Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Кузнецова, Конструкции регулярных алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 2, 75–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:49:29

УДК 517.986.62

Ю. Н. Кузнецова

Конструкции регулярных алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$

Критерий регулярности (по Шилову) весовых алгебр $\mathcal{L}_1^w(G)$ на локально компактной абелевой группе G известен из работ А. Бёрлинга (1949 г.) и И. Домара (1956 г.). В настоящей работе критерий распространяется на инвариантные относительно сдвигов весовые алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ с показателем $p > 1$ и строятся регулярные алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ на любой σ -компактной абелевой группе G . Ранее автором было доказано, что σ -компактность группы является (в абелевом случае) необходимым условием для существования весовых алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$ при $p > 1$.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: абелева локально компактная группа, регулярная алгебра, алгебры Бёрлинга, весовые алгебры.

Введение

Регулярные алгебры, введенные Г. Е. Шиловым (см. [1], [2]), образуют важный подкласс коммутативных полупростых банаховых алгебр над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Напомним определение регулярной алгебры.

Если коммутативная банахова алгебра $\mathcal{A}$ полупроста, то отображение Гельфанда позволяет отождествить ее с подалгеброй в алгебре всех непрерывных функций на пространстве ее максимальных идеалов Σ , которое обычно отождествляется с множеством ненулевых гомоморфизмов из $\mathcal{A}$ в $\mathbb{C}$. Множество Σ также называют *спектром алгебры* $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ (не обязательно с единицей) называется *регулярной*, если соответствующая ей алгебра функций разделяет точки и замкнутые множества в Σ , т.е. если для любого замкнутого множества $F \subset \Sigma$ и точки $x \notin F$ найдется функция $f \in \mathcal{A}$, равная 0 на множестве F и 1 в точке x .

Регулярные алгебры многими своими свойствами похожи на алгебры $C(\Sigma)$ всех непрерывных функций на данном пространстве Σ (в противоположность алгебрам аналитических функций). Например, подобно лемме Урысона для любого замкнутого множества F_0 и компакта F_1 , $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, всегда найдется функция, равная 0 на F_0 и 1 на F_1 .

Идеалы в регулярных алгебрах не описываются так просто, как в алгебре $C(\Sigma)$, но все же демонстрируют некий порядок. Среди всех идеалов с данным множеством общих нулей F имеется наибольший (он состоит из всех функций, равных нулю на F) и наименьший идеал (последний состоит из функций, равных нулю в некоторой окрестности множества F). Каждый идеал либо имеет

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00867).

общий нуль, либо совпадает со всей алгеброй. Все эти результаты были получены Шиловым в [1].

Первым нетривиальным примером регулярной алгебры была алгебра суммируемых функций на прямой, а также весовые алгебры при определенных условиях на вес. Прежде чем продолжить обсуждение, приведем необходимые определения и обозначения.

Всюду G – локально компактная абелева группа, все интегралы берутся по фиксированной мере Хаара μ , $p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$ (при $p = 1$ считаем, что $q = \infty$). *Весом* называется любая положительная измеримая функция на группе G . Весовое пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ с весом w по определению состоит из тех функций, для которых $fw \in \mathcal{L}_p(G)$, а норма функции f полагается равной

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int |fw|^p \right)^{1/p}.$$

Индексы p, w в обозначении нормы иногда опускаются. Веса w_1, w_2 называются *подобными*, если локально почти всюду выполняется неравенство

$$0 < C_1 \leq \frac{w_1}{w_2} \leq C_2 < \infty, \quad (1)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы. Подобные веса задают одно и то же весовое пространство и эквивалентные нормы на нем.

Напомним условия на весовую функцию, достаточные для того, чтобы пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ являлось алгеброй относительно обычной свертки:

$$(f * g)(s) = \int f(t)g(s-t) dt.$$

При $p = 1$ это полумультимпликативность:

$$w(s+t) \leq w(s)w(t), \quad (2)$$

а при $p > 1$ – следующее неравенство (поточечно почти всюду):

$$w^{-q} * w^{-q} \leq w^{-q}. \quad (3)$$

Пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ инвариантно относительно сдвигов тогда и только тогда [3], когда для любого $s \in G$

$$L_s \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ess\,sup}_{t \in G} \frac{w(s+t)}{w(t)} < \infty. \quad (4)$$

Достаточным условием инвариантности является, очевидно, полумультимпликативность веса.

И еще одно обозначение: для $x > 0$

$$\ln^+ x = \max\{0, \ln x\}, \quad \ln^- x = \min\{0, \ln x\}.$$

Вернемся к регулярности весовых алгебр. При быстро растущем весе, $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t)^{1/t} > 1$, преобразования Фурье функций из $\mathcal{L}_p^w(\mathbb{R})$ аналитичны в полосе, включающей вещественную ось, что исключает регулярность. Но

даже если преобразования Фурье нельзя продолжить за пределы оси, не обязательно среди них найдутся функции с компактным носителем. Последнее свойство, как доказал А. Бёрлинг [4], эквивалентно сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ w(t)}{1+t^2} dt < \infty. \quad (5)$$

