Общероссийский математический портал

П. Е. Жидков, О базисности Рисса системы собственных функций нелинейной задачи типа Штурма–Лиувилля, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 3, 43–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:33:18

УДК 517.927.25

П. Е. Жидков

О базисности Рисса системы собственных функций нелинейной задачи типа Штурма–Лиувилля

Для нелинейной задачи на собственные значения, подобной линейной задаче Штурма–Лиувилля, исследованы свойства спектра и собственных функций и доказано, что система собственных функций является базисом Рисса в пространстве L_2 .

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение. Определения. Основной результат

В работе рассматривается следующая нелинейная задача на собственные значения:

$$-y'' + f(y^2)y = \lambda y, \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad y = y(x), \quad x \in (0, A), \quad (1)$$

$$y(0) = p, \quad y'(0) = y(A) = 0. \quad (2)$$

Здесь все величины вещественны, A и p – фиксированные положительные параметры, $f(y^2)y$ – непрерывно дифференцируемая функция аргумента $y \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям, а λ – спектральный параметр. Если пара $(\lambda, y(x))$, где $y(x) \in C^2(0, A) \cap C^1[0, A] \cap C[0, A]$, удовлетворяет задаче (1)–(2), то назовем λ *собственным значением*, а $y(x)$ – соответствующей *собственной функцией* задачи (1)–(2). Множество всех собственных значений назовем *спектром* задачи (1)–(2).

Имеется значительное количество статей, в которых устанавливается наличие счетных наборов собственных функций нелинейных задач типа (1)–(2) и значительно более сложных (см., например, [1; часть 2, гл. III, пп. 10.3, 11.4, 11.5] и библиографию там же). Целью настоящей работы является доказательство базисности в L_2 счетной системы собственных функций задачи (1)–(2).

Нелинейная задача на собственные значения, подобная задаче (1)–(2), рассматривалась автором в работе [2]. К сожалению, в формулировке и доказательстве теоремы 1 из работы [2] имеются ошибки, которые, однако, можно исправить. Автор надеется в недалеком будущем опубликовать эти исправления, а также некоторые дополнения к указанной работе. Кроме того, в [3] дано независимое доказательство результатов работы [2] для рассматриваемой в последней нелинейной задачи, основанное на теореме Бари (см. далее).

Введем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть $L_2(a, b)$, где $a < b$, – пространство Лебега, состоящее из вещественных функций, квадратично интегрируемых по отрезку $[a, b]$, со скалярным произведением

$$(g, h)_{L_2(a, b)} = \int_a^b g(x)h(x) dx$$

и нормой $\|g\|_{L_2(a,b)} = (g, g)_{L_2(a,b)}^{1/2}$. Хорошо известно, что $L_2(a, b)$ – гильбертово пространство. Положим $L_2 = L_2(0, A)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(0,A)}$ и $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_2(0,A)}$.

Следующее определение общеизвестно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство функций $\{h_n\}_{n=0}^\infty \subset L_2(a, b)$ называется *базисом пространства* $L_2(a, b)$, если для произвольной функции $h \in L_2(a, b)$ существует единственный набор вещественных коэффициентов $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ такой, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^N a_n h_n - h \right\|_{L_2(a,b)} = 0;$$

последнее равенство будем записывать так: $\sum_{n=0}^\infty a_n h_n = h$, оговаривая, если необходимо, в смысле какого пространства оно понимается.

В соответствии с работами [4], [5] (см. также [6]–[8]) введем еще следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Базис $\{h_n\}_{n=0}^\infty \subset L_2(a, b)$ называется *базисом Рисса*, если для произвольной функции $h = \sum_{n=0}^\infty a_n h_n \in L_2(a, b)$, где $a_n \in (-\infty, \infty)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, выполнено условие $\sum_{n=0}^\infty a_n^2 < \infty$ и, наоборот, для любых вещественных чисел a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, таких, что $\sum_{n=0}^\infty a_n^2 < \infty$, ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n h_n$ сходится в пространстве $L_2(a, b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система функций $\{h_n\}_{n=0}^\infty \subset L_2(a, b)$ называется *минимальной*, если для любого номера $k \geq 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left\| \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^N a_n h_n - h_k \right\|_{L_2(a,b)} \geq \delta$$

для любого номера $N > 0$ и любых вещественных коэффициентов a_n .

