Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Об усреднении одного вариационного неравенства для упругого тела с периодически расположенными трещинами, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 2, 149–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:16:06

УДК 517.953

С. Е. Пастухова

**Об усреднении одного вариационного
неравенства для упругого тела
с периодически расположенными трещинами**

Изучена задача о малых деформациях упругого тела с периодически расположенными трещинами, когда на краях трещин ставятся односторонние ограничения, которая эквивалентна вариационному неравенству. При условии, что ε – линейный размер периода размещения трещин – стремится к нулю, доказана L^2 -сходимость решений этой задачи к решению усредненной задачи, а ею является нелинейная краевая задача теории упругости в области без трещин.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

1. В [1; гл. 6] была рассмотрена краевая задача для поля перемещений упругого тела, занимающего ограниченный трехмерный объем Ω , с малыми периодически расположенными трещинами. На сторонах трещин накладывались односторонние ограничения: стороны трещин не перекрываются, на них отсутствует касательное трение, нормальное напряжение взаимно уравновешено на противоположных сторонах и оно ненулевое лишь в случае смыкания трещины. Известно, что такая краевая задача может быть поставлена в виде вариационного неравенства на некотором выпуклом замкнутом множестве функций (см. теорию вариационных неравенств в [2]–[4]). Если период распределения трещин, а также размеры их зависят от одного малого параметра $\varepsilon \rightarrow 0$, то, изучая поведение решения u^ε этой краевой задачи (или вариационного неравенства) при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно применить стандартный для теории усреднения метод асимптотических разложений (см. [1], а также похожие задачи в [5]–[7]). Формальное разложение для решения u^ε выбирается в виде

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

где $u^i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots$, как функции от $y = (y_1, y_2, y_3)$ являются 1-периодическими по всем переменным y_j . В [1] было показано, каким краевым задачам или вариационным неравенствам должны удовлетворять два первых члена этой асимптотики $u^0(x)$, $u^1(x, y)$. Оказалось, как обычно бывает в теории усреднения, второй член асимптотики $u^1(x, y)$ определяет оператор краевой задачи для $u^0(x)$. Но в [1] остался открытым вопрос обоснования формальной асимптотики (1.1). Настоящая работа частично ликвидирует этот пробел, а именно, доказываем сходимость $u^\varepsilon(x)$ к $u^0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в L^2 -норме. Таким образом, оказывается верной

гипотеза, высказанная в [1]: упругое тело с периодически расположенными трещинами, на сторонах которых действуют определенные односторонние ограничения, может рассматриваться как тело без трещин, для которого справедлив гиперупругий закон, связывающий тензоры напряжений и деформации.

2. Определим точно задачу о малых деформациях упругого тела с трещинами. Рассмотрим однородное упругое тело, занимающее ограниченную область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с гладкой (класса C^∞) границей $\partial\Omega$. Его уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh}e_{kh}(u) \quad (1.2)$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3), где $u = (u_1, u_2, u_3)$ – поле перемещений, $e_{ij}(u)$, $\sigma_{ij}(u)$ – тензоры деформации и напряжений соответственно, $e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Пусть коэффициенты тензора упругости $a = a_{ijkh}$ постоянны и обладают свойствами симметричности

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk} = a_{khij}$$

и положительной определенности

$$a_{ijkh}e_{ij}e_{kh} \geq \alpha e_{ij}e_{ij} \quad (1.3)$$

для некоторой константы $\alpha > 0$ и любого симметричного тензора $e = \{e_{ij}\}$, $e_{ij} = e_{ji}$.

Соотношение (1.2) можно обратить в следующем смысле: существует тензор $b = \{b_{ijkh}\}$ такой, что

$$e_{ij}(u) = b_{ijkh}\sigma_{kh}(u)$$

и для тензора b выполняются условия симметричности и положительной определенности, т.е.

$$b_{ijkh} = b_{jikh} = b_{khij} = b_{ijhk}, \\ b_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh} \geq \alpha^{-1}\sigma_{ij}\sigma_{ij}$$

для любого симметричного тензора $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$.

Усложним ситуацию. В упругом теле появляется трещина или система трещин. Более точно это означает следующее. Пусть F – замнутый кусок гладкой поверхности, $F \subset \Omega$. Он может быть несвязным, тогда F – система нескольких или даже многих трещин. Основное требование: область $\Omega_F = \Omega \setminus F$ является связной, т.е. F не разбивает объем Ω на несколько составляющих. Край поверхности F состоит из конечного числа гладких кривых. Ясно, что область с трещиной Ω_F не имеет гладкой границы. В границу области Ω_F входят внешняя граница $\partial\Omega$, а также внутренняя граница, состоящая из двух экземпляров поверхности F , которые представляют две стороны трещины (или еще говорят: два берега трещины). Выберем на F вектор единичной нормали $N = (N_1, N_2, N_3)$. Тогда ту сторону трещины, по отношению к которой вектор N является внешней нормалью, будем обозначать через F_1 , а другую сторону трещины – через F_2 . Для функции φ , гладкой в Ω_F ,

можно говорить о ее скачке на F : $[\varphi] = \varphi|_2 - \varphi|_1$, где $\varphi|_i = \varphi|_{F_i}$, $i = 1, 2$. Для негладкой функции $\varphi \in H^1(\Omega_F)$ стандартным образом можно ввести два следа ее $\varphi|_i = \varphi|_{F_i}$, $i = 1, 2$, через которые так же, как для гладкой функции, определяется скачок $[\varphi]$ на поверхности F .

Пусть $n = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор внешней единичной нормали к границе $\partial\Omega_F$. Тогда на границе $\partial\Omega_F$ действует напряжение, вектор которого $\sigma_n = \sigma n$ имеет компоненты $\sigma_{ij}n_j$, $i = 1, 2, 3$, и раскладывается на взаимно ортогональные составляющие

$$\sigma_n = \sigma_{nn}n + \sigma_\tau, \quad (1.4)$$

где σ_τ – касательная к границе составляющая.