Вес, для которого этот интеграл сходится, называется *неквазианалитическим*. Интеграл (5) как критерий регулярности появлялся еще раньше в работе Шилова [1; § 3] для некоторых специальных алгебр. Далее результат Бёрлинга был распространен И. Домаром [5] на случай произвольной абелевой локально компактной группы, причем определение квазианалитичности пришлось немного изменить. Согласно Домару, вес w на группе G называется *неквазианалитическим*, если для любого $x \in G$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^+ w(nx)}{n^2} < \infty. \quad (6)$$

Результат Домара состоит в том, что при $w \geq 1$ условие (6) эквивалентно тому, что преобразования Фурье функций из алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$ разделяют точки и замкнутые множества на двойственной группе $\widehat{G}$ (или, что то же самое, есть функции со сколь угодно малым носителем). Это, строго говоря, не регулярность, потому что заранее не известно, сводится спектр алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$ к двойственной группе или в нем есть какие-то другие точки. Однако на самом деле других точек нет, и результат Домара – критерий регулярности.

В § 1 результат Домара обобщается на случай $p > 1$ (теорема 1), но при дополнительных предположениях, что весовая алгебра $\mathcal{L}_p^w(G)$ инвариантна относительно сдвигов и содержится в $\mathcal{L}_1(G)$. Оба эти требования существенны и нуждаются в пояснениях.

Во-первых, для неинвариантных алгебр условие (6) уже не является критерием регулярности, что показывает пример 1. В случае $p = 1$ подобного различия не возникает, так как алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$ всегда инвариантны (см. [6; теорема 3.1]).

Второе условие теоремы, $\mathcal{L}_p^w(G) \subset \mathcal{L}_1(G)$, на самом деле не ограничительно, но снять его, вообще говоря, нельзя. Дело обстоит так. Если взять непрерывный гомоморфизм χ группы G в мультипликативную группу положительных чисел $\mathbb{R}_+$ и умножить вес алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ на эту функцию, то алгебра $\mathcal{L}_p^v(G)$ с новым весом $v = \chi w$ будет изометрически изоморфна исходной. В частности, обе алгебры регулярны или нет одновременно, однако условие (6) может перестать выполняться после такого перехода. Вместе с тем, как было установлено автором в [7; теорема 3], всегда можно найти такой характер χ , чтобы новая алгебра $\mathcal{L}_p^v(G)$ с весом $v = \chi w$ содержалась в $\mathcal{L}_1(G)$. Таким образом, нужно и можно сначала так изменить вес, чтобы добиться указанного включения.

В § 2 доказывается, что на любой σ -компактной абелевой группе можно построить регулярные весовые алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ с показателем $p > 1$. Раньше было доказано (см. [6; теорема 1.1]), что абелева группа, на которой существует хотя бы одна весовая алгебра с показателем $p > 1$, должна быть σ -компактна, так что обойтись без этого условия нельзя.

Я благодарю Е. А. Горина, который посоветовал мне заняться регулярностью весовых $\mathcal{L}_p$ -алгебр. Кроме того, в результате его правки окончательный текст § 1 стал заметно прозрачнее и короче, чем первоначальный.

§ 1. Критерий регулярности

Цель следующих двух лемм – показать, что без ограничения общности можно предполагать субмультипликативность веса (2), а также условие $w \geq 1$.

ЛЕММА 1. Если $\mathcal{L}_p^w(G) \subset \mathcal{L}_1(G)$ – инвариантная алгебра, то

$$\operatorname{ess\,inf}_G w > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 2.7 из [8] утверждает, что вес инвариантной алгебры подобен некоторой непрерывной функции. Поэтому мы можем сразу считать вес w непрерывным. По предложению 1.16 из [3] функция L , определенная равенством (4), ограничена на любом компакте. Пусть $D = D^{-1}$ – компакт положительной меры и N – такое число, что $L_r \leq N$ при $r \in D$. Тогда для любых $s \in G$, $r \in D$ верны неравенства

$$\frac{w(s)}{N} \leq w(s+r) \leq Nw(s).$$

Предположим теперь, что $\inf_G w = 0$, т.е. $w(t_n) = x_n \rightarrow 0$ для некоторой последовательности $t_n \in G$. Тогда $w(t) \leq Nx_n$ при $t \in t_n + D$, так что

$$\int_G w^{-q}(t) dt \geq \int_{t_n+D} w^{-q}(t) dt \geq N^{-q} x_n^{-q} \mu(D) \rightarrow +\infty.$$

Однако по условию $\mathcal{L}_p^w(G) \subset \mathcal{L}_1(G)$, что по [7; свойство 2] эквивалентно включению $w^{-q} \in \mathcal{L}_1(G)$. Мы пришли к противоречию, которое доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{L}_p^w(G) \subset \mathcal{L}_1(G)$ – инвариантная алгебра. Тогда функция w подобна непрерывной полумультипликативной функции $v \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 3.3 из [6] доказано, что в условиях леммы функция w подобна полумультипликативной функции w_1 . Там же, в следствии 2.1, доказано, что функция w_1 подобна непрерывной функции v . Непосредственно проверяется, что функция v будет также полумультипликативной. Далее, по лемме 1 величина $\delta = \inf_G v$ положительна. Если $\delta \geq 1$, то v – требуемая функция. Если же $\delta < 1$, то нужной функцией будет v/δ .