Следующий результат Н. К. Бари, используемый при доказательстве основного результата настоящей работы, анонсирован в [4] и доказан в [5] (см. также [6]–[8]).

ТЕОРЕМА БАРИ. Пусть $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ – базис Рисса в пространстве $L_2(a, b)$, и пусть система функций $\{h_n\}_{n=0}^\infty \subset L_2(a, b)$ удовлетворяет следующим условиям:

- А. система функций $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ минимальна в $L_2(a, b)$;
- Б. системы функций $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ квадратично близки, т.е.

$$\sum_{n=0}^\infty \|h_n - e_n\|_{L_2(a,b)}^2 < \infty.$$

Тогда система $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ является базисом Рисса в пространстве $L_2(a, b)$.

В действительности в монографии [7] доказано несколько более сильное утверждение, однако доказательство из работы [5] остается в силе и в этом случае. Базисы, квадратично близкие к ортонормированным, называют также *базисами Бари* (см. [7]). По поводу свойств базисов Рисса и Бари см. [4]–[8].

Основной результат работы составляет

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(y^2)y$ — непрерывно дифференцируемая функция аргумента $y \in (-\infty, \infty)$, и пусть $f(s)$ — монотонно неубывающая функция аргумента $s \in [0, +\infty)$. Тогда

(а) для любого целого $n \geq 0$ существует единственная пара $(\lambda_n, y_n(x))$, состоящая из собственного значения λ_n и соответствующей собственной функции $y_n(x)$ задачи (1)–(2), такая, что функция $y_n(x)$ имеет ровно n корней в интервале $(0, A)$;

(б) для любого номера n корнями функции $y_n(x)$ в интервале $(0, A)$ являются точки $\frac{(2k+1)A}{2n+1}$, где $k = \overline{0, n-1}$;

(в) $f(p^2) < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$;

(г) система собственных функций $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Рисса в пространстве L_2 , а система функций $\{\sqrt{2/A} p^{-1} y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — базисом Бари в том же пространстве.

Очевидно, результат, аналогичный теореме 1, имеет место и для задачи, в которую входят уравнение (1) и граничные условия

$$y(0) = y'(A) = 0, \quad y(A) = p,$$

поскольку задача (1)–(2) сводится к последней заменой $x \rightarrow A - x$. В настоящей работе автор не ставил себе целью рассмотреть как можно более широкий класс задач, к которым применим используемый здесь подход, основанный на проверке условий теоремы Бари, а хотел лишь проиллюстрировать возможность использования этого подхода на примере конкретной задачи (1)–(2).

Предположения теоремы 1 выполнены, например, для задачи (1)–(2) с $f(s) = |s|^q$, где $q \geq 0$ — постоянная. В частности, при $q = 1$ уравнение (1) становится вариантом уравнения Дуффинга. Уравнение (1) в общем случае интегрируемо в квадратурах, однако автор не знает нетривиальных примеров функции f , при которых собственные функции задачи (1)–(2) выражались бы в элементарных функциях.

Что касается приложений полученных результатов, то, по мнению автора, можно надеяться, что базисы, состоящие из решений нелинейных краевых задач, в дальнейшем могут быть использованы, например, в методе Галёркина. По сведениям автора настоящая работа является одной из первых статей, в которых доказана базисность подобной системы. Отметим монографию [8], в которой представлены некоторые интересные результаты в этой области.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим задачу Коши

$$-u'' + f(u^2)u = \lambda u, \quad u = u(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

$$u(0) = p, \quad u'(0) = 0. \quad (4)$$

В силу условий теоремы 1 для нее справедливы обычные локальные теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения $u(x)$ от параметра λ .

