Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Асимптотика функции разбиения, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 3, 65–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:10:36

УДК 511

В. Ю. Протасов

Асимптотика функции разбиения

Для пары натуральных чисел m и d таких, что $2 \leq m \leq d$, и для произвольного целого $n \geq 0$ рассматривается величина $b_{m,d}(n)$, называемая функцией разбиения и определяемая как мощность множества

$$\left\{ (a_0, a_1, \dots) : n = \sum_k a_k m^k, a_k \in \{0, \dots, d-1\}, k \geq 0 \right\}.$$

Изучаются свойства функции $b_{m,d}(n)$ и ее асимптотика при $n \rightarrow \infty$. Предложен геометрический подход к этой проблеме. Доказывается, что для достаточно больших n

$$C_1 n^{\lambda_1} \leq b_{m,d}(n) \leq C_2 n^{\lambda_2},$$

где C_1, C_2 – положительные константы, зависящие от m и d , $\lambda_1 = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b(n)}{\log n}$

и $\lambda_2 = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b(n)}{\log n}$ – показатели асимптотического роста функции разбиения. Для некоторых пар (m, d) показатели λ_1 и λ_2 вычисляются как логарифмы от алгебраических чисел; для прочих пар проблема сведена к нахождению совместного спектрального радиуса подходящего набора конечномерных линейных операторов. Получены оценки на показатели роста, а также на константы C_1 и C_2 .

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Для пары натуральных чисел m и d таких, что $2 \leq m \leq d$, рассмотрим величину $b_{m,d}(n)$, равную количеству всевозможных разложений данного целого числа $n \geq 0$ в сумму степеней числа m с “цифрами”, принимающими значения $0, \dots, d-1$:

$$n = a_0 + a_1 m + \dots + a_l m^l,$$

где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \in \{0, \dots, d-1\}$ для всех $i = 0, \dots, l$ и $a_l \neq 0$. Функция $b_{m,d}(n)$ называется *функцией разбиения* порядка d по основанию m . Функция разбиения порядка ∞ определяется из равенства $b_{m,\infty}(n) = \lim_{d \rightarrow \infty} b_{m,d}(n)$.

Функция разбиения является хорошо известным объектом в математике. Эйлер рассматривал бинарную функцию разбиения бесконечного порядка $b_{2,\infty}(n)$, которая возникает при разложении в ряд функции

$$F(x) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - x^{2^j})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,\infty}(n) x^n.$$

Арифметические и аналитические свойства функций разбиения изучались в работах таких математиков, как Тантурри, Малер, Кнаф, Де Бройн, Чёрчаус, Резник (см. библиографию). В частности, для бинарных функций разбиения при малых значениях порядка d получены точные формулы:

1. $b_{2,2}(n) \equiv 1$ (Эйлер, см. [1]);
2. $b_{2,3}(n) = s(n+1)$ (Резник, см. [2]), $s(n+1)$ — так называемая последовательность Штерна, определяемая индуктивно: $s(0) = 0, s(1) = 1, s(2x) = s(x), s(2x+1) = s(x) + s(x+1)$ (см. [3]);
3. $b_{2,4}(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (Клозинский, Александерсон, Хиллман, см. [4]), через $\lfloor x \rfloor$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x , через $\lceil x \rceil$ — минимальное целое, не меньшее чем x .

По-видимому, все “хорошие” функции разбиения исчерпываются вышеперечисленными. Вероятно, при остальных значениях d не существует столь простых формул для вычисления $b_{2,d}(n)$. В этой ситуации наиболее интересной задачей является изучение асимптотики величины $b_{2,d}(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Первый результат в этом направлении был получен Малером в работе [5]. Малер показал, что

$$\log_2 b_{2,\infty}(n) \sim \frac{\log_2^2 n}{\log_2 4}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Этот результат неоднократно усиливался, см., например, [6], [7].

Б. Резник в работе [2] рассмотрел случай конечного порядка d . Он показал, что при $d = 2^r, r \geq 1$, имеет место следующая асимптотика:

$$b_{2,2^r}(n) \sim cn^{r-1} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где константа c не зависит от r . Если d не является степенью двойки, то асимптотика выглядит более сложно. В случае четного d имеем

$$C_1 n^{\log_2 k} \leq b_{2,2k}(n) \leq C_2 n^{\log_2 k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где константы $0 < C_1 \leq C_2$ зависят от k . Совершенно иная картина наблюдается при нечетных d . Б. Резник рассмотрел следующие пределы, которые естественно назвать соответственно нижним и верхним показателями роста:

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b(n)}{\log n}, \quad \lambda_2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b(n)}{\log n}. \quad (3)$$