Теперь мы докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{L}_p^w(G) \subset \mathcal{L}_1(G)$ – инвариантная алгебра. Тогда регулярность алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ эквивалентна условию (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 можно считать, что вес w полумультипликативен, непрерывен и $w \geq 1$. В частности, $\mathcal{L}_1^w(G)$ является алгеброй.

Достаточность. Если выполняется условие (6), то алгебра $\mathcal{L}_1^w(G)$ разделяет точки и замкнутые множества в $\hat{G}$ (см. [5]), а так как пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$

является модулем над $\mathcal{L}_1^w(G)$ (см. [6; теорема 1.1]), то это верно и для алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$. Чтобы доказать регулярность этой алгебры, остается показать, что ее спектр Σ равен двойственной группе $\widehat{G}$.

Любой характер алгебры задается непрерывной мультипликативной функцией $\chi \in \mathcal{L}_q^{w^{-1}}(G)$, $\chi(f) = \int_G \chi f$. Нам надо, таким образом, показать, что этот характер ограничен: $|\chi| = 1$. Начнем с того, что функция χ/w ограничена: $\chi/w \in \mathcal{L}_\infty(G)$. Если $p = 1$, то это верно по определению сопряженного пространства. Пусть $p > 1$. В силу непрерывности $|\chi|/w \leq C$ на любом фиксированном компакте $K = -K$. При $u \in K$ и любом x

$$\frac{|\chi(x+u)|}{w(x+u)} \geq \frac{|\chi(x)\chi(u)|}{w(x)w(u)} \geq \frac{|\chi(x)|}{Cw(x)},$$

так что

$$\int_{x+K} |\chi|^q w^{-q} \geq \left| \frac{\chi(x)}{w(x)} \right|^q \mu(K) C^{-q}.$$

Так как $\chi/w \in \mathcal{L}_q(G)$, то эти интегралы, а с ними и функция χ/w должны быть ограничены.

Итак, пусть $w \geq \varepsilon|\chi|$, $\varepsilon > 0$. Теперь сходящийся ряд (6) оценивается снизу как $\sum n^{-2} \ln |\varepsilon\chi(x)|^n$, откуда $|\chi(x)| = 1$. Тем самым, утверждение о регулярности доказано.

Необходимость. По теореме Шилова (см. [2; § 34]) алгебра $\mathcal{L}_p^w(G)$ разделяет компакты и замкнутые множества в своем спектре Σ , а следовательно, и в двойственной группе $\widehat{G} \subset \Sigma$. Покажем, что последним свойством обладает и алгебра $\mathcal{L}_1^w(G)$.

Пусть даны компакт $F \subset \widehat{G}$ и открытое множество $U \supset F$. Нам нужно показать, что существует такая функция $f \in \mathcal{L}_1^w(G)$, что $\widehat{f}|_F = 1$, но $\text{supp } \widehat{f} \subset U$. Выберем окрестность нуля $V = -V$ такой, что $F + V + V + V \subset U$. По условию существует функция $f_1 \in \mathcal{L}_p^w(G)$ такая, что $\text{supp } \widehat{f}_1 \subset F + V + V$ и $\widehat{f}_1|_{F+V} = 1$. Очевидно, функция f_1 непрерывна, и можно считать, что $f_1(0) \neq 0$. Далее, мы можем выбрать функцию $f_2 \in \mathcal{L}_q(G)$ такой, чтобы носитель $\text{supp } \widehat{f}_2 \subset V$ был достаточно мал, но $f_2(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}_2 = 1$. Тогда функция $f = f_1 \cdot f_2$ не равна тождественно нулю, $f|_F = 1$ и $\text{supp } \widehat{f} \subset U$. В то же время $fw = f_1wf_2 \in \mathcal{L}_p(G) \cdot \mathcal{L}_q(G) = \mathcal{L}_1(G)$, т.е. $f \in \mathcal{L}_1^w(G)$, что и требовалось.

Выполнение условия (6) в этом случае доказано Домаром в статье [5], однако его доказательство довольно запутанно, и будет уместно привести другое, более простое. Идея этого доказательства принадлежит Е. А. Горину.

Случай $p = 1$. Возьмем произвольную точку $a \in G$ и проверим для нее условие (6). Выберем число $\varepsilon \in (0, \pi)$. Пусть $Q \subset \widehat{G}$ – такое компактное множество, что $|\xi(a) - 1| < \varepsilon$ для всех $\xi \in Q$, причем 0 – внутренняя точка Q . По условию найдется такая функция $f_1 \in \mathcal{L}_1^w(G)$, что $\text{supp } \widehat{f}_1 \subset Q$, но $\widehat{f}_1(0) \neq 0$. Из этого включения следует, что функция f_1 непрерывна и ограничена. Далее, возьмем непрерывную функцию $f_2 \in \mathcal{L}_p^w(G)$ с компактным носителем при условии $\widehat{f}_2(0) \neq 0$. Так как функция f_2w непрерывна и имеет

