Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Примеры явного вычисления индуктивного предела семейства алгебр Ли, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 3, 53–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:25:51

УДК 515.16+517.9

Р. С. Исмагилов

Примеры явного вычисления индуктивного предела семейства алгебр Ли

В работе рассматриваются индуктивные пределы некоторых семейств алгебр Ли. Речь идет об алгебрах векторных полей на многообразии, сохраняющих форму объема либо симплектическую форму и сосредоточенных в координатных окрестностях. Изучается семейство всех коммутативных подалгебр алгебры Ли косоэрмитовых матриц порядка больше двух. Указывается явный вид индуктивных пределов.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Определения; описание результатов

1.1. Индуктивные пределы. Это понятие общеизвестно в теории групп [1]. Для алгебр Ли определение совершенно аналогично; напомним его. Рассмотрим семейство алгебр Ли L_α , и пусть для любых двух из них задан набор гомоморфизмов $\varphi_{\alpha\beta}: L_\alpha \rightarrow L_\beta$, причем набор может быть пустым для некоторых α, β . *Представлением* семейства $\{L_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}\}$ в алгебре Ли A назовем набор гомоморфизмов $f_\alpha: L_\alpha \rightarrow A$ такой, что $f_\beta \circ \varphi_{\alpha\beta} = f_\alpha$ и множество $\bigcup_\alpha f_\alpha(L_\alpha)$ порождает A как алгебру Ли. Представление кратко записываем в виде $A, \{f_\alpha\}$. По определению *индуктивный предел* семейства $\{L_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}\}$ – это представление $A^\circ, \{f_\alpha^\circ\}$ со следующим свойством универсальности: для любого представления $A, \{f_\alpha\}$ существует такой гомоморфизм $p: A^\circ \rightarrow A$, что $f_\alpha = p \circ f_\alpha^\circ$ для всех α .

Индуктивные пределы возникают, например, в следующей ситуации. Пусть L – некоторая алгебра Ли, $\{L_\alpha\}$ – семейство ее подалгебр, замкнутое относительно пересечений; будем считать также, что множество $\bigcup L_\alpha$ порождает L как алгебру Ли. Если $L_\alpha \subset L_\beta$, то определен гомоморфизм включения $i_{\alpha\beta}: L_\alpha \rightarrow L_\beta$. Требуется найти индуктивный предел семейства $\{L_\alpha\}$; здесь в обозначении семейства мы опускаем $i_{\alpha\beta}$.

1.2. Ограниченные индуктивные пределы. Добавим некоторые детали к ситуации, описанной в конце предыдущего пункта. Пусть L – алгебра Ли, являющаяся локально выпуклым линейным топологическим пространством, L_α – семейство ее подалгебр, замкнутое относительно пересечений. Представление $A, \{f_\alpha\}$ этого семейства назовем *ограниченным*, если A – локально выпуклое пространство и отображение $f: \bigcup L_\alpha \rightarrow A$, совпадающее с f_α на каждом L_α , непрерывно в нуле. Подчеркнем, что непрерывность скобки Ли не требуется. Наконец, определим

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96249).

ограниченный индуктивный предел семейства $\{L_\alpha\}$ как ограниченное представление, обладающее указанным выше свойством универсальности по отношению ко всем ограниченным представлениям.

Данное сейчас определение можно обобщить на случай произвольного семейства $\{L_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}\}$ следующим образом.

Для каждого α зафиксируем множество $V_\alpha \subset L_\alpha$, порождающее L_α как линейное пространство. Представление $A, \{f_\alpha\}$ нашего семейства назовем *ограниченным (относительно набора V_α)*, если существует набор линейных функционалов $\{l_\tau\}$ на A со следующими свойствами:

- 1) $\{l_\tau\}$ разделяет точки в A , т.е. для любого $a \neq 0$ существует такой l_τ , что $l_\tau(a) \neq 0$;
- 2) для любого l_τ существует такое число M_τ , что $|l_\tau(f_\alpha(x))| < M_\tau$ для всех α и для всех $x \in V_\alpha$.

Назовем *ограниченным (по отношению к набору V_α) индуктивным пределом* нашего семейства ограниченное представление, обладающее указанным выше свойством универсальности по отношению ко всем ограниченным представлениям.

Мы будем прибегать к ограниченным индуктивным пределам в тех случаях, когда обычный индуктивный предел приводит к аномально большим алгебрам Ли.

Переходим к примерам; они и составляют основное содержание этой работы.

1.3. Алгебры Ли векторных полей. В §2 рассматривается, во-первых, связное компактное многообразие X с формой объема v^n , $n = \dim X$. Для любой области $Y \subset X$ через $\text{Vect}(Y, v^n)$ обозначается алгебра Ли векторных полей, сохраняющих форму v^n и сосредоточенных в Y . Возьмем семейство всех алгебр Ли вида $\text{Vect}(Y, v^n)$, где $Y \simeq \mathbb{R}^n$. Если $Y_1 \subset Y_2$, то имеем очевидное включение $\text{Vect}(Y_1, v^n) \subset \text{Vect}(Y_2, v^n)$. Требуется описать индуктивный предел этого семейства. Мы покажем, что решение поставленной задачи приводит к центральному расширению алгебры Ли $\text{Vect}^\nabla(X, v^n)$ (она состоит из векторных полей, которые представляются в виде конечной суммы слагаемых из $\text{Vect}(X, v^n)$, сосредоточенных в координатных окрестностях $Y \simeq \mathbb{R}^n$) при помощи линейного пространства $H^{n-2}(X, \mathbb{R})$.

