Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Гладков, О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 3, 25–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 02:41:22

УДК 517.956

А. Л. Гладков

О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями

В работе рассматривается задача Коши с неотрицательной непрерывной начальной функцией для уравнения

$$u_t = \Delta u^m - u^p, \quad (x, t) \in S = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

где $0 < p < 1$, $p < m$. Для обобщенных решений этой задачи с растущими на бесконечности начальными данными получен ряд теорем об их поведении при $t \rightarrow \infty$.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

В статье рассматриваются неотрицательные решения задачи Коши для уравнения

$$u_t = \Delta u^m - u^p, \quad (x, t) \in S = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

где $0 < p < 1$, $p < m$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $u_0(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, которая может расти на бесконечности.

Уравнение (1.1) возникает как модельное во многих областях физики (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). В частности, оно описывает фильтрацию жидкости через однородную пористую среду, диффузию газа и распространение тепла в нелинейной среде. Присутствие младшего члена в уравнении указывает на наличие в среде поглощения. Как хорошо известно, задача (1.1), (1.2) может не иметь классического решения. Поэтому введем понятие обобщенного решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неотрицательная непрерывная в S функция $u(x, t)$ называется *обобщенным решением уравнения* (1.1) в S , если $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} \{u f_t + u^m \Delta f - u^p f\} dx dt - \int_{\mathbb{R}^N} u f \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx = 0 \quad (1.3)$$

для всех t_i таких, что $0 < t_1 < t_2$, и любой неотрицательной функции $f(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(S)$, имеющей компактный носитель в S .

При замене в (1.3) знака $=$ на знак $\geq$ ($\leq$) получаем определение *обобщенного субрешения* (*суперрешения*) *уравнения* (1.1) в S . Аналогично вводятся эти понятия в слое $S_T = \mathbb{R}^N \times (0, T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $u(x, t)$ назовем *обобщенным решением задачи Коши* (1.1), (1.2) в $S(S_T)$, если она является обобщенным решением уравнения (1.1) в $S(S_T)$, непрерывна в $\bar{S}(S_T \setminus \mathbb{R}^N \times \{T\})$ и выполнено условие (1.2).

В случае $m = 1$ результаты, аналогичные представленным в статье, получены в [2]. В настоящей работе анализируется эволюция решений задачи (1.1), (1.2). При этом используются многие идеи и методы работы [2]. Для удобства условимся в дальнейшем обозначать положительные и неотрицательные постоянные через M_i и α_i соответственно. Обозначим через $K(S_T)$ класс неотрицательных функций $v(x, t)$, для которых в S_T выполнено неравенство:

$$v(x, t) \leq M_1(\alpha_1 + |x|)^{2/(m-1)}.$$

Здесь постоянные M_1 и α_1 могут зависеть от функции $v(x, t)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m > 1$ и $u_0(x)$ при некоторых постоянных M_2 и α_2 удовлетворяет неравенству

$$u_0(x) \leq M_2(\alpha_2 + |x|)^{(2-\epsilon)/(m-1)}. \quad (1.4)$$

Если $\epsilon > 0$ в (1.4), то для любого значения $T > 0$ задача (1.1), (1.2) имеет обобщенное решение в S_T и $u(x, t) \in K(S_T)$. В случае $\epsilon = 0$ при достаточно малом значении $T > 0$ задача (1.1), (1.2) разрешима в слое S_T и $u(x, t) \in K(S_T)$. Обобщенное решение единственно в произвольном слое S_T в классе функций $K(S_T)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < m < 1$. Тогда для любой неотрицательной начальной функции $u_0(x)$ задача (1.1), (1.2) имеет единственное обобщенное решение в S .

Для одномерного случая теорема 1 доказана в [3]. В многомерном случае доказательство аналогичное. Теорема 2 доказывается так же, как, например, в [4]–[6]. Существование и единственность решения задачи (1.1), (1.2) с $m > 1$ и $p > 1$ установлены в [6]–[9].

Если специально не будет оговорено, то через $o(z(x))$ обозначаются в дальнейшем бесконечно малые при $|x| \rightarrow +\infty$ функции более высокого порядка, чем $z(x)$. Определим время “остывания” $T_E(x)$ обобщенного решения в точке $x \in \mathbb{R}^N$ следующим образом:

$$T_E(x) = \sup\{t > 0 : u(x, t) > 0\}.$$

Очевидно, что $T_E(x)$ может равняться бесконечности, но существуют случаи, когда время “остывания” конечно для всех $x \in \mathbb{R}^N$. Это происходит, например, если диффузия отсутствует в уравнении или достаточна мала по сравнению с поглощением. Баланс между диффузией и поглощением наблюдается в следующей ситуации:

$$\Delta u^m = u^p. \quad (1.5)$$

Как легко можно заметить, для любого значения $a \in \mathbb{R}^N$ уравнение (1.5) имеет точное решение

$$u(x, a) = c_N |x - a|^{2/(m-p)}, \quad c_N = \left\{ \frac{(m-p)^2}{2m[mN + p(2-N)]} \right\}^{1/(m-p)}. \quad (1.6)$$

Постоянная c_N в (1.6) является критической для “остывания” обобщенного решения во всех точках пространства $\mathbb{R}^N$. Более точно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. 1) *Предположим, что $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x) \leq A(|x|) + B|x - a|^{2/(m-p)} \quad (1.7)$$

для некоторого $a \in \mathbb{R}^N$, где $A(|x|) = o(|x|^{2/(m-p)})$ и

$$0 \leq B < c_N. \quad (1.8)$$

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^N$

$$T_E(y) \leq \frac{1}{1-p} \inf_{0 < \varepsilon < c_N - B} \frac{[M(R(\varepsilon))]^{1-p}}{[1 - ((B + \varepsilon)/c_N)^m]^{\frac{m-p}{m}}} \quad (1.9)$$

при $m > 1$ и

$$T_E(y) \leq \frac{1}{1-p} \inf_{0 < \varepsilon < c_N - B} \left\{ \frac{M(R(\varepsilon))}{1 - ((B + \varepsilon)/c_N)^{\frac{m-p}{1-p}}} \right\}^{1-p} \quad (1.10)$$

при $p < m < 1$. Здесь $M(R) = \max_{|x-a| \leq R} u_0(x)$, а $R(\varepsilon)$ — максимальный корень уравнения

$$(B + \varepsilon)(r - |y|)^{2/(m-p)} = M(r).$$

2) *Допустим теперь, что*

$$u_0(x) \geq d|x - a|^{2/(m-p)} \quad (1.11)$$

для некоторого $a \in \mathbb{R}^N$ и $d > c_N$, и пусть $u(x, t)$ — соответствующее обобщенное решение задачи (1.1), (1.2). Тогда существует положительная постоянная k такая, что

$$u(x, t) \geq k t^{1/(1-p)} \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^N \text{ и } t > 0. \quad (1.12)$$

Теорема 3 может рассматриваться как первый этап описания асимптотического поведения решений задачи (1.1), (1.2). Однако она не дает никакой информации в случае начальных значений с критическим ростом на бесконечности, в частности для

$$u_0(x) = [c_N|x|^{2/(m-p)} \pm 1]_+.$$

Здесь использовано обозначение $s_+ = \max\{s, 0\}$.

