочленов, экстремальных для первого из равенств (3), найдется такой, что $|p_*^{(k)}(0)| = \|\rho(x)p_*^{(k)}(x)\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, существует хотя бы один экстремальный многочлен $p_*(x)$. Если для него $s_* > 0$, то, используя операцию сдвига так же, как и в доказательстве леммы 1, замечаем, что $p_*(x + s_*)$ будет искомым. Лемма 2 доказана.

Справедливость аналогичного утверждения для неравенства типа Маркова отмечена в [11].

ЛЕММА 3. Для любого отрезка $[a, b]$ при фиксированных $\xi \notin (a, b)$ и $k = 1, 2, \dots, n$ набор функций

$$1, \quad x - \xi, \quad (x - \xi)^2, \quad \dots, \quad (x - \xi)^{k-1}, \quad (x - \xi)^{k+1}, \quad \dots, \quad (x - \xi)^n$$

является чебышёвским на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = n$ утверждение леммы очевидно. Для $1 \leq k \leq n - 1$ предположим противное, т.е. что многочлен вида $p(x) + q(x)(x - \xi)^{k+1}$ при $p \in P_{k-1}$ и $q \in P_{n-k-1}$ имеет на отрезке $[a, b]$, по крайней мере, n различных вещественных корней. Тогда производная порядка k для этого многочлена будет иметь вид $g(x)(x - \xi)$ при $g \in P_{n-k-1}$. По теореме Ролля все $n - k$ корней этой производной должны лежать строго внутри $[a, b]$. Однако последнее невозможно. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть K – произвольный вещественный компакт, весовая функция $\rho(x)$ положительна на K , а норма задана равенством

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Если алгебраический многочлен $T_*(x) = x^n + a_{n-1}^*x^{n-1} + \dots + a_0^*$ таков, что

$$\|\rho(x)T_*(x)\|_K = \inf_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}} \|\rho(x)(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0)\|_K, \quad (5)$$

и точки $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n$ образуют чебышёвский альтернанс, то для всякого $\xi \notin (\xi_0, \xi_n)$ имеет место

$$\frac{|T_*^{(k)}(\xi)|}{\|\rho T_*\|_K} = \sup_{p \in P_n, p \neq 0} \frac{|p^{(k)}(\xi)|}{\|\rho p\|_K} := M_n^k(\xi). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что для некоторого $\xi \notin (\xi_0, \xi_n)$ существует $p_* \in P_n$ такой, что

$$\frac{|T_*^{(k)}(\xi)|}{\|\rho T_*\|_K} < \frac{|p_*^{(k)}(\xi)|}{\|\rho p_*\|_K}.$$

Тогда у функций $\rho(x)T_*(x)/T_*^{(k)}(\xi)$ и $\rho(x)p_*(x)/p_*^{(k)}(\xi)$ должно быть в границах альтернанса не менее n общих точек, так как первая из них обладает альтернансом, состоящим из $n+1$ точки. Легко заметить, что разность

$$\frac{T_*(x)}{T_*^{(k)}(\xi)} - \frac{p_*(x)}{p_*^{(k)}(\xi)}$$

есть линейная комбинация функций, указанных в лемме 3, поскольку она является алгебраическим многочленом, у которого производная k -го порядка в точке ξ обращается в нуль и, следовательно, принадлежит n -мерному чебышёвскому подпространству и имеет n нулей. Поэтому оба этих многочлена должны совпасть. Получено противоречие. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. В условиях леммы 4 для равенства (6) справедлив аналог теоремы Валле Пуссена [17; гл. 1, § 3, теорема 4], т.е. для любого многочлена $q \in P_n$, у которого $q^{(k)}(\xi) \neq 0$, и произвольного набора точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ из множества $K \cap [\xi_0, \xi_n]$ таких, что $q(x_i)q(x_{i+1}) < 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, верна следующая оценка:

$$M_n^k(\xi) \leq \frac{|q^{(k)}(\xi)|}{\min_{0 \leq i \leq n} |\rho(x_i)q(x_i)|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$M_n^k(\xi) = \sup_{p \in P_n, p \neq 0} \frac{|p^{(k)}(\xi)|}{\|\rho p\|_K} = \frac{1}{\inf_{p \in P_n, p^{(k)}(\xi)=1} \|\rho p\|_K} := \frac{1}{E_n^k(\xi)}. \quad (7)$$

