Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Резонансы в задаче рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля,
Матем. сб., 2000, том 191, номер 3, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:44:40

УДК 517.95

А. А. Арсеньев

Резонансы в задаче рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля

Приведен пример оператора Штурма–Лиувилля, для которого решение задачи рассеяния имеет резонансный характер.

Библиография: 4 названия.

1. Ряд задач математической физики (прохождение плоской электромагнитной волны через пластину вещества с очень большим показателем преломления, перенос заряда в гетерозонных полупроводниках) приводит к вычислению коэффициента прохождения для оператора Штурма–Лиувилля вида

$$L = -\partial_x c(x)^2 \partial_x + q$$

при условии, что коэффициент $c(x)$ принимает очень малые (но положительные) значения в окрестности некоторых точек A, B . В численных экспериментах было обнаружено, что в такой ситуации при некоторых дополнительных условиях коэффициент прохождения как функция спектрального параметра имеет четко выраженные резонансы: он почти равен единице в малой окрестности некоторых значений спектрального параметра и почти равен нулю в остальных точках. В нашей работе предлагается математическая модель этого явления. Для простоты мы рассматриваем оператор вида

$$L = -\partial_x c(x)^2 \partial_x, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

Чтобы формализовать понятия “малая” и “почти”, мы рассматриваем такую последовательность операторов (1) с коэффициентами $c_n(x)$, что $c_n(x) \rightarrow c_\infty(x)$, где коэффициент $c_\infty(x)$ обращается в нуль в некоторых точках A и B . Для этой последовательности операторов мы изучаем поведение при $n \rightarrow \infty$ коэффициентов отражения и прохождения и при определенных условиях доказываем, что при достаточно больших n коэффициент прохождения как функция спектрального параметра действительно имеет резонансный характер. Подчеркнем, что нас интересует не сама по себе задача рассеяния для уравнения (1) с сингулярным коэффициентом $c_\infty(x)$, а поведение коэффициента прохождения при очень больших, но конечных n , и требования на характер обращения в нуль коэффициента $c_\infty(x)$ выбраны нами из соображений удобства. Заметим, при наложенных ограничениях спектр оператора (1) с $c(x) = c_\infty(x)$ и соответствующая задача рассеяния могут быть легко изучены методом “форм Дирихле” или вероятностными методами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 97-01-00787, 96-01-00084).

Основной результат работы представлен в теореме 1.

Обратим внимание на следующие обстоятельства. Под резонансом в нашей работе понимается не полюс матрицы рассеяния с малой мнимой частью (существование такого полюса попутно устанавливается), а скачок коэффициента прохождения. Существование резонанса в этом смысле для уравнения (1), насколько нам известно, доказано впервые. Рассматриваемый резонанс обусловлен не аналитическими особенностями коэффициента $c(x)$, а формой его графика (shape resonance по терминологии физиков). У уравнения с коэффициентом $c_\infty(x)$ таких резонансов нет (на это мы особо обращаем внимание: для данных рассеяния в нашей задаче нет равномерного по спектральному параметру непрерывного перехода при $n \rightarrow \infty$).

Если интерпретировать решение уравнения (2) как напряженность электрического (или магнитного) поля в плоской электромагнитной волне, а коэффициент $c(x)$ как обратную величину показателя преломления, обусловленного изменением магнитной (или электрической) проницаемости, то одно из следствий полученных нами результатов можно истолковать таким образом: теоретически можно подобрать закон изменения показателя преломления в пластине вещества так, что пластина будет почти непрозрачна для всех длин волн, а конструкция из двух таких же пластин, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, будет почти полностью прозрачна для некоторых длин волн из дискретного множества и непрозрачна для всех остальных длин волн.

Хорошо известно, что подстановка Лиувилля при гладких коэффициентах устанавливает унитарную эквивалентность оператора (1) оператору Шрёдингера. Нам будут нужны некоторые технические детали этой эквивалентности, поэтому мы ее подробно рассматриваем. Нас не интересует вопрос о том, сохраняется ли эта эквивалентность при сингулярных коэффициентах. Оказывается, что при некоторых условиях (но не всегда!) с помощью подстановки Лиувилля задачу о резонансах для уравнения (1) можно свести к задаче о резонансах для уравнения Шрёдингера. Выяснению технических деталей этого обстоятельства и посвящена значительная часть нашей работы.