Рассмотрим произвольное $\lambda < f(p^2)$. Тогда в силу уравнения (3) $u''(0) > 0$, поэтому $u(x) > p$ и $u'(x) > 0$ для любого достаточно малого $x > 0$. Но тогда, поскольку $f(s)$ — неубывающая функция аргумента $s \in [0, +\infty)$, в силу уравнения (3)

$u(x) > p$, $u'(x) > 0$ и $u''(x) > 0$ для всех $x > 0$, для которых решение $u(x)$ определено. Действительно, предположим противное и возьмем точную нижнюю грань x_0 точек $x > 0$, при которых хотя бы одно из этих неравенств нарушается. В силу сказанного $x_0 > 0$ и $u(x) > p$, $u'(x) > 0$ и $u''(x) > 0$ при всех $x \in (0, x_0)$. Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница получаем $u(x_0) > p$ и $u'(x_0) > 0$, поэтому в силу уравнения (3) $u''(x_0) > 0$. Следовательно, ввиду непрерывности эти неравенства выполняются в некоторой правой полукрестности точки x_0 , т.е. получаем противоречие с определением этой точки. При $\lambda = f(p^2)$ в силу теоремы единственности $u(x) \equiv p$. Таким образом, точки $\lambda \leq f(p^2)$ не принадлежат спектру задачи (1)–(2).

Для решений задачи (3)–(4), очевидно, справедливо тождество

$$\{[u'(x)]^2 + \lambda u^2(x) - F(u^2(x))\}' = 0,$$

где $F(s) = \int_0^s f(r) dr$, из которого следует, что

$$\lambda p^2 - F(p^2) = [u'(x)]^2 + \lambda u^2(x) - F(u^2(x)) \quad (5)$$

для всех x , для которых решение $u(x)$ определено.

Пусть $\lambda > f(p^2)$. Тогда в силу уравнения (3) и тождества (5) $u(x)u''(x) < 0$ и $u'(x) = 0$ для любого x такого, что $|u(x)| = p$. Следовательно, для $\lambda > f(p^2)$ имеет место априорная оценка решения $u(x)$ задачи (3)–(4):

$$|u(x)| \leq p \quad (6)$$

для всех x , для которых это решение определено. Действительно, предположим противное и обозначим через $x_0 \geq 0$ точную нижнюю грань значений $x > 0$, при которых это неравенство нарушается. Тогда $|u(x_0)| = p$, поэтому $u(x_0)u''(x_0) < 0$ и $u'(x_0) = 0$, а отсюда по формуле Тейлора легко следует, что $|u(x)| < p$ в некоторой правой полукрестности точки x_0 ; получили противоречие. Из (6), тождества (5) и уравнения (3) вытекает, что для любого $\lambda > f(p^2)$ существует $C_1 > 0$ такое, что

$$|u'(x)| \leq C_1 \quad \text{и} \quad |u''(x)| \leq C_1 \quad (7)$$

для всех x , для которых решение $u(x)$ определено.

Из оценок (6) и (7) сразу следует, что при $\lambda > f(p^2)$ решение $u(x)$ задачи (3)–(4) может быть продолжено для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Действительно, предположим, что существуют $\lambda > f(p^2)$ и $d > 0$ такие, что соответствующее решение $u(x)$ задачи (3)–(4) может быть продолжено на полуинтервал $[0, d)$ и не может быть продолжено ни на одну правую полукрестность точки d . Положим

$$c = \lim_{x \rightarrow d-0} u(x) = p + \int_0^d u'(x) dx, \quad c' = \lim_{x \rightarrow d-0} u'(x) = \int_0^d u''(x) dx$$

и рассмотрим задачу Коши для уравнения (3) с начальными условиями $u(d) = c$, $u'(d) = c'$. Она локально однозначно разрешима, откуда немедленно вытекает, что решение $u(x)$ задачи (3)–(4) может быть продолжено на некоторую правую полукрестность точки $x = d$, т.е. получаем противоречие. Следовательно, решение $u(x)$ может быть продолжено на полупрямую $[0, +\infty)$. Кроме того, очевидно,

что функция, определенная равенством $u(-x) = u(x)$ при $x \geq 0$, удовлетворяет задаче (3)–(4) при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Тем самым доказано, что при $\lambda > f(p^2)$ решение задачи (3)–(4) может быть продолжено на всю прямую $x \in (-\infty, \infty)$. В дальнейшем будем считать, что при $\lambda > f(p^2)$ соответствующее решение $u(x)$ задачи (3)–(4) продолжено на всю прямую $x \in (-\infty, \infty)$.

