Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. К. Кусаинова, О вложении весового пространства Соболева $W_p^l(\Omega; v)$ в пространство $L_p(\Omega; \omega)$, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 2, 132–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:24:07

УДК 517.518.23

Л. К. Кусаинова

О вложении весового пространства Соболева $W_p^l(\Omega; v)$ в пространство $L_p(\Omega; \omega)$

В работе получен ряд условий на весовые функции v и ω , при которых справедливо неравенство вложения

$$\|u\|_{L_p(\Omega; \omega)} \leq C \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla_l u|^p \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |u|^p v \right)^{1/p} \right], \quad 1 < p < n/l.$$

Выделены классы весов ω и v , для которых эти условия являются необходимыми и достаточными.

Библиография: 11 названий.

Основные результаты данной работы связаны с описанием условий на веса v и ω , при которых справедливо неравенство вложения

$$\|u\|_{L_p(\Omega; \omega)} \leq C \|u\|_{W_p^l(\Omega; v)}, \quad u \in C^\infty \cap W_p^l(\Omega; v), \quad (1)$$

в случае, когда $lp < n$ ($1 < p < \infty$). Через $W_p^l(\Omega; v)$ в (1) обозначено весовое пространство Соболева функций u , имеющих в Ω (обобщенные) производные $D^\alpha u$, $|\alpha| = l$, и конечную норму

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega; v)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla_l u|^p \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |u|^p v \right)^{1/p};$$

$L_p(\Omega; \omega)$ – весовое пространство Лебега с нормой

$$\|u\|_{L_p(\Omega; \omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \omega \right)^{1/p}.$$

Постановка задачи возникла из рассмотрения приложения теоремы Адамса [1] в работах [2]–[4]. В [2]–[4] условия вложения пространств Соболева в $L_q(\Omega; \mu)$ в достаточную сторону при $pl < n$ выводятся по существу из неравенства Адамса–Мазы [2; § 1.4]:

$$\|u\|_{L_q(\mu)} \leq C \|\nabla_l u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

($1 < p < q < \infty$, $p < n/l$), где точная постоянная C эквивалентна величине

$$K = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{l-n/p} [\mu(B(x, r))]^{1/q} < \infty. \quad (3)$$

Требование $p < q$ существенно, так как при $1 < p < n/l$, $p = q$, условие (3) не является, вообще говоря, достаточным. В этом случае критерий вложения (2) дается с привлечением емкостных характеристик [2; §§ 8, 12]. Использование неравенства (2) в [2]–[4] привело к некоторым дополнительным ограничениям. Так, в [2] обобщенная теорема вложения невесового пространства Соболева в $L_p(\Omega; \mu)$ получена для $0 < n - lp < s \leq n$. В [3] неравенство вложения (1) на классе $C_0^\infty(\Omega) \cap W_p^l(\Omega; v)$ требует ограниченности сверху некоторой постоянной величин

$$\mathcal{A}(x, d) = \left(\int_{Q^*(x)} \omega \right)^{(s-p)/(sp)} \sup_{Q_h \subset Q^*(x)} h^{l-n/p} |Q_h|_\omega^{1/s},$$

где $s > p$, $l > n(1/p - 1/s)$, $Q^*(x)$ – кубы в $\mathbb{R}^n$ вида

$$Q_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < d/2, i = 1, \dots, n\} \quad (4)$$

с “характеристической” длиной ребра $d = d^*(x)$.

В данной работе получены теоремы вложения (1) для весов ω , удовлетворяющих определенным условиям регулярности, в случае, когда l и p ограничены только соотношением $1 < p < l/n$.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ – n -мерное арифметическое пространство с нормой

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n);$$

Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$; $L(\Omega; \text{loc})$, $L_p(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ – соответственно пространство локально суммируемых в Ω функций, лебегово пространство функций с нормой

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

пространство функций, бесконечно дифференцируемых в Ω , пространство функций u из $C^\infty(\Omega)$ с компактными носителями $\text{supp } u$ в Ω . Далее,

$$|\nabla_l| = \left(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{p,l,\Omega} = \|\nabla_l u\|_{p,\Omega},$$

$l > 0$ целое; $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$; I^n – множество всех кубов $Q = Q_d(x)$ вида (4) (запись x опускается, если положение центра x не существенно); $I^n(\Omega) = \{Q : Q \in I^n, \overline{Q} \subset \Omega\}$. Для $\lambda > 0$ и $Q = Q_d(x)$ куб $\lambda Q = Q_{\lambda d}(x)$. Через $\overline{E}$ обозначается замыкание множества E ; $\mathcal{X}_E$ – характеристическая функция E ; $|E|$ – n -мерная мера Лебега E ; μ – (борелевская) мера на Ω ; $|E|_\mu = \mu(E)$. Неотрицательную функцию $\omega \in L(\Omega; \text{loc})$ будем называть *весом*, $|E|_\omega = \int_E \omega$.

Через $c, c_1, c_2, \dots$ будут обозначаться постоянные, определяемые числовыми параметрами, например $c = c(l, p, n)$, и т. д. Явное упоминание $\mathbb{R}^n$ в обозначениях, как правило, будет опускаться. Через $\emptyset$ будет обозначаться пустое множество.

Вес ω на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (A_∞) , если существуют такие числа $0 < \delta, \tau < 1$, что для всех $Q \in I^n$

$$\int_e \omega \leq \tau \int_Q \omega, \text{ как только } |e| \leq \delta |Q|$$

(см. [5; § 1, п. 1.4]). Краткая запись $\omega \in A_\infty$. Обозначим через $\mathcal{N}_{(\delta)}(Q)$ совокупность всех измеримых множеств $e \subset Q$ с $|e| \leq \delta |Q|$.

Как известно, потенциал Рисса ($0 < \alpha < n$)

$$I_\alpha f(x) = \int \frac{f(y)}{|y-x|^{n-\alpha}} dy$$

тесно связан с дробным максимальным оператором

$$M_\alpha f(x) = \sup |Q|^{\alpha/n-1} \int_Q |f|,$$

где супремум берется по всем кубам $Q \in I^n$, содержащим точку x . Для весов $\omega \in A_\infty$ справедливо неравенство Макенхаупта–Видена [6]:

$$\|I_\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \leq c \|M_\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \quad (1 \leq p < \infty). \quad (5)$$

В [7] указано, что имеет место локальное неравенство

$$\int_{2Q} |I_\alpha|^p \omega \leq c \int_{2Q} |M_\alpha|^p \omega, \text{ если } \text{supp } f \subset Q. \quad (6)$$

Пусть ρ – п.в. положительная функция из $L(\text{loc})$ такая, что $\rho^{1-p'} \in L(\text{loc})$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$. Сойером был получен следующий критерий ограниченности оператора $M_\alpha: L_p(\rho) \rightarrow L_q(\omega)$.