Далее будем иметь в виду, что в силу введенных обозначений для двух сторон трещины $n|_{F_1} = N$, $n|_{F_2} = -N$.

Пусть выполнены следующие предположения. Две стороны трещины могут быть разомкнуты, но не могут перекрываться. В рассматриваемой математической модели разомкнутость трещины в какой-то точке F означает, что на сторонах F_1, F_2 в этой точке нормальные перемещения (проекции перемещения на нормаль N) не совпадают, т.е. претерпевают скачок, неотрицательность которого интерпретируется как условие неперекрываемости сторон трещины. Аналогично считается, что трещина в некоторой точке смыкается, если нормальные перемещения в этой точке на сторонах F_1, F_2 совпадают. Далее, предположим также, что напряжения на сторонах трещины не содержат касательных компонент и взаимно уравниваются. Если трещина разомкнута в некоторой точке, то напряжения на обеих сторонах в этой точке вовсе отсутствуют. В точках смыкания трещины происходит сжатие тела. Предположим также, что тело закреплено на внешней границе $\partial\Omega$ и на него воздействуют внешние силы, вектор объемной плотности которых есть $f = (f_1, f_2, f_3)$.

В этих предположениях на упругое тело, занимающее объем Ω_F , его поле перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет следующей краевой задаче в Ω_F с частично односторонними условиями на границе $\partial\Omega_F$:

$$\operatorname{div} \sigma(u) + f = 0 \quad \text{в } \Omega_F, \quad (1.5)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1.6)$$

$$[u \cdot N] \geq 0 \quad \text{на } F, \quad (1.7)$$

$$\sigma_n(u)|_1 = \sigma_{NN}|_1 N, \quad \sigma_n(u)|_2 = -\sigma_{NN}|_1 N, \quad \sigma_{NN}|_1 \leq 0, \quad (1.8)$$

$$\sigma_{NN}|_1 [u \cdot N] = 0 \quad \text{на } F. \quad (1.9)$$

Здесь и далее для векторов $u, v \in \mathbb{R}^3$ через $u \cdot v$ обозначаем их скалярное произведение, а также для тензора $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ считаем, что $\operatorname{div} \sigma = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$.

Как в [1; гл. 6], для обобщенной (вариационной) постановки задачи (1.5)–(1.9) введем в стандартном трехмерном соболевском пространстве $(H^1(\Omega_F))^3$: подпространство V_F как замыкание множества функций из $(C_{\partial\Omega}^\infty(\Omega_F))^3$, равных нулю в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$, по норме $(H^1(\Omega))^3$; множество функций $K_F = \{u \in V_F : [u \cdot N] \geq 0 \text{ п.в. на } F\}$; билинейную форму $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) e(v) dx$;

линейную форму $L(u) = \int_{\Omega} u \cdot f \, dx$. Здесь и далее для тензоров $\sigma(u)$, $e(v)$ используем обозначение $\sigma(u)e(v) = \sigma_{ij}(u)e_{ij}(v)$.

Известно (см. [1]), что V_F , снабженное обычной нормой из $(H^1(\Omega))^3$, является гильбертовым пространством, а K_F — замкнутым выпуклым конусом из V_F .

Тогда вариационная постановка задачи (1.5)–(1.9) такова: *найти функцию $u \in K_F$, удовлетворяющую для любой $v \in K_F$ неравенству*

$$a(u, v - u) \geq L(v - u). \quad (1.10)$$

В [1; гл. 6, §5] показана эквивалентность краевой задачи (1.5)–(1.9) и вариационного неравенства (1.10), если f и u достаточно гладкие. Поэтому далее под обобщенным решением краевой задачи (1.5)–(1.9) понимаем функцию $u \in K_F$ — решение вариационного неравенства (1.10) с заданной функцией $f \in (H^{-1}(\Omega_F))^3$.

В области Ω_F выполняется неравенство Корна, с помощью которого в силу (1.3) выводится коэрзитивность билинейной формы $a(u, v)$ на пространстве V_F . И значит (см. [1; гл. 6, теорема 5.1]), существует и притом единственное решение вариационного неравенства (1.10).

3. Рассмотрим последовательность зависящих от малого параметра ε ($0 < \varepsilon < 1$) задач типа задачи (1.10), но сперва определим необходимые множества. Пусть $Y = (0, 1)^3$ — единичный куб в $\mathbb{R}^3$. В Y есть гладкая “трещина” F в смысле п. 2, не пересекающая границу куба Y . Пусть $Y_F = Y \setminus F$, а F_0 есть неограниченное множество с 1-периодической структурой такое, что $F_0 \cap Y = F$.

Пусть $F_{\varepsilon 0} = \varepsilon F_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon^{-1}x \in F_0\}$. Если $T_{\varepsilon} = \{z \in \mathbb{Z}^3 : \varepsilon(\overline{Q} + z) \in \Omega\}$, где $Q = (0, 1)^3$ — единичный куб в $\mathbb{R}^3$, то множество $F_{\varepsilon} = \bigcup_{z \in T_{\varepsilon}} \varepsilon(F + z)$ есть некоторая часть $F_{\varepsilon 0}$, попавшая в область Ω , притом не выходящая на границу $\partial\Omega$. Множество F_{ε} будем рассматривать как систему периодически (с периодом εY) расположенных в Ω трещин. Пусть $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus F_{\varepsilon}$. Тогда граница области Ω_{ε} состоит из внешней границы $\partial\Omega$ и двух экземпляров $F_{\varepsilon, 1}$, $F_{\varepsilon, 2}$ множества F_{ε} , представляющих две стороны (два берега) системы трещин F_{ε} в Ω . Пусть обозначение двух сторон этой системы трещин через $F_{\varepsilon, 1}$, $F_{\varepsilon, 2}$ соответствует обозначению F_1 , F_2 двух сторон трещины F в Y , порождающей систему трещин F_{ε} описанным выше способом. Единичную нормаль к F , которая является внешней на стороне F_1 , обозначаем через N , так же будем обозначать ту единичную нормаль к F_{ε} , которая является внешней на $F_{\varepsilon, 1}$.