компактный носитель, то она ограничена, т.е. $f_2 \in \mathcal{L}_\infty^w(G)$. По аналогии с формулой $\mathcal{L}_1(G) * \mathcal{L}_\infty(G) \subset \mathcal{L}_\infty(G)$ можно получить включение $\mathcal{L}_1^w(G) * \mathcal{L}_\infty^w(G) \subset \mathcal{L}_\infty^w(G)$: если $\varphi \in \mathcal{L}_1^w(G)$, $\psi \in \mathcal{L}_\infty^w(G)$, то для любого $x \in G$

$$\begin{aligned} w(x)|(\varphi * \psi)(x)| &= w(x) \left| \int \varphi(t)\psi(x-t) dt \right| \\ &\leq \int |\varphi(t)w(t)\psi(x-t)w(x-t)| dt \leq \|\varphi w\|_1 \|\psi w\|_\infty, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\varphi * \psi\|_{w,\infty} \leq \|\varphi\|_{w,1} \|\psi\|_{w,\infty}. \quad (7)$$

Таким образом, для $f = f_1 * f_2$ справедливы условия $\hat{f} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2 \neq 0$, $f \in \mathcal{L}_\infty^w(G)$ и $\text{supp } \hat{f} \subset Q$.

Пусть Λ – алгебра сужений функций $\hat{\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{L}_1^w(G)$, на компакт Q . Из доказанного ранее следует, что алгебра Λ содержит единицу: $\hat{h}|_Q = 1$ для некоторой функции h из исходной алгебры. Сдвиг $h_a(x) = h(x-a)$ также содержится в алгебре $\mathcal{L}_1^w(G)$ и $\hat{h}_a(\xi) = \overline{\xi(a)}$ на Q . Спектр алгебры Λ равен Q (см. [2; § 34]), поэтому спектр $\hat{h}_a$ в этой алгебре равен $\hat{h}_a(Q)$ и содержится в ε -окрестности единицы. Следовательно, у элемента $\hat{h}_a$ существует логарифм и есть такая функция $g \in \mathcal{L}_1^w(G)$, что $\exp(i\hat{g}) = \hat{h}_a$ на компакте Q . Отметим, что $g(Q) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Введем теперь функцию

$$\varphi(\lambda) = \int_\Gamma \hat{f}(\xi) \exp\{i\lambda \hat{g}(\xi)\} d\xi.$$

Фактически интеграл берется по компакт Q , поэтому φ – целая функция экспоненциального типа не более ε , ограниченная на вещественной оси, причем φ не может быть тождественным нулем, так как

$$\varphi(n) = \int_{\hat{G}} \overline{a(\xi)}^n \hat{f}(\xi) d\xi = f(na),$$

в частности $\varphi(0) \neq 0$. Из теоремы Пэли–Винера (см. [9; теорема XII]) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log |\varphi(\lambda)| d\lambda}{1 + \lambda^2} > -\infty. \quad (8)$$

Теперь мы покажем, что при $0 \leq \lambda \leq 1$ и натуральных n имеет место неравенство $|\varphi(\lambda + n)| \leq C/w(na)$. В сочетании с неравенством (8) это и приведет к сходимости ряда Домара.

Дальше нам понадобится экспонента элемента $g \in \mathcal{L}_1^w(G)$. Если группа G не дискретна, то для этого нужно присоединить к алгебре $\mathcal{L}_1^w(G)$ формальную единицу, обозначим ее I , и рассматривать далее алгебру $\mathcal{B} = \mathbb{C}I \oplus \mathcal{L}_1^w(G)$. В случае дискретной группы будем считать $I = \delta_0$ и $\mathcal{B} = \mathcal{L}_1^w(G)$. Теперь положим $g_\lambda = \exp(i\lambda g)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим $h_\lambda = g_\lambda - I$, тогда $h_\lambda \in \mathcal{L}_1^w(G)$, и

$$\|h_\lambda\|_{w,1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\lambda g\|_{w,1}^n}{n!} = \exp(|\lambda| \|g\|_{w,1}) - 1.$$

Вместе с неравенством (7) отсюда следует, что $g_\lambda * f = f + h_\lambda * f \in \mathcal{L}_\infty^w(G)$ и $\|(g_\lambda * f)\|_{w,\infty} \leq \exp(|\lambda| \|g\|_{w,1}) \|f\|_{w,\infty}$. С другой стороны,

$$\varphi(n + \lambda) = \int_{\widehat{G}} e^{i(n+\lambda)\widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_Q \overline{\xi(na)} \widehat{g}_\lambda(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi = (g_\lambda * f)(na).$$

Таким образом, при $|\lambda| \leq 1$

$$|\varphi(n + \lambda)| = |(g_\lambda * f)(na)| \leq \exp(\|g\|_{w,1}) \frac{\|f\|_{w,\infty}}{w(na)} \equiv \frac{C}{w(na)},$$

что вместе с неравенством (8) дает утверждение теоремы.

Полумультпликативность веса существенна, когда мы переходим от интеграла (5) к ряду (6), и естественно ожидать, что в ее отсутствие условие (6) перестанет быть критерием регулярности. Это действительно так, что показывает следующий пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим на окружности $\mathbb{T}$ с параметром $t \in [0, 1)$ вес $w(t) = t^{1/4}$ (положим $w(0) = 1$, чтобы не нарушать условие положительности). Пространство $\mathcal{L}_2^w(\mathbb{T})$ является алгеброй, так как выполняется условие (3). Алгебра $\mathcal{L}_2^w(\mathbb{T})$ регулярна, так как содержит все экспоненты вида $f_n(t) = e^{int}$, преобразования Фурье которых равны $\widehat{f}_n = \delta_n$. Однако условие (6) при этом не выполняется. Чтобы показать это, выберем число $\alpha \in (0, 1)$ с хорошими рациональными приближениями, например $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{-1}$, где $q_1 = 2$, $q_n > 2q_{n-1} \exp(q_{n-1}^2)$ и все q_n целые. Тогда $\{q_n \alpha\} < 2q_n/q_{n+1} < e^{-q_n^2}$. Так как групповая операция на $[0, 1)$ – взятие дробной части от суммы чисел, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\ln w(n\alpha)|}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\ln w(q_n \alpha)|}{q_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\ln \{q_n \alpha\}|}{4q_n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-q_n^2}{4q_n^2} = +\infty.$$