ТЕОРЕМА А [6; § 1]. Пусть $0 \leq \alpha < n$, $1 < p < \infty$, $p \leq q \leq \infty$; ω – неотрицательная функция из $L(\text{loc})$. Следующие условия равносильны:

$$\|M_\alpha f\|_{L_q(\omega)} \leq C \|f\|_{L_p(\rho)}, \quad f \in L_p(\rho); \quad (7)$$

$$K = \sup_{Q \in I_n} \|\mathcal{X}_Q M_\alpha(\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'})\|_{L_q(\omega)} \|\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'}\|_{L_p(\rho)} < \infty. \quad (8)$$

Точная постоянная C в (7) подчиняется оценкам: $c_1 K \leq C \leq c_2 K$.

Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $C^\infty(\overline{G})$ пространство сужений $\{u : u = U|_{\overline{G}}, U \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$.

Пусть $1 < p < \infty$, $lp < n$, $Q^* = Q_d$. Рассмотрим локальное неравенство

$$\left(\int_{Q^*} |u|^p \omega \right)^{1/p} = c \mathcal{A}(\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}), \quad (9)$$

где $u \in C^\infty(\overline{Q}^*)$. Опираясь на теорему о существовании непрерывного оператора продолжения (см. [8])

$$S: W_p^l(Q_1) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n), \quad Su \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n}) \quad \text{для} \quad u \in C^\infty(\overline{Q}_1),$$

нетрудно показать, что $u \in C^\infty(\overline{Q}^*)$ имеет продолжение U из класса $C^\infty(2Q^*)$, подчиненное оценке

$$\|\nabla_l U\|_p \leq c (\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}). \quad (10)$$

Из интегрального представления Соболева (см. [9])

$$f(x) = c \int \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right)^\alpha D^\alpha f(y) \frac{dy}{|y-x|^{n-l}}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

и неравенства (6) вытекает следующая оценка

$$\int_{Q^*} |u|^p \omega \leq c_1 \int_{2Q^*} (I_l(|\nabla_l U|))^p \omega \leq c_2 \int [M_l(|\nabla_l U|)]^p \tilde{\omega}, \quad (11)$$

где $\tilde{\omega} = \mathcal{X}_{2Q^*} \omega$. В силу теоремы А

$$\|M_l(|\nabla_l U|)\|_{L_p(\tilde{\omega})} \leq c_3 K_{\tilde{\omega}} \|\nabla_l U\|_p, \quad (12)$$

если $K_{\tilde{\omega}} = \sup_{Q \in I^n} \|\mathcal{X}_Q M_l(\mathcal{X}_Q)\|_{L_p(\tilde{\omega})} \|\mathcal{X}_Q\|_p^{-1} < \infty$. Заметим, что для любого $Q \in I^n$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_Q M_l(\mathcal{X}_Q)\|_{L_p(\tilde{\omega})}^p \|\mathcal{X}_Q\|_p^{-p} &= |Q|^{-1} \int_Q \left(\sup_{Q_h \ni x, h \leq d} h^{l-n} \int_{Q_h} dy \right)^p \tilde{\omega}(x) dx \\ &= |Q|^{lp/n-1} |Q|_{\tilde{\omega}} \leq \left[\sup_{Q_h \subset 2Q^*} h^{l-n/p} |Q_h|_{\omega}^{1/p} \right]^p. \end{aligned} \quad (13)$$

Последовательный переход (11) $\rightarrow$ (12) $\rightarrow$ (10) и оценка (13) приводят к доказательству следующего утверждения. Положим

$$\mathcal{A}_\omega(x, d) = \sup_{Q_h \subset Q} h^{l-n/p} |Q_h|_{\omega}^{1/p}, \quad Q = Q_d(x).$$

ЛЕММА 1. Пусть $1 < p < n$, $pl < n$, $Q^* = Q_d(x_0)$; вес $\omega \in A_\infty$ и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\omega(x_0, 2d) < \infty.$$

Тогда справедливо неравенство (9).

ЛЕММА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $pl < n$; ω — п.в. положительный вес на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям: существуют такие числа $R > 1$, $\alpha > 1$, $c_i > 0$, $i = 0, 1$, что для всех $Q \in I^n$

$$|2Q|_\omega \leq c_0 |Q|_\omega \quad (14)$$

и

$$\frac{|E|_\omega}{|RQ|_\omega} \leq c_1 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\alpha, \quad \text{где } E \subset Q. \quad (15)$$

Пусть к тому же $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\omega(x_0, d) < \infty$. Тогда для всех $u \in C^\infty(\overline{Q}^*)$, $Q^* = Q_d(x_0)$, справедливо неравенство (9), где $c = c(R, c_0, c_1, \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из условий (14), (15) следует оценка

$$\mathcal{A}_\omega(2Q^*) \leq c \mathcal{A}_\omega(Q^*),$$

в силу которой лемма 2 будет следовать из леммы 1. Положим $c_2 = c_1$ при $R \leq 2$ и $c_2 = c_1 R^{n(1+\alpha)}$ при $R > 2$. В [7] доказано, что условие (15) влечет оценку

$$\frac{|E|_\omega}{|2Q|_\omega} \leq c_2 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\alpha \quad \text{для измеримого множества } E \subset Q \quad (Q \in I^n). \quad (16)$$

Очевидно, что $\omega \in A_\infty$ относительно параметров $\delta < (c_1 c_2)^{-1/\alpha}$ и $\tau = c_1 c_2 \delta^\alpha$. Пусть

$$(\mathcal{A}_\omega(2Q^*))^p \leq 2h^{lp-n} |\tilde{Q}|_\omega, \quad \tilde{Q} = Q_h(\tilde{x}) \subset 2Q^*.$$

Если $(h/d)^n \geq \delta$, то, как легко увидеть,

$$(\mathcal{A}_\omega(Q^*))^p \geq (2c_0)^{-1} \delta^{(n-lp)/n} (\mathcal{A}_\omega(2Q^*))^p.$$