Возьмем произвольное $\lambda > f(p^2)$. Тогда для соответствующего решения $u(x)$ задачи (3)–(4) в силу уравнения (3) выполнено $u''(0) < 0$, поэтому найдется $d > 0$ такое, что $u(x) > 0$ и $u'(x) < 0$ при $x \in (0, d]$. Далее, поскольку $U(s) = \lambda s^2 - F(s^2)$ —возрастающая функция аргумента $s \in [0, p]$ (так как $\frac{d}{ds}U(s) = 2\lambda s - 2sf(s^2) > 0$ при $s \in (0, p]$), из тождества (5) следует, что для любого $\varepsilon \in (0, p)$ существует $a = a(\lambda) > 0$ такое, что $|u'(x)| \geq a$, если $u(x) \in (-p + \varepsilon, p - \varepsilon)$. (Это так, поскольку в силу предыдущего для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное a такое, что $\lambda p^2 - F(p^2) - [\lambda u^2 - F(u^2)] \geq a^2$ для всех $u \in (-p + \varepsilon, p - \varepsilon)$.) Поэтому решение $u(x)$ имеет положительный корень. Для каждого $\lambda > f(p^2)$ через $x_0(\lambda)$ обозначим минимальный положительный корень решения $u(x)$ задачи (3)–(4). Отметим, что из приведенных выше рассуждений следует, что $u'(x) < 0$ при $x \in (0, x_0(\lambda)]$.

ЛЕММА 1. *Функция $x_0(\lambda)$ является строго убывающей непрерывной функцией аргумента $\lambda \in (f(p^2), +\infty)$. При этом $\lim_{\lambda \rightarrow f(p^2)+0} x_0(\lambda) = +\infty$, а $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} x_0(\lambda) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство $\lim_{\lambda \rightarrow f(p^2)+0} x_0(\lambda) = +\infty$ следует из того, что при $\lambda = f(p^2)$ решением задачи (3)–(4) является функция $u(x) \equiv p$, и из теоремы о непрерывной зависимости этого решения от параметра λ . Из оценки (6) и из теоремы сравнения (см. [9]) следует свойство $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} x_0(\lambda) = 0$: надо сравнить задачу (3)–(4) с задачей

$$-w'' = \mu w, \quad w = w(x), \quad w(0) = p, \quad w'(0) = 0,$$

взятой при достаточно больших значениях параметра $\mu > 0$.

Докажем непрерывность функции $x_0(\lambda)$. Фиксируем произвольное $\bar{\lambda} > f(p^2)$ и обозначим через $u(\lambda, x)$ решение задачи (3)–(4). Поскольку $u'_x(\bar{\lambda}, x)|_{x=x_0(\bar{\lambda})} \neq 0$ (иначе в точке $x_0(\bar{\lambda})$ нарушалась бы теорема единственности, так как функция $u(x) \equiv 0$ является решением задачи Коши для уравнения (3) с начальными условиями $u(x_0(\bar{\lambda})) = u'(x)|_{x=x_0(\bar{\lambda})} = 0$), по теореме о неявной функции существуют $\varepsilon \in (0, x_0(\bar{\lambda}))$ и $\delta \in (0, \bar{\lambda} - f(p^2))$ такие, что для каждого λ , удовлетворяющего условию $|\lambda - \bar{\lambda}| < \delta$, существует единственное $x_1 = x_1(\lambda)$ такое, что $x_1(\lambda) \in (x_0(\bar{\lambda}) - \varepsilon, x_0(\bar{\lambda}) + \varepsilon)$ и $u(\lambda, x_1(\lambda)) = 0$, причем функция $x_1(\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in (\bar{\lambda} - \delta, \bar{\lambda} + \delta)$. Далее, поскольку $\min_{x \in [0, x_0(\bar{\lambda}) - \varepsilon]} u(\bar{\lambda}, x) > 0$, для всех λ , достаточно близких к $\bar{\lambda}$, $u(\lambda, x)$ как функция аргумента x не имеет корней на отрезке $[0, x_0(\bar{\lambda}) - \varepsilon]$, т.е. $x_1(\lambda) = x_0(\lambda)$ для всех значений параметра λ , достаточно близких к $\bar{\lambda}$. Тем самым непрерывность функции $x_0(\lambda)$ доказана.