Заметим, что этот результат был сформулирован в приложении к работе автора [2], в которой рассматривались индуктивные пределы для групп диффеоморфизмов. Здесь мы приводим подробные доказательства.

Затем рассматривается симплектическое многообразие (X, ω^2) (связное и компактное), $\dim X = 2n$. Алгебры Ли $\text{Vect}(Y, \omega^2)$, $Y \simeq \mathbb{R}^{2n}$, определяются аналогично предыдущим. Здесь, однако, удобнее заменить их изоморфными алгебрами $\mathcal{D}(Y)$ со скобкой Пуассона; $\mathcal{D}(Y)$ — это пространство бесконечно дифференцируемых функций, сосредоточенных в Y , а упомянутый изоморфизм устанавливается так: каждому векторному полю из $\text{Vect}(Y, \omega^2)$ ставится в соответствие его гамильтониан с носителем в Y . Индуктивный предел полученного семейства алгебр Ли $\mathcal{D}(Y)$, $Y \simeq \mathbb{R}^{2n}$, есть алгебра Ли–Пуассона $\mathcal{D}(X)$. Более интересен индуктивный предел семейства $\mathcal{D}^\circ(Y)$, $Y \simeq \mathbb{R}^{2n}$, где через $\mathcal{D}^\circ(Y)$ обозначено подпространство функций с нулевым интегралом относительно формы объема ω^{2n} : индуктивным пределом оказывается центральное расширение подалгебры Ли–Пуассона $\mathcal{D}^\circ(X)$

(функции с нулевым интегралом относительно формы ω^{2n}) при помощи линейного пространства $H^{2n-1}(X, \mathbb{R})$. Это известное расширение [3]; наш результат состоит в том, что оно возникает как индуктивный предел указанного семейства алгебр Ли.

1.4. Коммутативные подалгебры простой компактной алгебры Ли.

Пусть g – простая компактная алгебра Ли. Обозначим через $\text{Ab } g$ семейство всех ее коммутативных подалгебр. В каждой такой подалгебре возьмем шар радиуса 1 (в стандартной метрике алгебры g). Наша цель – найти ограниченный (по отношению к этим шарам) индуктивный предел семейства $\text{Ab } g$. Эта задача будет решена для алгебр Ли $\text{su}(m)$, $m > 2$, и индуктивный предел приведет нас к алгебре Ли $Tg[T]$, состоящей из полиномиальных токов $x_1T + x_2T^2 + \dots + x_nT^n$, $x_k \in g$. Наше доказательство не переносится на другие алгебры Ли; отметим, что оно существенно использует знаменитый результат Глисона о мерах на множестве подпространств гильбертова пространства (см. [4]).

§ 2. Индуктивные пределы алгебр Ли векторных полей

Всюду в этом параграфе через X обозначается связное компактное бесконечно дифференцируемое многообразие, $\dim X < \infty$. Используются обычные обозначения: $\mathcal{D}(X)$ – пространство вещественных бесконечно дифференцируемых функций, $E^k(X)$ – пространство внешних k -форм, d – внешний дифференциал, $Z^k(X)$, $B^k(X)$ – пространства замкнутых и точных k -форм, $H^k(X) = Z^k(X)/B^k(X)$, i_ξ – внутреннее умножение на векторное поле ξ . Для замкнутой k -формы α^k через $[\alpha^k]$ обозначается соответствующий элемент пространства $H^k(X, \mathbb{R})$. Если на X дана форма объема v^n либо симплектическая форма ω^2 , то через $\text{Vect}(X, v^n)$ и соответственно $\text{Vect}(X, \omega^2)$ обозначается алгебра Ли векторных полей, сохраняющих эту форму. Если Y – область в X , $Y \simeq \mathbb{R}^n$, $n = \dim X$, то пространства функций, форм, векторных полей и т. д. с носителями в Y обозначаются соответственно через $\mathcal{D}(Y)$, $E^k(Y)$, $\text{Vect}(Y, v^n)$ и т. д. В случае многообразия с формой объема (X, v^n) через $\text{Vect}^\nabla(X, v^n)$ обозначим идеал в $\text{Vect}(X, v^n)$, состоящий из векторных полей, представимых в виде конечной суммы слагаемых, каждое из которых сосредоточено в некоторой области $Y \simeq \mathbb{R}^n$.

Мы будем пользоваться некоторыми соотношениями для отображений d, i_ξ (см., например, [5; гл. 4]).

