Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Уралцева, О контакте свободной границы с заданной, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 2, 165–173

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:39:24

УДК 517.9

Н. Н. Уральцева

О контакте свободной границы с заданной

Для простейшей эллиптической задачи с препятствием изучается поведение свободной границы вблизи точек, где она контактирует с известной границей области. Усиливается полученный ранее автором результат, касающийся C^1 регулярности границы $\partial\mathcal{N}$ некоицидентного множества. Доказано, что можно отбросить предполагавшееся ранее условие Липшица на $\partial\mathcal{N}$.

Библиография: 6 названий.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается следующая задача со свободной границей:

$$\Delta u = \chi_{\mathcal{N}} \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = |Du| = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \mathcal{N}, \quad (2)$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3)$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $\chi_{\mathcal{N}}$ – характеристическая функция множества $\mathcal{N}$, которое так же, как и функция u , является неизвестным. Предполагается, что $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, и уравнение (1) понимается в смысле распределений. Свободной границей в этой задаче является множество

$$F = \partial\mathcal{N} \cap \Omega.$$

Если дополнительно известно, что $u \geq 0$, то u – решение задачи с препятствием. Для нее свойства свободной границы были исследованы в знаменитых работах Л. Каффарелли [1], [2], где доказано, что всякая точка $x^0 \in F$, в окрестности которой дополнение к множеству $\mathcal{N} = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ не слишком “тощее”, является точкой C^1 гладкости поверхности F . Например, для этого достаточно, чтобы $\Omega \setminus \mathcal{N}$ имело ненулевую плотность в точке x^0 . Известно, что при невыполнении такого рода требований F может иметь сингулярность в точке x^0 . Недавно Л. Каффарелли, Л. Карп и Х. Шахголян [3] распространили результаты [1], [2] на случай, когда нет знаковых ограничений на функцию u . Известно, что C^1 гладкость влечет C^∞ гладкость F в окрестности точки x^0 . Описанные выше результаты касаются свойств границы множества $\mathcal{N}$ во внутренних точках области Ω и не используют информации о $\partial\Omega$ и функции φ из (3).

Однако не исключается, что свободная граница в задаче (1)–(3) может примыкать к $\partial\Omega$ в тех точках, где $\varphi = 0$, т.е. могут существовать точки контакта $x^0 \in \partial\Omega$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00684) и фонда INTAS (грант № 96-0835).

являющиеся предельными для F . Вопрос о регулярности $\partial\mathcal{N}$ в точках контакта имеет решающее значение при доказательстве теорем единственности в некоторых задачах со свободными границами. Для задачи с препятствием этот вопрос исследовался в работах [4]–[6], где рассматривались точки контакта F с открытым подмножеством $\Sigma_1 \subset \partial\Omega$, на котором $\varphi = 0$.

Первоначально в [4], [5] предполагалось, что $\partial\mathcal{N}$ локально представима в виде графика липшицевой функции над Σ_1 . В [5] доказано, что тогда $\partial\mathcal{N} \in C^1$ в окрестности контактного множества $F^* = \overline{F} \cap \Sigma_1$. В отличие от ситуации с точками $x^0 \in F$, в точках контактного множества C^1 является предельной гладкостью $\partial\mathcal{N}$. Точнее, модуль непрерывности нормали к $\partial\mathcal{N}$, вообще говоря, не удовлетворяет условию Дини в точках $x^0 \in F^*$ (см. [5]). Кроме того, в [5] доказано, что вторые производные D^2u решения u непрерывны в $\mathcal{N} \cup F^*$. В работе [6] эти же факты относительно $\partial\mathcal{N}$ и D^2u установлены без каких-либо априорных предположений относительно $\partial\mathcal{N}$.

Все доказательства в [4]–[6] проводятся для модельного случая, когда Ω – полусфера, а Σ_1 – плоская часть его границы. Для более общих эллиптических операторов и произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующие результаты по задаче с препятствием в предположении достаточной гладкости данных получены аспиранткой автора Е. В. Железиной.