Таким образом, требуется оценить снизу величину наилучшего приближения $E_n^k(\xi)$ функции $f(x) := (x - \xi)^k/k!$, используя элементы конечномерного подпространства, базис в котором образуют функции из леммы 3. Обозначим их для краткости через $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Чтобы воспользоваться утверждением упомянутой выше теоремы Валле Пуссена, введем дополнительные обозначения. Пусть C_n – подпространство, образованное всевозможными линейными комбинациями функций $\varphi_i(x)$. Очевидно, что $E_n(f) := \inf_{p \in C_n} \|\rho(x)[f(x) - p(x)]\|_K = E_n^k(\xi)$. Следуя [17], положим

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_2(x_{i-1}) & \dots & \varphi_n(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x_{i+1}) & \varphi_2(x_{i+1}) & \dots & \varphi_n(x_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

$$\rho(x_i) \frac{q(x_i)}{|q^{(k)}(\xi)|} = \rho(x_i)[f(x_i) - \varphi(x_i)] = A_i,$$

$$\varphi \in C_n, \quad \min_i |A_i| = A, \quad \delta_i = \Delta_i A_i.$$

Теорема Валле Пуссена гарантирует, что чередование знаков чисел δ_i влечет выполнение неравенства $E_n(f) \geq A$. Так как точки $x_i \in [\xi_0, \xi_n]$ занумерованы в порядке возрастания, а система функций φ_i – чебышёвская на отрезке $[\xi_0, \xi_n]$, то все определители Δ_i имеют один и тот же знак (см. [17; гл. 1, § 3, замечание перед теоремой 6]). Из этого следует возможность применения теоремы Валле Пуссена к рассматриваемому случаю. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $K = \langle a, b \rangle$ – произвольный промежуток вещественной оси, n, k – фиксированные натуральные числа, причем n любое, а $k \in [1, n]$, $\rho(x)$ – непрерывная функция, положительная на внутренности промежутка $\langle a, b \rangle$, удовлетворяющая для неограниченного промежутка дополнительным условиям: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x)x^n = 0$ при $a = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x)x^n = 0$ при $b = \infty$. Пусть многочлен T_* определен равенством (5). Тогда

а) при сделанных предположениях остаются справедливыми утверждения лемм 4 и 5;

б) если среди многочленов, экстремальных для неравенства Маркова (1), найдется многочлен $p_* \in P_n$ такой, что в число корней уравнения

$$|\rho(x)p_*^{(k)}(x)| = \|\rho p_*^{(k)}\|_K$$

попадает хотя бы одна крайняя точка чебышёвского альтернанса для T_* , то T_* также будет экстремальным многочленом в неравенстве Маркова для k -ой производной, т.е.

$$M_n^k = \frac{\|\rho T_*^{(k)}\|_K}{\|\rho T_*\|_K}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что утверждение а) этой леммы нуждается в доказательстве лишь в случае либо неограниченного промежутка, либо выполнения хотя бы одного из равенств $\rho(a) = \rho(b) = 0$. Поскольку (см. [18; теорема 3]) и в том, и в другом случае для любого $p \in P_n$ верно равенство $\|\rho p\|_K = \|\rho p\|_{[\xi_0, \xi_n]}$, то множество K можно заменить конечным отрезком, для которого выполнены все условия леммы 4.