Докажем монотонность функции $x_0(\lambda)$. Возьмем произвольные $\lambda_1, \lambda_2 : f(p^2) < \lambda_1 < \lambda_2$. Обозначим через $u_1(x)$ и $u_2(x)$ соответствующие решения задачи (3)–(4). Пусть $d = \min\{x_0(\lambda_1); x_0(\lambda_2)\}$. Тогда в силу указанного выше свойства $u'_i(x) < 0$

при $x \in (0, x_0(\lambda_i)]$ и тождества (5) для любых $x_1, x_2 \in (0, d]$ таких, что $u_1(x_1) = u_2(x_2)$, имеем

$$\begin{aligned} u_2'(x_2) &= -\{\lambda_2 p^2 - F(p^2) - \lambda_2 u_2^2(x_2) + F(u_2^2(x_2))\}^{1/2} \\ &< -\{\lambda_1 p^2 - F(p^2) - \lambda_1 u_1^2(x_1) + F(u_1^2(x_1))\}^{1/2} = u_1'(x_1) < 0. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу уравнения (3) $u_2''(0) < u_1''(0) < 0$, поэтому $u_2(x) < u_1(x) < p$ в некоторой правой полуокрестности точки $x = 0$. Следовательно, $x_0(\lambda_1) > x_0(\lambda_2)$, в противном случае графики функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ должны были бы пересекаться в полуинтервале $(0, d]$, а в минимальной точке $\bar{x} \in (0, d]$ такого пересечения выполнялось бы $u_1'(\bar{x}) \leq u_2'(\bar{x})$, что противоречит предыдущему. Тем самым лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda > f(p^2)$ произвольно и $u(x)$ — соответствующее решение задачи (3)–(4). Тогда

- 1) $u(-x) = u(x)$ для любого $x \in (-\infty, \infty)$;
- 2) $u(2x_0(\lambda) + x) = -u(x)$ для любого $x \in (-\infty, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из локальных теорем существования и единственности для задачи (3)–(4), автономности уравнения (3) и его инвариантности относительно замены переменных $u(x) \rightarrow -u(x)$ и $x \rightarrow c - x$, где c — произвольная вещественная постоянная. Действительно, свойство 1) следует из того, что, как нетрудно проверить, если $u(x)$ — решение задачи (3)–(4), то $u(-x)$ — также решение этой задачи, и из теоремы единственности. Совершенно аналогично доказывается, что решение $u(x)$ четно относительно любой точки x такой, что $u'(x) = 0$, и нечетно относительно любого своего корня. Докажем, например, последнее утверждение. Пусть x_0 — корень функции $u(x)$. Для $x \leq x_0$ положим $v(x) = -u(x_0 + (x_0 - x))$. Тогда легко можно проверить, что функция $v(x)$ является решением уравнения (3) на полупрямой $x \leq x_0$, причем $v(x_0) = 0$ и $v'(x_0 - 0) = u'(x_0)$. Поэтому по теореме единственности решение $u(x)$ совпадает с функцией $v(x)$ при всех $x \leq x_0$, и нечетность решения $u(x)$ задачи (3)–(4) относительно любого своего корня доказана.

Итак, считаем доказанным, что решение $u(x)$ четно относительно точки $x = 0$ и относительно любой точки x , в которой $u'(x) = 0$, и что оно нечетно относительно любого своего корня. Поэтому решение $u(x)$ можно построить следующим образом. С отрезка $[0, x_0(\lambda)]$ на отрезок $[x_0(\lambda), 2x_0(\lambda)]$ продолжаем функцию $u(x)$ нечетно относительно точки $x_0(\lambda)$. Далее, поскольку для построенной функции $u'(2x_0(\lambda) - 0) = u'(0) = 0$, продолжаем ее четно относительно точки $2x_0(\lambda)$ на отрезок $[2x_0(\lambda), 4x_0(\lambda)]$. Продолжая эти рассуждения, легко убеждаемся, что далее нужно продолжить построенную функцию на всю вещественную прямую периодически с периодом $4x_0(\lambda)$; построенная таким образом функция и будет решением задачи (3)–(4). Тем самым утверждение 2), а вместе с ним и лемма 2, доказано.