Пусть для функции φ , определенной на Ω_{ε} (или на Y_F), $[\varphi] = \varphi|_2 - \varphi|_1$, где $\varphi|_i = \varphi|_{F_{\varepsilon, i}}$ (или $\varphi|_i = \varphi|_{F_i}$), $i = 1, 2$.

Определим пространство $V_{\varepsilon} = V_{F_{\varepsilon}}$ и выпуклое множество $K_{\varepsilon} = K_{F_{\varepsilon}}$ аналогично тому, как в п. 2 были определены V_F и K_F , взяв вместо области Ω_F область Ω_{ε} . Пусть теперь $a(u, v) = \int_{\Omega_{\varepsilon}} \sigma(u)e(v) \, dx$, $L(u) = \int_{\Omega_{\varepsilon}} u \cdot f \, dx$ для любых функций $u, v \in V_{\varepsilon}$ и фиксированной $f \in (L^2(\Omega))^3$.

Под решением статической задачи для малых деформаций упругого тела с трещинами, занимающего объем Ω_{ε} , понимаем вектор-функцию $u^{\varepsilon} \in K_{\varepsilon}$, для которой неравенство

$$a(u^{\varepsilon}, v - u^{\varepsilon}) \geq L(v - u^{\varepsilon}) \quad (1.11)$$

справедливо при любой функции $v \in K_{\varepsilon}$.

В пространстве V_ε выполнено равномерное неравенство Корна

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx, \quad (1.12)$$

где константа C одна и та же для всех $u \in V_\varepsilon$ и всех ε , достаточно малых ($\varepsilon < \varepsilon_0$). Неравенство (1.12) можно вывести из соответствующего равномерного неравенства Корна для периодически перфорированных областей (см., например, [6]).

Используя (1.12), стандартно можно доказать существование решения вариационного неравенства (1.11), которое является единственным и удовлетворяет оценке

$$|u^\varepsilon|_{H^1(\Omega)^3} \leq C_1 \quad (\varepsilon < \varepsilon_0), \quad (1.13)$$

где константа C_1 не зависит от ε .

Если подвектором $n = (n_1, n_2, n_3)$ понимать единичную внешнюю нормаль к F_ε , то так же, как в п. 2, определим для заданного поля перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)$ на F_ε вектор напряжений $\sigma_n = \sigma(u)n$, при этом σ_n раскладывается в сумму взаимно ортогональных компонент типа суммы (1.4).

Вариационное неравенство (1.11) является обобщенной постановкой краевой задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(u^\varepsilon) + f &= 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad [u^\varepsilon \cdot N] \geq 0 \quad \text{на } F_\varepsilon, \\ \sigma_n(u^\varepsilon)|_1 &= \sigma_{NN}(u^\varepsilon)|_1 N, \quad \sigma_n(u^\varepsilon)|_2 = -\sigma_{NN}(u^\varepsilon)|_1 N, \quad \sigma_{NN}(u^\varepsilon)|_1 \leq 0, \\ \sigma_{NN}(u^\varepsilon)|_1 [u^\varepsilon \cdot N] &= 0 \quad \text{на } F_\varepsilon. \end{aligned}$$

4. Изучим поведение u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, где u^ε — решение неравенства (1.11). Для этого будем искать решение u^ε в виде разложения (1.1) и выбирать пробные функции v^ε в неравенстве (1.11) в виде аналогичного разложения:

$$v^\varepsilon = v^0(x) + \varepsilon v^1(x, y) + \varepsilon^2 v^2(x, y) + \dots \quad (1.14)$$

В (1.1) и (1.14) $u^i(x, y)$, $v^i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots$, — вектор-функции, определенные на $\Omega \times Y_F$, 1-периодические по y . Так как $u^0(x)$, $v^0(x)$ не зависят от y , то условие $u^\varepsilon \in K_\varepsilon$ означает, что

$$[u^1 \cdot N] \geq 0 \quad \text{п.в. на } F. \quad (1.15)$$

Введем теперь необходимые пространства и множества функций на ячейке Y_F , используя обозначения из [1]: $V_{YF} = \{v = (v_1, v_2, v_3) : v_i \in H^1(Y_F), v_i \text{ 1-периодические по } y, i = 1, 2, 3\}$, $\tilde{V}_{YF} = \{v \in V_{YF} : \bar{v} = 0\}$, где $\bar{v} = \int_Y v dy$, $K_{YF} = \{v \in V_{YF} : [v \cdot N] \geq 0 \text{ п.в. на } F\}$, $\tilde{K}_{YF} = \{v \in K_{YF} : \bar{v} = 0\}$.

Используя эти обозначения, а также соображение (1.15), можем считать, что в разложениях (1.1), (1.14) $u^0, v^0 \in (H_0^1(\Omega))^3$, а u^1, v^1 — функции по x со значениями в K_{YF} .