Естественными кандидатами на роли асимптотических состояний являются стационарные решения уравнения (1.1). В некоторых случаях стационарные решения могут быть точно выписаны. Например, для $N = 1$ и для некоторых действительных значений α и β функции

$$u_l(x; \alpha) = \begin{cases} c_1|x - \alpha|^{2/(m-p)}, & \text{если } x \leq \alpha, \\ 0, & \text{если } x > \alpha, \end{cases} \quad (1.13)$$

и

$$u_r(x; \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \beta, \\ c_1|x - \beta|^{2/(m-p)}, & \text{если } x > \beta, \end{cases} \quad (1.14)$$

являются решениями уравнения (1.1). Более того, если $\alpha \leq \beta$, то

$$u(x; \alpha, \beta) = u_l(x; \alpha) + u_r(x; \beta) \quad (1.15)$$

– также решение уравнения (1.1), причем имеющее на отрезке $[\alpha, \beta]$ “мертвую зону”. При $\alpha = \beta = a$ это решение совпадает с одномерным решением из (1.6). Однако существуют стационарные решения (1.1), которые не выписываются в явном виде. Такими являются, например, решения $u_b(r)$ следующей задачи:

$$\begin{aligned} (u_b^m)'' + \frac{N-1}{r}(u_b^m)' &= u_b^p \quad \text{при } r > 0, \quad N \geq 1, \\ u_b^m(0) &= b > 0, \quad (u_b^m)'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Перейдем теперь к описанию основных результатов. Для удобства начнем с одномерного случая.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что $u_0(x)$ – неотрицательная функция со свойствами, гарантирующими существование обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в S .*

а) Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + \nu|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}) & \text{при } x \leq 0, \\ c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + h(x) & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где ν – некоторое действительное число и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)|x|^{-\frac{2+p-m}{m-p}} = -\infty.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_l(x; \alpha) \quad \text{с} \quad \alpha = \frac{(m-p)\nu}{2c_1} \quad (1.17)$$

равномерно на компактах $\mathbb{R}$.

б) Предположим, что

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + h(x) & \text{при } x \leq 0, \\ c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + \mu|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}) & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где μ – некоторое действительное число и

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)|x|^{-\frac{2+p-m}{m-p}} = -\infty.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_r(x; \beta) \quad \text{с} \quad \beta = -\frac{(m-p)\mu}{2c_1} \quad (1.18)$$

равномерно на компактах $\mathbb{R}$.

с) Пусть

$$u_0(x) = c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + h(x), \quad (1.19)$$

где

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x)|x|^{-\frac{2+p-m}{m-p}} = -\infty.$$

Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ равномерно на компактах $\mathbb{R}$.

d) Если выполнено (1.19), где $h(x)|x|^{-\frac{2+p-m}{m-p}} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = +\infty$ равномерно на компактах $\mathbb{R}$.

e) Допустим, что

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + \nu|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}) & \text{при } x \leq 0, \\ c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + \mu|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}) & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Тогда появляются два случая:

e1) если $\nu + \mu \leq 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_l(x; \alpha) + u_r(x; \beta) \quad (1.21)$$

равномерно на компактах $\mathbb{R}$, где $\alpha = (m-p)\nu/(2c_1)$ и $\beta = -(m-p)\mu/(2c_1)$;

e2) если $\nu + \mu > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_b(x; a) \quad (1.22)$$

равномерно на компактах $\mathbb{R}$, где $u_b(x; a)$ – решение задачи (1.16) с $N = 1$, $r = |x - a|$, $a = (m-p)(\nu - \mu)/(4c_1)$, $b = [(\nu + \mu)t/(2c_1^{1-m}\theta_1)]^{\frac{2m}{m-p}}$; здесь θ_1 – положительная постоянная, зависящая только от p/m .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что условия п. d) теоремы могут выполняться и для функции $u_0(x)$, равной нулю на луче.

Если $N > 1$, стационарные решения имеют более богатую структуру, и поэтому мы ограничимся радиальным случаем. Тогда результаты похожи на те, которые получены в одномерном случае. Положим

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\beta_N - \left(\beta_N^2 - \frac{4(m-p)}{m} c_N^{p-m} \right)^{1/2} \right], \quad (1.23)$$

где $\beta_N = 4m/(m-p) + N - 2$, и обозначим через $u(r; R)$ решение $u_b(r)$ из (1.16) с $b = 0$ и “мертвой зоной” $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\}$. Легко проверить, что $\lambda < 2m/(m-p)$, $\lambda = 1$ при $N = 1$ и $\lambda > 1$ при $N > 1$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что $u_0(r)$ – неотрицательная радиально-симметричная функция со свойствами, гарантирующими существование обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в S . Тогда обобщенное решение (1.1) с начальным условием $u_0(r)$ радиально-симметрично и обладает следующими свойствами.

a) Допустим, что

$$u_0(r) = c_N r^{\frac{2}{m-p}} + h(r), \quad (1.24)$$

где

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r)r^{-(\frac{2}{m-p} - \lambda)} = -\infty. \quad (1.25)$$

Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, t) = 0$ равномерно на компактах $\mathbb{R}^N$.

b) Пусть выполнено (1.24), где

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r)r^{-(\frac{2}{m-p}-\lambda)} = +\infty. \quad (1.26)$$

Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, t) = +\infty$ равномерно на компактах $\mathbb{R}^N$.