Для доказательства утверждения б) предположим, что, например, в крайней левой точке альтернанса выполняется равенство $|\rho(\xi_0)p_*^{(k)}(\xi_0)| = \|\rho p_*^{(k)}\|_K$. Тогда с помощью леммы 4 получаем следующую очевидную цепочку неравенств:

$$\frac{\|\rho T_*^{(k)}\|_K}{\|\rho T_*\|_K} \leq M_n^k = \frac{|\rho(\xi_0)p_*^{(k)}(\xi_0)|}{\|\rho p_*\|_K} \leq M_n^k(\xi_0) = \frac{|T_*^{(k)}(\xi_0)|}{\|\rho T_*\|_K} \leq \frac{\|\rho T_*^{(k)}\|_K}{\|\rho T_*\|_K}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения б). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В неравенстве Маркова для веса Лагерра и равномерно взвешенной на полуоси нормы экстремальным будет многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, т.е. для всякого многочлена $p \in P_n$ и любого $k = 1, \dots, n$ выполняется неравенство

$$\|p^{(k)}(x)e^{-x}\| \leq \frac{\|T_*^{(k)}(x)e^{-x}\|}{\|T_*(x)e^{-x}\|} \|p(x)e^{-x}\|,$$

в котором полином T_* определен с помощью равенства (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сослаться на леммы 2 и 6.

ТЕОРЕМА 1. *В случае веса Лагерра все коэффициенты $a_k^* = T_*^{(k)}(0)/k!$ многочлена T_* , наименее уклоняющегося от нуля, не равны нулю и справедливо равенство*

$$M_n^k = k! \left| \frac{a_k^*}{a_0^*} \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теорем Чебышёва об альтернансе многочлен $T_*(x)$ имеет ровно n положительных корней, поэтому, используя теорему Ролля, легко заметить, что все корни $(T_*(x))^{(k)}$ также вещественны и положительны. Следовательно, $a_k^* \neq 0$, $k \geq 1$. Пусть крайняя левая точка ξ_0 чебышёвского альтернанса для $T_*(x)$ строго положительна. Тогда все точки альтернанса внутренние и, следовательно, они являются нулями функции $[\rho(x)T_*(x)]' = \rho(x)[-x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0]$. Последнее невозможно, так как в альтернансе $n+1$ точка. Значит, одна из них должна быть граничной. Поэтому $\xi_0 = 0$ и

$$|a_0^*| = \|\rho(x)T_*(x)\| > 0.$$

Ссылка на лемму 2 и следствие 1 позволяет завершить доказательство теоремы 1.

Из результатов работы [11] следует, что для точных констант m_n^k в неравенстве типа Маркова для веса Лагерра имеет место равенство

$$m_n^k = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu C_k^\nu \frac{\nu! a_\nu^*}{a_0^*}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для точных констант в неравенстве Маркова и неравенстве типа Маркова справедливо соотношение $m_n^k = 1 + \sum_{\nu=1}^k C_k^\nu M_n^\nu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае экстремальный многочлен имеет простые вещественные корни, число которых совпадает с его степенью. Поэтому вне любого отрезка, содержащего все эти корни, его производная сохраняет знак. Следовательно, $a_0^* a_1^* < 0$. Применяя индукцию по порядку производной, нетрудно заметить, что при $k = 1, \dots, n$ имеют место неравенства $a_{k-1}^* a_k^* < 0$. Поэтому $\text{sign}(a_0^* a_k^*) = (-1)^k$. Следствие 2 доказано.

ТЕОРЕМА 2. *Для точной константы M_n^k в неравенстве Маркова для веса Лагерра справедлива следующая оценка сверху:*

$$M_n^k \leq \frac{8^k n! k!}{(n-k)! (2k)!} := \widehat{M}_n^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(x) = H_{2n}(\sqrt{2x})$, где $H_n(x)$ – многочлен Эрмита степени n . Известно явное представление этих многочленов [19; гл. 5, § 5.5, равенство 5.5.4]:

$$H_{2n}(x) = (2n)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2x)^{2(n-k)}}{(2n-2k)!}. \quad (8)$$