2. Мы будем предполагать, что коэффициент $c(x)$ в (1) есть трижды дифференцируемая функция, которая удовлетворяет условиям:

- а) $0 < c(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^1$,
- б) существуют такие константы $a > 0$, $R < \infty$, что

$$|1 - c(x)| + |c'(x)| + |c''(x)| \leq \text{const} \cdot \exp(-ax^2), \quad |x| > R.$$

Решением задачи рассеяния для оператора (1) мы назовем функции $\varphi^\pm(x, \lambda)$, которые удовлетворяют уравнению

$$L\varphi^\pm = \lambda\varphi^\pm, \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

и при $|x| \rightarrow \infty$ имеют асимптотику:

$$\begin{aligned} \varphi^+(x, \lambda) &= t^+(\lambda) \exp(ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ \varphi^+(x, \lambda) &= \exp(ix\sqrt{\lambda}) + r^+(\lambda) \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow -\infty, \\ \varphi^-(x, \lambda) &= \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + r^-(\lambda) \exp(ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ \varphi^-(x, \lambda) &= t^-(\lambda) \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + o(1), & x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты $t^\pm(\lambda)$ в (3) называются *коэффициентами прохождения*, коэффициенты $r^\pm(\lambda)$ – *коэффициентами отражения*; в рассматриваемом нами случае $t^+(\lambda) = t^-(\lambda)$.

Сведем задачу рассеяния (2)–(3) для оператора Штурма–Лиувилля к задаче рассеяния для оператора Шрёдингера. Прямым вычислением доказывается

ЛЕММА 1. *Если функция $\varphi(x)$ дважды дифференцируема, функция $h(y)$ трижды дифференцируема и выполнены равенства*

$$h'(y) = c(h(y)), \quad z(y) = h'(y)^{1/2} \varphi(h(y)), \quad (4)$$

то

$$(L_x - \lambda)\varphi|_{x=h(y)} = h'(y)^{-1/2}(H - \lambda)z(y),$$

где

$$Hz(y) = -\partial_{yy}^2 z(y) + V(y)z(y), \quad (5)$$

$$V(y) = Q(h(y)), \quad (6)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}c''(x)c(x) + \frac{1}{4}c'(x)^2. \quad (7)$$

Положим

$$y(h) = \int_0^h c(x)^{-1} dx, \quad h > 0; \quad y(h) = -\int_h^0 c(x)^{-1} dx, \quad h < 0. \quad (8)$$

Определенная равенствами (8) функция $y(h)$ монотонно возрастает на $(-\infty, \infty)$; пусть $h(y)$ – функция, обратная к $y(h)$. Функция $h(y)$ монотонно возрастает и удовлетворяет равенству (4).

Положим

$$a^+ = \int_0^\infty (c(x)^{-1} - 1) dx, \quad a^- = \int_{-\infty}^0 (c(x)^{-1} - 1) dx. \quad (9)$$

Очевидна

ЛЕММА 2. *Справедливы равенства*

$$h(y) = y - a^+ + o_+(1), \quad y > 0; \quad h(y) = y + a^- - o_+(1), \quad y < 0,$$

где $o_+(1)$ – неотрицательная величина, которая стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\exp(-\gamma|y|^2)$ при некотором $\gamma > 0$.