В случае $b(n) = b_{2,2k}(n)$, как следует из формулы (2), имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = \log_2 k$. Оказывается, что при нечетных d , т.е. в случае $b(n) = b_{2,2k+1}(n)$, показатели роста λ_1 и λ_2 , вообще говоря, не совпадают. Для $d = 3$ показатели были найдены:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \log_2 \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \quad (4)$$

Для $d = 2k+1, k \geq 2$, было показано, что λ_1 и λ_2 конечны и положительны; однако эти числа не удалось найти ни для одного $k \geq 2$, хотя некоторые оценки на них были получены в [2]. Кроме того, Б. Резник оставил открытым вопрос о возможности

обобщения неравенства (2) на случай нечетных порядков $d \geq 5$. Иначе говоря, верно ли, что при $b(n) = b_{2,d}(n)$ пределы

$$\alpha = \varliminf_{n \rightarrow \infty} b(n)n^{-\lambda_1}, \quad \beta = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} b(n)n^{-\lambda_2} \quad (5)$$

конечны и положительны для каждого $d \geq 3$?

В настоящей работе мы рассматриваем общий случай, т.е. функции разбиения по произвольному основанию $m \geq 2$. Мы докажем, что для произвольной пары m, d ($2 \leq m \leq d-1$) показатели роста λ_1, λ_2 , определяемые равенством (3) при $b(n) = b_{m,d}(n)$, конечны. При этом в случае $m+1 \leq d \leq 2m-1$ имеем $\lambda_1 = 0$. В остальных случаях $\lambda_1 > 0$. Проблема вычисления показателей λ_1, λ_2 будет сведена к проблеме нахождения совместного спектрального радиуса подходящего набора конечномерных линейных операторов. Для некоторых пар (m, d) показатели роста будут вычислены явно, для прочих пар получим оценки. В частности, для бинарной функции разбиения ($m = 2$) мы найдем значения λ_1 и λ_2 для порядков $d = 5, 7, 9, 11$ и 13 , а также сформулируем в виде гипотезы обобщение этого результата на все нечетные порядки d .

Мы покажем, что пределы α и β , определенные равенством (5) для $b(n) = b_{m,d}(n)$, конечны и положительны для каждой пары (m, d) . Это означает, в частности, что на вопрос Б. Резника получен утвердительный ответ, т.е. неравенство (2) выполнено для любой пары (m, d) . Для любых m и d таких, что $2 \leq m \leq d-1$, найдутся такие положительные константы C_1 и C_2 , что

$$C_1 n^{\lambda_1} \leq b_{m,d}(n) \leq C_2 n^{\lambda_2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Для каждой пары (m, d) мы получим оценки на величины $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$.

В настоящей статье мы представляем геометрический подход к исследованию функций разбиения. Основная идея состоит в том, чтобы работать не с функцией $b(n)$, а с вектор-функцией

$$v(n) = (b(n), \dots, b(n-s+1))^T \in \mathbb{R}^s,$$

где размерность s определяется для каждой пары (m, d) отдельно. При этом вектор $v(n)$ может быть получен из некоторого вектора $v(0)$ действием подходящего набора линейных операторов. Далее мы изучаем асимптотику величины $\|v(n)\|$ при $n \rightarrow \infty$ с помощью совместного спектрального радиуса и нижнего спектрального радиуса этих операторов.

Статья разбита на несколько параграфов. В §2 мы напомним определения и простейшие свойства совместного спектрального радиуса и нижнего спектрального радиуса. В §§3 и 4 мы исследуем некоторые специальные свойства операторов с инвариантным конусом. Далее, в §5 мы доказываем основной результат работы: теорему 1 об асимптотическом поведении функции разбиения. Наконец, в §6 разработан метод вычисления показателей роста λ_1, λ_2 и приведены результаты вычислений для $m = 2$ и некоторых нечетных порядков d .

§ 2. Совместный спектральный радиус

Пусть $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$, $m \in \mathbb{N}$, произвольный конечный набор линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^s$, $s \in \mathbb{N}$. Для данного натурального ℓ обозначим через $\max_\ell A$ и $\min_\ell A$ следующие величины:

$$\begin{aligned} \max_\ell A &= \max_{\substack{d_j \in \{0, \dots, m-1\} \\ j=1, \dots, \ell}} \|A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}\|, \\ \min_\ell A &= \min_{\substack{d_j \in \{0, \dots, m-1\} \\ j=1, \dots, \ell}} \|A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}\|. \end{aligned} \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следующие пределы

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} (\max_\ell A)^{1/\ell}, \\ \check{\rho}(A) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} (\min_\ell A)^{1/\ell} \end{aligned}$$

называются соответственно *совместным спектральным радиусом* (ССР) и *нижним спектральным радиусом* (НСР) набора $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$.