2.1. Векторные поля, сохраняющие форму объема. Пусть v^n – форма объема на X . Рассмотрим линейное пространство $L(X) = E^{n-2}(X)/B^{n-2}(X)$.

Определим отображение $\gamma^\circ: E^{n-2}(X) \rightarrow \text{Vect}^\nabla(X, v^n)$, $\gamma^\circ(\alpha^{n-2}) = \xi$, $d\alpha^{n-2} = i_\xi v^n$. Оно аннулирует пространство $B^{n-2}(X)$ и тем самым приводит к отображению

$$\gamma: L(X) \rightarrow \text{Vect}^\nabla(X, v^n). \quad (1)$$

Введем, далее, для любой области $Y \simeq \mathbb{R}^n$ отображение

$$f_Y^\circ: \text{Vect}(Y, v^n) \rightarrow L(X), \quad (2)$$

поставив в соответствие векторному полю ξ элемент $\alpha^{n-2} + B^{n-2}(X) \in L(X)$ такой, что $\gamma^\circ(\alpha^{n-2}) = \xi$, $\alpha^{n-2} \in E^{n-2}(Y)$.

Теперь введем операцию $[\cdot, \cdot]$ на $L(X)$ по формуле

$$\begin{aligned} [\alpha^{n-2} + B^{n-2}(X), \beta^{n-2} + B^{n-2}(X)] &= i_\xi i_\eta v^n + B^{n-2}(X), \\ \xi &= \gamma^\circ(\alpha^{n-2}), \quad \eta = \gamma^\circ(\beta^{n-2}). \end{aligned} \quad (3)$$

Применим равенство (3) к формам $\alpha^{n-2}, \beta^{n-2}$, сосредоточенным в области $Y \subset X, Y \simeq \mathbb{R}^n$. Учитывая равенство $di_\xi i_\eta v^n = i_{[\xi, \eta]} v^n$, (3) можно переписать в виде $[f_Y^0(\xi), f_Y^0(\eta)] = f_Y^0([\xi, \eta])$. Отсюда следует, что операция, заданная в $L(X)$ формулой (3), есть скобка Ли и каждое из отображений (1), (2) есть гомоморфизм алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 1. *Алгебра Ли $L(X)$ вместе с вложениями (2) есть индуктивный предел семейства алгебр Ли $\{\text{Vect}(Y, v^n), Y \simeq \mathbb{R}^n\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем представление $\{f_Y\}$ семейства $\{\text{Vect}(Y, v^n), Y \simeq \mathbb{R}^n\}$ в некоторой алгебре Ли A . Рассмотрим отображения

$$p'_Y = f_Y \circ \gamma^\circ: E^{n-2}(Y) \rightarrow A.$$

Они согласованы в следующем смысле: если $Y_1 \subset Y_2$, то отображения $p'_{Y_k}, k = 1, 2$, действуют одинаковым образом на $E^{n-2}(Y_1)$. Используя разложение единицы, без труда получаем такое линейное отображение $p': E^{n-2}(X) \rightarrow A$, что на каждом пространстве $E^{n-2}(Y), Y \simeq \mathbb{R}^n$, отображения p'_Y, p' действуют одинаково. Поскольку отображение p'_Y аннулирует пространство $B^{n-2}(Y)$, то отображение p' аннулирует линейную оболочку таких пространств, т.е. пространство $B^{n-2}(X)$. В результате возникает отображение $p: L(X) \rightarrow A$. Это и есть гомоморфизм алгебр Ли такой, что $f_Y = p \circ f_Y^\circ$.

Теорема 1 доказана.

Исследуем подробнее алгебру Ли $L(X)$; это есть центральное расширение алгебры Ли $\text{Vect}^\nabla(X, v^n)$ при помощи линейного пространства $H^{n-2}(X, \mathbb{R})$ (рассматриваемого как коммутативная алгебра Ли). Используя отображение $J^{n-1}: B^{n-2}(X) \rightarrow E^{n-1}(X)$, обратное справа к отображению d , мы получаем правое обратное для γ по формуле $\xi \mapsto J^{n-1}(i_\xi v^n) + B^{n-2}(X)$. Оно позволяет найти 2-коцикл, отвечающий указанному расширению; он имеет вид

$$\beta(\xi, \eta) = [i_\xi i_\eta v^n - J^{n-1}(i_{[\xi, \eta]} v^n)].$$

Чтобы избавиться от неудобного (и неоднозначно определяемого) отображения J^{n-1} , возьмем произвольный элемент $\mu \in H^2(X, \mathbb{R})$ и представляющую его 2-форму θ^2 . Используя обычную двойственность между пространствами когомологий, образуем 2-коцикл $\langle \beta, \mu \rangle$. Выразив его в виде интеграла от произведения дифференциальных форм и отбросив слагаемое, которое содержит $[\xi, \eta]$ (это слагаемое есть тривиальный 2-коцикл на алгебре Ли $\text{Vect}^\nabla(X, v^n)$), получаем следующий 2-коцикл с вещественными значениями:

$$F_\mu(\xi, \eta) = \int_X i_\xi i_\eta v^n \wedge \theta^2, \quad \xi, \eta \in \text{Vect}^\nabla(X, v^n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\mu \neq 0$, то 2-коцикл F_μ нетривиален (и, тем самым, задает нетривиальное центральное расширение алгебры Ли $\text{Vect}^\nabla(X, v^n)$ при помощи $\mathbb{R}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если 2-коцикл F_μ тривиален, то существует линейная функция K на алгебре Ли $\text{Vect}^\nabla(X, v^n)$ такая, что

$$\int_X i_\xi i_\eta v^n \wedge \theta^2 = K([\xi, \eta]), \quad \xi, \eta \in \text{Vect}^\nabla(X, v^n). \quad (4)$$