§ 2. Конструкции регулярных алгебр

В этом параграфе показано, что регулярные весовые алгебры при $p > 1$ можно построить на любой σ -компактной абелевой группе. Так как условие σ -компактности группы (в коммутативном случае) необходимо для существования весовых алгебр (см. [6; теорема 1.1]), то получаем, что если на группе можно построить какую-нибудь алгебру $\mathcal{L}_p^w(G)$ с показателем $p > 1$, то можно построить и регулярную. При $p = 1$ вопрос существования не стоит, так как классическая алгебра $\mathcal{L}_1(G)$ регулярна.

Скажем, что вес w растет полиномиально, если существует такое $d \in \mathbb{N}$, что для любого $x \in G$

$$w(nx) = O(n^d), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ясно, что для такого веса выполняется условие Домара (6). На компактно порожденной абелевой группе построить такой вес не составляет труда. Сложности возникают с некомпактно порожденными группами, в частности с группами рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и p -рациональных чисел $\mathbb{Z}(p^\infty)$, которым посвящены отдельные леммы 4 и 3. Группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ для простого p определяется как

множество чисел вида $\{k/p^n : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+\}$ со сложением по модулю 1. Используя структурную теорию, мы покажем в теореме 2, что полиномиально растущий вес можно построить на любой σ -компактной абелевой группе.

Вес будет строиться через вспомогательную функцию $u = w^{-q}$ так, чтобы выполнялось неравенство (3). Это гарантирует нам, что пространства $\mathcal{L}_p^w(G)$ будут алгебрами. Выпишем свойства, которые будут требоваться от функции u в леммах этого параграфа.

- (a) Положительность: $u > 0$.
- (b) $u * u \leq u$.
- (c) Четность: $u(x) = u(-x)$.
- (d) Полиномиальное убывание: существует такое число d , что $1/u(nx) = O(n^d)$, $n \rightarrow \infty$, при всех x .

ЛЕММА 3. Пусть группа G представляется в виде объединения вложенных конечных подгрупп G_n , $n \in \mathbb{N}$: $G = \bigcup G_n$, $G_n \subset G_{n+1}$ при всех n . Тогда на группе G существует вес со свойствами (a)–(d).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|M|$ обозначает мощность (т.е. меру) множества $M \subset G$. Нужный вес можно построить с помощью любой убывающей последовательности чисел $\varphi_n > 0$ при условии $\varphi = \sum \varphi_n |G_n| < \infty$. Обозначим $U_j = G_j \setminus G_{j-1}$, считая, что $G_0 = \emptyset$. Тогда $G = \bigcup U_j$, и функцию u можно определить следующим образом: $u|_{U_n} = \varphi_n$.

Наличие свойств (a), (c) очевидно. Последовательность $1/u(nx)$ для любого x ограничена, т.е. условие убывания (d) тем более выполнено. Покажем, что выполняется условие (b). Ясно, что

$$(u * u)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{y \in U_j} \varphi_j u(x - y).$$

Пусть $x \in U_n$, $y \in U_j$. Если $j < n$, то $x - y \in U_n$; если, наоборот, $j > n$, то $x - y \in U_j$. Множество U_n разбивается в дизъюнктное объединение множеств $x + U_j$, $j < n$, и дополнения к ним U_x , для которого $x - U_x \subset U_n$. Так как на всех перечисленных множествах функция u постоянна, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} (u * u)(x) &= \sum_{j < n} |U_j| \varphi_j \varphi_n + \sum_{j < n} |x + U_j| \varphi_n \varphi_j + |U_x| \varphi_n^2 + \sum_{j > n} |U_j| \varphi_j^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} |U_j| \varphi_j \varphi_n \leq 2 \varphi_n \varphi = 2u(x) \varphi, \end{aligned}$$

т.е. после перехода к функции $2\varphi u$ условие (b) выполняется.

СЛЕДСТВИЕ 1. На группе $\mathbb{Z}p^\infty$ при простом p существует вес со свойствами (a)–(d).

ЛЕММА 4. На группе $\mathbb{Q}$ существует вес со свойствами (a)–(d).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим группу $\mathbb{Q}$ в виде объединения вложенных подгрупп $Q_n = \mathbb{Z}/t_n$, $n \in \mathbb{N}$; например, можно взять $t_n = n!$. Обозначим $U_n = Q_n \setminus Q_{n-1}$, считая $Q_0 = \emptyset$. Воспользуемся функциями целого аргумента

$$\bar{n} = \max\{1, |n|\}, \quad \sigma(n) = \frac{1}{\bar{n}^2}. \quad (9)$$

Пусть C_2 – такая константа, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)\sigma(m-n)} \leq \frac{C_2}{\sigma(m)} \quad (10)$$

(легко убедиться, что такая константа существует).