Пусть $(h/d)^n < \delta$. Допустим, что $\gamma > 0$ — такое число, что для любого куба $Q_h \subset Q^*$

$$|Q_h|_\omega \leq \gamma |\tilde{Q}|_\omega.$$

Существуют целое $m \geq 1$, при котором $mh \leq d < (m+1)h$, и покрывающее Q^* семейство кубов $\{Q_h^j\}_{j=1}^N$, $Q_h^j \subset Q^*$, $N \leq (2m)^n$. В силу (14), (16) имеем оценки

$$\begin{aligned} |Q^*|_\omega &\leq \sum_{j=1}^N |Q_h^j|_\omega \leq \left(\frac{2d}{n} \right)^n \gamma |\tilde{Q}|_\omega \\ &\leq \gamma c_0 c_2 \left(\frac{h}{2d} \right)^{n(\alpha-1)} |Q^*|_\omega \leq \gamma c_0 c_2 2^{-n(\alpha-1)} \delta^{\alpha-1} |Q^*|_\omega, \end{aligned}$$

откуда необходимо $\gamma > 2^{n(\alpha-1)}[\delta^{\alpha-1}c_0c_2]^{-1}$. Поэтому найдется хотя бы один куб $Q_h \subset Q^*$ для которого $|\tilde{Q}|_\omega < c_0c_2\delta^{\alpha-1}|Q_h|_\omega$, и тем самым

$$\mathcal{A}_\omega(2Q^*) \leq c_3\mathcal{A}_\omega(Q^*), \quad \text{где } c_3 = 2c_0c_2\delta^{\alpha-1}.$$

Нужный результат получим, если возьмем $c = \max\{2c_0c_2\delta^{\alpha-1}; 2c_0\delta^{(lp-n)/n}\}$.

Следующее описание условий на вес ω , при которых справедливо (9) для $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, d; \omega)$, выводится из критерия вложения

$$\|u\|_{L_p(\mu)} \leq C \|\nabla_l u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (17)$$

($1 < p < n/l$), сформулированного в терминах емкости $\text{cap}_{p,l}(F)$. Для компактного множества F в $\mathbb{R}^n$

$$\text{cap}_{p,l}(F) = \inf \{ \|\nabla_l u\|_p^p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad u \geq 1 \text{ на } F \}.$$

ТЕОРЕМА В [2; § 8.3], [9]. Пусть $1 < p < \infty$, $lp < n$. Тогда вложение (17) имеет место, если и только если

$$\mathcal{B}_\mu = \sup \left\{ \frac{\mu(F)}{\text{cap}_{p,l}(F)} : \text{cap}_{p,l}(F) > 0 \right\}. \quad (18)$$

Точная постоянная C в (17) допускает оценки: $\mathcal{B}_\mu \leq C^p \leq c\mathcal{B}_\mu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [10] даны оценки

$$c_1 \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{lp-n} |B(x, r)|_\mu \leq \mathcal{B}_\mu \leq c_2 \sup_F |F|_\mu |F|^{(lp-n)/n}.$$

Пусть $Q^* = Q_d$, $\overline{Q}_d \subset \Omega$, $0 < \xi \leq d$, $1 < p < \infty$, $lp < n$. Положим

$$\mathcal{A}(\xi) = \sup_{0 < h \leq \xi} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q^*} h^{l-n/p} |Q_h|_\mu^{1/p} \right\}. \quad (19)$$

Пусть $\mathcal{A}(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$\mathcal{A}(d) < \infty, \quad (20)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{A}(\xi) = 0, \quad (21)$$

$$\int_0^t (\mathcal{A}(\xi))^{p'} \frac{d\xi}{\xi} \leq \mathcal{L}(\mathcal{A}(t))^{p'}, \quad 0 < t \leq d. \quad (22)$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \xi(\mathcal{A}(\xi^{1/\theta}))^p, & \text{если } 0 < \xi < d^\theta, \\ d^\theta (\mathcal{A}(d))^p \left(\frac{\xi}{d^\theta} \right)^\alpha, & \text{если } \xi \geq d^\theta, \end{cases} \quad (23)$$

где $0 < \xi < \infty$, $\theta = n - lp$, $\alpha = 1 + \theta(p-1)\mathcal{L}^{-1}$.

ЛЕММА 3. Пусть функция $\mathcal{A}(\xi)$, заданная равенством (19), удовлетворяет условиям (20)–(22). Тогда для любого компактного множества F положительной конечной емкости $\text{cap}_{p,l}(F)$ справедливо неравенство

$$\mu(F \cap Q^*) \leq c\Phi(c(\mathcal{L} + c)^{p-1} \text{cap}_{p,l}(F)), \quad (24)$$

где $c = c(l, p, n)$.

Доказательство леммы 3 будет опираться на следующее утверждение о покрытии шарами из работы [2; § 8.5].

Пусть Φ – неотрицательная монотонно возрастающая функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что функция $\Psi(t) = t\Phi(1/t)$ монотонно убывает, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$ и

$$\int_{t_0}^{\infty} (\Psi(t))^{p'-1} \frac{dt}{t} \leq b (\Psi(t_0))^{p'-1} \quad \text{для всех } t_0 > 0.$$

ЛЕММА А [2; § 8.5, следствие 1]. Пусть $1 < p < n/l$, $a > 0$, F – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ с положительной конечной емкостью $\text{cap}_{p,l}(F)$. Тогда существует покрытие $\{B_j\}_{j=1}^N$ ($N \leq \infty$) множества F шарами $B_j = B(x^j, r_j)$ такое, что

$$\sum_{j=1}^N \Phi(a \text{cap}_{p,l}(B_j)) \leq c\Phi((b + c)^{p-1} a \text{cap}_{p,l}(F)), \quad (25)$$

где $c = c(l, p, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть $\Phi(\xi)$ задана равенствами (23). Заметим, что функция

$$\Psi(t) = t\Phi(1/t) = \begin{cases} (\mathcal{A}(t^{-1/\theta}))^p & \text{при } t > d^{-\theta}, \\ (\mathcal{A}(d))^p (td^\theta)^{1-\alpha} & \text{при } 0 < t < d^\theta \end{cases}$$

монотонно убывает на $(0, \infty)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$. Покажем, что для всех $t > 0$

$$\int_t^{\infty} (\Psi(\tau))^{p'-1} \frac{d\tau}{\tau} \leq \frac{\mathcal{L}}{\theta} (\Psi(t))^{p'-1}.$$

Если $t \geq d^{-\theta}$, то

$$\int_t^{\infty} (\Psi(\tau))^{p'-1} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\theta} \int_0^{t^{-1/\theta}} (\mathcal{A}(\xi))^{p'} \frac{d\xi}{\xi} \leq \frac{\mathcal{L}}{\theta} (\mathcal{A}(t^{-1/\theta}))^{p'} = \frac{\mathcal{L}}{\theta} (\Psi(t))^{p'-1}.$$