Возьмем область $Y \simeq \mathbb{R}^n$ в X . Тогда существует 1-форма λ_Y^1 на Y такая, что $\theta^2 = d\lambda_Y^1$. Для векторных полей, сосредоточенных в Y , равенство (4) принимает вид $\int_X i_{[\xi, \eta]} v^n \wedge \lambda_Y^1 = K([\xi, \eta])$. Отсюда $K(\xi) = \int_X i_\xi v^n \wedge \lambda_Y^1$, $\xi \in \text{Vect}(Y, v^n)$. Тем самым,

$$K(\gamma^\circ(\alpha^{n-2})) = \int_X d\alpha^{n-2} \wedge \lambda_Y^1 = \int_X \alpha^{n-2} \wedge \theta^2, \quad \alpha^{n-2} \in E^{n-2}(Y).$$

Следовательно, $K(\gamma^\circ(\alpha^{n-2})) = \int_X \alpha^{n-2} \wedge \theta^2$ для всех $\alpha^{n-2} \in E^{n-2}(X)$. В частности, для любой замкнутой формы α^{n-2} получаем равенство $\int_X \alpha^{n-2} \wedge \theta^2 = 0$. Но тогда 2-форма θ точна, а это противоречит тому, что $\mu \neq 0$. Предложение доказано.

2.2. Алгебра Ли векторных полей, сохраняющих симплектическую форму. Пусть (X, ω^2) – симплектическое многообразие (компактное и связное). Введем, как обычно, скобку Пуассона на $\mathcal{D}(X)$ по формуле $[u, v] = i_\xi dv$, где векторное поле ξ определено равенством $i_\xi \omega^2 = u$. Для наших целей удобна следующая запись скобки Пуассона:

$$[u, v] = -n du \wedge dv \wedge \frac{\omega^{2(n-1)}}{\omega^{2n}} \quad (5)$$

(поясним, что любая $2n$ -форма θ^{2n} имеет вид $f\omega^{2n}$, $f \in \mathcal{D}(X)$, и мы записываем функцию f как θ^{2n}/ω^{2n}). Доказательство равенства (5) вытекает из очевидных соотношений $[u, v]\omega^{2n} = i_\xi dv \wedge \omega^{2n} = dv \wedge i_\xi \omega^{2n} = n dv \wedge i_\xi \omega^2 \wedge \omega^{2(n-1)}$. Скобка Пуассона приводит нас к алгебре Ли–Пуассона $\mathcal{D}(X)$, которая распадается в прямую сумму алгебр Ли $\mathbb{R} \oplus \mathcal{D}^\circ(X)$, где $\mathcal{D}^\circ(X)$ состоит из функций с нулевым средним относительно формы объема ω^{2n} .

Для любого открытого множества $Y \subset X$ обозначим через $\mathcal{D}^\circ(Y)$ подпространство функций из $\mathcal{D}(Y)$, удовлетворяющих условию $\int_Y u \omega^{2n} = 0$. Тогда $\mathcal{D}(Y)$ превращается в алгебру Ли, а $\mathcal{D}^\circ(Y)$ – в ее идеал. Наша цель – найти индуктивный предел семейства алгебр Ли $\{\mathcal{D}^\circ(Y), Y \simeq \mathbb{R}^{2n}\}$.

С этой целью рассмотрим линейное пространство

$$A(X) = E^{2n-1}(X)/B^{2n-1}(X)$$

и превратим его в алгебру Ли. Предварительно введем некоторые отображения. Пусть

$$\begin{aligned}\gamma^\circ: E^{2n-1}(X) &\rightarrow \mathcal{D}^\circ(X), \\ \gamma^\circ(\alpha^{2n-1}) &= d\alpha^{2n-1}/\omega^{2n}.\end{aligned}$$

Это отображение аннулирует подпространство $B^{2n-1}(X)$, что приводит к отображению

$$\gamma: A(X) \rightarrow \mathcal{D}^\circ(X). \quad (6)$$

Далее, для любой области $Y \simeq \mathbb{R}^{2n}$ определим отображение

$$f_Y^\circ: \mathcal{D}^\circ(Y) \rightarrow A(X) \quad (7)$$

по правилу

$$f_Y^\circ(u) = \alpha^{2n-1} + B^{2n-1}(X), \quad \alpha^{2n-1} \in E^{2n-1}(Y), \quad \gamma^\circ(\alpha^{2n-1}) = u. \quad (8)$$