Выберем также убывающую последовательность чисел $\varphi_n > 0$ такую, что $\sum \varphi_n t_n = \varphi < \infty$. Для $q \in U_n$ положим $u(q) = \varphi_n \sigma(\llbracket q \rrbracket)$, где $\llbracket x \rrbracket$ – четное продолжение функции $[x]$ с положительной полупрямой.

Четность и положительность веса очевидны. Любое число $q \in \mathbb{Q}$ содержится в некоторой подгруппе Q_m , так что $u(nq) \geq \varphi_m \sigma(\llbracket nq \rrbracket) = \varphi_m / \llbracket nq \rrbracket^2$. Очевидно, эта последовательность убывает не быстрее чем квадратично по n .

Аналогично доказательству предыдущей леммы $(u * u)(q)$ разбивается в сумму:

$$(u * u)(q) = \sum_{j < n} (S_j + S'_j) + S_n + \sum_{j > n} S_j,$$

где при $j < n$

$$S_j = \sum_{r \in U_j} \varphi_j \varphi_n \sigma(\llbracket r \rrbracket) \sigma(\llbracket q - r \rrbracket) = S'_j = \sum_{r \in q + U_j} \varphi_n \varphi_j \sigma(\llbracket r \rrbracket) \sigma(\llbracket q - r \rrbracket),$$

при $j > n$

$$S_j = \sum_{r \in U_j} \varphi_j^2 \sigma(\llbracket r \rrbracket) \sigma(\llbracket q - r \rrbracket)$$

и, наконец,

$$S_n = \sum_{r \in U_n \setminus \bigcup_{j < n} (q + U_j)} \varphi_n^2 \sigma(\llbracket r \rrbracket) \sigma(\llbracket q - r \rrbracket).$$

Теперь оценим эти суммы по отдельности. При $j < n$

$$\frac{S_j}{u(q)} = \varphi_j \varphi_n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r \in U_j \cap ((-k-1, -k] \cup [k, k+1))} \frac{\sigma(\llbracket r \rrbracket) \sigma(\llbracket q - r \rrbracket)}{\varphi_n \sigma(\llbracket q \rrbracket)}.$$

Если $\llbracket r \rrbracket = k$, то $\llbracket q - r \rrbracket$ заключено между $\llbracket q \rrbracket - k - 1$ и $\llbracket q \rrbracket - k + 1$. Верна грубая оценка $\sigma(l \pm 1) \leq 4\sigma(l)$. Заметим еще, что

$$|U_j \cap (-k-1, -k]| = |U_j \cap [k, k+1)| \leq t_j.$$

Кроме того, функция $\llbracket x \rrbracket$ принимает значение 0 на двух целочисленных отрезках. Таким образом (напомним, что обозначение C_2 введено в формуле (10)),

$$\frac{S_j}{u(q)} \leq 8\varphi_j t_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma(k) \sigma(\llbracket q \rrbracket - k)}{\sigma(\llbracket q \rrbracket)} \leq 8C_2 \varphi_j t_j \equiv C \varphi_j t_j.$$

Аналогично при $j \geq n$ получим

$$S_j \leq \frac{u(q)Ct_j\varphi_j^2}{\varphi_n} \leq u(q)Ct_j\varphi_j$$

(последнее верно в силу убывания φ_j). Таким образом,

$$(u * u)(q) \leq u(q) \cdot 2 \sum_{j=1}^{\infty} C\varphi_j t_j = u(q) \cdot 2C\varphi,$$

т.е. после перехода к функции $2C\varphi u$ условие (b) выполняется.

Прямой суммой $\bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ групп G_α принято называть (см. [10; В7]) подгруппу в их прямом произведении $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, состоящую из всех элементов, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля. Следующая лемма конструирует вес на прямой сумме счетного множества групп по весам на слагаемых. На самом деле доказательство остается верным, даже если не требовать коммутативности.

ЛЕММА 5. Пусть G_j , $j \in \mathbb{N}$, – дискретные группы, на каждой из которых существует вес u_j со свойствами (a)–(d). Тогда на прямой сумме $G = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} G_j$ с дискретной топологией существует вес u с теми же свойствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный элемент $x \in G$ определяется своими координатами $x_j \in G_j$. Положим $s(x) = \{j \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$ и будем также писать s_x вместо $s(x)$. Это множество будет конечным для любого x . Обозначим также $G_j^\times = G_j \setminus \{0\}$. Для того чтобы определить вес, нам понадобятся последовательность чисел $\alpha_j > 0$ и некоторая функция $a: s \rightarrow a_s$ на множестве $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ всех конечных подмножеств натурального ряда. Вид α_j и a_s будет уточнен ниже. Итак, определим u формулой

$$u(x) = a_{s(x)} \prod_{j \in s(x)} \alpha_j u_j(x_j). \quad (11)$$

Четность u очевидна. Значения a_s будут выбраны положительными, так что $u > 0$. Заметим, кроме того, что $s(nx) = s(x)$ для любого $x \in G$, и j -я координата элемента nx равна nx_j . Таким образом, выполнение условия убывания (c) для u тривиально следует из выполнения того же условия для каждого веса u_j .