Напомним, что решением задачи рассеяния для определенного формулой (5) оператора Шрёдингера называются функции $u^\pm(y, \lambda)$, которые удовлетворяют уравнению

$$Hu^\pm = \lambda u^\pm \quad (10)$$

и асимптотическим условиям (3) (с очевидной заменой обозначений). Коэффициенты прохождения и отражения для оператора Шрёдингера мы обозначим символами $T^\pm(\lambda)$, $R^\pm(\lambda)$ (для оператора Шрёдингера мы придерживаемся обозначений и нормировок работы [1]). Из лемм 1 и 2 вытекает

ЛЕММА 3. Решения задачи рассеяния для уравнений (2) и (10) связаны формулами

$$u^\pm(y, \lambda) = \exp(-a^\mp \sqrt{\lambda}) h'(y)^{1/2} \varphi^\pm(h(y), \lambda), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T^\pm(\lambda) &= \exp(-(a^+ + a^-) \sqrt{\lambda}) t^\pm(\lambda), \\ R^\pm(\lambda) &= \exp(-2ia^\pm \sqrt{\lambda}) r^\pm(\lambda). \end{aligned} \quad (12)$$

Напомним, как связаны коэффициенты прохождения и отражения с матрицей рассеяния. Будем обозначать символами L и H самосопряженные расширения в $L^2(\mathbb{R}^1)$ операторов (1) и (5). Величины, соответствующие по приведенным выше построениям функции $c(x) \equiv 1$, мы будем помечать индексом 0. Таким образом,

$$L_0 = H_0 = -\partial_{xx}^2.$$

Определим волновые операторы

$$W_\pm(L, L_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(itL) \exp(-itL_0)$$

и оператор рассеяния

$$S(L, L_0) = W_+^*(L, L_0) W_-(L, L_0).$$

Опишем, как действуют операторы рассеяния. Пусть

$$\widehat{\psi}(k) = \int \exp(-ikx) \psi(x) dx$$

— преобразование Фурье функции $\psi(x)$. Преобразование

$$\begin{aligned} F: L^2(\mathbb{R}^1, dx) &\rightarrow L^2([0, \infty) \rightarrow C^2, d\lambda), \\ (F\psi)(\lambda) &= (4\pi)^{-1/2} \lambda^{-1/4} \{ \widehat{\psi}(\sqrt{\lambda}), \widehat{\psi}(-\sqrt{\lambda}) \} \end{aligned}$$

является унитарным отображением, которое диагонализует оператор L_0 . В пространстве $L^2([0, \infty) \rightarrow C^2, d\lambda)$ оператор $S(L, L_0)$ есть оператор умножения на унитарную матрицу

$$S(L, L_0)(\lambda) = \begin{pmatrix} t(\lambda) & r^-(\lambda) \\ r^+(\lambda) & t(\lambda) \end{pmatrix}, \quad t(\lambda) = t^\pm(\lambda).$$

Матрица $S(H, H_0)(\lambda)$ строится аналогично из коэффициентов $T^\pm(\lambda)$, $R^\pm(\lambda)$.

Заметим, что отображение

$$U: f(x) \rightarrow U(f)(y) = h'(y)^{1/2} f(h(y)) \quad (13)$$

есть унитарное отображение $L^2(\mathbb{R}^1, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^1, dy)$ и

$$H = ULU^{-1}. \quad (14)$$

Равенство (12) задает отображение $S(L, L_0)(\lambda) \rightarrow S(H, H_0)(\lambda)$, индуцированное отображением (13).

Преобразование (14) хорошо известно в спектральной теории (см. [2]) и еще К. О. Фридрихсом использовалось для исследования спектральных свойств оператора L .

3. Перейдем к описанию коэффициентов $c(x)$, которые будут предметом нашего изучения. Пусть $\{b(i), 1 \leq i \leq N\}$ – конечное множество точек, $b(i+1) > b(i)$, $N \geq 2$, и

$$\omega_\delta = \bigcup_{1 \leq i \leq N} (b(i) - \delta, b(i) + \delta), \quad \delta > 0.$$

Пусть задана последовательность функций $\{c_n(x)\}$, которые удовлетворяют условиям а), б), и задана трижды непрерывно дифференцируемая вне множества $\{b(i), 1 \leq i \leq N\}$ функция $c_\infty(x)$, причем выполнены условия:

- с) $\forall \delta > 0 \sup_x (\sum_{1 \leq k \leq 3} |c_n^{(k)}(x) - c_\infty^{(k)}(x)|) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, x \in C\omega_\delta$;
- д) при достаточно малом $\delta > 0$ и всех $n \geq n_0(\delta)$ на каждом интервале $(b(i) - \delta, b(i) + \delta)$ функция $c_n(x)$ представима в виде

$$c_n(x) = d((x - b)^2 + n^{-2})^{\alpha/2} (1 + \beta_n(x)), \quad (15)$$

где коэффициенты зависят от рассматриваемого интервала:

$$d = d(i), \quad b = b(i), \quad \alpha = \alpha(i), \quad x \in (b(i) - \delta, b(i) + \delta),$$

и удовлетворяют условиям:

$$d > 0, \quad 2/3 < \alpha < 1.$$

Мы предполагаем, что функции $\beta_n(x)$ неотрицательны и при $n \rightarrow \infty$ в метрике $C^3(\omega_\delta)$ сходятся к функции $\beta_\infty(x)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\beta_\infty(b(i)) = \beta'_\infty(b(i)) = 0.$$

Для простоты записи формул мы и далее будем опускать зависимость коэффициентов от параметра i и будем помечать индексом n величины, соответствующие по приведенным построениям функции $c(x) = c_n(x)$.

Наша цель – изучить поведение коэффициентов прохождения и отражения при $n \rightarrow \infty$.

4. ЛЕММА 4. 1. *При любом достаточно малом $\delta > 0$ на дополнении множества ω_δ введенные равенством (7) функции удовлетворяют соотношению:*

$$\sup_x (|Q_n(x) - Q_\infty(x)| + |Q'_n(x) - Q'_\infty(x)|) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in C\omega_\delta.$$

2. *При достаточно малом $\delta > 0$ и $n > n_0(\delta)$ на множестве ω_δ справедливо представление:*

$$Q_n(x) = \frac{3}{4} d^2 \alpha \left(\alpha - \frac{2}{3} \right) ((x - b)^2 + n^{-2})^{\alpha-1} (1 + \gamma_{1,n}(x)) \times \left(1 + \frac{(2 - 3\alpha/2) + \gamma_{2,n}(x)}{(3\alpha/2 - 1)(1 + \gamma_{3,n}(x))(1 + n^2(x - b)^2)} \right), \quad (16)$$

где функции $\gamma_{k,n}$ непрерывны и при $n \rightarrow \infty$ равномерно на множестве ω_δ сходятся к таким функциям $\gamma_{k,\infty}$, что

$$\gamma_{k,\infty}(b(i)) = 0.$$

3. При достаточно больших x справедлива оценка:

$$|Q_n(x)| < \text{const} \cdot \exp(-ax^2)$$

с независимыми от n константами.

4. Существует такая независимая от n и x константа $M < \infty$, что

$$Q_n(x) > -M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое и третье утверждения очевидны, второе получается подстановкой (15) в (7), четвертое есть следствие первого и второго, так как из второго утверждения вытекает, что при достаточно малом $\delta > 0$ и $n > n_0(\delta)$ на множестве ω_δ функции $Q_n(x)$ неотрицательны.

Положим

$$l(i) = y_\infty(b(i)), \quad \Omega_\delta = \bigcup_{1 \leq i \leq N} (l(i) - \delta < y < l(i) + \delta), \quad \delta > 0.$$

ЛЕММА 5. При достаточно малом $\delta > 0$ и $n > n_0(\delta)$ на множестве Ω_δ для определенной равенством (8) функции $h_n(y)$ справедливо представление:

$$h_n(y) = b + \text{sign}(y - y_n(b)) (d(1 - \alpha))^{1/(1-\alpha)} (|y - y_n(b)| + O_+(n^{\alpha-1} + |y - y_n(b)|^3))^{1/(1-\alpha)}, \quad y \in \Omega_\delta,$$