Введем теперь операцию $[\cdot, \cdot]$ в пространстве $A(X)$ по формуле

$$[\alpha^{2n-1} + B^{2n-1}(X), \beta^{2n-1} + B^{2n-1}(X)] = -nu \, dv \wedge \omega^{2(n-1)} + B^{2n-1}(X), \quad (9)$$

где

$$\gamma^\circ(\alpha^{2n-1}) = u, \quad \gamma^\circ(\beta^{2n-1}) = v.$$

Из (5), (8) следует, что если $Y \simeq \mathbb{R}^{2n}$, то $[f_Y^\circ(u), f_Y^\circ(v)] = f_Y^\circ([u, v])$. Отсюда вытекает, что операция (9) есть скобка Ли, а отображения (6), (7) — гомоморфизмы алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра Ли $A(X)$, $[\cdot, \cdot]$ вместе с гомоморфизмами (7) есть индуктивный предел семейства $\{\mathcal{D}^\circ(Y), [\cdot, \cdot], Y \simeq \mathbb{R}^{2n}\}$.*

Доказательство столь близко к доказательству теоремы 1, что мы его опустим.

Рассмотрим подробнее алгебру Ли $A(X)$, $[\cdot, \cdot]$. Она является центральным расширением алгебры Ли–Пуассона $\mathcal{D}^\circ(X)$ при помощи линейного пространства $H^{2n-1}(X, \mathbb{R})$. Взяв линейный функционал на этом пространстве, мы получим центральное расширение алгебры Ли–Пуассона $\mathcal{D}^\circ(X)$ при помощи $\mathbb{R}$. Последнее расширение задается 2-коциклом $(\xi, \eta) \mapsto \int_X u \wedge dv \wedge \omega^{2(n-1)} \wedge \theta^1$, где θ^1 — замкнутая 1-форма. Если эта форма не точна, то коцикл нетривиален (а потому указанное расширение нетривиально); доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 1.

§ 3. Коммутативные подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{su}(m)$, $m > 2$

Прежде чем перейти к основной теме, напомним знаменитый результат А. М. Глисона, существенно используемый далее.

3.1. Теорема А. М. Глисона [4]. Пусть H – гильбертово пространство (вещественное либо комплексное), $\dim H \geq 3$. Аддитивная мера на проекторах пространства H – это комплекснозначная функция $P \mapsto f(P)$ (P – самосопряженный проектор в H) такая, что $f(P_1 + P_2) = f(P_1) + f(P_2)$ при $P_1 P_2 = 0$. Теорема А. М. Глисона утверждает, что *если $f(P) \geq 0$ для всех P , то $f(P) = \text{Tr}(AP)$ для некоторого ядерного оператора A .*

Отсюда вытекает, что если пространство H конечномерно и аддитивная мера f ограничена, то $f(P) = \text{Tr}(AP)$ для некоторого линейного оператора A . Для доказательства этого утверждения достаточно применить теорему Глисона к аддитивным мерам $P \mapsto \text{Re } f(P) + a \dim P(H)$, $P \mapsto \text{Im } f(P) + a \dim P(H)$, взяв достаточно большое число a .

3.2. Ограниченный индуктивный предел семейства $\text{Ab } g$, $g = \mathfrak{su}(m)$, $m > 2$. Напомним, что $\text{Ab } g$ – это семейство всех коммутативных подалгебр из $g = \mathfrak{su}(m)$. В каждой алгебре из $\text{Ab } g$ возьмем шар $\|x\| < 1$; здесь использована обычная норма на g . Опишем ограниченный (по отношению к семейству шаров) индуктивный предел этого семейства; подчеркнем, что $m > 2$.

Обозначим через $Tg[T]$ алгебру Ли, состоящую из всех многочленов $x_1 T + x_2 T^2 + \dots + x_n T^n$, $x_k \in g$. Скобка Ли определяется равенствами

$$[xT^m, yT^n] = [x, y]T^{m+n}, \quad x, y \in g.$$

Для любой подалгебры $g^\circ \in \text{Ab } g$ определим вложение

$$f_{g^\circ}: g^\circ \rightarrow Tg[T], \quad x \mapsto xT, \quad x \in g^\circ. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра Ли $Tg[T]$ вместе с гомоморфизмами (10) есть ограниченный индуктивный предел семейства $\text{Ab } g$, $g = \mathfrak{su}(m)$, $m > 2$.*

Здесь пригодно любое из двух определений ограниченного индуктивного предела, данных в п. 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое представление семейства $\text{Ab } g$ в некоторой алгебре Ли A . Оно отождествляется с отображением $f: g \rightarrow A$ таким, что

$$[f(x), f(y)] = 0, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \text{при} \quad [x, y] = 0 \quad (11)$$

и, кроме того, для некоторого набора линейных функционалов l_τ , определенных на A и разделяющих точки из A , функция

$$x \mapsto l_\tau(f(x)), \quad x \in g, \quad (12)$$

непрерывна в точке $x = 0$.