Для выполнения свойства (b) достаточно следующих неравенств. Числа α_j должны быть достаточно маленькими, а именно:

$$0 < \alpha_j < 1 \quad \text{при всех } j \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j^2 \cdot (u_j * u_j)(0)) < 2, \quad (13)$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j) < 2. \quad (14)$$

Существование подходящих чисел α_j очевидно. От a требуется, чтобы при всех $s \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$

$$0 < a_s \leq 1, \quad (15)$$

$$a_{s \cup v} \leq a_s \quad \text{при всех } v \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), \quad (16)$$

$$\sum_{v \subset s} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} \leq \frac{1}{4}. \quad (17)$$

В качестве a_s можно взять $a_s = \varepsilon_1 / (\sum_{j \in s} j!)$ с множителем $\varepsilon_1 = e^{-2}/8$. Для пустого множества положим $a_\emptyset = \varepsilon_1$. Свойства (15), (16) очевидны. Проверим свойство (17). Нужно заметить, что для непустого множества $v \subsetneq s$ верно представление $a_s^{-1} = a_v^{-1} + a_{s \setminus v}^{-1}$. Поэтому

$$\sum_{v \subset s} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} = 2a_\emptyset + \sum_{v \subsetneq s} a_v a_{s \setminus v} \left(\frac{1}{a_v} + \frac{1}{a_{s \setminus v}} \right) = 2 \sum_{v \subsetneq s} a_v.$$

Далее, $a_v = \varepsilon_1 / (\sum_{j \in v} j!) \leq \varepsilon_1 / (\sup v)!$. Для пустого множества условимся считать $\sup \emptyset = 0$. Таким образом,

$$\sum_{v \subsetneq s} a_v \leq \sum_{v \subsetneq s} \frac{\varepsilon_1}{(\sup v)!} \leq \sum_{k=0}^{\sup s} \frac{\varepsilon_1 2^k}{k!} \leq \varepsilon_1 e^2 = \frac{1}{8},$$

откуда следует (17).

Оценим теперь свертку $u * u$. Возьмем произвольный элемент $x \in G$. Любой элемент $x' \in G$ можно тогда представить в виде $x' = y + z$, где $s_y \subset s_x$, $s_z \subset \mathbb{N} \setminus s_x$. Согласно определению веса (11) теперь

$$u(x') = u(y + z) = u(y) \frac{a_{s_y \cup s_z}}{a_{s_y}} \prod_{j \in s_z} \alpha_j u_j(z_j) \stackrel{\text{по (16)}}{\leq} u(y) \prod_{j \in s_z} \alpha_j u_j(z_j).$$

Так как $s_{x-y-z} = s_{x-y} \cup s_z$ и $(x-y-z)_j = -z_j$ при $j \in s_z$, то с учетом четности всех весов

$$\begin{aligned} u(x - x') &= u(x - y - z) = u(x - y) \frac{a_{s_{x-y} \cup s_z}}{a_{s_{x-y}}} \prod_{j \in s_z} \alpha_j u_j(z_j) \\ &\stackrel{\text{см. (16)}}{\leq} u(x - y) \prod_{j \in s_z} \alpha_j u_j(z_j). \end{aligned}$$

Выделим подгруппу $Q_x = \prod_{j \in s_x} G_j$, соответствующую носителю элемента x . Принадлежность к ней определяется включением носителей: $y \in Q_x$, если $s_y \subset s_x$. Используя полученные выше неравенства, имеем

$$\begin{aligned} (u * u)(x) &= \sum_{x' \in G} u(x') u(x - x') \leq \sum_{y \in Q_x} u(y) u(x - y) \sum_{\substack{z \in G \\ s_z \subset \mathbb{N} \setminus s_x}} \prod_{j \in s_z} \alpha_j^2 u_j^2(z_j) \\ &\leq \sum_{y \in Q_x} u(y) u(x - y) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j^2 \cdot (u_j * u_j)(0)) \\ &\stackrel{\text{см. (13)}}{<} 2 \sum_{y \in Q_x} u(y) u(x - y). \end{aligned}$$

Осталось, следовательно, оценить сумму по Q_x . Будем дальше писать просто s вместо s_x . Пусть $y \in Q_x$ и $s_y = v$. Разность $x - y$ имеет некоторый носитель s_{x-y} . Обозначим $r = v \cap s_{x-y}$. Тогда координаты, не входящие в r , определяются единственным образом:

$$\begin{cases} y_j = x_j, (x - y)_j = 0 & \text{при } j \in v \setminus r, \\ y_j = 0, (x - y)_j = -x_j & \text{при } j \in s \setminus v. \end{cases}$$

Учитывая четность весов, замечаем, что в следующей дроби после сокращения остается только

$$\begin{aligned} \frac{u(y)u(x-y)}{u(x)} &= \frac{a_v a_{r \cup (s \setminus v)}}{a_s} \prod_{j \in r} \alpha_j \frac{u_j(y_j)u_j(x_j - y_j)}{u_j(x_j)} \\ &\stackrel{\text{см. (16)}}{\leq} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} \prod_{j \in r} \alpha_j \frac{u_j(y_j)u_j(x_j - y_j)}{u_j(x_j)}. \end{aligned}$$