В [1; гл. 6, предложение 6.1] показано, что, рассматривая неравенство (1.11) для функций u^ε и $v = v^\varepsilon$ вида (1.1), (1.14), можно вывести следующие свойства функций u^0, u^1 из разложения (1.1). Функция u^0 принадлежит $(H_0^1(\Omega))^3$ и удовлетворяет вариационному равенству

$$\int_{\Omega} \int_Y a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i - u_i^0) dx dy - \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i^0) dx = 0$$

для любой функции $v \in (H_0^1(\Omega))^3$. А это эквивалентно тому, что u^0 — решение следующей краевой задачи в области Ω :

$$\operatorname{div} \bar{\sigma}^0(u^0) + f = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u^0 \in (H_0^1(\Omega))^3, \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^0 &= \int_Y \sigma^0 dy, & \sigma^0 &= \{\sigma_{ij}^0\}, \\ \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^0(u^0) = a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right), & i, j &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.17)$$

что можно переписать по-иному ввиду симметричности тензоров $a, e(u)$:

$$\sigma_{ij}^0(E) = a_{ijkh} (E_{kh} + e_{kh,y}(u^1)), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.18)$$

где $E_{kh} = e_{kh}(u^0)$, тензор деформации $e_{ij,y}(v)$ для заданного перемещения v определяется через $\operatorname{grad}_y v(y)$ стандартным образом. При этом функция $u^1(x, y)$ принадлежит K_{YF} и при фиксированных x , $u^0(x)$ удовлетворяет вариационному неравенству для любой функции $w \in K_{YF}$:

$$\int_Y a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (w_i - u_i^1) dy \geq 0. \quad (1.19)$$

Заметим, что вектор-функции u^1, w входят в неравенство (1.19) через свой градиент по переменной y , поэтому каждую из них можно заменить на постоянный вектор, отчего левая часть неравенства (1.19) не изменится, но измененные функции окажутся из конуса $\tilde{K}_{YF}$.

Введем на пространстве V_{YF} билинейную форму

$$a_Y(v, w) = \int_Y a_{ijkh} e_{ij,y}(v) e_{kh,y}(w) dy, \quad (1.20)$$

а также линейную форму, зависящую от тензорного параметра $E = \{E_{ij}\}$:

$$L_E(v) = \int_Y a_{ijkh} E_{ij} e_{kh,y}(v) dy. \quad (1.21)$$

Учтем, что ввиду симметричности тензоров $a, e(v)$ есть другое представление формы (1.20), а именно

$$a_Y(v, w) = \int_Y a_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial y_h} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy. \quad (1.22)$$

Из неравенства Корна на ячейке Y_F можно вывести коэрцитивность формы $a_Y(v, w)$ на $\tilde{V}_{Y_F}$, и это свойство обеспечит разрешимость, и притом однозначную, локальной задачи на ячейке Y_F для отыскания функции $u^1(x, y)$, которую с учетом (1.19)–(1.22) можно сформулировать в следующем виде.

Пусть $u^0(x)$ – заданная функция. Сопоставим ей тензор $E = \{E_{ij}\}$, $E_{ij} = e_{ij}(u^0)$. Тогда $u^1(x, y)$ – решение следующей задачи: *найти функцию $u \in \tilde{K}_{Y_F}$, для которой неравенство*

$$a_Y(u, w - u) + L_E(w - u) \geq 0 \quad (1.23)$$

выполняется при любой функции $w \in \tilde{K}_{Y_F}$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1; гл. 6, теорема 6.1]). *Задача (1.23) имеет единственное решение в $\tilde{K}_{Y_F}$ для заданного тензора $E = \{E_{ij}\}$.*

В силу теоремы 1 тензор $\bar{\sigma}^0 = \{\bar{\sigma}_{ij}^0\}$, определенный формулами (1.17), (1.18), является нелинейной функцией от аргумента $E = \{E_{kh}\}$, $E_{kh} = e_{kh}(u^0)$ (который можно рассматривать как элемент из $\mathbb{R}^6$ в силу его симметричности), при этом отображение $E \rightarrow \bar{\sigma}^0$ задается формулами (см. [1; гл. 6, теорема 7.1]):

$$\bar{\sigma}_{ij}^0 = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}, \quad W(E) = \frac{1}{2} \int_Y a_{ijkh}(e_{kh,y}(u) + E_{kh})(e_{ij,y}(u) + E_{ij}) dy, \quad (1.24)$$

где u – решение неравенства (1.23) при заданном тензоре $E = \{E_{ij}\}$.

В теоремах 7.1, 7.2 [1; гл. 6] приведены свойства функций $\bar{\sigma}^0(E)$, $W(E)$, зависящих от тензорного аргумента E . Из этих свойств на основании результатов [8] выводится обобщенная разрешимость, притом однозначная, нелинейной краевой задачи (1.16).

Под обобщенным решением задачи (1.16) понимаем функцию $u^0 \in (H_0^1(\Omega))^3$ такую, что для любой функции $w \in (H_0^1(\Omega))^3$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij}^0(E) e_{ij}(w) dx = \int_{\Omega} f_i w_i dx, \quad \text{где } E = \{E_{kh}\}, \quad E_{kh} = e_{kh}(u^0).$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [1; гл. 6, теорема 7.3]). *Для любой заданной функции $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (1.16).*

§ 2. Обоснование процедуры усреднения задачи (1.11)

Основной результат работы дан в теореме 4, которая является следствием теоремы 3. Но прежде чем перейти к этим теоремам, дадим в п. 1 ряд вспомогательных утверждений.

1. В дальнейшем будем использовать некоторые приемы из работ [9]–[12], [7; гл. 16], которые успешно применялись ранее при усреднении различных линейных

и нелинейных задач в перфорированных областях. Среди них особо отметим: модифицированную лемму о компенсированной компактности (обычную лемму о компенсированной компактности см., например, в [7; гл. 1, § 1]), обращение к двойственным функционалам, кусочно аффинное приближение предельной функции.