В настоящей работе исследуются свойства $\partial\mathcal{N}$ в окрестности контактного множества F^* в ситуации, когда решение u задачи (1)–(3) может менять знак. Устанавливаются результаты, близкие к тем, что были получены в [4], [5] для задачи с препятствием.

Приведем некоторые обозначения. Для $x \in \mathbb{R}^n$ пишем $x = (x', x_n)$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$; $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $B_\rho(x^0)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса ρ с центром в x^0 , $B_\rho^+(x^0) = B_\rho(x^0) \cap \mathbb{R}_+^n$, $B_\rho = B_\rho(0)$, $B_\rho^+ = B_\rho^+(0)$; $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, $\Sigma_\rho = \Sigma \cap B_\rho$; $Du = (D_i u)_{i=1}^n$ – градиент функции u , $D^2u = (D_{ij}u)_{i,j=1}^n$ – ее матрица Гессе. Для векторов ξ из $\mathbb{R}^n$ через $D_\xi u$ и $D_{\xi\xi}u$ обозначаются соответственно производные и первого и второго порядка по направлению ξ .

Пусть $\mathcal{E}$ – ограниченное множество в Σ ; через $\min \text{diam}(\mathcal{E})$ обозначаем его минимальный диаметр в Σ , т.е. наименьшее расстояние между парой параллельных $(n-2)$ -мерных плоскостей, лежащих в Σ , таких, что $\mathcal{E}$ содержится между этими плоскостями.

Введем локальный вариант задачи (1)–(3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция u принадлежит классу $P_r^+(M)$, если

- 1°. $\Delta u = \chi_{\mathcal{N}}$ в B_r^+ ;
- 2°. $u = |Du| = 0$ в $B_r^+ \setminus \mathcal{N}$;
- 3°. $\text{ess sup}_{B_r^+} |D^2u| \leq M$;
- 4°. $u = 0$ на Σ_r .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множества $\mathcal{N}$ в определении 1 различны для различных функций $u \in P_r^+(M)$; иногда мы будем отмечать зависимость $\mathcal{N}$ от u – писать $\mathcal{N}(u)$ вместо $\mathcal{N}$, и соответственно $F(u) = \partial\mathcal{N}(u) \cap B_r^+$, $F^*(u) = \overline{F(u)} \cap \Sigma_r$. Для $u \in P_r^+(M)$ примем также обозначения

$$\Lambda(u) = B_r^+ \setminus \mathcal{N}(u), \quad \Lambda^\circ(u) = \partial\Lambda(u) \cap \Sigma.$$

В следующих двух теоремах содержатся основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in P_1^+(M)$ и существует неотрицательная липшицева функция $b: \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\mathcal{N}(u) = \{x \in B_1^+ : x_n > b(x'), x' \in \Sigma_1\}. \quad (4)$$

Тогда b дифференцируема и $|Db(x')| = 0$, если $b(x') = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если дополнительно к условиям теоремы 1 выполнены условия $b(0) = 0$ и

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \min \text{diam}(\Lambda^\circ(u) \cap B_r) > 0, \quad (5)$$

то при некотором $\rho > 0$

- 1°. $b \in C^1(\Sigma_\rho)$,
- 2°. $D^2u \in C(\mathcal{N} \cap B_\rho)$.

Заметим, что в теореме 1 содержательным является лишь утверждение о дифференциале функции b в точках контактного множества F^* . Предположения теоремы 2 обеспечивают принадлежность точки $x = 0$ множеству F^* , а требование (5) аналогично соответствующему условию из [1]–[3], где в качестве $x = 0$ рассматривалась внутренняя, а не граничная точка свободной поверхности.