где O_+ — неотрицательная величина, имеющая указанный в скобках порядок малости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h > b$. Тогда

$$\begin{aligned} y_n(h) &= y_n(b) + \int_b^h c_n(x)^{-1} dx \\ &= y_n(b) + d^{-1} \int_0^{h-b} (x^2 + n^{-2})^{-\alpha/2} (1 + \beta_n(x+b))^{-1} dx \\ &= y_n(b) + d^{-1} (1 - \alpha)^{-1} (h-b)^{1-\alpha} - (J_1 + J_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= d^{-1} \int_0^{h-b} (x^{-\alpha} - (x^2 + n^{-2})^{-\alpha/2}) dx, \\ J_2 &= d^{-1} \int_0^{h-b} (x^2 + n^{-2})^{-\alpha/2} (1 - (1 + \beta_n(x+b))^{-1}) dx. \end{aligned}$$

Для неотрицательного интеграла J_1 очевидна оценка $J_1 = O_+(n^{\alpha-1})$. Используя условие $0 \leq \beta_n(x+b) \leq \text{const} \cdot x^2$, мы получаем: $0 \leq J_2 \leq \text{const} \cdot |h-b|^{3-\alpha}$. Таким образом,

$$y_n(h) = y_n(b) + d^{-1} (1 - \alpha)^{-1} ((h-b)^{1-\alpha} - O_+(n^{\alpha-1} + (h-b)^{3-\alpha})).$$

Аналогичная оценка получается при $0 \leq b-h \leq \delta$. Эти оценки и доказывают лемму.

Комбинируя леммы 4 и 5, мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. 1. При любых достаточно малых положительных δ на дополнении множества Ω_δ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(y) = V_\infty(y).$$

2. Функция $V_\infty(y)$ непрерывно дифференцируема вне точек $l(i)$, $1 \leq i \leq N$, и на интервале $(l(i) - \delta, l(i) + \delta)$ имеет представление:

$$V_\infty(y) = \frac{3}{4}\alpha \left(\alpha - \frac{2}{3} \right) (1 - \alpha)^{-2} |y - l(i)|^{-2} (1 + \beta(y)),$$

где $\beta(y) \rightarrow +0$, $y \rightarrow l(i)$.

3. При достаточно малых $\delta > 0$ и $n > n_0(\delta)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} V_n(y) \geq \text{const} \cdot \left((|y - y_n(b(i))| + O_+(n^{\alpha-1} + |y - y_n(b(i))|^3))^{2/(1-\alpha)} \right. \\ \left. + O_+(n^{-2}) \right)^{\alpha-1} > 0, \quad y \in (l(i) - \delta, l(i) + \delta). \end{aligned} \quad (17)$$

4. При достаточно больших y справедлива оценка

$$|V_n(y)| < \text{const} \cdot \exp(-\gamma y^2). \quad (18)$$

5. Существует такая константа $M < \infty$, что

$$V_n(y) > -M \quad \forall n, y. \quad (19)$$

5. Пусть H_n – самосопряженный оператор, определенный формулой (5) для $V = V_n$; обозначим символом $G_n(\zeta, \eta, t)$ интегральное ядро оператора

$$G_n(t) = \exp(-tH_n), \quad (20)$$

ПОЛОЖИМ

$$G_0(\zeta, \eta, t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right).$$

ЛЕММА 7. 1. Для любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, $t > 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\zeta, \eta, t) = G_\infty(\zeta, \eta, t). \quad (21)$$

2. Справедлива равномерная по n оценка

$$0 \leq G_n(\zeta, \eta, t) \leq \exp(Mt) G_0(\zeta, \eta, t). \quad (22)$$

3. При любом $t > 0$ справедлива равномерная по n оценка

$$|G_n(\zeta, \eta, t) - G_0(\zeta, \eta, t)| \leq \text{const} \cdot \exp(-\gamma(\zeta^2 + \eta^2)) \quad (23)$$

с зависящими только от t положительными константами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого утверждения воспользуемся представлением интегрального ядра оператора (20) через интеграл по мере Винера:

$$G_n(\zeta, \eta, t) = G_0(\zeta, \eta, t) E \left(\exp \left(-t \int_0^1 V_n(\theta(y(\tau))) d\tau \right) \right), \quad (24)$$