Понятие совместного спектрального радиуса появилось впервые в работе [8], где было использовано в одной из задач теории нормированных алгебр. Затем ССР нашел множество применений в теории всплесков, функциональных уравнений, теории приближений, фракталах (см. обширную библиографию по этой теме в [9] и [10]). Понятие нижнего спектрального радиуса появилось в [11]. Нам понадобятся лишь самые элементарные их свойства.

1. Если $A_0 = \dots = A_{m-1}$, то $\check{\rho}(A) = \hat{\rho}(A) = \rho(A_0)$, где $\rho(A_0)$ — это (обычный) спектральный радиус оператора A_0 , т.е. максимум модулей его собственных значений.
2. Для произвольного набора операторов $\{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ имеем

$$\hat{\rho}(A) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \max_{(d_1, \dots, d_\ell) \in \{0, \dots, m-1\}^\ell} (\rho(A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}))^{1/\ell}. \quad (8)$$

3. Для произвольного набора операторов $\{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ выполнены неравенства:

$$\max_{(d_1, \dots, d_\ell) \in \{0, \dots, m-1\}^\ell} (\rho(A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}))^{1/\ell} \leq \hat{\rho}(A) \leq (\max_\ell A)^{1/\ell}, \quad (9)$$

$$\check{\rho}(A) \leq \min_{(d_1, \dots, d_\ell) \in \{0, \dots, m-1\}^\ell} (\rho(A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}))^{1/\ell} \leq (\min_\ell A)^{1/\ell}. \quad (10)$$

Доказательства содержатся в работах [11] и [12].

§ 3. Операторы с инвариантным конусом

С помощью ССР и НСР удастся оценить величины $\max_\ell A$ и $\min_\ell A$. В ряде случаев получаемые оценки достаточно грубы, однако при некоторых условиях на операторы можно вывести весьма приемлемые оценки. Например, в работе [10] рассматривался случай неприводимого набора операторов (операторов, не имеющих нетривиальных общих инвариантных подпространств). Более сильные условия на

операторы предполагались в работах [13], [14]. Мы рассмотрим другой случай, а именно мы предположим, что операторы имеют общий инвариантный конус.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножество K евклидова пространства $\mathbb{R}^s$ называется *выпуклым замкнутым невырожденным конусом* (далее просто *конусом*), если

- а) $x + y \in K$ для любых $x, y \in K$;
- б) для любой точки $x \in K \setminus \{0\}$ и действительного числа λ точка λx принадлежит K тогда и только тогда, когда $\lambda \geq 0$;
- в) множество $K \subset \mathbb{R}^s$ замкнуто и имеет размерность s , т.е. найдется некоторый шар $E(a, \varepsilon) = \{a + x : \|x\| \leq \varepsilon\}$, лежащий в K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конус $K \subset \mathbb{R}^s$ называется *инвариантным конусом* набора операторов $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$, если

$$AK = \bigcup_{i=0}^{m-1} A_i K \subset K. \quad (11)$$

Рассмотрим несколько специфических свойств, которыми обладают операторы с инвариантным конусом.

ЛЕММА 1. Для любого конуса $K \subset \mathbb{R}^s$ и любой нормы, введенной в пространстве $\mathbb{R}^s$, существует константа μ , зависящая от конуса и от нормы, такая, что для любых $x, y \in K$ выполнено “обратное неравенство треугольника”:

$$\|x + y\| \geq \mu(\|x\| + \|y\|).$$

В случае евклидовой нормы $\mu = \cos(\varphi/2)$, где φ – максимальный угол, образуемый всевозможными парами векторов из конуса K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай евклидовой нормы. Поскольку конус K замкнутый и невырожденный, то $\varphi < \pi$. Следовательно,

$$\|x + y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi \geq (\|x\| + \|y\|)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (12)$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть оператор B имеет инвариантный конус K ; тогда для любой пары векторов $t_1, t_2 \in K$

$$\|B(t_1)\| \cdot \|t_2\| \geq \mu h(t_1) \|B(t_2)\|, \quad (13)$$

где через $h(t_1)$ обозначено расстояние от точки t_1 до границы конуса K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $t_2 = 0$, то доказывать нечего. Если же $t_2 \neq 0$, то найдется такое число $\alpha > 0$, что $t_1 \neq \alpha t_2$. Возьмем точку