Как отмечалось выше, в случае задачи с препятствием утверждения теорем 1 и 2 доказаны в [6] без предположений (4), (5). Аналитическую основу доказательств в работе [6] составляют оценки двух типов для неотрицательных функций из $P_1^+(M)$. Во-первых, это односторонние оценки чистых вторых производных $D_{\xi\xi}u(x) \geq -\omega(d(x))$, где $d(x) = \text{dist}\{x; F(u)\}$, $\omega(t) \searrow 0$ при $t \rightarrow 0$, при условии, что $D_{\xi\xi}u$ неотрицательна на определенной части Σ_1 . Эти оценки, установленные в [4], были обобщением соответствующих оценок, полученных Каффарелли в [1], где направление ξ было произвольным, но функция ω существенно зависела от расстояния точки x до $\partial\Omega$. Не менее важным моментом доказательства в [6] была оценка

$$\sup_{B_\rho^+(z)} \frac{|D_\tau u(x)|}{x_n} \leq \omega(\rho) \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0, \quad (6)$$

где τ – произвольное касательное к Σ направление, а z – любая точка из $F^* \cap \Sigma_R$, $R < 1$. Польза оценки (6) видна, например, из того факта, что при масштабных изменениях вида

$$y = \frac{x - z}{r_k}, \quad u^k(y) = \frac{u(r_k y + z)}{r_k^2} = \frac{u(x)}{r_k^2}, \quad (7)$$

где $z \in F^*(u)$, а $r_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\sup_{B_\rho^+(z)} \frac{|D_\tau u^k(y)|}{y_n} = \sup_{B_{\rho r_k}^+(z)} \frac{|D_\tau u(x)|}{x_n} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Поэтому любой blow up предел $u^0(y) = \lim_{k_i \rightarrow \infty} u^{k_i}(y)$ функции u зависит лишь от переменной y_n и определяется однозначно $u^0 = y_n^2/2$.

В ситуации, когда u из $P_1^+(M)$ может менять знак, оценок для чистых вторых производных, аналогичных оценкам Каффарелли, вообще говоря, нет, равно как и оценок вида (6). Если же предположить, что выполнено условие (4) с липшицевой функцией b и существует последовательность таких $x^k \in F(u)$, $x^k \rightarrow z \in F^*(u)$, что

$$x_n^k \geq \delta |x^k - z| \quad (9)$$

при каком-либо $\delta > 0$, то для данной точки z имеет место оценка вида (6) с функцией $\omega(\rho)$, зависящей от δ и от конкретной последовательности $\{x^k\}$. На основании этого факта, по существу установленного в работе [4], доказывается справедливость утверждений теоремы 1. Условие (5), фигурирующее в теореме 2, позволяет доказать, что в малой окрестности точки $z = 0$ функция u “почти” неотрицательна, и получить для $z = 0$ оценку (6) без предположения (9), которое ввиду теоремы 1 на самом деле не выполняется.

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2.

Следуя обозначениям [4]–[6], введем для $\delta \in (0, \pi/2)$ конусы

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > |x'| \operatorname{tg} \delta\}, \\ K_\delta^+(x^0) = x^0 + K_\delta, \quad K_\delta^-(x^0) = x^0 - K_\delta.$$

Заметим, что условия теоремы 1 гарантируют наличие такого δ_0 , что

$$B_1^+ \cap K_{\delta_0}^+(x^0) \subset \mathcal{N}(u), \quad B_1^+ \cap K_{\delta_0}^-(x^0) \subset \Lambda(u) \quad \forall x^0 \in F(u), \quad (10)$$

$$K_{\delta_0}^+(z) \subset \mathcal{N}(u) \quad \forall z \in F^*(u). \quad (11)$$

Точнее, $\delta_0 = \operatorname{arctg} \lambda$, где λ – липшицева константа функции b .

Всюду ниже u – функция из $P_1^+(M)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, и мы не отмечаем зависимость тех или иных величин от M и λ .

Отметим прежде всего важное свойство невырожденности функций $u \in P_1^+(M)$.

ЛЕММА 1. Для любых $z \in F(u) \cup F^*(u)$ и $r \in (0, 1 - |z|)$

$$\sup_{B_r^+(z)} u \geq \frac{r^2}{2n}.$$

Доказательство этого утверждения дано в [1] для случая $u \geq 0$. Если u произвольного знака, то, как отмечено в [3], в любой окрестности каждой точки $z \in F(u)$ есть точки, где u положительна, – это следует из субгармоничности u . Поэтому данное в [1] доказательство сохраняется полностью и для этого случая.

Следующее утверждение установлено в работе [4; лемма 2] и в его доказательстве не использовалась неотрицательность u .