с) Предположим, что

$$u_0(r) = c_N r^{\frac{2}{m-p}} + \nu r^{\frac{2}{m-p}-\lambda} + o(r^{\frac{2}{m-p}-\lambda}). \quad (1.27)$$

Тогда возникают два случая:

с1) если $\nu \leq 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, t) = u(r; R)$$

равномерно на компактах $\mathbb{R}^N$, где $R = [\nu|m/(c_N^{1-m}q_N)]^{1/\lambda}$ и q_N – положительная постоянная, зависящая только от p/m и N ;

с2) если $\nu > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, t) = u_b(r)$$

равномерно на компактах $\mathbb{R}^N$, где $u_b(r)$ – решение задачи (1.16), $b = [\nu m/(c_N^{1-m}\theta_N)]^{\frac{2m}{(m-p)\lambda}}$, а θ_N – положительная постоянная, зависящая только от p/m и N .

Заметим, что большое количество асимптотических результатов может быть получено для нерадиальных решений, если их начальные значения надлежащим образом оцениваются через соответствующие радиальные функции.

Как видно из следующего утверждения, у решений, сходящихся к функциям с “мертвыми зонами”, такие зоны возникают за конечное время.

ТЕОРЕМА 6. Пусть для некоторого $R > 0$ (может быть $R = \infty$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, t) = u(r; R)$$

равномерно на множестве B_R . Тогда для любого $d \in (0, R)$ существует положительная постоянная t_d такая, что $u(r, t) = 0$ для любого $0 \leq r \leq d$ при $t \geq t_d$.

Теорема сформулирована в многомерном случае. Для одномерной ситуации может быть доказано более общее утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, предположения теоремы 6 справедливы при выполнении условий пп. а), b), c) и e1) теоремы 4 и пп. а) и c1) теоремы 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как следует из работы [10], при $0 < m \leq p < 1$ уравнение (1.1) обладает бесконечной скоростью распространения возмущений, и, следовательно, обобщенное решение задачи Коши в этом случае может обращаться в нуль только во всем пространстве одновременно.

Результаты настоящей работы докладывались на конференциях “Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными” в Киеве в 1997 году и “Совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества” в Москве в 1998 году.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Формулируемая в настоящем параграфе теорема 7 доказывается так же, как это сделано для ее аналогов в работах [3], [5]–[7].

ТЕОРЕМА 7. Пусть $t > p$, $t \neq 1$ и $v(x, t)$, $u(x, t)$, $w(x, t)$ – соответственно обобщенные субрешение, решение и суперрешение в S уравнения (1.1), причем

$$v(x, 0) \leq u(x, 0) \leq w(x, 0).$$

В случае $t > 1$ дополнительно предположим, что функции $v(x, t)$, $u(x, t)$ и $w(x, t)$ принадлежат классу K . Тогда в S

$$v(x, t) \leq u(x, t) \leq w(x, t).$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о стационарных решениях уравнения (1.1). Следующие два утверждения доказаны в [2]. Пусть $u_b(x)$ – решение задачи (1.16) при $x \in \mathbb{R}$ и $b \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Предположим, что $N = 1$.

а) Пусть $b > 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1.16). Более того,

$$u_b^m(x) = c_1^m |x|^{\frac{2m}{m-p}} + \theta_1 b^{\frac{m-p}{2m}} |x|^{\frac{m+p}{m-p}} + o(|x|^{\frac{m+p}{m-p}}), \quad (2.1)$$

где постоянная c_1 определена в (1.6), а θ_1 – положительная постоянная, зависящая только от p/t .

б) Предположим, что $b = 0$. Тогда любое нетривиальное решение $u_b(x)$ является одной из перечисленных ниже функций:

$$\begin{aligned} &u_l(x; \alpha) \text{ для некоторого } \alpha, \quad u_r(x; \beta) \text{ для некоторого } \beta \quad \text{или} \\ &u_l(x; \alpha) + u_r(x; \beta) \text{ для некоторых } \alpha \text{ и } \beta \text{ таких, что } \alpha \leq \beta. \end{aligned}$$

Функции $u_l(x; \alpha)$ и $u_r(x; \beta)$ определены в (1.13) и (1.14).

Пусть теперь $u_b(r)$ – решение задачи (1.16) с $N > 1$ и $b \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что $N > 1$.

а) Пусть $b > 0$. Тогда существует единственное решение $u_b(r)$ задачи (1.16), определенное для любого $r > 0$. Более того,

$$u_b^m(r) = c_N^m r^{\frac{2m}{m-p}} + \theta_N b^{\frac{m-p}{2m}} \lambda r^{\frac{2m}{m-p} - \lambda} + o(r^{\frac{2m}{m-p} - \lambda}), \quad (2.2)$$

где c_N определена в (1.6), θ_N – положительная постоянная, зависящая только от p/t и N , λ – постоянная из (1.23).

б) Пусть $b = 0$. Тогда для любого $R \geq 0$ существует единственное решение $u(r; R)$ задачи (1.16) такое, что $u(r; R) = 0$ при $r \leq R$ и $u(r; R) > 0$ при $r > R$. Более того,

$$u^m(r; R) = c_N^m r^{\frac{2m}{m-p}} - q_N R^\lambda r^{\frac{2m}{m-p} - \lambda} + o(r^{\frac{2m}{m-p} - \lambda}) \quad (2.3)$$

для некоторой положительной постоянной q_N , зависящей только от N и p/t .

Все нетривиальные решения задачи (1.16) принадлежат одному из двух перечисленных выше типов.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что не существует различных стационарных решений u и v уравнения (1.1) из предложений 1 и 2 таких, чтобы разность $u^m - v^m$ была ограниченной функцией.

ЛЕММА 1. Для любого $R \geq 0$ справедливо следующее неравенство:

$$u(r; R) \geq c_N (r - R)_+^{\frac{2}{m-p}}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, при $R = 0$ неравенство в (2.4) превращается в равенство. Пусть $R > 0$. Как следует из предложения 2, функция $v(r) = u^m(r; R)$ является единственным положительным при $r > R$ решением задачи

$$Lv \equiv v'' + \frac{N-1}{r} v' - v^{p/m} = 0, \quad r > R, \quad (2.5)$$

$$v(R) = 0, \quad v'(R) = 0. \quad (2.6)$$

Покажем, что $v'(r) > 0$ при $r > R$. Допустим, что существует значение $r_0 > R$, для которого $v'(r_0) = 0$. Тогда так как $v(r) > 0$ при $r > R$, то $v''(r_0) > 0$. Следовательно, r_0 — точка минимума $v(r)$. Но тогда найдется значение $r_1 \in (R, r_0)$, при котором функция $v(r)$ имеет максимум. Из уравнения (2.5) находим, что $v''(r_1) > 0$, и возникает противоречие. Определим для любого $\varepsilon > 0$ функцию $h(r) = c_N^m (r - R - \varepsilon)_+^{2m/(m-p)}$ и сравним ее при $r \geq R$ с $v(r)$. Несложно проверить, что $Lh < 0$ при $r > R + \varepsilon$. Вследствие доказанных свойств функции $v(r)$ для некоторого $R_0 > R + \varepsilon$ $v' > h'$ и $v > h$ при $r \in (R + \varepsilon, R_0)$. Предположим, что найдется такое значение $R_1 > R + \varepsilon$, что $v'(R_1) = h'(R_1)$ и $v'(r) > h'(r)$ для $r \in (R + \varepsilon, R_1)$. Легко видеть, что $v > h$ при $r \in (R + \varepsilon, R_1]$. Тогда в точке $r = R_1$