Введем необходимые пространства для вспомогательных лемм. Пусть $C_{\text{per}}^\infty(Y_F)$ является множеством гладких 1-периодических функций, определенных на $\mathbb{R}^3 \setminus F_0$, тогда $L_{\text{per}}^2(Y_F)$ есть замыкание $C_{\text{per}}^\infty(Y_F)$ по норме $L^2(Y)$. Определим $H_{\text{per}}^1(Y, F)$ как замыкание подмножества функций из $C_{\text{per}}^\infty(Y_F)$, равных 0 в окрестности F_0 , по норме $H^1(Y)$.

ЛЕММА 1. Пусть $a(y) \in L_{\text{per}}^2(Y_F)$, $\bar{a} = \int_Y a dy = 0$. Тогда существует $w \in H_{\text{per}}^1(Y, F)^3$ такая, что $\text{div } w(y) = a(y)$, при этом

$$|w|_{H^1(Y)^3} \leq C_0 |a|_{L^2(Y)}, \quad \text{где } C_0 = \text{const}(F).$$

Доказательство для случая, когда F является полостью в Y с C^2 -границей, дано в [5; гл. 4, § 7]. С учетом результатов работы [13] нужный нам случай рассматривается аналогично.

ЛЕММА 2. Пусть $u^{(i)}$ – решение вариационного неравенства (1.23) для заданного тензора $E^{(i)} = \{E_{kh}^{(i)}\}$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\int_Y |e(u^{(1)} - u^{(2)})|^2 dy \leq C_1 \int_Y |E^{(1)} - E^{(2)}|^2 dy, \quad \text{где } C_1 = \text{const}(F).$$

Доказательство последней оценки можно провести следующим образом: записать неравенства, которым функции $u^{(1)}, u^{(2)}$ как решения соответствующих вариационных задач удовлетворяют с пробными функциями $v = u^{(2)}, v = u^{(1)}$ соответственно, далее сложить эти неравенства, и стандартные преобразования приведут к нужной оценке.

Далее для функции $v(y) \in V_{YF}$ под $e_{kh}(v)$ подразумеваем $e_{kh,y}(v)$.

ЛЕММА 3. Если $u_E(y)$ – решение вариационного неравенства (1.23) с заданным тензором $E = \{E_{ij}\}$, компоненты которого постоянны, то тензорная функция $z = \{z_{ij}\}$ такая, что $z_{ij} = a_{ijkh}(E_{kh} + e_{kh}(u_E))$, имеет следующие свойства:

$$\text{div } z = 0 \quad \text{в } Y_F, \quad (2.1)$$

на границе F взаимно ортогональное разложение вектора $z_n = zn = z_{nn}n + z_\tau$ удовлетворяет условиям:

$$z_n|_1 = z_{nn}|_1 N, \quad z_n|_2 = -z_{nn}|_1 N, \quad z_{nn}|_1 \leq 0, \quad (2.2)$$

$$\int_{Y_F} a_{ijkh}(E_{ij} + e_{ij}(u_E))(E_{kh} + e_{kh}(u_E)) dy = \bar{\sigma}^0(E)E = \bar{z}E, \quad (2.3)$$

$$\text{где } \bar{\sigma}^0(E) = \bar{z} = \int_Y z dy.$$

Доказательство свойств (2.1), (2.2) проводится так же, как в [1; гл. 6] доказывались свойства (1.5)–(1.9) для решения вариационного неравенства (1.10). Свойство (2.3) вытекает из неравенств, которым удовлетворяет u_ε как решение соответствующей вариационной задачи с пробными функциями $v = 0$, $v = 2u_\varepsilon$.

Пусть дана последовательность $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$ такая, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon|^2 dx \leq +\infty, \quad \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq +\infty. \quad (2.4)$$

Тогда без потери общности можно считать, что

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ слабо в } L^2(\Omega). \quad (2.5)$$

ЛЕММА 4. Пусть последовательность $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$ удовлетворяет условиям (2.4), (2.5), тогда $u^0 \in (H_0^1(\Omega))^3$ и

$$\int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx \leq c_0 \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx.$$

Доказательство этой леммы дано в [12; с. 398], идеи его можно найти также в [10].

ЛЕММА 5. Пусть $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$ есть решение задачи (1.11), и пусть $z^\varepsilon(x) = z(x/\varepsilon)$, где $z(y) = \{z_{ij}(y)\}$ – тензор, определенный в лемме 3. Тогда последовательность u^ε удовлетворяет условиям (2.4), (2.5) и имеет место оценка

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A \varphi \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} z_{ij}^\varepsilon(x) dx \geq \bar{z}_{ij} \int_A \varphi \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} dx \quad (2.6)$$

для любой подобласти $A \Subset \Omega$ и любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для решения u^ε задачи (1.11) при различных ε имеется равномерная оценка (1.13), то последовательность u^ε действительно удовлетворяет условиям (2.4), (2.5). Заметим также, что $u^\varepsilon \in K_\varepsilon$, т.е. $u^\varepsilon \geq 0$ п.в. на F_ε .

Используя свойства (2.1), (2.2) тензора $z(y)$, приведенные в лемме 3, имеем для интересующего нас интеграла, взятого по произвольной подобласти $A \Subset \Omega$, следующее представление:

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_A \varphi (\nabla u^\varepsilon \cdot z^\varepsilon) dx = - \int_{A \setminus F_\varepsilon} (\nabla \varphi) z^\varepsilon u^\varepsilon dx \\ &\quad - \int_{A \cap F_{\varepsilon,1}} \varphi z_{nn}|_1 (u^\varepsilon \cdot N)|_1 d\sigma - \int_{A \cap F_{\varepsilon,2}} \varphi z_{nn}|_1 (u^\varepsilon \cdot N)|_2 d\sigma \\ &= - \int_{A \setminus F_\varepsilon} (\nabla \varphi) z^\varepsilon u^\varepsilon dx + \int_{A \cap F_\varepsilon} \varphi (-z_{nn}|_1) [u^\varepsilon \cdot N] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ввиду неотрицательности всех трех сомножителей, стоящих в последнем интеграле из суммы (2.7), выводим неравенство

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &\geq - \int_{A \setminus F_\varepsilon} (\nabla \varphi) z^\varepsilon u^\varepsilon dx \\ &= \int_{A \setminus F_\varepsilon} (\nabla \varphi) (z^\varepsilon - \bar{z}) u^\varepsilon dx - \bar{z} \int_A (\nabla \varphi) u^\varepsilon dx = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Найдем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$.