Если $0 < t < d^\theta$, то

$$\int_t^{\infty} (\Psi(\tau))^{p'-1} \frac{d\tau}{\tau} \leq \left(\frac{\mathcal{L}}{\theta} - \frac{p-1}{\alpha-1} \right) (\mathcal{A}(d))^{p'} + \frac{p-1}{\alpha-1} (\Psi(t))^{p'-1} = \mathcal{L}\theta^{-1} (\Psi(t))^{p'-1}.$$

Итак, $\Phi(\xi)$ удовлетворяет условиям леммы А. Рассмотрим теперь меру $\tilde{\mu}$ на $\mathbb{R}^n$, заданную посредством равенства $\tilde{\mu}(E) = \mu(E \cap Q^*)$. Для любого шара $B(x, r)$ имеем следующее. Если $B(x, r) \cap Q^* = \emptyset$, то $\tilde{\mu}(B(x, r)) = 0$. Если $B(x, r) \cap Q^* \neq \emptyset$ и $2r > 0$, то

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(B(x, r)) &= \mu(Q^*) < d^{n-pl}(\mathcal{A}(d))^p \left(\frac{2r}{d}\right)^{\alpha(n-lp)} \\ &= \Phi((2r)^\theta) = \Phi(c_1 \operatorname{cap}_{p,l}(B(x, r))),\end{aligned}$$

где $c_1 = 2^\theta / \operatorname{cap}_{p,l}(B(0, 1))$. Если $B(x, r) \cap Q^* \neq \emptyset$ и $2r \leq d$, то

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(B(x, r)) &\leq (2r)^\theta \sup_{Q_h \subset Q^*, h \leq 2r} h^{lp-n} |Q_h|_\mu^p \\ &= \Phi((2r)^\theta) = \Phi(c_1 \operatorname{cap}_{p,l}(B(x, r))).\end{aligned}$$

Пусть $\{B_j\}_{j=1}^N$ – покрытие компактного множества F из леммы А. Имеем

$$\tilde{\mu}(F) \leq \sum_{j=1}^N \tilde{\mu}(B_j) \leq \sum_{j=1}^N \Phi(c_1 \operatorname{cap}_{p,l}(B_j)) \leq c \Phi((\mathcal{L} + c)^{p-1} c \operatorname{cap}_{p,l}(F)), \quad (26)$$

где $c = c(l, p, n)$. Из (26) следует (25).

ЛЕММА 4. Пусть $1 < p < \infty$, $pl < n$; $Q^* = Q_d$, $\overline{Q^*} \subset \Omega$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(d)$, где $\mathcal{A}(\xi)$ – функция, определенная равенством (19) и удовлетворяющая условиям (20)–(22). Тогда для всех $u \in C^\infty(\overline{Q^*})$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_p(Q^*; \mu)} \leq c(\mathcal{L} + c)^{1/p'} \mathcal{A}(\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – компактное множество, $0 < \operatorname{cap}_{p,l}(F) < \infty$, c – постоянная из неравенства (24), $\xi^\theta = c(\mathcal{L} + c)^{p-1} \operatorname{cap}_{p,l}(F)$. Если $\xi^\theta \leq d^\theta$, то в силу (24)

$$\frac{\tilde{\mu}(E)}{\operatorname{cap}_{p,l}(E)} \leq \frac{c^2(\mathcal{L} + c)^{p-1} \Phi(\xi^\theta)}{\xi^\theta} \leq c^2(\mathcal{L} + c)^{p-1} (\mathcal{A}(d))^p. \quad (28)$$

Если $\xi^\theta > d^\theta$, то

$$\frac{\tilde{\mu}(E)}{\operatorname{cap}_{p,l}(E)} < c(\mathcal{L} + c)^{p-1} (\mathcal{A}(d))^p. \quad (29)$$

Пусть U – продолжение функции $u \in C^\infty(\overline{Q^*})$ из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, подчиненное неравенству (10). В силу (28) и (29)

$$\mathcal{B}_\mu^p = \sup \left\{ \frac{\tilde{\mu}(F)}{\operatorname{cap}_{p,l}(F)} : \operatorname{cap}_{p,l}(F) > 0 \right\} \leq c(\mathcal{L} + c)^{p-1} (\mathcal{A}(d))^p.$$

Поэтому из теоремы В и неравенства (10) следует (27).

Следующая лемма показывает, что неравенство (27) справедливо для меры μ , имеющей плотность $\omega = d\mu/dx$ из $L(\Omega; \operatorname{loc})$, удовлетворяющую определенному условию регулярности на колебание функции

$$M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x) = \sup_{Q_\xi \subset Q, Q_\xi \ni x} \xi^{l-n} \int_{Q_\xi} \omega, \quad Q \in I^n(\Omega).$$

ЛЕММА 5. Пусть $1 < p < \infty$, $pl < n$, $Q^* = Q_d(x_0) \in I^n(\Omega)$, и пусть существуют такие числа $0 < \gamma < 1$, $b > 0$, что для всех $Q \subset Q^*$

$$\sup_{x \in Q} M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x) \leq b \sup_{x \in Q \setminus e} M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x), \quad \text{если } e \in \mathcal{N}_{(\gamma)}(Q). \quad (30)$$

Тогда функция $\mathcal{A}(\xi)$, определенная равенством (19), подчиняется условиям (20)–(22). При этом $\mathcal{L} = c_\gamma b^{2/(p-1)}$, $c_\gamma = c(l, p, n, \gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $Q \subset Q^*$,

$$E_{\varepsilon, Q} = \left\{ x \in Q : \varepsilon M_l(\omega)(x) > |Q|^{l/n-1} \int_Q \omega \right\}.$$

Тогда существует такая не зависящая от $f \in L_1(Q)$ постоянная c , что

$$|E_{\varepsilon, Q}| \leq (c\varepsilon)^{n/(n-l)} |Q|. \quad (31)$$

Неравенство (31) есть простое следствие из неравенства слабого типа Макенхаупта–Видена [6; теорема 2]

$$\left(\int_{\{M_l(f) > \lambda\}} v^q dx \right)^{1/q} \leq \frac{c}{\lambda} \left(\int |f v|^p \right)^{1/p}$$

при $p = 1$, $1/q = 1 - (l - n)/n$, $v \equiv 1$, $f = \mathcal{X}_Q \omega$. Пусть $(c\varepsilon)^{n/(n-l)} = \gamma$, $Q_h \subset Q^*$. Тогда $E_{\varepsilon, Q_h} \in \mathcal{N}_{(\gamma)}$ и в силу условия (30)

$$\sup_{x \in Q_h} M_l(\mathcal{X}_{Q_h} \omega)(x) \leq bc_\gamma h^{l-n} \int_{Q_h} \omega, \quad (32)$$