$$(v - h)'' > v^{p/m} - h^{p/m} > 0,$$

что противоречит условию $v'(R_1) = h'(R_1)$. Следовательно, $v(r) > h(r)$ при $r > R$. В силу произвольности ε отсюда вытекает (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что радиально-симметричные стационарные решения уравнения (1.1) являются неубывающими функциями переменной r .

§ 3. Доказательство теоремы 3

Начнем с доказательства п. 1). Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$. Зафиксируем произвольное значение $y \in \mathbb{R}^N$ и покажем, что в предположениях (1.7), (1.8) существует такое значение $T_E(y)$, что $u(y, t) = 0$ при $t \geq T_E(y)$.

Рассмотрим сначала случай $m > 1$. Выберем числа ε и ε_1 так, чтобы выполнялись соотношения

$$0 < \varepsilon < c_N - B, \quad \varepsilon_1 = 1 - \left(\frac{B + \varepsilon}{c_N} \right)^m, \quad (3.1)$$

где постоянные c_N и B удовлетворяют (1.6), (1.8). Определим вспомогательную функцию $w(x, t)$ равенством

$$w(x, t) = \{\varepsilon_1 g^m(t) + (1 - \varepsilon_1) u^m(r; |y|)\}^{1/m}, \quad (3.2)$$

где $g(t) = (K - \varepsilon_1^{(m-1)/m}(1-p)t)_+^{1/(1-p)}$, $u(r, |y|)$ – решение задачи (1.16), положительное при $r > |y|$ и равное нулю при $r \leq |y|$, K – положительная постоянная, которая будет определена ниже. Используя свойство выпуклости функции $z(s) = s^{p/m}$, получаем

$$w^p \geq \varepsilon_1 g^p(t) + (1 - \varepsilon_1) u^p(r; |y|). \quad (3.3)$$

Отсюда и из определения функции $w(x, t)$ находим, что

$$w_t - \Delta w^m + w^p \geq 0. \quad (3.4)$$

Займемся теперь выбором значения K , при котором бы выполнялось неравенство

$$u_0(x) \leq w(x, 0). \quad (3.5)$$

В силу (3.1) и (2.4)

$$(B + \varepsilon)(r - |y|)_+^{2/(m-p)} \leq \frac{B + \varepsilon}{c_N} u(r; |y|) = (1 - \varepsilon_1)^{1/m} u(r; |y|). \quad (3.6)$$

Вследствие (1.7) значение $R = R(\varepsilon)$ из формулировки теоремы корректно определено. Из (3.2) и (3.6) находим, что (3.5) выполнено при $|x| \geq R$. Для того чтобы (3.5) было справедливо и при $|x| < R$, достаточно выполнения равенства

$$\varepsilon_1^{1/m} g(0) = M(R). \quad (3.7)$$

Отсюда $K = [M(R)\varepsilon_1^{-1/m}]^{1-p}$. По теореме 7 из (3.4), (3.5) выводим оценку

$$u(x, t) \leq w(x, t). \quad (3.8)$$

Но в силу (3.2) $w(y, t) = 0$ при $t \geq T(y) = K/[(1-p)\varepsilon_1^{(m-1)/m}]$. Подставляя сюда значение для K из (3.7) и ε_1 из (3.1), получаем

$$T(y) = \frac{1}{1-p} \frac{[M(R(\varepsilon))]^{1-p}}{[1 - ((B + \varepsilon)/c_N)^m]^{\frac{m-p}{m}}},$$

откуда следует оценка (1.9).

Доказательство в случае $p < m < 1$ проводится аналогичным образом. Укажем лишь на те изменения, которые необходимо внести в доказательство. В (3.1) ε_1 следует определить формулой

$$\varepsilon_1 = 1 - \left(\frac{B + \varepsilon}{c_N} \right)^{\frac{m-p}{1-p}},$$

а в (3.2) вместо $w(x, t)$ рассмотреть вспомогательную функцию

$$z(x, t) = \varepsilon_1 g_1(t) + (1 - \varepsilon_1)^{\frac{1-p}{m-p}} u(r; |y|),$$

где $g_1(t) = (K - (1-p)t)_+^{\frac{1}{1-p}}$. Правая часть оценки (3.6) заменится на выражение $(1 - \varepsilon_1)^{\frac{1-p}{m-p}} u(r; |y|)$, а (3.7) на соотношение $\varepsilon_1 g_1(0) = M(R)$.

Установим теперь справедливость п. 2) теоремы 3. Как и при доказательстве первой части теоремы, будем считать, что $a = 0$. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2) с

$$u_0(x) = \psi_c(x) = c|x|^{\frac{2}{m-p}}. \quad (3.9)$$

Как легко видеть из теорем 1 и 2, эта задача имеет единственное радиально-симметричное решение $u_c(x, t)$. Положим $\alpha = 1/(1-p)$, $\beta = \frac{1}{2}(m-p)/(1-p)$.