где символом $E(\cdot)$ мы обозначили интеграл по мере Винера от функционала броуновской траектории $y(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$,

$$\theta(y(\tau)) = 2\sqrt{t}(y(\tau) - \tau y(1)) + \zeta + \tau(\eta - \zeta).$$

Если траектория

$$\tau \rightarrow \theta(y(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

не задевает ни одной из точек $l(i)$, $1 \leq i \leq N$, то при некотором $\delta > 0$ она лежит в дополнении к множеству Ω_δ и в силу утверждения 1 леммы 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 V_n(\theta(y(\tau))) d\tau = \int_0^1 V_\infty(\theta(y(\tau))) d\tau.$$

Если при некоторых $\tau^* \in [0, 1]$, i :

$$\theta(y(\tau^*)) = l(i),$$

то воспользуемся тем обстоятельством, что для почти всех по мере Винера траекторий существуют константы $C < \infty$, $\varepsilon > 0$, для которых выполнено неравенство

$$|\theta(y(\tau)) - l(i)| \leq C(|\tau - \tau^*| \cdot |\ln |\tau - \tau^*||)^{1/2} + o_+(1), \quad |\tau - \tau^*| < \varepsilon,$$

поэтому из утверждения 3 леммы 6 следует оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^1 V_n(\theta(y(\tau))) d\tau \\ & \geq -M + \text{const} \cdot \int_0^\varepsilon (|\tau \ln \tau|^{1/2} + o_+(1))^{2/(1-\alpha)} + o_+(1) d\tau \rightarrow +\infty, \\ & n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, для почти всех по мере Винера траекторий существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(-t \int_0^1 V_n(\theta(y(\tau))) d\tau \right).$$

Из оценки (19) и теоремы Лебега следует существование предела в правой части (24).

Второе утверждение леммы есть следствие утверждения 5 леммы 6 и формулы (24).

В силу оценки (22) третье утверждение леммы нужно доказать лишь в области $\{\zeta, \eta : |\zeta| > 2R, |\eta| > 2R, \zeta\eta > 0\}$. Рассмотрим только правую компоненту области. В ней функция G_n есть решение задачи

$$\partial_t G_n(\zeta, \eta, t) = \partial_{\zeta}^2 G_n(\zeta, \eta, t) - V_n(\zeta) G_n(\zeta, \eta, t), \quad \zeta > R, \quad (25)$$

$$G_n(\zeta, \eta, +0) = \delta(\zeta - \eta), \quad G_n(R + 0, \eta, t) = G_n(R, \eta, t). \quad (26)$$

В уравнении (25) функция V_n оценивается неравенством (17), для краевого условия (26) имеем оценку:

$$0 \leq G_n(R, \eta, t) \leq \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma\eta^2}{t}\right), \quad \gamma > 0, \quad t > 0, \quad \eta \geq 2R. \quad (27)$$

Решение задачи (25)–(26) представляем в стандартном виде как сумму главного фундаментального решения и потенциала. Учитывая, что оценки (17) и (27) не зависят от n , мы получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 8. 1. *Полугруппа самосопряженных в $L^2(\mathbb{R}^1, dy)$ операторов $G_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ сильно сходится к полугруппе самосопряженных операторов $G_\infty(t)$, определяемых как интегральные операторы с ядром (20). Полугруппа $G_\infty(t)$ в $L^2(\mathbb{R}^1, dy)$ есть полугруппа класса C_0 , инфинитезимальный оператор которой*

$$-H_\infty = \partial_t G_\infty(t)|_{t=0}$$

самосопряжен и на гладких функциях с носителем, не пересекающим точки $l(i)$, задается формулой

$$H_\infty \varphi(y) = -\partial_{yy}^2 \varphi(y) + V_\infty(y) \varphi(y).$$

2. *Каждое из пространств*

$$L^2((-\infty, l(1)), dy), \quad L^2((l(i), l(i+1)), dy), \quad 1 \leq i < N, \quad L^2((l(N), \infty), dy)$$

приводит полугруппу $G_\infty(t)$, а область определения оператора H_∞ есть прямая сумма областей определения инфинитезимальных операторов сужения полугруппы $G_\infty(t)$ на эти пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы есть следствие утверждений 1 и 2 леммы 7.