где $c_\gamma = c\gamma^{l/n-1}$. Легко видеть, что

$$M_l(\mathcal{X}_Q f)(x) = \sup_{Q_\xi \subset Q, Q_\xi \ni x} \xi^{l-n} \int_{Q_\xi} |f|.$$

Поэтому

$$\sup_{x \in Q} M_l(\mathcal{X}_Q f)(x) = \sup_{x \in Q} \left\{ \sup_{Q_\xi \subset Q, Q_\xi \ni x} \xi^{l-n} \int_{Q_\xi} |f| \right\} = \sup_{Q_\xi \subset Q} \xi^{l-n} \int_{Q_\xi} |f|. \quad (33)$$

Положим ($0 < t \leq d$)

$$K(t) = \sup_{0 < \tau \leq t} \left\{ \sup_{Q_\tau \subset Q^*} \left\{ \sup_{x \in Q_\tau} M_l(\mathcal{X}_{Q_\tau} \omega)(x) \right\} \right\}.$$

Из (32), (33) следует, что

$$\begin{aligned} K(t) &\leq bc_\gamma \sup_{0 < \tau \leq t} \left\{ \sup_{Q_\tau \subset Q^*} \tau^{l-n} \int_{Q_\tau} \omega \right\} \leq bc_\gamma \sup_{Q \subset Q^*} |Q|^{l/n-1} \int_Q \omega \\ &\leq (bc_\gamma)^2 d^{l-n} \int_{Q^*} \omega < \infty. \end{aligned}$$

Если $0 < \xi \leq t \leq d$, то

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\xi))^p &= \sup_{0 < h \leq \xi} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q^*} h^{lp-n} |Q_h|_\omega \right\} \leq \xi^{l(p-1)} \sup_{Q_\xi \subset Q^*} \left\{ \sup_{Q \subset Q_\xi} |Q|^{l/n-1} |Q|_\omega \right\} \\ &= \xi^{l(p-1)} \sup_{Q_{xi} \subset Q^*} \left\{ \sup_{x \in Q_\xi} M_l(\mathcal{X}_{Q_\xi} \omega)(x) \right\} \leq \xi^{l(p-1)} K(t), \end{aligned}$$

откуда имеем, во-первых, что $\mathcal{A}(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, а также оценку

$$\int_0^t (\mathcal{A}(\xi))^{p'} \frac{d\xi}{\xi} \leq (K(t))^{1/(p-1)} \int_0^t \xi^{l-1} d\xi = \left(\frac{1}{l} t^{l(p-1)} K(t) \right)^{1/(p-1)}. \quad (34)$$

Далее, в силу (33)

$$\begin{aligned} t^{l(p-1)} K(t) &\leq bc_\gamma t^{l(p-1)} \sup_{Q_t \subset Q^*} \left\{ \sup_{Q \subset Q_t} |Q|^{l/n-1} \int_Q \omega \right\} \\ &\leq (bc_\gamma)^2 \sup_{Q_t \subset Q^*} t^{lp-n} |Q_t|_\omega \leq (bc_\gamma)^2 (\mathcal{A}(t))^p, \end{aligned}$$

что вместе с (34) приводит к неравенству (22) при $\mathcal{L} = c_\gamma b^{2/(p-1)}$, $c_\gamma = c(l, p, n, \gamma)$.

Пусть $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Рассмотрим на Ω эквивалентную расстоянию до границы Ω функцию

$$\sigma(x) = \sup\{\lambda > 0 : Q_\lambda(x) \subset \Omega\} \quad (x \in \Omega).$$

Пусть ω – вес на Ω , удовлетворяющий условию

$$b^{-1} \int_Q \sigma^\nu \leq \int_Q \omega \leq b \int_Q \sigma^\nu, \quad \text{если } Q \subset Q^* = (1 - \varepsilon)Q_{\sigma(x)}(x_0),$$

где числа $b > 1$, $\nu \neq 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда для любого $e \in \mathcal{N}_{(\gamma)}(Q)$

$$\sup_{x \in Q} M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x) \leq (b\varepsilon^{-|\nu|})^2 \sup_{x \in Q \setminus e} M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x).$$

На $\Omega = \mathbb{R}^n$ условию (30) удовлетворяет вес $\omega(x) = |x|^q$, $q > 0$. Действительно, пусть $Q = Q_d$, $R = \sup\{|x|, x \in \overline{Q}\}$. Очевидно, что

$$\sup_{x \in Q} M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x) = \sup_{Q_h \subset Q} h^{l-n} |Q_h|_\omega \leq R^q d^l. \quad (35)$$

Нетрудно показать, что Q содержит куб $\widehat{Q}_{d/4}$ такой, что $\inf\{|x|, x \in \widehat{Q}_{d/4}\} \geq R(8\sqrt{n})^{-1}$. Пусть $0 < \gamma < 4^{-n}$. Тогда $\widehat{Q}_{d/4} \setminus e \neq \emptyset$ для любого $e \in \mathcal{N}_{(\gamma)}(Q)$ и в силу (35)

$$\begin{aligned} \sup_{x \in Q \setminus e} M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x) &\geq \sup_{x \in \widehat{Q}_{d/4} \setminus e} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q, Q_h \ni x} h^{l-n} \int_{Q_h} \omega \right\} \\ &\geq \left(\frac{d}{4}\right)^{l-n} \int_{\widehat{Q}_{d/4}} \omega \geq (8\sqrt{n})^{-q} 4^{-l} d^l R^q \\ &\geq b^{-1} \sup_{x \in Q} M_l(\mathcal{X}_Q \omega)(x), \end{aligned}$$

где $b = 4^l (8\sqrt{n})^q$.

Класс $\Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}(\Omega)$. Пусть $0 \leq \delta, \varepsilon < 1$, $1 \leq p < \infty$; $d(x)$ — положительная ограниченная функция на Ω такая, что $Q(x) = Q_{d(x)}(x) \subset \Omega$ для п.в. x в Ω . Будем говорить, что *вес v на Ω удовлетворяет условию $(\Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}(\Omega))$* (относительно функции $d(x)$), если для п.в. x в Ω

$$\mathcal{M}_{(\delta, \varepsilon), p, l}(x, d; v) \stackrel{\text{def}}{=} d^{l-n/p} \inf_{e \in \mathcal{N}_{(\delta)}((1-\varepsilon)Q(x))} \left(\int_{(1-\varepsilon)Q(x) \setminus e} v \right)^{1/p} \geq 1; \quad (36)$$

краткая запись $v \in \Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}(\Omega)$. В (36) берем $\varepsilon = 0$ только при $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим примеры. Если вес v на $\mathbb{R}^n$ подчиняется условию

$$\inf_{e \in \mathcal{N}_{(\delta)}(Q)} \int_{Q \setminus e} v \geq \eta |Q| \quad \text{для всех } Q \in I^n \quad (37)$$

($\eta > 0$), например, $v(x) = 1 + |x|^\nu$, $\nu > 0$, то, как легко видеть, $\eta^{-1}v \in \Pi_{(\delta, 0), p, l}(\mathbb{R}^n)$ относительно функции $d(x) \equiv 1$.