Так как каждая компонента функции $z(y) - \bar{z}$ удовлетворяет условиям леммы 1, то найдется функция $w(y) \in H_{\text{per}}^1(Y, F)^{3 \times 3 \times 3}$ такая, что $\operatorname{div}_y w(y) = z(y) - \bar{z}$ и ее H^1 -норма ограничена величиной $C|z|_{L^2(Y)^{3 \times 3}}$, $C = \operatorname{const}(F)$. Отсюда получаем представление

$$z^\varepsilon(x) - \bar{z} = (\operatorname{div}_y w(y))|_{y=x/\varepsilon} = \varepsilon \operatorname{div}_x w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= -\varepsilon \int_{A \setminus F_\varepsilon} (\nabla \varphi) \left(\operatorname{div}_x w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) u^\varepsilon dx \\ &= \varepsilon \int_{A \setminus F_\varepsilon} (\nabla \nabla \varphi) w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon dx + \varepsilon \int_{A \setminus F_\varepsilon} (\nabla \varphi) w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon dx \end{aligned}$$

и, значит,

$$I_1(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

в силу условия (2.4) для функции u^ε и оценки

$$\int_{A \setminus F_\varepsilon} \left| w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx \leq c_1 \int_{Y_F} |w(y)|^2 dy,$$

где константа c_1 не зависит от ε ($\varepsilon < \varepsilon^0$).

Далее, используя условие (2.5) для последовательности u^ε , получаем

$$I_2(\varepsilon) = -\bar{z} \int_A (\nabla \varphi) u^\varepsilon dx \rightarrow -\bar{z} \int_A (\nabla \varphi) u^0 dx = \bar{z} \int_A \varphi \nabla u^0 dx. \quad (2.10)$$

Из (2.7)–(2.10) вытекает (2.6).

2. Введем следующие функционалы:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) &= \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \quad \text{для } v \in V_\varepsilon \quad (\text{см. обозначения в п. 3 §1}), \\ J_0(v) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \bar{\sigma}^0(E) E dx - \int_\Omega f_i v_i dx, \quad E = \{E_{ij}\}, \quad E_{ij} = e_{ij}(v), \end{aligned}$$

для $v \in (H_0^1(\Omega))^3$, где тензор $\bar{\sigma}^0$ определен формулами (1.17), (1.18).

Пусть

$$J_\varepsilon = J_\varepsilon(u^\varepsilon) = \min J_\varepsilon(v) \quad \text{на множестве } K_\varepsilon, \quad (2.11)$$

$$J_0 = J_0(u) = \min J_0(v) \quad \text{на множестве } (H_0^1(\Omega))^3. \quad (2.12)$$

ТЕОРЕМА 3. Энергии J_ε , J_0 в задачах (2.11), (2.12) связаны между собой соотношением

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = J_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon \geq J_0. \quad (2.13)$$

Хорошо известно (см., например, [3; гл. 1]), что минимизанты задач на нахождение минимума (2.11), (2.12) — это функции u^ε , u , которые являются решениями вариационного неравенства (1.11) и краевой задачи (1.16) соответственно. Рассмотрим далее тензор $z^\varepsilon(x) = \{z_{ij}^\varepsilon(x)\}$, определенный в лемме 5.

Воспользуемся неравенством Юнга из теории двойственности (см., например, [7; гл. 13]), применяя его к двойственным функционалам

$$\frac{1}{2}a_{ijkh}e_{ij}e_{kh} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}b_{ijkh}\tau_{ij}\tau_{kh},$$

определенным на множестве симметричных тензоров $e = \{e_{ij}\}$ и $\tau = \{\tau_{ij}\}$, где тензоры $a = \{a_{ijkh}\}$, $b = \{b_{ijkh}\}$ взаимно обратны и введены в п. 2 §1. Тогда в силу равенств

$$ae(v)e(v) = a\nabla v \nabla v, \quad ze(v) = z\nabla v,$$

получаем следующую оценку:

$$\frac{1}{2}a\nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \geq z^\varepsilon \nabla u^\varepsilon - \frac{1}{2}bz^\varepsilon z^\varepsilon,$$

где u^ε — минимизант задачи (2.12) и, значит, решение неравенства (1.11). Отсюда для любой подобласти $A \Subset \Omega$ и произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(A)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, можем записать

$$\frac{1}{2} \int_A a \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx \geq \int_A \varphi z^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx - \frac{1}{2} \int_A \varphi b z^\varepsilon z^\varepsilon dx; \quad (2.14)$$

слагаемые правой части неравенства (2.14) обозначим через $I_{1,\varepsilon}$ и $I_{2,\varepsilon}$. Тогда в силу леммы 5

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{1,\varepsilon} \geq \bar{z} \int_A \varphi \nabla u^0 dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $I_{2,\varepsilon}$, используя свойства среднего значения для периодической функции (см., например, [7; гл. 1, §1]): при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} I_{2,\varepsilon} &\rightarrow -\frac{1}{2} \int_A \varphi \left(\int_Y b z z dy \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_A \varphi \left(\int_Y a(E + e(u_E))(E + e(u_E)) dy \right) dx = -\frac{1}{2} \int_A \varphi \bar{z} E dx, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где сделаны преобразования в предельном значении на основании свойства (2.3) тензора $z(y)$ из леммы 3, а также взаимной обратности тензоров a, b .