Положим

$$q_{m,i} = \min_y V_\infty(y), \quad |y - l(i)| < 2^{-m} \delta, \quad \delta > 0.$$

Из утверждения 2 леммы 6 следует $4^{-m} q_{m,i} \geq \text{const} > 0$, что в силу леммы 5 работы [3] доказывает второе утверждение леммы.

Пусть $\{\lambda_j\}$ – спектр сужения оператора H_∞ на объединение пространств $L^2((l(i), l(i+1)), dy)$, $1 \leq i \leq N-1$. Множество $\{\lambda_j\}$ непусто и является объединением спектров сужения оператора H_∞ на каждое из пространств $L^2((l(i), l(i+1)), dy)$, $1 \leq i \leq N-1$, причем в каждом из этих пространств собственные значения оператора H_∞ простые, как это вытекает из следствия в работе [3].

Пусть λ_j – фиксированное простое собственное значение оператора H_∞ . Леммы 7 и 8 дают возможность применить теоремы 5.1–5.3 из [3]. Учитывая формулы (12), мы переформулируем результаты этих теорем в терминах решения задачи рассеяния для оператора L .

ТЕОРЕМА 1. 1. Если выполнены условия а)–д), то для каждого простого собственного значения λ_j существуют такие $n_j < \infty$, $\varepsilon_j > 0$, что при $n > n_j$ в круге $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon_j$ матрица рассеяния $S(L_n, L_0)(\lambda)$ имеет полюс $\lambda_{j,n}$, причем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \lambda_{j,n} < 0, \quad \lambda_{j,n} \rightarrow \lambda_j, \quad n \rightarrow \infty, \\ |t_n^\pm(\lambda)| \rightarrow 0, \quad |r_n^\pm(\lambda)| \rightarrow 1, \quad \lambda \neq \lambda_j, \quad n \rightarrow \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (|r_n^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - r_\infty^+(\lambda_j)| + |r_n^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - r_\infty^-(\lambda_j)|) = 2, \end{aligned}$$

где по определению

$$r_\infty^\pm(\lambda_j) = \lim_{\lambda} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^\pm(\lambda) \right), \quad |\lambda - \lambda_j| \rightarrow +0.$$

2. Если в дополнение к перечисленным выше условиям $c_n(x) \equiv c_n(-x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n^\pm(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})| = 1. \quad (28)$$

3. Для решения задачи рассеяния справедлива оценка

$$\int_{b(i)}^{b(i+1)} (|\varphi_n^-(x, \operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2 + |\varphi_n^+(x, \operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2) dx \geq \operatorname{const} \cdot |\operatorname{Im} \lambda_{j,n}|^{-1}.$$

Соотношение (28) описывает ситуацию, которая обсуждалась в начале этой статьи.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. Мы не утверждаем, что оператор H_∞ унитарно эквивалентен оператору L_∞ , и вообще никак не определяем оператор L_∞ : для наших целей это не нужно.

2. Предположение $c(x) \leq 1$ выполнено в большинстве интересных приложений и сильно упрощает рассуждения, однако с учетом результатов работы [4] оно может быть заменено предположением

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x) = c_0^\pm, \quad c_0^+ \neq c_0^-.$$

Список литературы

1. Арсеньев А. А. Резонансные свойства матрицы рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера с ловушечным потенциалом // Матем. сб. 1996. Т. 187. №6. С. 3–20.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир, 1966.
3. Арсеньев А. А. Оценка решения задачи рассеяния на одномерном ловушечном потенциале // Матем. сб. 1997. Т. 188. №12. С. 3–10.
4. Арсеньев А. А. Некоторые вопросы спектральной теории оператора Шрёдингера, связанные с математической моделью туннельного диода // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. №9. С. 79–116.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
30.09.1998 и 23.09.1999