ЛЕММА 2. *Задача (1.1), (3.9) при $c > c_N$ имеет автомодельное решение*

$$u_c(x, t) = t^\alpha f_c(\eta), \quad (3.10)$$

где $\eta = |x|t^{-\beta}$, а функция $f_c(\eta)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} (f^m)'' + \frac{N-1}{\eta} (f^m)' + \beta \eta f' - \alpha f - f^p &= 0, & \eta > 0, \\ f^m(0) = A \geq 0, & (f^m)'(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

и удовлетворяет соотношениям

$$f_c(\eta) > 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{f_c(\eta)}{\eta^{\frac{2}{m-p}}} = c. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функция $u_c(x, t)$ является автомодельным решением уравнения (1.1). Преобразование $u \rightarrow P_k u$, определенное при $k > 0$ по формуле

$$(P_k u)(x, t) = k^{-\frac{2}{m-p}} u(kx, k^{\frac{2(1-p)}{m-p}} t),$$

переводит решения уравнения (1.1) снова в решения уравнения (1.1). Заметим также, что $\psi_c(x)$ инвариантна относительно этого преобразования:

$$k^{-\frac{2}{m-p}} \psi_c(kx) = \psi_c(x). \quad (3.13)$$

В силу равенства (3.13) и единственности решения задачи (1.1), (3.9) получаем, что $P_k u_c = u_c$ или

$$u_c(x, t) = k^{-\frac{2}{m-p}} u_c(kx, k^{\frac{2(1-p)}{m-p}} t).$$

Положим здесь $t = 1$, $k^{\frac{2(1-p)}{m-p}} = s$ и $kx = y$. Тогда

$$u_c(s^{-\frac{m-p}{2(1-p)}} y, 1) = s^{-\frac{1}{1-p}} u_c(y, s).$$

Заменяя y и s на x и t соответственно и умножая затем равенство на $t^{\frac{1}{1-p}}$, получаем

$$u_c(x, t) = t^{\frac{1}{1-p}} \varphi_c(\xi), \quad (3.14)$$

где $\xi = xt^{-\frac{m-p}{2(1-p)}}$, $\varphi_c(\xi) = u_c(\xi, 1)$. По теореме 7 при $c > c_N$ $u_c(x, t) \geq u_{c_N}(x, t)$. Отсюда, учитывая, что $\varphi_{c_N} = c_N |\xi|^{\frac{2}{m-p}}$, находим

$$\varphi_c(\xi) \geq c_N |\xi|^{\frac{2}{m-p}}.$$

В частности, $\varphi_c(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. В тех точках ξ , где $\varphi(\xi) > 0$, функция $u_c(x, t)$, как известно, удовлетворяет уравнению в обычном смысле. Подставляя функцию из (3.14) в (1.1) и учитывая радиальную симметричность $u_c(x, t)$, получаем для $f_c(\eta) = \varphi_c(\xi)$, $\eta = |\xi|$ задачу (3.11). Очевидно, $f_c(\eta) > 0$ при $\eta > 0$. Так как для любого $x \in \mathbb{R}^N$ выполняется начальное условие

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_c(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{1-p}} f_c(\eta) = c|x|^{\frac{2}{m-p}},$$

то справедливо второе соотношение в (3.12).

ЛЕММА 3. При $c > c_N$ функция $f_c(\eta)$ является решением задачи (3.11) с $A > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $m + p < 2$. Покажем, что $u_c(0, t) > 0$ при достаточно малых положительных значениях t . Это можно сделать, сравнивая $u_c(x, t)$ с функцией $w(x, t) = d_1(|x| + \gamma t)^{\frac{2}{m-p}}$ в цилиндре $Q_\delta = \{(x, t) : |x| \leq \delta, 0 \leq t \leq t_\delta\}$. Здесь $c_N < d_1 < c$. При достаточно малых положительных значениях γ, δ и t_δ функция $w(x, t)$ является обобщенным субрешением уравнения (1.1) и на параболической границе Q_δ выполняется неравенство $u_c(x, t) \geq w(x, t)$. По теореме сравнения это неравенство справедливо во всем Q_δ . Следовательно, при $0 < t \leq t_\delta$ $u_c(0, t) \geq w(0, t) > 0$. В силу представления (3.10) $f_c(0) > 0$.

Осталось доказать утверждение леммы для случая $m + p \geq 2$. Для удобства сделаем в (3.11) замену $v = f_c^m$. Тогда функция $v(\eta)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} Lv \equiv v'' + \frac{N-1}{\eta} v' + \beta \eta (v^{1/m})' - \alpha v^{1/m} - v^{p/m} &= 0, \quad \eta > 0, \\ v(0) &= A, \quad v'(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Аналогично тому, как это сделано в [11], доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $L(h) > L(v)$ при $\eta > 0$ и $h(0) \geq v(0)$, $h'(0) > v'(0)$. Тогда $h(\eta) > v(\eta)$ при $\eta > 0$.

Предположим, что в (3.15) $A = 0$, и получим противоречие. Для этого сравним с помощью предложения 3 функции $v(\eta)$ и $h(\eta) = c^m(\eta + \varepsilon)^{\frac{2m}{m-p}}$, где $c > c_N$, а постоянная $\varepsilon > 0$ будет выбрана ниже. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $h(0) > 0$, $h'(0) > 0$ и $Lh > 0$ при

$$0 < \varepsilon < \left\{ \frac{1}{\alpha c} c_N^p \left[\left(\frac{c}{c_N} \right)^m - \left(\frac{c}{c_N} \right)^p \right] \right\}^{\frac{m-p}{2(1-p)}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, любое решение задачи (3.15) с $A = 0$ удовлетворяет неравенству

$$v(\eta) \leq c^m(\eta + \varepsilon)^{\frac{2m}{m-p}},$$

где c — произвольная постоянная, большая, чем c_N , а ε удовлетворяет (3.16). Отсюда приходим к оценке

$$f_c(\eta) \leq c_N \eta^{\frac{2}{m-p}},$$

которая противоречит (3.12). Легко доказывается

ЛЕММА 4. Пусть в (3.11) $A > 0$. Тогда решение $f_c(\eta)$ этой задачи удовлетворяет неравенствам

$$f_c(\eta) > A, \quad f'_c(\eta) > 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0. \quad (3.17)$$

Теперь несложно завершить доказательство п. 2). Действительно, сравним функции $u(x, t)$ и $u_c(x, t)$ с $c = d > c_N$. В силу (1.11) и теоремы 7

$$u(x, t) \geq u_c(x, t). \quad (3.18)$$

Вследствие (3.10) и лемм 3 и 4

$$u_c(x, t) \geq A^{1/m} t^\alpha \quad (3.19)$$

с $A > 0$. Из (3.18), (3.19) получаем искомое неравенство (1.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Покажем, что теорема 3 является в определенном смысле точной. Прежде всего, легко видеть, что правые части в неравенствах (1.9) и (1.10) совпадают при $m = 1$. Далее, пусть $u_0(x) \equiv M > 0$. Тогда $M(R) = M$, а в (1.7) можно положить $B = 0$. Из (1.9) и (1.10) вытекает оценка $T_E(y) \leq M^{1-p}/(1-p)$, которая согласуется с точным пространственно-однородным решением задачи Коши $u(x, t) = [M^{1-p} - (1-p)t]^{\frac{1}{1-p}}$.