Из (2.14)–(2.16) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_A a \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx \geq \int_A \varphi \bar{z} \nabla u^0 dx - \frac{1}{2} \int_A \varphi \bar{z} E dx,$$

откуда ввиду произвольности функции $\varphi \in C_0^\infty(A)$ получаем, используя симметричность тензоров a, e, z , следующее неравенство:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_A a \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx \geq \int_A \bar{\sigma}^0(E) e(u^0) dx - \frac{1}{2} \int_A \bar{\sigma}^0(E) E dx. \quad (2.17)$$

Пусть функция $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ кусочно аффинная, так что $e(\omega)$ – тензор с кусочно постоянными компонентами. Пусть $\{A_j\}$ – подобласти Ω , на которых компоненты $e(\omega)$ постоянны. Для каждой подобласти A_j можно получить неравенство типа (2.17). Просуммировав эти неравенства по всем j , получаем для произвольной кусочно аффинной функции ω :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_\Omega a \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx \geq \int_\Omega \bar{\sigma}^0(e(\omega)) e(u^0) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega \bar{\sigma}^0(e(\omega)) e(\omega) dx. \quad (2.18)$$

Поскольку функция u^0 , определенная условием (2.5), оказывается в силу леммы 4 из пространства $(H_0^1(\Omega))^3$, то можно найти последовательность кусочно постоянных функций $\{\omega^\delta\}$ такую, что

$$\int_\Omega |e(\omega^\delta - u^0)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

так как

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |e(u)|^2 dx \right)^{1/2}$$

– одна из возможных норм в пространстве $(H_0^1(\Omega))^3$ в силу неравенства Корна.

Заметим, что для выбранной последовательности ω^δ имеются сходимости: при $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{\sigma}^0(e(\omega^\delta)) e(u^0) dx &\rightarrow \int_\Omega \bar{\sigma}^0(e(u^0)) e(u^0) dx, \\ \int_\Omega \bar{\sigma}^0(e(\omega^\delta)) e(\omega^\delta) dx &\rightarrow \int_\Omega \bar{\sigma}^0(e(u^0)) e(u^0) dx. \end{aligned}$$

Они вытекают из свойства непрерывной зависимости решения вариационного неравенства (1.23) от тензора E в смысле, установленном в лемме 2, а также из определения тензора $\bar{\sigma}^0(E) = \int_Y a(E + e(u_E)) dy$.

Рассмотрим в (2.18) $\omega = \omega^\delta$, перейдем в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и в результате получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} a \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx &\geq \int_{\Omega} \bar{\sigma}^0(e(u^0)) e(u^0) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\sigma}^0(e(u^0)) e(u^0) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\sigma}^0(e(u^0)) e(u^0) dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Сходимость

$$\int_{\Omega} f \cdot u^\varepsilon dx \rightarrow \int_{\Omega} f \cdot u^0 dx \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

следует из условия (2.5). Тогда (2.13) вытекает из (2.20), (2.21) и определения функционалов $J_\varepsilon(u^\varepsilon)$, $J_0(u^0)$, так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u^\varepsilon) \geq J_0(u^0) \geq \min_{v \in (H_0^1(\Omega))^3} J_0(v) = J_0.$$

2. Докажем теперь неравенство, противоположное (2.13). Для этого установим следующий факт: для любой функции $u \in (H_0^1(\Omega))^3$ и для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует последовательность $\tilde{u}^\varepsilon \in V_\varepsilon$ такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\tilde{u}^\varepsilon - u|^2 dx = 0$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a e(\tilde{u}^\varepsilon) e(\tilde{u}^\varepsilon) dx \leq \int_{\Omega} \bar{\sigma}^0(e(u)) e(u) dx + \delta. \quad (2.22)$$

В (2.22) можно считать, что u — кусочно аффинная функция (к этому приводят те же соображения о непрерывности $\bar{\sigma}^0(E)$ по аргументу E , которые использовались в п. 1 доказательства теоремы для вывода неравенства (2.20)). Поэтому пусть $\{A_j\}$ — подобласти Ω , на которых компоненты тензора $e(u)|_{A_j} = E^{(j)}$ постоянны.

Возьмем решения $u^{(j)}$ вариационного неравенства (1.23) с заданным тензором $E = E^{(j)}$. Для него в силу (2.3)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^0(E^{(j)}) E^{(j)} &= \int_Y a(E^{(j)} + e(u^{(j)})) E^{(j)} dy \\ &= \int_Y a(E^{(j)} + e(u^{(j)})) (E^{(j)} + e(u^{(j)})) dy. \end{aligned}$$

Поэтому положим

$$\tilde{u}^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \sum_j \varphi_j(x) u^{(j)}(y)|_{y=x/\varepsilon}, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(A_j), \quad 0 \leq \varphi_j \leq 1; \quad (2.23)$$

более точный выбор $\{\varphi_j\}$ будет указан позже. Тогда

$$I_j^\varepsilon = \int_{A_j} a \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon dx = \int_{A_j} a e(\tilde{u}^\varepsilon) e(\tilde{u}^\varepsilon) dx,$$

где

$$e_{kh}(\tilde{u}^\varepsilon) = E_{kh}^{(j)} + \varphi_j e_{kh,y}(u^{(j)}) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} \varepsilon u_k^{(j)} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} + \frac{1}{2} \varepsilon u_h^{(j)} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}.$$

Поэтому, используя выпуклость подынтегральной функции в интеграле I_j^ε , получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I_j^\varepsilon &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_j} a(E^{(j)} + \varphi_j e_y(u^{(j)}))(E^{(j)} + \varphi_j e_y(u^{(j)})) \Big|_{y=x/\varepsilon} dx \\ &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{A_j} \varphi_j a(E^{(j)} + e_y(u^{(j)}))(E^{(j)} + e_y(u^{(j)})) \Big|_{y=x/\varepsilon} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{A_j} (1 - \varphi_j) a E^{(j)} E^{(j)} dx \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

где использовано свойство выпуклой функции: $G(\xi + \varphi\eta) \leq \varphi G(\xi + \eta) + (1 - \varphi)G(\xi)$, если G – выпуклая функция, $0 \leq \varphi \leq 1$.