Оценим сумму по Q_x :

$$\begin{aligned} \sum_{y \in Q_x} \frac{u(y)u(x-y)}{u(x)} &= \sum_{v \subset s} \sum_{s(y)=v} \frac{u(y)u(x-y)}{u(x)} \\ &= \sum_{v \subset s} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} \sum_{r \subset v} \sum_{\substack{s(y)=r \\ y_j \neq x_j}} \prod_{j \in r} \alpha_j \frac{u_j(y_j)u_j(x_j - y_j)}{u_j(x_j)} \\ &= \sum_{v \subset s} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} \sum_{r \subset v} \prod_{j \in r} \alpha_j \sum_{0 \neq y_j \neq x_j} \frac{u_j(y_j)u_j(x_j - y_j)}{u_j(x_j)} \\ &\stackrel{\text{по усл. (b)}}{\leq} \sum_{v \subset s} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} \sum_{r \subset v} \prod_{j \in r} \alpha_j = \sum_{v \subset s} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} \prod_{j \in v} (1 + \alpha_j) \\ &\stackrel{\text{см. (14)}}{\leq} 2 \sum_{v \subset s} \frac{a_v a_{s \setminus v}}{a_s} \stackrel{\text{см. (17)}}{\leq} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in G$

$$u * u(x) \leq u(x),$$

т.е. выполняется условие (b). Лемма доказана.

Теперь мы можем построить вес для произвольной счетной группы, воспользовавшись структурной теоремой.

ЛЕММА 6. *На каждой счетной дискретной абелевой группе G существует вес со свойствами (a)–(d).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что G вкладывается как подгруппа в некоторую делимую группу H , тоже счетную. По структурной теореме для абелевых групп (см. [11; приложение А]) группа H изоморфна прямой сумме некоторого количества групп рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и p -рациональных чисел $\mathbb{Z}(p^\infty)$, где

p простое. Счетность H означает, что число слагаемых при этом счетно. Согласно леммам 4, 1 на всех слагаемых существуют веса со свойствами (a)–(d). По лемме 5 то же верно для группы H . Если мы теперь возьмем ограничение построенного веса на подгруппу $G \subset H$, то свойства (a)–(d) сохраняются. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *На каждой σ -компактной локально компактной абелевой группе G при любом $p > 1$ существует инвариантная алгебра $\mathcal{L}_p^w(G)$ с полиномиально растущим весом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По структурной теореме 24.30 из [11] группа G топологически изоморфна $\mathbb{R}^d \times H$, где d – неотрицательное целое, а группа H содержит компактную открытую подгруппу E . Факторгруппа H/E дискретна, а вследствие σ -компактности группы G счетна.

Пусть функции u_R на $\mathbb{R}^d$ и u_H на H/E обладают свойствами (a)–(d). Существование u_H доказано в лемме 6, а в качестве u_R можно взять

$$u_R(x) = \frac{1}{(1+x_1^2) \cdots (1+x_d^2)}.$$

Функция u на группе G , равная

$$u(r, h) = u_R(r)u_H(h + E),$$

также будет обладать свойствами (a)–(d). Но тогда для любого $p > 1$ пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ с весом $w = u^{-q}$ будет алгеброй, а вес будет расти полиномиально. Кроме того, функция u_H^{-q} полумультипликативна, так как порождает алгебру (см. [6; замечание 3.1]). Ясно, что u^{-q} и w будут также полумультипликативны, следовательно, алгебра $\mathcal{L}_p^w(G)$ инвариантна.

Из доказанного следует

ТЕОРЕМА 3. *На каждой σ -компактной локально компактной абелевой группе при любом $p > 1$ существует регулярная алгебра $\mathcal{L}_p^w(G)$.*

Список литературы

- [1] Г. Е. Шилов, *О регулярных нормированных кольцах*, Тр. МИАН, **21**, Наука, М., 1947.
- [2] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматлит, М., 1960; нем. пер.: I. M. Gelfand, D. A. Raikow, G. E. Schilow, *Commutative normierte Algebren*, VEB, Berlin, 1964.
- [3] R. E. Edwards, “The stability of weighted Lebesgue spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93**:3 (1959), 369–394.
- [4] A. Beurling, “On the spectral synthesis of bounded functions”, *Acta Math.*, **81**:1 (1949), 225–238.
- [5] Y. Domar, “Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras”, *Acta Math.*, **96**:1 (1956), 1–66.
- [6] Ю. Н. Кузнецова, “Инвариантные весовые алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ ”, *Матем. заметки*, **84**:4 (2008), 567–576.

- [7] Ю. Н. Кузнецова, “Весовые L_p -алгебры на группах”, *Функци. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 82–85; англ. пер.: Yu. N. Kuznetsova, “Weighted L_p -algebras on groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **40**:3 (2006), 234–236.
- [8] H. G. Feichtinger, “Gewichtsfunktionen auf lokalkompakten Gruppen”, *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*, **188**:8–10 (1979), 451–471.
- [9] Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964; пер. с англ.: R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
- [10] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **12**, Intersci. Publ., New York–London, 1962.
- [11] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, II, Наука, М., 1975; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, vol. I, II, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963–1970.

Ю. Н. Кузнецова (Yu. N. Kuznetsova)
Всероссийский институт
научной и технической информации, г. Москва
E-mail: jkuzn@mccme.ru

Поступила в редакцию
28.02.2008 и 12.09.2008