Фиксируем произвольное целое $n \geq 0$. В силу леммы 1 существует ровно одно значение параметра $\lambda \in (-\infty, \infty)$, причем $\lambda > f(p^2)$ ввиду рассуждений из начала этого параграфа, такое, что $(2n + 1)x_0(\lambda) = A$. Ввиду лемм 1 и 2 ясно также, что при этом значении параметра λ точки $(2k + 1)x_0(\lambda)$, где $k = \overline{0, n}$, и только они являются корнями соответствующего решения $u(x)$ задачи (3)–(4) в полуинтервале $(0, A]$ и что при любом другом значении параметра λ либо число корней

соответствующего решения $u(x)$ задачи (3)–(4) в интервале $(0, A)$ не равно n , либо $u(A) \neq 0$. Тем самым доказаны утверждения (а) и (б) теоремы 1. Свойства $\lambda_0 < \dots < \lambda_n < \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ следуют из этих же рассуждений и леммы 1. Таким образом, утверждение (в) теоремы 1 также доказано.

Приступим к доказательству утверждения (г). Рассмотрим линейную задачу на собственные значения

$$-e'' = ze, \quad x \in (0, A), \quad e = e(x), \quad e'(0) = e(A) = 0$$

(здесь z – спектральный параметр). Тогда $z_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2A} \right)^2$ – ее собственные значения, а $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{A}} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2A}$ – соответствующие нормированные в пространстве L_2 собственные функции (здесь $n = 0, 1, 2, \dots$), причем система собственных функций $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ является ортонормированным базисом в пространстве L_2 . В частности, очевидно, эта система есть базис Рисса в указанном пространстве. Далее, для каждого целого $n \geq 0$ положим $g_n(x) = p\sqrt{A/2} e_n(x)$. Для доказательства утверждения (г) теоремы 1 достаточно проверить условия А и Б теоремы Бари для системы функций $\{w_n\}_{n=0}^\infty$, где $w_n(x) = p^{-1}\sqrt{2/A} y_n(x)$, взяв в качестве базиса Рисса систему $\{e_n\}_{n=0}^\infty$. Отметим еще, что условие Б теоремы Бари равносильно тому, что $\sum_{n=0}^\infty \|g_n - y_n\|^2 < \infty$.

Для каждого целого $n \geq 0$ разложим функцию $w_n\left(\frac{x}{2n+1}\right)$ в ряд Фурье в пространстве L_2 :

$$w_n\left(\frac{x}{2n+1}\right) = \sum_{m=0}^\infty a_m^n e_m(x), \quad (8)$$

где a_m^n – вещественные коэффициенты. Поскольку $w_n\left(\frac{x}{2n+1}\right) > 0$ и $e_0(x) > 0$ при $x \in [0, A)$, имеем $a_0^n = \left(w_n\left(\frac{\cdot}{2n+1}\right), e_0(\cdot) \right) > 0$. Далее, из разложения (8) получаем:

$$w_n(x) = \sum_{m=0}^\infty b_{n,m} e_m(x), \quad (9)$$

причем $b_{n,l_0(m)} = a_m^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и $b_{n,l} = 0$, если $l \neq l_0(m)$ для всех целых $m \geq 0$, где $l_0(m) = ((2m+1)(2n+1)-1)/2$ (в частности, $b_{n,0} = \dots = b_{n,n-1} = 0$ и $b_{n,n} = a_0^n > 0$), и ряд Фурье из правой части (9) сходится в пространстве $L_2\left(0, \frac{A}{2n+1}\right)$.

ЛЕММА 3. *Ряд Фурье из правой части (9) сходится к функции w_n в пространстве $L_2 = L_2(0, A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось выше, равенство (9) имеет место в смысле пространства $L_2\left(0, \frac{A}{2n+1}\right)$. В силу четности функций $w_n(x)$ и $e_{l_0(m)}(x)$ для произвольного целого $m \geq 0$ оно также выполнено в пространстве $L_2\left(-\frac{A}{2n+1}, 0\right)$.