Находим предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ от первого слагаемого в квадратной скобке (2.24), используя свойство среднего периодической функции. Тогда из (2.24) получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I_j^\varepsilon &\leq \int_Y a(E^{(j)} + e_y(u^{(j)}))(E^{(j)} + e_y(u^{(j)})) dy \int_{A_j} \varphi_j dx \\ &\quad + a E^{(j)} E^{(j)} \int_{A_j} (1 - \varphi_j) dx = \bar{\sigma}^0(E^{(j)}) E^{(j)} \int_{A_j} \varphi_j dx \\ &\quad + a E^{(j)} E^{(j)} \int_{A_j} (1 - \varphi_j) dx \leq (\bar{\sigma}^0(E^{(j)}) E^{(j)} + \delta_1) |A_j|, \end{aligned}$$

где δ_1 – любое наперед заданное малое число, если $\varphi_j \in C_0^\infty(A_j)$ была выбрана соответствующим образом.

Суммируя по j , получаем из последнего неравенства:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon dx \leq \sum_j \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I_j^\varepsilon \leq \int_{\Omega} \bar{\sigma}^0(E) E dx + \delta,$$

где $E = e(u)$, и, таким образом, оценка (2.22) действительно имеет место, если функция $\tilde{u}^\varepsilon$ выбрана по формуле (2.23).

Рассмотрим неравенство (2.22) для функции u – минимизанта задачи (2.12) и любого наперед заданного значения δ . Тогда, имея в виду, что $J_\varepsilon = J_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon)$, выводим из него, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) \leq J_0 + \delta,$$

где помимо (2.22) использована также очевидная в силу определения (2.23) сходимости

$$\int_{\Omega} \tilde{u}^\varepsilon \cdot f dx \rightarrow \int_{\Omega} u \cdot f dx \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

И значит, в силу произвольности δ $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon \leq J_0$, что вкупе с (2.13) доказывает утверждение теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. Если u^ε , u — минимизанты задач (2.11), (2.12) (т.е. решения вариационного неравенства (1.11) и краевой задачи (1.16) соответственно), то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon - u|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для минимизанта задачи (2.11) функции u^ε построим приближение $\tilde{u}^\varepsilon$ такое же, как в п. 2 доказательства теоремы 3, по следующей схеме: сначала для u — минимизанта задачи (2.12) рассмотрим кусочно аффинное приближение в H^1 -метрике ω^δ и далее для него по формуле (2.23) (где вместо u берем ω^ε) сконструируем $\tilde{u}^\varepsilon(\delta)$.

Очевидно равенство для H^1 -нормы рассматриваемых функций:

$$\left\| \frac{1}{2}(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon(\delta)) \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|u^\varepsilon\|^2 + \|\tilde{u}^\varepsilon(\delta)\|^2) - \left\| \frac{1}{2}(u^\varepsilon + \tilde{u}^\varepsilon(\delta)) \right\|^2,$$

где $\|w\| = \|w\|_{H^1(\Omega)^3}$. Заметим, что $\frac{1}{2}(u^\varepsilon + \tilde{u}^\varepsilon(\delta)) \in K_\varepsilon$ в силу выбора функций $u^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon(\delta) \in V_\varepsilon$ и выпуклости K_ε . Поэтому из равномерного неравенства Корна (1.12) для функций из V_ε и ввиду того, что по свойству минимизанта u^ε

$$J_\varepsilon = J_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq J_\varepsilon\left(\frac{u^\varepsilon + \tilde{u}^\varepsilon(\delta)}{2}\right),$$

получаем

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon(\delta)\|^2 \leq C\left(\frac{1}{2}J_\varepsilon + \frac{1}{2}J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon(\delta)) - J_\varepsilon\right) \leq C\left(\frac{1}{2}J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon(\delta)) - \frac{1}{2}J_\varepsilon\right),$$

откуда следует

$$\int_{\Omega} |u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon(\delta)|^2 dx \leq C_1(J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon(\delta)) - J_\varepsilon), \quad (2.26)$$

где константы C, C_1 в последних неравенствах не зависят от ε, δ .

Примем во внимание неравенство

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon(\delta)\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\tilde{u}^\varepsilon(\delta) - \omega^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\omega^\delta - u\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Перейдем в нем к пределу сначала при $\delta \rightarrow 0$, потом при $\varepsilon \rightarrow 0$, используя оценку (2.26) и специфику выбора ω^δ и $\tilde{u}^\varepsilon(\delta)$, а также сходимости: $J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon(\delta)) \rightarrow J_0$ при $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ в силу построения $\tilde{u}^\varepsilon(\delta)$, $J_\varepsilon \rightarrow J_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу теоремы 3. В результате заключаем, что справедливо (2.25). Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. Санчес-Паленсия Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
4. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988.
5. Батхалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
6. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
7. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
9. Жиков В. В. Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №1. С. 41–58.
10. Жиков В. В. Об усреднении нелинейных вариационных задач в перфорированных областях // Докл. РАН. 1995. Т. 345. №2. С. 156–160.
11. Жиков В. В., Рычаго М. Е. Усреднение нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. №1. С. 69–88.
12. Zhikov V. V. On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. №3. P. 393–408.
13. Боговский М. Е. Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. №5. С. 1037–1040.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)

Поступила в редакцию
06.07.1999