Рассмотрим теперь задачу Коши (1.1), (3.9) с $c < c_N$. Решение $u_c(x, t)$ этой задачи находится по формуле (3.10). Из сравнения $u_c(x, t)$ с $u_{c_N}(x, t)$ следует, что в (3.11) $A = 0$. Далее, из первой части теоремы 3 вытекает, что $f_c(\eta) = 0$ при положительных значениях $\eta_2 = \eta_2(c)$ и ε . Нетрудно установить, что $f_c(\eta) > 0$ при $\eta > \eta_2$. Таким образом, из (3.10) для любого $y \in \mathbb{R}^N$

$$T_E(y) = \left[\frac{|y|}{\eta_2} \right]^{\frac{2(1-p)}{m-p}}. \quad (3.20)$$

Определим теперь $T_E(y)$ из теоремы 3. Используя определение $R(\varepsilon)$ с $B = c$, находим

$$R(\varepsilon) = \frac{|y|}{1 - (c/(c + \varepsilon))^{\frac{m-p}{2}}}.$$

Подставляя теперь найденное значение $R(\varepsilon)$ в правые части оценок (1.9) и (1.10), приходим к неравенству

$$T_E(y) \leq d_2 |y|^{\frac{2(1-p)}{m-p}}, \quad (3.21)$$

где положительная постоянная d_2 зависит от m, p, N и c . Очевидно, оценка (3.21) согласуется с найденным в (3.20) значением времени “остывания” обобщенного решения задачи (1.1), (3.9).

Если рассмотреть обобщенное решение задачи (1.1), (3.9) с $c > c_N$, то, как видно из (3.10), (3.11), $u_c(0, t) = A^{1/m} t^\alpha$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_c(x, t)}{t^\alpha} = A^{1/m} > 0 \quad (3.22)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^N$. Соотношение (3.22) показывает точность (1.12) и подтверждает независимость k от x .

§ 4. Доказательство основных результатов

Пусть $u_s(r)$ – радиально-симметричное стационарное решение уравнения (1.1). Обозначим соответственно через $\bar{u}(r, t)$ и $\underline{u}(r, t)$ обобщенные решения задач Коши с начальными условиями

$$\bar{u}(r, 0) = (u_s^m(r) + M)^{1/m}, \quad \underline{u}(r, 0) = (u_s^m(r) - M)_+^{1/m}. \quad (4.1)$$

где M – некоторая положительная постоянная. Докажем асимптотическую устойчивость стационарных решений относительно возмущений начальной функции вида (4.1).

ЛЕММА 5. *Справедливы соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(r, t) = u_s(r), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{u}(r, t) = u_s(r) \quad (4.2)$$

равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{R}^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала первое равенство в (4.2). Для этого установим монотонность функции $\bar{u}(r, t)$ по переменной t . Несложно проверить, что $u_s(r)$ и $u_M(r) = [u_s^m(r) + M]^{1/m}$ являются соответственно решением и супер-решением уравнения (1.1), причем

$$u_s(r) < \bar{u}(r, 0) = u_M(r).$$

По теореме 7 получаем

$$u_s(r) \leq \bar{u}(r, t) \leq u_M(r). \quad (4.3)$$

В частности, $\bar{u}(r, t) \leq \bar{u}(r, 0)$. Очевидно, функция $\bar{u}(r, t + h)$ для любого положительного значения h является обобщенным решением (1.1) и $\bar{u}(r, h) \leq \bar{u}(r, 0)$.

Применяя опять теорему 7, находим $\bar{u}(r, t+h) \leq \bar{u}(r, t)$, что доказывает монотонное невозрастание $\bar{u}(r, t)$ по переменной t . Отсюда с использованием (4.3) делаем вывод, что существует локально ограниченная функция $\varphi(r)$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(r, t) = \varphi(r), \quad (4.4)$$

$$u_s(r) \leq \varphi(r) \leq [u_s^m(r) + M]^{1/m}. \quad (4.5)$$

Для любого $a \geq 0$ определим функцию $w_a(r, t)$ равенством $w_a(r, t) = \bar{u}(r, t+a)$. Легко проверить, что $w_a(r, t)$ является обобщенным решением уравнения (1.1) и удовлетворяет начальному условию $w_a(r, 0) = \bar{u}(r, a)$. С другой стороны, однопараметрическое семейство функций $\{w_a(r, t)\}$ монотонно не возрастает по a . Поэтому функция $\theta(r, t)$ корректно определена равенством

$$\theta(r, t) = \lim_{a \rightarrow \infty} w_a(r, t). \quad (4.6)$$

С помощью стандартных рассуждений проверяем, что $\theta(r, t)$ – обобщенное решение уравнения (1.1). В силу (4.4), (4.6) $\varphi(r) = \theta(r, t)$ и, следовательно, $\varphi(r)$ – обобщенное стационарное решение (1.1), удовлетворяющее (4.5). Как отмечено в замечании 4, не существует двух различных радиально-симметричных стационарных решений $h(r)$ и $g(r)$ уравнения (1.1), для которых разность $h^m(r) - g^m(r)$ была бы ограниченной функцией. Значит, $\varphi(r) = u_s(r)$ и мы имеем поточечную сходимость $\bar{u}(r, t)$ к $u_s(r)$ при $t \rightarrow \infty$. Докажем теперь равномерность этой сходимости на любом ограниченном множестве $\mathbb{R}^N$. Пусть $\{t_n\}$ – произвольная монотонно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $\bar{u}_n(r) = \bar{u}(r, t_n)$ и рассмотрим последовательность $\{\bar{u}_n(r)\}$ в произвольном шаре B_R . Очевидно, $\bar{u}_{n+1}(r) \leq \bar{u}_n(r)$ для всех $n \geq 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n(r) = u_s(r)$. Но отсюда согласно признаку Дини равномерной сходимости функциональных последовательностей сходимость $\bar{u}_n(r)$ к $u_s(r)$ равномерная в B_R . В силу монотонности $\bar{u}(r, t)$ по t и сходимости $\bar{u}(r, t)$ к $u_s(r)$ равномерная в B_R .