Будем говорить, что *вес v на Ω удовлетворяет условию $(\Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}^*(\Omega))$* , если для п.в. x в Ω

$$0 < v_{(\delta, \varepsilon)}^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{d > 0} \{d : \overline{Q_d(x)} \subset \Omega \text{ и } \mathcal{M}_{(\delta, \varepsilon), p, l}(x, d; v) \leq 1\} \leq C < \infty$$

и

$$\overline{Q_{(\delta, \varepsilon)}^*(x)} \subset \Omega, \quad \text{где } Q_{(\delta, \varepsilon)}^*(x) = Q_d(x), \quad d = v_{(\delta, \varepsilon)}^*(x).$$

Нетрудно показать, что если $\overline{Q_{(\delta, \varepsilon)}^*(x)} \subset \Omega$, то $\mathcal{M}_{(\delta, \varepsilon), p, l}(x, v_{(\delta, \varepsilon)}^*(x); v) = 1$. Поэтому класс $\Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}^*(\Omega) \subset \Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}(\Omega)$, а вес $v \in \Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}^*(\Omega)$ удовлетворяет условию $(\Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}(\Omega))$ относительно функции Отелбаева $d(x) = v_{(\delta, \varepsilon)}^*(x)$. В частности, вес v , удовлетворяющий условию (37), принадлежит $\Pi_{(\delta, 0), p, l}^*(\mathbb{R}^n)$, при этом $v_{(\delta, \varepsilon)}^*(x) \leq \eta^{-1/(pl)}$.

Пусть $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Положим

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(x) \geq 1, \\ \sigma(x), & \text{если } \sigma(x) < 1, \end{cases} \quad Q(x) = (1 - \varepsilon)Q_{d(x)}(x).$$

Пусть вес v на Ω удовлетворяет условию

$$\inf_{e \in \mathcal{N}_{(\delta)}(\gamma Q(x))} \int_{\gamma Q(x) \setminus e} v \geq d(x)^s,$$

где $1 < p < \infty$, $s \leq 0$, $1 \leq \gamma < (1 - \varepsilon)^{-1}$. Например, функция $v(x) = cd(x)^\nu$, $\nu \leq p(s - l)$, $c = 2^{-\nu}(1 - \delta)^{-1}(1 - \varepsilon)^{-n/p}$. Тогда вес $v \in \Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}^*(\Omega)$, при этом $v_{(\delta, \varepsilon)}^*(x) \leq d(x)$.

Пусть $Q_d(x) \in I^n(\Omega)$, $0 < \varepsilon < 1$, $1 \leq p < \infty$, v – вес на Ω . Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(\varepsilon), p, l}^\#(x, d; v) &= \sup_{Q_h \subset (1 - \varepsilon)Q_d(x)} h^{lp - n} \int_{Q_h} v, \\ v_\varepsilon^\#(x) &= \sup_{d > 0} \{d : \overline{Q_d(x)} \subset \Omega, \mathcal{M}_{(\varepsilon), p, l}^\#(x, d; v) \leq 1\}, \\ Q_{(\varepsilon)}^\#(x) &= Q_d(x), \quad \text{где } d = v_\varepsilon^\#(x) \end{aligned}$$

($\varepsilon = 0$ только для $\Omega = \mathbb{R}^n$). Методом от противного доказывается равенство

$$\mathcal{M}_{(\varepsilon), p, l}^\#(x, v_\varepsilon^\#(x); v) = 1, \quad \text{если } \overline{Q_{(\varepsilon)}^\#(x)} \subset \Omega.$$

Класс $\Pi_{(\varepsilon), p, l}^\#(\Omega)$. Будем говорить, что вес v на Ω удовлетворяет условию $(\Pi_{(\varepsilon), p, l}^\#(\Omega))$, если для всех $x \in \Omega$

$$0 < v_{(\varepsilon)}^\#(x) \leq C < \infty \quad \text{и} \quad \overline{Q_{(\varepsilon)}^\#(x)} \subset \Omega;$$

краткая запись $v \in \Pi_{(\varepsilon), p, l}^\#(\Omega)$.

Рассмотрим примеры. Пусть v – вес на $\mathbb{R}^n$ такой, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{d \rightarrow 0} d^{-n} \int_{Q_d(x)} v < \infty, \quad \int_{Q_d(x)} v \geq \eta d^n \quad (0 < \eta < 1),$$

а $M_l(\mathcal{X}_Q v)$ подчиняется условию (30). Тогда $cv \in \Pi_{(0), p, l}^\#(\mathbb{R}^n)$, $c = c(b, \gamma)$. При этом $v_{(\varepsilon)}^\#(x) \leq \eta^{-1/(pl)}$. В частности, $v(x) = 1 + |x|^q$, $q > 0$, принадлежит $\Pi_{(0), p, l}^\#(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $v \in \Pi_{(0), p, l}^\#(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty$ и $M_l(\mathcal{X}_Q v)$ удовлетворяет условию (30). Из неравенств

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{M}_{(0), p, l}^\#(x, v_{(0)}^\#(x); v) \leq v_{(0)}^\#(x)^{l(p-1)} \sup_{t \in Q_{(0)}^\#(x)} M_l(\mathcal{X}_{Q_{(0)}^\#(x)} v)(t) \\ &\leq bc\gamma^{l/n-1}(1 - \tau)^{-1} (\mathcal{M}_{(0, \delta), p, l}(x, v_{(0)}^\#(x); v))^p \end{aligned}$$

следует, что в этом случае вес $c_1 v$, $c_1 = (bc\gamma^{l/n-1}(1 - \tau)^{-1})^{1/p}$, удовлетворяет условию $(\Pi_{(\delta, 0), p, l}(\mathbb{R}^n))$ относительно функции $d(x) = v_{(0)}^\#(x)$; числа $0 < \delta, \tau < 1$ – параметры условия (A_∞) для v .