Кроме того, в правой части (9) могут быть отличными от нуля лишь коэффициенты $b_{n,m}$ с $m = l_0(l)$ для некоторого целого $l \geq 0$. Для произвольных $x \in \left(-\frac{A}{2n+1}, \frac{A}{2n+1}\right)$, целого $l \geq 0$ и $k = 1, \dots, n$ в силу леммы 2 имеем $w_n\left(x + \frac{2kA}{2n+1}\right) = (-1)^k w_n(x)$ и

$$\begin{aligned} e_{l_0(l)}\left(x + \frac{2kA}{2n+1}\right) &= \sqrt{\frac{2}{A}} \cos\left[\frac{\pi(2l+1)(2n+1)(x + 2kA/(2n+1))}{2A}\right] \\ &= (-1)^k \sqrt{\frac{2}{A}} \cos\frac{\pi(2l+1)(2n+1)x}{2A} = (-1)^k e_{l_0(l)}(x). \end{aligned}$$

Следовательно, в каждом из пространств $L_2\left(\frac{(2k+1)A}{2n+1}, \frac{(2k+3)A}{2n+1}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$, равенство (9) также выполнено (формальное доказательство этого утверждения очевидно). Тем самым лемма 3 доказана.

Докажем минимальность системы $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ в пространстве L_2 . Предположим, что эта система не является минимальной. Тогда существуют номер $N \geq 0$, последовательности номеров $N_k > 0$, вещественных коэффициентов $\{d_n^k\}_{n=0}^{N_k}$ и функций $\alpha_k(x)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, такие, что

$$w_N + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq N}}^{N_k} d_n^k w_n = \alpha_k, \quad \text{где } \|\alpha_k\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

В дополнение можно считать, что $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ — монотонно возрастающая последовательность номеров и $N_1 > N$, вводя дополнительно нулевые коэффициенты d_n^k , если необходимо. Обозначим через P_m ортогональный проектор в пространстве L_2 на подпространство, натянутое на векторы $e_0, \dots, e_m$, а через $P_m^\perp$ — ортогональный проектор в том же пространстве на замыкание линейной оболочки векторов $\{e_k\}_{k=m+1}^\infty$. Предполагая, что $N > 0$, положим $\alpha_k^{N-1} = P_{N-1}\alpha_k$. Тогда, поскольку $\|P_m w\| \leq \|w\|$ для любого $w \in L_2$ и любого номера m , имеем $\|\alpha_k^{N-1}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Далее, ввиду разложений (9) и леммы 3 $\alpha_k^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} d_n^k P_{N-1} w_n$, где в силу того что, как указано выше, матрица $(b_{n,m})_{n,m=0}^{N-1}$ — верхнетреугольная и $b_{n,n} > 0$ для любого номера n , векторы $\{P_{N-1} w_n\}_{n=0}^{N-1}$ — ненулевые и линейно независимые. Отсюда по известной теореме об эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве (см. [10]) сразу следует, что $d_n^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $n = \overline{0, N-1}$. Поэтому получаем

$$w_N + \sum_{n=N+1}^{N_k} d_n^k w_n = \beta_k, \quad \text{где } \|\beta_k\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Если $N = 0$, то последнее соотношение также очевидно выполняется. Но в силу разложений (9) и леммы 3 $\sum_{n=N+1}^{N_k} d_n^k w_n \in P_N^\perp L_2$, поэтому

$$\left\|w_N + \sum_{n=N+1}^{N_k} d_n^k w_n\right\| \geq b_{N,N};$$

следовательно, поскольку $b_{N,N} > 0$ не зависит от номера k , получаем противоречие. Тем самым доказано, что система $\{w_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ — минимальная в пространстве L_2 .

Проверим условие Б теоремы Бари.