Известно также, что последовательность локальных максимумов функции

$$|H_n(x)|e^{-x^2/2}$$

возрастает на правой половине вещественной оси [19; гл. 7, теорема 7.6.3]. Поэтому точно так же будут вести себя и локальные максимумы функции $|p(x)|e^{-x}$. С помощью (8) находим, что

$$p(x) = (2n)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{(n-k)}}{(n-k)!} \frac{(8x)^k}{(2k)!} := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Очевидно, что набор точек x_i , о которых идет речь в лемме 5, можно выбрать среди корней уравнения $|\rho(x)p(x)| = |p(0)|$ так, чтобы все они лежали в границах альтернанса. Поэтому получаем

$$\frac{1}{M_n^k} = E_n^k(0) \geq \left| \frac{a_0}{k! a_k} \right| = \frac{(n-k)! (2k)!}{8^k n! k!}.$$

Теорема 2 доказана.

В работе [12] приведены значения точных констант в неравенствах типа Маркова для веса Лагерра, найденные численно без использования алгоритма Н. Я. Ремеза. Множители m_n^k в таблице 1 были найдены с помощью указанного выше алгоритма и совпали с величинами из [12]. Отметим, что основная часть машинных вычислений, проделанных автором, не была подготовлена специально для этой работы, а использована примерно десять лет назад при исследовании некоторых экстремальных свойств чебышёвского альтернанса многочлена, наименее уклоняющегося от нуля [18]. Алгоритм Ремеза использовался для построения многочлена $T_*(x)$, значения которого восстанавливались с помощью лагранжевой интерполяции и узлов в точках альтернанса. При вычислении точных множителей в неравенствах Маркова численное дифференцирование не применялось, а находились величины соответствующих коэффициентов многочленов. Дополнительно было проверено, что машинные значения $T_*(x)$, восстановленные с помощью альтернанса и коэффициентов, совпадают.

Поведение отношений $M_n^k / \widehat{M}_n^k := \delta_n^k$ в таблице 2 позволяет высказать предположение, что утверждение теоремы 2 дает асимптотически точную оценку константы в неравенстве Маркова.

ТЕОРЕМА 3. *Для точной константы M_n^k в неравенстве Маркова справедлива оценка*

$$M_n^k \geq \frac{8^k n! k!}{(n-k)! (2k)!} \left(1 - \frac{k}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$p(x) = H'_{2n-1}(\sqrt{2x}) - \sqrt{2x} H_{2n-1}(\sqrt{2x}).$$

В работе [20; лемма 1, п. 3]) было замечено, что абсолютные величины относительных экстремумов функций $(H_n(x)e^{-x^2/2})'$ убывают на правой половине вещественной оси. Поэтому точно так же будут вести себя локальные экстремумы функции $p(x)e^{-x}$. Следовательно, $|p(0)| = \|\rho(x)p(x)\|$. Таким образом,

Таблица 1

n	m_n^1	m_n^2	m_n^3	m_n^4	m_n^5	m_n^6
1	4.59112	8.18224	11.77336	15.36449	18.955607	22.5467289
2	8.46860	25.1574	51.06634	86.19549	130.54481	184.114316
3	12.4060	52.5873	143.2040	305.9160	562.38325	934.265769
4	16.3663	90.5857	313.5115	823.7976	1808.8999	3505.07344
5	20.3383	139.191	587.4548	1847.266	4760.2967	10635.0575
6	24.3170	198.420	990.5443	3642.051	10832.047	27573.1851
7	28.3001	268.283	1548.313	6532.243	22094.563	63365.6790
8	32.2863	348.788	2286.306	10900.33	41402.937	132425.857
9	36.2746	439.938	3230.081	17187.20	72526.754	256387.146
10	40.2646	541.737	4405.199	25892.19	120279.92	466239.369
11	44.2559	654.187	5837.228	37573.06	190650.57	804748.389
12	48.2482	777.290	7551.739	52846.06	290930.89	1329159.15
13	52.2414	911.047	9574.309	72385.84	429847.12	2114182.16
14	56.2352	1055.46	11930.51	96925.58	617689.42	3255263.47
15	60.2296	1210.53	14645.93	127256.9	866441.83	4872138.12
16	64.2245	1376.26	17746.15	164229.8	1189912.2	7112667.15
17	68.2198	1552.64	21256.74	208753.0	1603862.2	10156958.1
18	72.2155	1739.69	25203.30	261793.5	2126137.1	14221769.2
19	76.2115	1937.39	29611.41	324376.8	2776796.1	19565196.7
20	80.2078	2145.76	34506.66	397587.0	3578241.9	26491646.7