ЛЕММА 2. Пусть $z \in F^*(u)$ и при некотором $\delta \in (0, \pi/2)$ имеется точка $x^0 \in K_\delta^+(z) \cap \Lambda(u)$ такая, что $5\lambda|x^0 - z| < 1 - |z|$. Тогда

$$\operatorname{osc}_{x \in B_r^+(z)} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \leq [1 - \varkappa(\delta)] \operatorname{osc}_{x \in B_{5\lambda r}^+(z)} \frac{D_\tau u(x)}{x_n}, \quad \tau = 1, \dots, n-1,$$

где $r = |x^0 - z|$, а $\varkappa(\delta)$ – положительная постоянная.

ЛЕММА 3. Если $z \in F^*(u)$ и существует последовательность $\{x^k\}$ такая, что $x^k \rightarrow z$ при $k \rightarrow \infty$ и при каком-либо $\delta \in (0, \pi/2)$ $x^k \in K_\delta^+(z) \cap \Lambda(u)$, то для любого направления τ , касательного к Σ , справедлива оценка (6) с некоторой неубывающей функцией $\omega(\rho)$, определенной для достаточно малых $\rho > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. с леммой 3 из [4]). Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что

$$r_k := |x^k - z| \leq \frac{r_{k-1}}{5\lambda} < 1 - |z|.$$

Тогда согласно лемме 2 для всякого k имеем

$$\omega_k := \operatorname{osc}_{x \in B_{r_k}^+(z)} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \leq [1 - \varkappa(\delta)] \operatorname{osc}_{x \in B_{5\lambda r_k}^+(z)} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \leq [1 - \varkappa(\delta)] \omega_{k-1}.$$

Отсюда следует оценка

$$\omega_k \leq [1 - \varkappa(\delta)]^{k-1} M, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку $B_{r_k}(z) \cap \Lambda(u) \neq \emptyset$, верно неравенство

$$\sup_{B_{r_k}(z)} \frac{|D_\tau u(x)|}{x_n} \leq \omega_k.$$

Тем самым доказана оценка (6) с функцией $\omega(\rho)$, определяемой равенством

$$\omega(\rho) = M[1 - \varkappa(\delta)]^{k-2}, \quad \rho \in (r_k, r_{k-1}], \quad k = 1, 2, \dots$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для каждого $\delta \in (0, \pi/2)$ и $z \in F^*(u)$ существует положительное число $R(\delta, z)$ такое, что

$$\Lambda(u) \cap K_\delta^+(z) \cap B_R^+(z) = \emptyset$$

при $R < R(\delta, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для каких либо $z \in F^*(u)$ и $\delta \in (0, \pi/2)$ сформулированное предложение неверно, то найдется последовательность $x^k \rightarrow z$, $x^k \in \Lambda(u) \cap K_\delta^+(z)$. Рассмотрим последовательность функций $u^k(y)$, определяемых соотношениями (7) с $r_k = |x^k - z|$. Поскольку $\sup_{B_R^+} |D^2 u^k| \leq M$ при произвольном $R > 0$ и $u^k(0) = |Du^k(0)| = 0$, можно выбрать подпоследовательность u^{k_i} , сходящуюся в $C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^n \cup \Sigma)$ к некоторой функции $u^0 \in P_\infty(M)$. Ясно, что $u^k(y^k) = 0$, где $y^k = (x^k - z^k)/r_k \in K_\delta^+$, $|y^k| = 1$. Поэтому найдется точка $y^0 \in \overline{K_\delta^+}$, $|y^0| = 1$, такая, что $u^0(y^0) = 0$. С другой стороны, из леммы 3 и (8) вытекает, что $D_\tau u^0 \equiv 0$, т.е. $u^0 = u^0(y_n)$. В силу леммы 1 $\sup_{0 < y_n < \rho} u^0(y_n) \geq \rho^2/(2n)$ при любом $\rho > 0$, так что $u^0 = y_n^2/2$. Это противоречит равенству $u^0(y^0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заметим, что при $0 < b(x') < \sqrt{1 - |x'|^2}$ точка $x = (x', b(x'))$ лежит на свободной поверхности $F(u)$ и гладкость функции b в окрестности x' вытекает из результатов [3]. Если $b(x') = 0$ и $b = 0$ в некоторой окрестности x' , то утверждение теоремы очевидно, если же такой окрестности нет, то $z = (x', 0) \in F^*(u)$ и в силу следствия 1 $b(y') = o(|y' - x'|)$ при $y' \rightarrow x'$. Последнее означает, что b дифференцируема в точке x' и $|Db(x')| = 0$.