Второе равенство в (4.2) доказывается аналогично. Отметим, что при доказательстве соответствующего (4.3) неравенства

$$[u_s^m(r) - M]_+^{1/m} \leq \underline{u}(r, t) \leq u_s(r)$$

используется тот факт, что функции $[u_s^m(r) - M]_+^{1/m}$ и $\underline{u}(r, t)$ являются соответственно суб- и суперрешениями первой краевой задачи в $Q_{r_0} = (\mathbb{R}^N \setminus B_{r_0}) \times \mathbb{R}_+$ для уравнения (1.1) с условиями

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= [u_s^m(r) - M]_+^{1/m}, & r \geq r_0, \\ u(r_0, t) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь через r_0 обозначен корень уравнения $u_s^m(r) = M$. В случае, если это уравнение не имеет корней, сравнивать функции следует во всем пространстве S .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В одномерном случае аналогичное лемме 5 утверждение об асимптотической устойчивости всех стационарных решений доказывается таким же образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. а) Из определения (1.13) функции $u_l(x; \alpha)$ при $x < \min(0, \alpha)$ находим, что

$$\begin{aligned} u_l(x; \alpha) &= c_1 |x - \alpha|^{\frac{2}{m-p}} = c_1 |x|^{\frac{2}{m-p}} \left(1 + \frac{\alpha}{|x|}\right)^{\frac{2}{m-p}} \\ &= c_1 |x|^{\frac{2}{m-p}} \left(1 + \frac{2}{m-p} \frac{\alpha}{|x|} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \\ &= c_1 |x|^{\frac{2}{m-p}} + \nu |x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

В силу предположений относительно $u_0(x)$ имеем

$$[u_l^m(x, \alpha - \varepsilon) - M]_+^{1/m} \leq u_0(x) \leq \left\{ \left[u_l(x, \alpha + \varepsilon) + u_r\left(x, \alpha + \frac{1}{\varepsilon}\right) \right]^m + M \right\}^{1/m}$$

при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ и достаточно большом значении M . С помощью теоремы 7 и замечания 7 отсюда выводим, что

$$u_l(x, \alpha - \varepsilon) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \leq u_l(x, \alpha + \varepsilon) + u_r\left(x, \alpha + \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Устремляя здесь ε к нулю, получаем (1.17).

Таким же образом устанавливается справедливость п. б).

с) Используя условия теоремы, равенство (4.7) и аналогичное выражение для $u_r(x; \beta)$, получаем, что для любых значений α и β ($\alpha < \beta$) при подходящем выборе постоянной M выполнено неравенство

$$u_0(x) \leq \{[u_l(x; \alpha) + u_r(x; \beta)]^m + M\}^{1/m}.$$

Отсюда и из теоремы 7 и замечания 7 следует оценка

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \leq u_l(x; \alpha) + u_r(x; \beta).$$

Вследствие произвольности $[\alpha, \beta]$ из этого неравенства вытекает искомое соотношение.

д) Предположим, например, что для функции $h(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) |x|^{-\frac{2+p-m}{m-p}} = +\infty.$$

Тогда для любого значения $\sigma > 0$ можно построить такую функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 |x|^{\frac{2}{m-p}} + y(x) & \text{при } x \leq 0, \\ c_1 |x|^{\frac{2}{m-p}} + \sigma |x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}) & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

что $u_0(x) \geq \varphi(x)$. Здесь $y(x)$ — некоторая функция, для которой

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)|x|^{-\frac{2+p-m}{m-p}} = -\infty.$$

Согласно п. б) решение $u_\varphi(x, t)$ задачи Коши (1.1), (1.2) с начальным условием $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_\varphi(x, t) = u_r(x; \beta),$$

где $\beta = -(m-p)\sigma/(2c_1)$. С другой стороны, по теореме 7 $u(x, t) \geq u_\varphi(x, t)$. Таким образом,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \geq u_r(x; \beta).$$

В силу того что $\beta \rightarrow -\infty$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, отсюда вытекает необходимый результат.

е) Пусть $\nu + \mu < 0$. Заметим, что при $\alpha < \beta$

$$u_l(x; \alpha) + u_r(x; \beta) = \begin{cases} c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} + \frac{2\alpha c_1}{m-p}|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}) & \text{при } x \leq 0, \\ c_1|x|^{\frac{2}{m-p}} - \frac{2\beta c_1}{m-p}|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x|^{\frac{2+p-m}{m-p}}) & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Если положить

$$\frac{2\alpha c_1}{m-p} = \nu, \quad -\frac{2\beta c_1}{m-p} = \mu,$$

то условие $\alpha < \beta$ равносильно неравенству $\nu + \mu < 0$ и правая часть (1.20) совпадает с правой частью (4.8). Следовательно, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и подходящего значения M

$$\begin{aligned} \{[u_l(x, \alpha - \varepsilon) + u_r(x, \beta + \varepsilon)]^m - M\}_+^{1/m} &\leq u_0(x) \\ &\leq \{[u_l(x, \alpha + \varepsilon) + u_r(x, \beta - \varepsilon)]^m + M\}^{1/m}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее, используя теорему 7 и замечание 7, получаем (1.21). В случае $\mu + \nu = 0$ справедливы неравенства (4.9), где $\alpha = \beta = x_0$ и правая часть заменена на выражение $\{u_\varepsilon^m(x; x_0) + M\}^{1/m}$. Как и раньше, эти оценки приводят к искомому результату.

Пусть теперь $\mu + \nu > 0$. Из предложения 1 находим, что

$$u_b(x; a) = c_1|x-a|^{\frac{2}{m-p}} + \frac{1}{m}\theta_1 b^{\frac{m-p}{2}}c_1^{1-m}|x-a|^{\frac{2+p-m}{m-p}} + o(|x-a|^{\frac{2+p-m}{m-p}}).$$

Отсюда следует, что для $u_b(x; a)$ выполнено (1.20) с

$$\nu = \frac{1}{m}\theta_1 b^{\frac{m-p}{2}}c_1^{1-m} + \frac{2ac_1}{m-p}, \quad \mu = \frac{1}{m}\theta_1 b^{\frac{m-p}{2}}c_1^{1-m} - \frac{2ac_1}{m-p},$$

откуда

$$b = \left\{ \frac{m(\nu + \mu)}{2\theta_1 c_1^{1-m}} \right\}^{\frac{2}{m-p}}, \quad a = \frac{(m-p)(\nu - \mu)}{4c_1}.$$

Таким образом, для любого достаточно малого значения $\varepsilon > 0$ существует такая положительная постоянная M , что справедливы неравенства

$$\{u_{b-\varepsilon}^m(x; a) - M\}_+^{1/m} \leq u_0(x) \leq \{u_{b+\varepsilon}^m(x; a) + M\}^{1/m}.$$