ЛЕММА 6. Пусть $Q_d(x) \subset \Omega$ и $\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x,d;v) \geq 1$. Тогда для всех $u \in C^\infty(Q)$, $Q = (1-\varepsilon)Q_d(x)$, справедливо неравенство

$$d^{-l} \left(\int_Q |u|^p \right)^{1/p} \leq c_{\delta,\varepsilon} \left[\|u\|_{p,l,Q} + \left(\int_Q |u|^p v \right)^{1/p} \right], \quad (38)$$

где постоянная $c_{\delta,\varepsilon} = c(l, p, n, \delta, \varepsilon)$.

Доказательство леммы 6 по существу совпадает с доказательством, данным в работе [4; часть 1, лемма 3.6].

ЛЕММА 7. Пусть $1 \leq p < \infty$; v, ω — веса на Ω такие, что $v \in \Pi_{(\delta,\varepsilon),p,l}(\Omega)$ относительно $d(x)$, и существует положительная ограниченная на Ω функция $\mathcal{A}(x)$ такая, что для п.в. x в Ω

$$\|u\|_{L_p(Q(x);\omega)} \leq c\mathcal{A}(x) (\|u\|_{p,l,Q(x)} + d^{-l}\|u\|_{p,Q(x)}), \quad (39)$$

где $Q(x) = (1-\varepsilon)Q_d(x)(x)$; и пусть $\mathcal{A}_\omega = \text{vrai sup}_{x \in \Omega} \mathcal{A}(x)$. Тогда для всех $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^l(\Omega; v)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_p(\Omega;\omega)} \leq c_1 \mathcal{A}_\omega \|u\|_{W_p^l(\Omega;v)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω — ограниченное множество, а $\{Q^j\}_{j=1}^N$ ($N \leq \infty$), $Q^j = Q(x^j)$, — конечноразделимое покрытие Безиковича, выделенное из семейства $\{Q(x), x \in \Omega\}$ (см. [11; §1]). Пусть $\{Q^j\} \in J_\nu$ ($1 \leq \nu \leq c_2 = c(n) < \infty$) — подсемейства непересекающихся кубов, на которые распадается $\{Q^j\}_{j=1}^N$. Пусть $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^l(\Omega; v)$. Обращаясь к неравенствам (38), (39), получаем оценки

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p \omega &\leq (c_1 \mathcal{A}_\omega)^p \max_{1 \leq \nu \leq c_2} \sum_{j \in J_\nu} \left(\int_{Q^j} |\nabla_l u|^p + \int_{Q^j} |u|^p v \right) \\ &\leq c_3 (2c_1 \mathcal{A}_\omega)^p \|u\|_{W_p^l(\Omega;v)}^p. \end{aligned}$$

Пусть теперь Ω — неограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $\Omega_1 = \Omega \cap B(0, 2R)$, $\Omega_k = \Omega \cap (B(0, (k+1)R) \setminus \overline{B(0, (k-1)R)})$, $k = 2, 3, \dots$; $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^l(\Omega; v)$. По доказанному

$$\int_\Omega |u|^p \omega \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_{2j-1}} |u|^p \omega + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_{2j}} |u|^p \omega \leq c_4 (\mathcal{A}_\omega)^p \|u\|_{W_p^l(\Omega;v)}^p.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$, $lp < n$; вес $\omega \in \mathcal{A}_\infty$, вес $v \in \Pi_{(\delta,0),p,l}(\mathbb{R}^n)$ относительно функции $d(x)$ и

$$\mathcal{A}_\omega = \text{vrai sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sup_{Q_h \subset 2Q(x)} h^{l-n/p} |Q_h|_\omega^{1/p} \right\} < \infty,$$

где $Q(x) = Q_{d(x)}(x)$. Тогда имеет место вложение (1). Точная постоянная $C \leq c\mathcal{A}_\omega$.

Доказательство теоремы 1 следует из утверждений лемм 1 и 7.

При $v \equiv 1$ пространство $W_p^l(\Omega; v)$ совпадает с невесовым пространством Соболева $W_p^l(\Omega)$, в котором введена норма $\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{p,l,\Omega} + \|u\|_{p,\Omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$, $lp < n$; вес $\omega \in \mathcal{A}_\infty$ и

$$K = \sup_{Q_2} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q_2} h^{l-n/p} |Q_h|_\omega^{1/p} \right\} < \infty.$$

Тогда

$$\|u\|_{L_p(\omega)} \leq cK \|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in W_p^l(\mathbb{R}^n). \quad (40)$$

Для доказательства достаточно заметить, что $(1 - \delta)^{-1}v$, $v \equiv 1$, принадлежит классу $\Pi_{(\delta,0),p,l}(\mathbb{R}^n)$ относительно $d(x) \equiv 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < p < \infty$, $k > 0$ целое, $0 < (l - k)p < n$; вес $\omega \in \mathcal{A}_\infty$ и

$$K = \sup_{Q_2} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q_2} h^{(l-k)-n/p} |Q_h|_\omega^{1/p} \right\} < \infty.$$

Тогда

$$\|\nabla_k u\|_{L_p(\omega)} + \|u\|_{L_p(\omega)} \leq cK \|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство тривиально следует из вложения (40) и вложения $W_p^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_p^{l-k}(\mathbb{R}^n)$.

Из лемм 2 и 7 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $lp < n$; ω — п.в. положительный вес на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям (14)–(15), вес $v \in \Pi_{(\delta,0),p,l}(\mathbb{R}^n)$ относительно функции $d(x)$; и пусть

$$\mathcal{A}_\omega = \text{vraisup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q(x)} h^{l-n/p} |Q_h|_\omega^{1/p} \right\} < \infty,$$

где $Q(x) = Q_{d(x)}(x)$. Тогда имеет место вложение (1). Точная постоянная $C \leq c\mathcal{A}_\omega$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $lp < n$; ω — п.в. положительный вес на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям (14)–(15), вес $v \in \Pi_{(0),p,l}^\#(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_\infty$ и подчиняется условию (30). Тогда вложение (1) имеет место, если и только если

$$\mathcal{A}_\omega^\# = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q_{(0)}^\#(x)} h^{l-n/p} |Q_h|_\omega^{1/p} \right\} < \infty.$$

Точная постоянная C эквивалентна $\mathcal{A}_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы 3 в достаточную сторону содержится в теореме 2, так как существует $c = c(b, \gamma, \delta, \tau)$ такое, что $cv \in \Pi_{(\delta,0),p,l}(\mathbb{R}^n)$ относительно функции $d(x) = v_0^\#(x)$ (δ, τ — параметры условия $(\mathcal{A}_\infty)$ для v). Оценка $C \geq c_1 \mathcal{A}_\omega^\#$, $c_1 = c(\alpha, R)$, тривиально выводится на пробных функциях.