$M_n^k \geq |p^{(k)}(0)/p(0)|$. Явные представления для многочленов Эрмита [19; гл. 5, § 5.5, равенство 5.5.4] легко приводят к следующим равенствам:

$$H_{2n-2}(\sqrt{2x}) = (2n-2)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(n-k-1)}}{(n-k-1)!} \frac{(8x)^k}{(2k)!},$$

$$\sqrt{2x}H_{2n-1}(\sqrt{2x}) = \frac{(2n-1)!}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(8x)^k}{(2k-1)!}.$$

Известно, что $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. Поэтому $p(x) = (4n-2)H_{2n-2}(\sqrt{2x}) - \sqrt{2x}H_{2n-1}(\sqrt{2x})$. Отсюда находим искомые значения в нуле:

$$|p(0)| = \frac{2n(2n-1)!}{n!},$$

$$|p^{(k)}(0)| = k! \left\{ \frac{2 \cdot 8^k (2n-1)!}{(n-k-1)! (2k)!} + \frac{8^k (2n-1)!}{2(n-k)! (2k-1)!} \right\}.$$

Простое деление полученных величин позволяет получить утверждение теоремы при $k = 1, 2, \dots, n-1$. Чтобы убедиться в справедливости теоремы при

Таблица 2

n	δ_n^1	δ_n^2	δ_n^3	δ_n^4	δ_n^5	δ_n^6	δ_n^7	δ_n^8
1	0.89778	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.93357	0.86439	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	0.95050	0.89923	0.84609	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	0.96039	0.91958	0.87747	0.83400	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	0.96691	0.93294	0.89804	0.86214	0.82519	0.00000	0.00000	0.00000
6	0.97154	0.94241	0.91257	0.88198	0.85059	0.81836	0.00000	0.00000
7	0.97500	0.94948	0.92340	0.89673	0.86944	0.84149	0.81286	0.00000
8	0.97770	0.95496	0.93178	0.90813	0.88398	0.85930	0.83409	0.80829
9	0.97985	0.95935	0.93847	0.91721	0.89554	0.87345	0.85091	0.82790
10	0.98162	0.96293	0.94394	0.92462	0.90497	0.88496	0.86458	0.84381
11	0.98309	0.96592	0.94849	0.93079	0.91280	0.89451	0.87590	0.85698
12	0.98434	0.96846	0.95235	0.93600	0.91941	0.90256	0.88545	0.86806
13	0.98541	0.97063	0.95565	0.94047	0.92507	0.90945	0.89360	0.87751
14	0.98634	0.97252	0.95852	0.94433	0.92997	0.91541	0.90064	0.88567
15	0.98716	0.97417	0.96103	0.94772	0.93425	0.92061	0.90679	0.89280
16	0.98788	0.97563	0.96324	0.95071	0.93803	0.92520	0.91221	0.89906
17	0.98853	0.97693	0.96522	0.95337	0.94139	0.92928	0.91702	0.90463
18	0.98910	0.97810	0.96698	0.95575	0.94440	0.93292	0.92133	0.90960
19	0.98963	0.97915	0.96858	0.95789	0.94711	0.93621	0.92519	0.91406
20	0.99010	0.98010	0.97002	0.95984	0.94956	0.93918	0.92869	0.91810

$k = n$, достаточно заметить, что

$$|p^{(n)}(0)| = \frac{8^n n!}{2}.$$

Теорема 3 доказана.