ЛЕММА 1. *Отображение $f: g \rightarrow A$ линейно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим отображение f на $u(m)$ (алгебру Ли всех коэрмитовых матриц порядка m) по формуле $f'(i\alpha I_m + x) = f(x)$, где I_m — единичная матрица, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in g$. Ясно, что f' также удовлетворяет условию (11). Взяв один из упомянутых выше функционалов l_τ , определим на множестве всех самосопряженных проекторов функцию $P \mapsto l_\tau(f'(iP))$. Из (11) следует, что это аддитивная мера на проекторах. Из непрерывности в нуле функции (12) вытекает ограниченность этой меры. Согласно теореме Глисона $l_\tau(f'(x)) = \text{Tr}(Dx)$ для некоторого линейного оператора D , действующего в g . Итак, функция $x \mapsto l_\tau(f'(x))$, $x \in g$, линейна для некоторого набора линейных функционалов l_τ , разделяющих точки в A . Тем самым отображение f' линейно. Лемма доказана.

Далее, перейдем от алгебр Ли $g = \text{su}(m)$ и A к их комплексификациям $g_{\mathbb{C}} = \text{sl}(m, \mathbb{C})$ и $A_{\mathbb{C}}$ и продолжим отображение $f: g \rightarrow A$ до $\mathbb{C}$ -линейного отображения $f_1: g_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$.

ЛЕММА 2. *Существует $\mathbb{C}$ -линейное отображение $f_2: g_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$ такое, что $[f_1(x), f_1(y)] = f_2([x, y])$ при $x, y \in g_{\mathbb{C}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Группа $G = \text{SL}(m, \mathbb{C})$ и алгебра Ли $g_{\mathbb{C}}$ действуют на $g_{\mathbb{C}}$ (присоединенное представление). Отсюда возникает также действие на пространстве $g_{\mathbb{C}} \wedge g_{\mathbb{C}}$; действие элементов $g \in G$ и $a \in g_{\mathbb{C}}$ на вектор x записываем в виде $\pi(g)x$, $\pi(a)x$. Легко подсчитать, что $g_{\mathbb{C}} \wedge g_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму трех неприводимых подпространств L_k , $k = 0, 1, 2$. Они задаются старшими (относительно верхнетреугольных матриц) векторами

$$h_0 = \sum_{i=2}^{m-1} e_{1i} \wedge e_{im} + (e_{11} - e_{mm}) \wedge e_{1m},$$

$$h_1 = e_{1,m-1} \wedge e_{1m}, \quad h_2 = e_{1m} \wedge e_{2m}.$$

(Здесь через e_{ik} обозначены матричные единицы.)

2) Существует единственное линейное отображение $K: g_{\mathbb{C}} \wedge g_{\mathbb{C}} \rightarrow g_{\mathbb{C}}$ такое, что $K(x \wedge y) = [x, y]$ при $x, y \in g_{\mathbb{C}}$. Оно сплетает представления группы $G = \text{GL}(m, \mathbb{C})$ (и алгебры Ли $g_{\mathbb{C}}$), действующие в пространствах $g_{\mathbb{C}} \wedge g_{\mathbb{C}}$ и $g_{\mathbb{C}}$. Легко видеть, что

$$K(h_0) = me_{1m}, \quad K(h_1) = 0, \quad K(h_2) = 0.$$

Отсюда вытекает, что отображение $K: L_0 \rightarrow g_{\mathbb{C}}$ есть изоморфизм и $K(L_1) = \{0\}$, $K(L_2) = \{0\}$.

3) Существует единственное линейное отображение $F: g_{\mathbb{C}} \wedge g_{\mathbb{C}} \rightarrow g_{\mathbb{C}}$ такое, что $F(x \wedge y) = [f_1(x), f_1(y)]$ при $x, y \in g_{\mathbb{C}}$. Докажем, что $F(L_1) = \{0\}$, $F(L_2) = \{0\}$.

С этой целью любой четверке чисел $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, m\}$, $a \neq b$, $c \neq d$, поставим в соответствие элемент

$$r_{a,b,c,d} = (e_{aa} - e_{bb}) \wedge (e_{cc} - e_{dd}).$$

Через S обозначим G -инвариантное подпространство, порожденное всеми $r_{a,b,c,d}$.
Подпространство S есть линейная оболочка векторов

$$\pi(u)r_{a,b,c,d} = u(e_{aa} - e_{bb})u^{-1} \wedge u(e_{cc} - e_{dd})u^{-1}, \quad u \in \mathrm{SU}(m).$$

Матрицы

$$iu(e_{aa} - e_{bb})u^{-1}, \quad iu(e_{cc} - e_{dd})u^{-1}$$

лежат в $\mathrm{su}(m)$ и перестановочны. Отсюда следует (по определению отображения F), что

$$F(\pi(u)r_{a,b,c,d}) = 0.$$

Значит, $F(S) = \{0\}$.