ЛЕММА 4. Если последовательность функций u^k , определяемая соотношениями (7) с $z \in F^*(u)$, $r_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, сходится в $C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^n \cup \Sigma)$ к u^0 , то

$$u^0(y) = \frac{1}{2} y_n^2 + \sum_{\tau=1}^{n-1} a_{n\tau} y_n y_\tau, \quad (12)$$

где $a_{n\tau}$ — постоянные, $|a_{n\tau}| \leq M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться, что

$$\Delta u^0 = 1 \text{ п.в. в } \mathbb{R}_+^n. \quad (13)$$

Действительно, тогда гармоническая в $\mathbb{R}_+^n$ функция $v(y) = \frac{1}{2} y_n^2 - u^0(y)$ имеет не более чем квадратичный рост при $|y| \rightarrow \infty$ и исчезает на Σ . Продолжая v нечетно на $\mathbb{R}_-^n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n < 0\}$, заключаем, что v есть полином второй степени. Принимая во внимание условия $v = 0$ на Σ и $|Dv(0)| = 0$, приходим к равенству $v = \sum_{\tau=1}^{n-1} a_{n\tau} y_n y_\tau$.

Чтобы доказать (13), проверим, что для произвольно фиксированных $R > 0$ и $\delta \in (0, \pi/2)$ и достаточно больших k верно соотношение

$$\Delta u^k = 1 \text{ в } K_\delta^+ \cap B_R. \quad (14)$$

Уравнение $\Delta u^k(y) = 1$ удовлетворяется при $y \notin \Lambda(u^k)$. В силу следствия 1 имеем $\Lambda(u^k) \cap K_\delta^+ \cap B_{R(\delta, z)/r_k} = \emptyset$. Поэтому в $K_\delta^+ \cap B_R$ нет точек из $\Lambda(u^k)$, если $R \leq R(\delta, z)/r_k$, т.е. при достаточно больших k верно (14).

ЛЕММА 5. Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Тогда функция u^0 , определенная в лемме 4 для $z = 0$, имеет вид

$$u^0(y) = \frac{1}{2} y_n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (5) гарантирует наличие постоянной $\alpha > 0$ такой, что

$$\min \text{diam}(\Lambda^0(u^k) \cap B_1) \geq \alpha \quad (15)$$

при достаточно больших k . Обозначим через $\mathcal{M}^0(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, множество

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon) = \{y \in \Sigma : |D_n u^0(y)| \leq \varepsilon\}.$$

Поскольку $u^k \rightarrow u^0$ в $C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^n \cup \Sigma)$, имеем

$$|D_n u^0(y)| \leq \varepsilon \text{ при } y = (y', 0) \in \Lambda^0(u^k) \cap B_1,$$

если $k \geq \mathcal{N}(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon) \supset \bigcup_{k \geq \mathcal{N}(\varepsilon)} \{\Lambda^0(u^k) \cap B_1\}$$

и в силу (15)

$$\min \text{diam } \mathcal{M}^0(\varepsilon) \geq \alpha. \quad (16)$$

Рассмотрим u^0 , определяемую (12), и предположим, что $a = (a_{n\tau})_{\tau=1}^{n-1}$ — ненулевой вектор в $\mathbb{R}^{n-1}$. Выбирая декартову систему координат на Σ так, чтобы орт e_1 совпадал по направлению с вектором a , получим $D_n u^0 = |a|y_1$ на Σ , т.е.