С помощью лемм 4, 5 и 7 доказывается

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$, $lp < n$; ω – вес на Ω , удовлетворяющий условию (30). Справедливы следующие утверждения.

а) Если вес $v \in \Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}(\Omega)$ относительно функции $d(x)$ и

$$\mathcal{A} = \operatorname{vrai} \sup_{x \in \Omega} d(x)^{l-n/p} |(1-\varepsilon)Q_{d(x)}(x)|_{\omega}^{1/p} < \infty,$$

то имеет место вложение (1). Точная постоянная $C \leq \mathcal{A}$, где $c = c(l, n, p, \delta, \gamma, b)$.

б) Если вес $v \in \Pi_{(\delta, \varepsilon), p, l}^*(\Omega)$, то вложение (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}^* = \operatorname{vrai} \sup_{x \in \Omega} (v_{\delta, \varepsilon}^*(x))^{l-n/p} |(1-\varepsilon)Q_{\delta, \varepsilon}^*(x)|_{\omega}^{1/p} < \infty.$$

Точная постоянная C в (1) эквивалентна $\mathcal{A}^*$.

Рассмотрим неравенство

$$\|u\|_{L_q(\omega)} \leq C \|\nabla_l u\|_{L_p(\rho)}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (41)$$

($1 < p \leq q < \infty$). Пусть $\omega \in A_\infty$. Тогда в силу неравенства (5) и теоремы А

$$\|u\|_{L_q(\omega)} \leq c_1 \|I_l(|\nabla_l u|)\|_{L_q(\omega)} \leq c_2 \|M_l(|\nabla_l u|)\|_{L_q(\omega)} \leq c_3 K \|\nabla_l u\|_{L_p(\rho)}, \quad (42)$$

если определенная равенством (8) величина $K < \infty$.

Из (42) вытекает справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $lp < n$; ω и ρ – веса на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям: $\omega \in A_\infty$ и существуют такие $0 < \gamma < 1$, $b > 1$, что для всех $Q \in I^n$

$$\int_Q [M_l(\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'})]^q \omega \leq b \int_{Q \setminus e} [M_l(\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'})]^q \omega, \quad \text{как только } e \in \mathcal{N}_{(\gamma)}(Q); \quad (43)$$

и пусть

$$K_{\rho, \omega} = \sup_{Q \in I^n} |Q|^{l/n-1} \left(\int_Q \omega \right)^{1/q} \left(\int_Q \rho^{1-p'} \right)^{1/p'} < \infty.$$

Тогда справедливо неравенство (41). Точная постоянная $C \leq c K_{\rho, \omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $(c\varepsilon)^{n/(n-l)} = \gamma$, $Q \in I^n$,

$$e_Q = \left\{ x \in Q : \varepsilon M_l \rho^{1-p'}(x) > |Q|^{l/n-1} \int_Q \rho^{1-p'} \right\}.$$

В силу (31) множество $e_Q \in \mathcal{N}_{(\gamma)}(Q_d)$ и из (43) следует, что

$$\int_Q [M_l(\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'})]^q \omega \leq b \int_{Q \setminus e_Q} [M_l(\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'})]^q \omega \leq c \left[|Q|^{l/n-1} \int_Q \rho^{1-p'} \right]^q |Q|_{\omega}, \quad (44)$$

где $c = c(\gamma, \delta, \tau, b)$, δ, τ – параметры условия (A_∞) для ω .

Из (44), очевидно, имеем

$$K = \|\mathcal{X}_Q M_l(\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'})\|_{L_q(\omega)} \|\mathcal{X}_Q \rho^{1-p'}\|_{L_p(\rho)}^{-1} \leq c^{1/q} K_{\rho, v} < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда $\omega = v^q$, $\rho = v^p$, $1 < p < \infty$, $1/q = 1/p - l/n$, а

$$K_v = \sup_{Q \in I^n} \left(|Q|^{-1} \int_Q v^q \right)^{1/q} \left(|Q|^{-1} \int_Q v^{-p'} \right)^{1/p'} < \infty,$$

неравенство (41) следует из неравенства Макенхаупта–Видена сильного типа [6; теорема 4].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для весов $\omega \in A_\infty$ и таких, что

$$K_{\alpha, \omega} = \sup_{Q \in I^n} |Q|^{l/n-1} \left(\int_Q \omega \right)^{1/q} \left(\int_Q |x|^{-\alpha/(p-1)} dx \right)^{1/p'} < \infty,$$

где $1 < p \leq q < \infty$, $lp < n$, $\alpha < 0$, справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_q(\omega)} \leq c K_{\alpha, \omega} \| |x|^\alpha \nabla_l u \|_p,$$

являющееся простым следствием теоремы 5 и свойства (30), которому удовлетворяет функция $M_l(\mathcal{X}_Q |x|^\nu)$, $\nu > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условию (43) подчиняется весовая пара $\omega \in A_\infty$ и $\rho \equiv 1$.

Действительно, пусть δ, τ –параметры условия (A_∞) для ω , $e \in \mathcal{N}_{(\delta)}(Q)$. Тогда

$$\int_e [M_l(\mathcal{X}_Q)]^q \omega = |Q|^{lq} \int_e \omega \leq \tau \int_e [M_l(\mathcal{X}_Q)]^q \omega,$$

откуда следует (43) с $b = (1 - \tau)^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $\omega \in A_\infty$ и

$$K_\omega = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{l-n/p} |B(x, r)|_\omega^{1/p} < \infty.$$

В силу теоремы 5 справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_p(\omega)} \leq c K_\omega \|\nabla_l u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Список литературы

1. *Adams D. R.* A trace inequality for generalized potentials // *Studia Math.* 1973. V. 48. № 1. P. 99–105.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
3. *Отелбаев М. О.* Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шрёдингера // *Труды МИАН.* 1979. Т. 150. С. 265–305.
4. *Лизоркин П. И., Отелбаев М. О.* Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. I, II // *Матем. сб.* 1979. Т. 108 (150). С. 358–377; 1980. Т. 112 (154). С. 56–85.
5. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их применения // *Итоги науки и техники. Матем. анализ.* Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 42–129.
6. *Muckenhoupt B., Wheeden R. L.* Weighted norm inequalities for fractional integrals // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1974. V. 192. P. 261–274.
7. *Sawyer E. T.* Two weight norm inequalities for certain maximal and integral operators // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 908. P. 102–127.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
9. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в матем. физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
10. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
11. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.

Институт прикладной математики Министерства науки
и Академии РК и Министерства образования и культуры,
г. Караганда, Республика Казахстан
E-mail: leila@ipm.karaganda.su

Поступила в редакцию
02.12.1997