Докажем, что $L_1 \subset S$, $L_2 \subset S$. Без труда проверяются равенства

$$\pi(e_{1m})\pi(e_{1,m-1})r_{1,m,m-1,m} = 3h_1, \quad \pi(e_{2m})\pi(e_{1m})r_{1,2,2,m} = 3h_2;$$

напомним, что векторы h_1, h_2 были введены выше. Тем самым, $h_1 \in S$, $h_2 \in S$ и, следовательно, $L_1 \subset S$, $L_2 \subset S$. Но тогда $F(L_1) = \{0\}$, $F(L_2) = \{0\}$, что и утверждалось.

4) Мы доказали, что $\ker K = L_1 \oplus L_2$, $\ker F \supset L_1 \oplus L_2$; таким образом, $\ker K \subset \ker F$. Но тогда $F = f_2 \circ K$ для некоторого линейного отображения $f_2: g_{\mathbb{C}} \rightarrow A$. Отсюда $[f_1(x), f_1(y)] = f_2([x, y])$ при $x, y \in g_{\mathbb{C}}$, чем доказана лемма 2.

ЛЕММА 3. Пусть для некоторого $n \geq 2$ даны $\mathbb{C}$ -линейные отображения

$$f_i: g_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

удовлетворяющие условиям

$$[f_i(x), f_k(y)] = f_{i+k}([x, y]) \tag{13}$$

для всех $i, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ таких, что $i+k \leq n$. Тогда существует такое $\mathbb{C}$ -линейное отображение $f_{n+1}: g_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$, что

$$[f_i(x), f_k(y)] = f_{n+1}([x, y]) \tag{13a}$$

при $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i+k = n+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем через H обозначается подалгебра диагональных матриц из $g_{\mathbb{C}}$; положим

$$h_{ab} = e_{aa} - e_{bb}, \quad 1 \leq a \neq b \leq n.$$

Используется стандартная билинейная форма Киллинга (x, y) на алгебре Ли $g_{\mathbb{C}} = \mathrm{gl}(m, \mathbb{C})$.

Из (13) вытекает равенство

$$[f_i(h), f_k(e_{ab})] = (h, h_{ab})f_{i+k}(e_{ab}), \quad i + k \leq n. \quad (14)$$

Умножая его слева (разумеется, под умножением понимается применение скобки Ли) на $f_p(e_{cd})$ и на $f_p(h')$, $h' \in H$, $c \neq d$, $i + k + p = n + 1$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} (h, h_{cd})[f_k(e_{ab}), f_{i+p}(e_{cd})] + [f_i(h), f_{p+k}([e_{cd}, e_{ab}])] \\ = (h, h_{ab})[f_p(e_{cd}), f_{i+k}(e_{ab})], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (h', h_{ab})[f_i(h), f_{p+k}(e_{ab})] &= (h, h_{ab})[f_p(h'), f_{i+k}(e_{ab})], \\ i + k + p &= n + 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Дальнейшие рассуждения (они основаны на равенствах (14)–(16)) разобьем на шаги.

Шаг 1. Положим $D_i(a, b) = [f_i(e_{ab}), f_{n+1-i}(e_{ba})]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq a \neq b \leq n$. Докажем, что

$$D_i(a, b) = D_1(a, b), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (17)$$

$$D_1(a, b) + D_1(b, a) = 0, \quad (18)$$

$$D_1(a, b) + D_1(b, c) + D_1(c, a) = 0, \quad a \neq b, \quad a \neq c, \quad b \neq c. \quad (19)$$

Для этого применим равенство (15), полагая $(c, d) = (b, a)$, $h = h_{ab}$. Получим (после очевидных преобразований) $D_{i+k}(a, b) - D_k(a, b) = \frac{1}{2}[f_i(h_{ab}), f_{n+1-i}(h_{ab})]$, $i + k \leq n$, $a \neq b$. Зафиксируем числа a, b и обозначим $D_i(a, b)$ через D_i , а правую часть этого равенства – через r_i . Тогда $D_{i+k} - D_i = r_i$, $r_i + r_{n+1-i} = 0$; здесь $i, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $i + k \leq n$. Первое из этих равенств дает $r_i = ir_1$, а второе приводит к равенству $r_1 = 0$. Отсюда $r_i = 0$, $D_{i+k} = 0$, чем доказано утверждение (17).

Равенство (18) следует из соотношений

$$D_1(a, b) = [f_1(e_{ab}), f_n(e_{ba})] = -D_n(b, a) = -D_1(b, a).$$

Для доказательства (19) используем равенство $[f_1(e_{ab}), f_1(e_{bc})] = f_2(e_{ac})$, вытекающее из (13). Умножим обе части на $f_{n-1}(e_{ca})$, причем в левой части применим тождество Якоби и определение элементов вида $D_i(a, b)$; используя, далее, свойство (17), приходим к равенству (19).