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon) = \{y = (y', 0) : |y_1| < \varepsilon/|a|\}.$$

Поэтому $\min \text{diam}(\mathcal{M}^0(\varepsilon) \cap B_1) = \varepsilon/|a|$, что при достаточно малых ε противоречит (16). Следовательно, $|a| = 0$, что и доказывает желаемое утверждение.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого $\delta \in (0, \pi/2)$ существует $R_\delta > 0$ такое, что $u > 0$ в $K_\delta^+ \cap B_{R_\delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если предположить, что при каком-то $\delta > 0$ утверждение леммы неверно, то $u(x^k) \leq 0$ для некоторой последовательности $x^k \in K_\delta^+$ и $r_k := |x^k| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Переходя, если надо, к подпоследовательности, получим $y^0 = \lim_k \frac{x^k}{r_k} \in K_\delta^+$, $|y^0| = 1$, а для соответствующего blow up предела $u^0(y) = \lim_k \frac{u(r_k y)}{r_k^2}$ будем иметь неравенство $u^0(y^0) \leq 0$. Последнее противоречит лемме 5.

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует модуль непрерывности $\omega(\rho)$ такой, что при $z = 0$ и любом касательном к Σ направлении τ справедлива оценка (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\rho(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\text{osc}_{x \in B_\rho^+} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad \rho \leq \rho(\varepsilon). \quad (17)$$

Для этого можно воспользоваться следующим фактом, установленным в работе [5; лемма 3]: при любом $\delta > 0$

$$\text{osc}_{B_r^+} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \leq \max \left\{ c\delta; (1 - \kappa_\delta) \text{osc}_{B_{r/\delta}^+} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \right\}, \quad (18)$$

где κ_δ и c — положительные константы, причем c не зависит от δ . Неравенство (18) доказано при условии, что $u > 0$ в $B_{r/\delta}^+ \cap K_\delta^+$. Это условие выполнено, если $r \leq R_\delta$,

где R_δ из леммы 6. Итерируя неравенство (18) и учитывая, что $\text{osc}_{B_1^+} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \leq 2M$, получим

$$\text{osc}_{B_r^+} \frac{D_\tau u(x)}{x_n} \leq c\delta,$$

если $r \leq \delta^{\mathcal{N}+1} R_\delta$, а число $\mathcal{N}$ удовлетворяет неравенству $2M(1 - \kappa_\delta)^{\mathcal{N}} \leq c\delta$. Тем самым доказано (17) с $\rho(\varepsilon) = (\varepsilon/c)^{\mathcal{N}+1} R_{\varepsilon/c}$, где $2M(1 - \kappa_{\varepsilon/c})^{\mathcal{N}} \leq \varepsilon$; $\omega(\rho)$ есть обратная к $\rho(\varepsilon)$ функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим последовательность точек $x^k \in F(u)$, $x^k \rightarrow 0$, и покажем, что нормали $\nu(x^k)$ к поверхности $F(u)$ в точках x^k стремятся при $k \rightarrow \infty$ к $\nu(0) = e_n$ (последнее равенство следует из теоремы 1).

Обозначая $r_k := x_n^k$, $z^k := (x^{k'}, 0)$, рассмотрим последовательность, аналогичную (7), с z^k вместо фиксированного z :

$$u^k(y) = \frac{u(x)}{r_k^2}, \quad x = r_k y + z^k. \quad (19)$$

При каждом k точка $x^k \in F(u)$ переходит в точку $y^0 = (0, 1) \in F(u^k)$ и $B_1(y^0) \subset \mathbb{R}_+^n$. Поскольку точка y^0 далеко от Σ , а $F(u^k)$ есть график липшицевой функции $b^k(y') := \frac{b(r_k y' + x^{k'})}{r_k}$, то на основании результатов [3] можно заключить, что для нормалей $\nu^k(y)$ к поверхностям $F(u^k)$ есть равномерные оценки модулей непрерывности в окрестности y^0 . Переходя, если надо, к подпоследовательности, получаем $b^k \rightarrow b^0$ в C^1 в окрестности $y' = 0$. Легко убедиться, что $y_n = b^0(y')$ есть уравнение для $F(u^0)$. В самом деле, если точка $y = (y', y_n)$ такова, что $y_n > b^0(y')$, то некоторый шар $B_\varepsilon(y)$ содержится в надграфике b^0 , а $B_{\varepsilon/2}(y)$ — в надграфиках b^k при $k \gg 1$. Следовательно, $\Delta u^k = 1$ в $B_{\varepsilon/2}(y)$ и в силу эллиптической теории для blow up предела u^0 тоже имеем уравнение $\Delta u^0 = 1$ в $B_{\varepsilon/2}(y)$, т.е. $y \in \mathcal{N}(u^0)$. Аналогично, если $y_n < b^0(y')$, то $y_n < b^k(y')$ при больших k , так что $y \in \Lambda(u^k)$ и, тем самым, $y \in \Lambda(u^0)$.