Далее с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, доказываем (1.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. То, что решение, соответствующее радиально-симметричным начальным условиям, является также радиально-симметричным, следует из теоремы существования и единственности. Из предложения 2 выводим, что при $b > 0$ для решения $u_b(r)$ задачи (1.16) справедливо представление

$$u_b(r) = c_N r^{\frac{2}{m-p}} + \frac{1}{m} \theta_N b^{\frac{m-p}{2}\lambda} c_N^{1-m} r^{\frac{2}{m-p}-\lambda} + o(r^{\frac{2}{m-p}-\lambda}).$$

При $b = 0$ для решения $u(r; R)$ выполнено соотношение

$$u(r; R) = c_N r^{\frac{2}{m-p}} - \frac{1}{m} q_N R^\lambda c_N^{1-m} r^{\frac{2}{m-p}-\lambda} + o(r^{\frac{2}{m-p}-\lambda}).$$

Дальнейшее доказательство аналогично приведенному в теореме 4, и поэтому укажем лишь на то, с какими функциями следует сравнивать начальное условие, чтобы получить требуемый результат. Если выполнены условия (1.24), (1.25) теоремы, то для любого $R > 0$ существует такая положительная постоянная M , что

$$0 \leq u_0(r) \leq [u^m(r; R) + M]^{1/m}.$$

В случае справедливости (1.24), (1.26) при произвольном $b > 0$ и подходящем значении M

$$[u_b^m(r) - M]_+^{1/m} \leq u_0(r).$$

Наконец, пусть выполнено (1.27). Тогда при $\nu > 0$ положим $\frac{1}{m} \theta_N c_N^{1-m} b^{\frac{m-p}{2}\lambda} = \nu$, откуда $b = [\nu m / (\theta_N c_N^{1-m})]^{\frac{2}{(m-p)\lambda}}$. При достаточно малом значении $\varepsilon > 0$ и подходящем выборе M

$$[u_{b-\varepsilon}^m(r) - M]_+^{1/m} \leq u_0(r) \leq [u_{b+\varepsilon}^m(r) + M]^{1/m}. \quad (4.10)$$

В случае $\nu = 0$ вместо (4.10) имеют место неравенства

$$[u^m(r; \varepsilon) - M]_+^{1/m} \leq u_0(r) \leq [u_\varepsilon^m(r) + M]^{1/m}.$$

При $\nu < 0$ положим $-\frac{1}{m} q_N R^\lambda c_N^{1-m} = \nu$, откуда $R = \{|\nu| m / (c_N^{1-m} q_N)\}^{1/\lambda}$. Выбирая теперь ε и $1/M$ положительными и достаточно малыми, получаем соотношения

$$[u^m(r; R - \varepsilon) - M]_+^{1/m} \leq u_0(r) \leq [u^m(r; R + \varepsilon) + M]^{1/m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть x_0 — произвольная точка шара B_d и δ — произвольное положительное число, меньшее $R - d$. Тогда, очевидно, $B_{d+\delta} \subset B_R$. Так как $u(r, t)$ сходится к $u(r; R)$ равномерно на множестве B_R , то существует такое значение $t_0 > 0$, что $u(x, t) \leq \varepsilon^{\frac{\gamma}{m}} c_N \delta^{\frac{2}{m-p}}$ для $(x, t) \in Q = B_{d+\delta} \times [t_0, \infty)$, где $\gamma = (m - p)/(1 - p)$, а ε — единственный положительный корень уравнения $s^\gamma = 1 - s$. Далее отдельно рассмотрим два случая $p < m < 1$ и $m > 1$. Пусть сначала $m > 1$. Введем вспомогательную функцию

$$w_1(x, t) = \varepsilon^{\frac{\gamma}{m}} \{ [k_0 - (1 - p)(t - t_0)]_+^{\frac{m}{1-p}} + c_N^m |x - x_0|^{\frac{2m}{m-p}} \}^{\frac{1}{m}}.$$

Здесь $k_0 = [c_N \delta^{\frac{2}{m-p}}]^{1-p}$. Несложно проверить, что $w_1(x, t) \geq u(x, t)$ на параболической границе Q и для $w_1(x, t)$ выполнено неравенство (3.4). По теореме сравнения $u(x, t) \leq w_1(x, t)$ в Q . Следовательно, $u(x_0, t) = 0$ при $t \geq t_0 + k_0/(1-p)$ в любой точке $x_0 \in B_d$. В случае $p < m < 1$ доказательство проводится аналогичным образом, только вместо $w_1(x, t)$ следует рассмотреть

$$w_2(x, t) = \varepsilon \left\{ [k_0 - (1-p)(t - t_0)]_+^{\frac{1}{1-p}} + c_N |x - x_0|^{\frac{2}{m-p}} \right\}.$$

Автор благодарен рецензенту за замечания, способствовавшие устранению неточностей и улучшению содержания работы.

Список литературы

1. Калашиников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. 1987. Т. 42. № 1. С. 135–176.
2. Herrero M. A., Velazquez J. J. L. On the dynamics of a semilinear heat equation with strong absorption // Comm. Partial Differential Equations. 1989. V. 14. № 12. P. 1653–1715.
3. Калашиников А. С. О квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях с сингулярными младшими членами и растущими начальными данными // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 999–1009.
4. Herrero M. A., Pierre M. The Cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 291. № 1. P. 145–158.
5. Гладков А. Л. О неограниченных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с сильной конвекцией на бесконечности // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 10. С. 73–86.
6. Kamin S., Peletier L. A., Vazquez J. L. A nonlinear diffusion-absorption equation with unbounded initial data. Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states. Proc. 3rd Conf., Gregynog/UK, 1989 // Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 1992. V. 7. P. 243–263.
7. McLeod J. B., Peletier L. A., Vazquez J. L. Solutions of a nonlinear ODE appearing in the theory of diffusion and absorption // Differential and Integral Equations. 1991. V. 4. № 1. P. 1–14.
8. Гладков А. Л. Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 47–64.
9. Vazquez J. L., Walias M. Existence and uniqueness of solutions of diffusion-absorption equations with general data // Differential and Integral Equations. 1994. V. 7. № 1. P. 15–36.
10. Gilding B. H., Kersner R. The characterization of reaction-convection-diffusion processes by travelling waves // J. Differential Equations. 1996. V. 124. № 1. P. 27–79.
11. Гладков А. Л. О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 35–56.

Витебский государственный университет,
г. Витебск, Беларусь
E-mail: gladkov@vgpi.belpak.vitebsk.by

Поступила в редакцию
26.01.1998 и 18.03.1999