Шаг 2. Докажем, что

$$[f_i(h), f_{n+1-i}(h')] = 0 \quad \text{при } 1 \leq i \leq n \text{ и } h, h' \in H. \quad (20)$$

Для этого в равенстве (15) положим $(c, d) = (b, a)$. Это приводит к равенству $[f_i(h), f_{n+1-i}(h_{ab})] = 0$ при $1 \leq i \leq n$, $a \neq b$. Так как элементы h_{ab} порождают линейное пространство H , то это приводит к (20).

Шаг 3. После всех предварительных рассуждений определим требуемое леммой отображение f_{n+1} . Сначала зададим его на элементах h_{ab} , $a \neq b$, по формуле $f_{n+1}(h_{ab}) = D_1(a, b)$. Из соотношений (17)–(19) вытекает, что этим определяется линейное отображение $f_{n+1}: H \rightarrow A_{\mathbb{C}}$. Далее, из равенства (16) следует, что отношение

$$\frac{[f_i(h), f_{n+1-i}(e_{ab})]}{(h, h_{ab})}$$

(разумеется, мы предполагаем, что знаменатель отличен от нуля) не зависит от h, i . Обозначим это отношение через $f_{n+1}(e_{ab})$. В результате мы получаем линейное отображение $f_{n+1}: g_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$.

Покажем, что построенное отображение f_{n+1} удовлетворяет условию (13а). Из предыдущего построения вытекает, что (13а) выполняется при $x \in H$. Осталось проверить это условие для случая $x = e_{ab}$, $y = e_{cd}$, $a \neq b$, $c \neq d$. Пусть сначала $a \neq d$, $b \neq c$. В равенстве (15) положим $h = h_{ab}$. Получим $[f_p(e_{cd}), f_{n+1-p}(e_{ab})] = 0$, что и требуется. Если $b \neq c$, $a = d$, то в (15) положим $(h, h_{ca}) = 0$, $(h, h_{ab}) = 1$. Это приводит к доказываемому равенству

$$[f_p(e_{ca}), f_{i+k}(e_{ab})] = f_{n+1}(e_{cb}).$$

Наконец, в случае $a = d$, $b = c$ нужное равенство вытекает из определения элемента $f_{n+1}(h_{ab})$.

Леммы 2, 3 позволяют построить бесконечную последовательность линейных отображений $f_k: g \rightarrow A$, $k \geq 1$, таких, что

$$[f_i(x), f_k(y)] = f_{i+k}([x, y]), \quad i, k \in \{1, 2, \dots\}, \quad x, y \in g_{\mathbb{C}}. \quad (21)$$

Заметим, что все отображения f_i вещественны, т.е. отображают вещественную подалгебру $g \subset g_{\mathbb{C}}$ в вещественную подалгебру $A \subset A_{\mathbb{C}}$; для отображений f_k это вытекает из соотношений (21), а для отображения f_1 — очевидно.

Теперь завершим доказательство теоремы 3. Зададим линейное отображение $p: Tg[T] \rightarrow A$ формулой $p(xT^k) = f_k(x)$, $x \in g$, $k \geq 1$. Из (21) вытекает, что p — гомоморфизм алгебр Ли. Имеем равенство $p(xT) = f(x)$, $x \in g$, где $f: g \rightarrow A$ — отображение, с которого мы начали доказательство теоремы. Теорема доказана.

Заключение (об образующих и соотношениях в алгебре Ли)

Индуктивные пределы дают (иногда) способ записи алгебры Ли при помощи образующих и соотношений. Поясним это на примере алгебры Ли $\text{Vect}^{\nabla}(X, v^n)$, используя теорему 1. Эта алгебра порождается парами (Y, ξ) , где $Y \simeq \mathbb{R}^n$, $\xi \in \text{Vect}(Y, v^n)$. Образующие подчинены очевидным соотношениям

$$[(Y, \xi), (Y, \eta)] = (Y, [\xi, \eta]), \quad (Y_1, \xi) = (Y_2, \xi) \quad \text{при} \quad Y_1 \subset Y_2.$$

Однако согласно теореме 1 эти соотношения (их можно назвать “локальными”) приводят не к алгебре $\text{Vect}^{\nabla}(X, v^n)$, а к ее центральному расширению $L(X)$. Чтобы получить алгебру Ли $\text{Vect}^{\nabla}(X, v^n)$, следует добавить еще “глобальные” соотношения — с целью избавиться от центра $H^{n-2}(X)$; их количество равно величине $\dim H^{n-2}(X)$.

Список литературы

1. *Серр Ж.-П.* Деревья, амальгамы и SL_2 // Математика. 1974. Т. 18. №1. С. 3–51.
2. *Исмагилов Р. С.* О группах диффеоморфизмов, сохраняющих объем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 4. С. 831–867.
3. *Kirillov A. A.* La géometrie des moments pour les groupes de difféomorphismes. Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory. Proc. Colloq. in Honour of J. Dixmier, Paris/Fr. 1989 // Prog. Math. 1990. V. 92. P. 73–83.
4. *Gleason A. M.* Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // J. Math. Mech. 1957. V. 6. №6. P. 885–895.
5. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.

Московский государственный
технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию
24.02.1999