ЛЕММА 4. *Существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что*

$$\|y_n - g_n\| \leq C_2(n+1)^{-1}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $D = \max_{s \in [0,p]} |f(s^2)|$ и докажем, что

$$|\lambda_n - z_n| \leq D \quad (10)$$

для всех $n \geq 0$. Предположим, что $\lambda_n > z_n + D$ для некоторого n , и сравним задачу (1)–(2) при $\lambda = \lambda_n$ с задачей

$$-e_n'' = z_n e_n, \quad e_n'(0) = e_n(A) = 0.$$

Тогда в силу утверждения (в) теоремы 1 и (6) $\lambda_n - f(y_n^2(x))y_n(x) > z_n$ для этого номера n и всех $x \in (0, A)$. Но тогда в силу известной теоремы сравнения (см., например, [9]) функция $y_n(x)$ имеет в интервале $(0, A)$ не менее $n+1$ корней (согласно стандартным результатам между каждыми двумя корнями функции $e_n(x)$ лежит корень функции $y_n(x)$ и в интервале $(0, A/(2n+1))$, где $A/(2n+1)$ — минимальный положительный корень функции e_n , лежит по крайней мере один корень функции y_n), что противоречиво. Поэтому $\lambda_n \leq z_n + D$ для всех n . Аналогично можно доказать, что $\lambda_n \geq z_n - D$. Тем самым (10) доказано.

В силу (6) и (10) получаем, что функции $u_n(x) = y_n(x) - g_n(x)$ удовлетворяют задачам

$$-u_n''(x) + U_n(x) = z_n u_n(x), \quad x \in (0, A), \quad (11)$$

$$u_n(0) = u_n'(0) = u_n(A) = 0, \quad (12)$$

где непрерывные функции $U_n(x) = -(\lambda_n - z_n)y_n(x) + f(y_n^2(x))y_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) образуют последовательность равномерно ограниченную на отрезке $x \in [0, A]$, поскольку ввиду теоремы 1(в) и оценки (6) имеем $|y_n(x)| \leq p$ для всех n и x . Умножая уравнение (11) на функцию $2(x+1)u_n'(x)$ и интегрируя получающееся тождество по отрезку $[0, A]$ с применением формулы интегрирования по частям, в силу (12) и неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$ получаем:

$$\begin{aligned} z_n \int_0^A u_n^2(x) dx &= -2 \int_0^A (x+1)u_n'(x)U_n(x) dx - \int_0^A [u_n'(x)]^2 dx + (A+1)[u_n'(A)]^2 \\ &\leq \int_0^A (x+1)^2 U_n^2(x) dx + (A+1)[u_n'(A)]^2 \\ &\leq C_3 + (A+1)[u_n'(A)]^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $C_3 > 0$ не зависит от номера $n = 0, 1, 2, \dots$.

Далее, поскольку для любого целого $n \geq 0$ функции $y_n(x)$ и $g_n(x)$ имеют одинаковое число корней в интервале $(0, A)$, знаки величин $y'_n(A)$ и $g'_n(A)$ совпадают. Кроме того, $[g'_n(A)]^2 = z_n p^2$. Используя эти свойства, а также оценку (10) и тождество (5), получаем, что существует $C_4 > 0$ такое, что

$$|u'_n(A)| \leq C_4 \quad (14)$$

для всех номеров $n = 0, 1, 2, \dots$. Из (13) и (14) следует, что существует $C_5 > 0$ такое, что

$$z_n \int_0^A u_n^2(x) dx \leq C_5$$

для всех номеров n . Тем самым лемма 4 доказана.

Справедливость условия Б теоремы Бари в пространстве L_2 для систем функций $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ вытекает из доказанной леммы 4. Поэтому система функций $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ является базисом Бари, а система функций $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ — базисом Рисса в пространстве L_2 , и теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
2. Жидков П. Е. О полноте систем собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра, и некоторой нелинейной задачи // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 7. С. 123–138.
3. Zhidkov P. E. Eigenfunction expansions associated with a nonlinear Schrödinger equation // Joint Inst. Nuclear Research Comm. E5-98-61. Dubna. 1998.
4. Бари Н. К. О базисах в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1946. Т. 54. № 5. С. 383–386.
5. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Ученые записки МГУ. Математика. 1951. Т. 148. № 4. С. 69–107.
6. Гутер Р. С., Уल्याнов П. Л. О новых результатах в теории ортогональных рядов // Дополнение в книге Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1958.
7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
8. Махмудов А. П. Основы нелинейного спектрального анализа. Баку: Изд-во Азербайджанского гос. ун-та им. С. М. Кирова, 1984.
9. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
10. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна
E-mail: zhidkov@thsun1.jinr.ru

Поступила в редакцию
03.11.1998 и 14.07.1999