Таким образом, при фиксированном порядке производной верхняя граница для константы в неравенстве Маркова, найденная в теореме 2, асимптотически точна. Это остается верным, если $k = k_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (k_n/n) = 0$. В то же время поведение величин δ_n^k из таблицы 2 позволяет предположить, что стремление отношений $M_n^{k_n} / \widehat{M}_n^{k_n}$ к единице существенно зависит от скорости роста k_n .

Список литературы

- [1] А. А. Марков, “Об одном вопросе Д. И. Менделеева”, *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*, Гостехиздат, М.–Л., 1948, 51–75.
- [2] В. А. Марков, *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке*, Тип. Имп. АН, СПб, 1892.

- [3] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
- [4] G. Szegő, "On some problems of approximations", *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **9** (1964), 3–9.
- [5] G. Freud, "On two polynomial inequalities. I", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **22**:1–2 (1971), 109–116.
- [6] В. М. Федоров, "Конструктивная характеристика класса функций, удовлетворяющих условию Липшица на полуоси", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, № 2, 64–69; англ. пер.: V. M. Fedorov, "Constructive characteristics of functions satisfying a Lipschitz condition on a semiaxis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **38**:2 (1983), 80–85.
- [7] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, " L_∞ Markov and Bernstein inequalities for Freud weights", *SIAM J. Math. Anal.*, **21**:4 (1990), 1065–1082.
- [8] P. Nevai, V. Totik, "Weighted polynomial inequalities", *Constr. Approx.*, **2**:1 (1986), 113–127.
- [9] H. Carley, X. Li, R. N. Mohapatra, "A sharp inequality of Markov type for polynomials associated with Laguerre weight", *J. Approx. Theory*, **113**:2 (2001), 221–228.
- [10] X. Li, R. N. Mohapatra, R. S. Rodriguez, "On Markov's inequality on R for the Hermite weight", *J. Approx. Theory*, **75**:2 (1993), 115–129.
- [11] L. Milev, N. Naidenov, "Exact Markov inequalities for the Hermite and Laguerre weights", *J. Approx. Theory*, **138**:1 (2006), 87–96.
- [12] L. Milev, "Numerical computation of the Markov factors for the systems of polynomials with the Hermite and Laguerre weights", *Numerical methods and applications* (Borovets, Bulgaria, 2006), Lecture Notes in Comput. Sci., **4310**, Springer-Verlag, Berlin, 2007, 386–393.
- [13] P. Dörfler, "Asymptotics of the best constant in a certain Markov-type inequality", *J. Approx. Theory*, **114**:1 (2002), 84–97.
- [14] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Sci. Publ., Singapore–River Edge, NJ, 1994.
- [15] А. И. Аптекарев, А. Дро, В. А. Калягин, "Об асимптотике точных констант в неравенствах Маркова–Бернштейна в интегральных метриках с классическим весом", *УМН*, **55**:1 (2000), 173–174; англ. пер.: A. I. Aptekarev, A. Draux, V. A. Kalyagin, "On the asymptotics of sharp constants in Markov–Bernstein inequalities in integral metrics with classical weight", *Russian Math. Surveys*, **55**:1 (2000), 163–165.
- [16] H. N. Mhaskar, E. B. Saff, "Where does the sup norm of a weighted polynomial live? A generalization of incomplete polynomials", *Constr. Approx.*, **1**:1 (1985), 71–91.
- [17] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1977.
- [18] В. П. Скляров, "О бесконечно-конечных неравенствах, связанных с весом Лагерра", *Матем. заметки*, **70**:2 (2001), 260–269; англ. пер.: V. P. Sklyarov, "On infinite-finite inequalities related to the Laguerre weight", *Math. Notes*, **70**:1–2 (2001), 233–241.
- [19] Г. Церё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [20] В. П. Скляров, "О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа–Эрмита для неограниченных функций", *Anal. Math.*, **20**:4 (1994), 295–308.

В. П. Скляров (V. P. Sklyarov)

Механико-математический факультет
Саратовского государственного университета
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: sklyarovvp@sgu.ru

Поступила в редакцию
23.02.2008 и 01.12.2008