Покажем, наконец, что $b^0 \equiv 1$, откуда и будет следовать, что

$$\nu(x^k) = \nu^k(y^0) \rightarrow e_n \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

причем это верно для всей исходной последовательности. Действительно, при $\tau = 1, \dots, n-1$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{B_1(y^0)} \frac{|D_\tau u^k(y)|}{y_n} &= \sup_{B_1(y^0)} \frac{|D_\tau u(r_k y + z^k)|}{y_n} = \sup_{B_{r_k}(x^k)} \frac{|D_\tau u(x)|}{x_n} \\ &\leq \sup_{B_{r_k+|x^k|}(x^k)} \frac{|D_\tau u(x)|}{x_n}, \end{aligned} \quad (20)$$

причем правая часть в (20) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ в силу леммы 7. Следовательно, $u^0 = u^0(y_n)$ в $B_1(y^0)$. Так как $b^0(0) = 1$, то $b^0 \equiv 1$ при $|y'| < 1$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 2 рассмотрим произвольную последовательность $x^k \in \mathcal{N}(u)$ такую, что $x^k \rightarrow 0$, и докажем, что $D_\tau u(x^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для $\tau = 1, \dots, n-1$ и любого i . Рассматриваем последовательность (19), где z^k — ближайшая к x^k точка $F^*(u)$, $r_k = |x^k - z^k|$. Пусть некоторая подпоследовательность u^k в $C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^n \cup \Sigma)$ сходится к u^0 , а соответствующие точки $y^k = (x^k - z^k)/r_k$ сходятся к y^0 . Заметим, что $|y^k| = 1$. Если $r_k^{-1} \text{dist}\{x^k; F(u)\}$ стремится к нулю, то нужное заключение получаем из результатов [3] и теоремы 1. Если же $r_k^{-1} \text{dist}\{x^k; F(u)\} \geq \rho > 0$, то $B_\rho^+(y^k) \subset \mathcal{N}(u^k)$ и по эллиптической

теории $D^2u(x^k) = D^2u^k(y^k) \rightarrow D^2u^0(y^0)$. С другой стороны, по лемме 7 при $\tau = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \sup_{B_\rho^+(y^k)} \frac{|D_\tau u^k(y)|}{y_n} &= \sup_{B_{\rho r_k}^+(x^k)} \frac{|D_\tau u(x)|}{x_n} \\ &\leq \sup_{B_{2|x^k|}^+} \frac{|D_\tau u(x)|}{x_n} \leq \omega(2|x^k|) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому $u^0 = u^0(y_n)$, откуда и следует желаемое утверждение для произвольной подпоследовательности x^k , а значит, и для всей последовательности.

Список литературы

1. Caffarelli L. A. The regularity of free boundaries in higher dimensions // Acta Math. 1977. V. 139. P. 155–184.
2. Caffarelli L. A. Compactness methods in free boundary problems // Comm. Partial Differential Equations. 1980. V. 5. № 4. P. 427–448.
3. Caffarelli L. A., Karp L., Shahgholian H. Regularity of a free boundary with application to the Pompeiu problem // TRITA-MAT-98-MA-36, ISSN. P. 1401–2278.
4. Анушкинская Д. Е., Уралцева Н. Н. О поведении свободной границы вблизи границы области // Записки научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 221. С. 5–19.
5. Уралцева Н. Н. C^1 регулярность границы неинцидентного множества в задаче с препятствием // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 2. С. 205–221.
6. Уралцева Н. Н. О свойствах свободной границы в окрестности точек контакта с известной границей // Записки научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 249. С. 303–312.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
28.10.1998