$$y = t_1 + \frac{t_1 - \alpha t_2}{\|t_1 - \alpha t_2\|} h(t_1).$$

Ясно, что $y \in K$. Применив лемму 1 к векторам $B(y)$ и $\frac{\alpha h(t_1)}{\|t_1 - \alpha t_2\|} B(t_2)$, получим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h(t_1)}{\|t_1 - \alpha t_2\|}\right) \|B(t_1)\| &= \left\|B(y) + \frac{\alpha h(t_1)}{\|t_1 - \alpha t_2\|} B(t_2)\right\| \\ &\geq \mu \left(\|B(y)\| + \frac{\alpha h(t_1)}{\|t_1 - \alpha t_2\|} \|B(t_2)\|\right) \geq \frac{\alpha \mu h(t_1)}{\|t_1 - \alpha t_2\|} \|B(t_2)\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(1 + \frac{h(t_1)}{\|t_1 - \alpha t_2\|}\right) \|B(t_1)\| \geq \frac{\alpha \mu h(t_1)}{\|t_1 - \alpha t_2\|} \|B(t_2)\|. \quad (14)$$

Перейдя к пределу в равенстве (14) при $\alpha \rightarrow +\infty$, получим

$$\|B(t_1)\| \geq \frac{\mu h(t_1)}{\|t_2\|} \|B(t_2)\|,$$

что доказывает лемму 2.

Для точки $t \in K \setminus \{0\}$ обозначим

$$\gamma(t) = \frac{h(t)}{\|t\|}. \quad (15)$$

Теперь мы можем переписать неравенство (13) следующим образом:

$$\frac{\|B(t_1)\|}{\|t_1\|} \geq \mu \gamma(t_1) \frac{\|B(t_2)\|}{\|t_2\|}$$

для любых $t_1, t_2 \in K \setminus \{0\}$.

Возьмем семейство операторов $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ с инвариантным конусом $K \subset \mathbb{R}^s$ и некоторую точку $x \in K$. Обозначим через $\max_\ell A(x)$ и $\min_\ell A(x)$ следующие величины:

$$\max_{(d_1, \dots, d_\ell) \in \{0, \dots, m-1\}^\ell} \|A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}(x)\|, \quad \min_{(d_1, \dots, d_\ell) \in \{0, \dots, m-1\}^\ell} \|A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}(x)\|.$$

Мы должны оценить эти величины для каждого натурального ℓ . Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работе [10], где исследовался общий случай (без предположения о существовании инвариантного конуса). Нам понадобятся более точные оценки. Для начала напомним несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Подпространство $L \subset \mathbb{R}^s$ размерности $s-1$ называется *опорной плоскостью* конуса K , если $L \cap K \neq \{0\}$ и при этом $L \cap \text{int } K = \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Подпространство $L \subset \mathbb{R}^s$ называется *граничной плоскостью* конуса K , если оно является линейной оболочкой пересечения этого конуса с некоторой его опорной плоскостью.

Рассмотрим некоторое подмножество M границы конуса $K \subset \mathbb{R}^s$. Пусть M лежит в граничной плоскости этого конуса. Пересечение всевозможных граничных плоскостей, содержащих M , назовем *минимальной граничной плоскостью* множества M . Для данного множества $Y \subset \mathbb{R}^s$ и элемента $a \in \mathbb{R}^s$ равенство $\langle a, Y \rangle = 0$ означает, что $\langle a, x \rangle = 0$ для всех $x \in Y$. Читатель легко докажет следующее утверждение:

ЛЕММА 3. Пусть множество $Y \subset \partial K \setminus \{0\}$ содержится в некоторой граничной плоскости конуса K . Элемент $y \in \mathbb{R}^s$ принадлежит минимальной граничной плоскости множества Y тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathbb{R}^s$ условие

$$\begin{cases} \langle a, Y \rangle = 0, \\ \langle a, K \rangle \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

влечет $\langle a, y \rangle = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $K \subset \mathbb{R}^s$ – инвариантный конус оператора B . Возьмем непустое множество $Y \subset \partial K \setminus \{0\}$, содержащееся в некоторой граничной плоскости конуса K . Пусть M – минимальная граничная плоскость множества Y . Тогда условие $BY \subset Y$ влечет $BM \subset M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $BY \subset Y$, но $BM \not\subset M$. Тогда найдется точка $y \in M$, для которой $By \notin M$. Согласно лемме 3 существует такая точка $a \in \mathbb{R}^s$, что $\langle a, Y \rangle = 0$, $\langle a, K \rangle \leq 0$, но $\langle a, By \rangle \neq 0$. Тогда $\langle B^*a, Y \rangle = 0$, $\langle B^*a, K \rangle \leq 0$ и $\langle B^*a, y \rangle \neq 0$. Однако $y \in M$, значит, последнее неравенство противоречит лемме 3.

ЛЕММА 5. Пусть K является инвариантным конусом оператора B . Если $Bx = 0$ для некоторой точки $x \in \text{int } K$, то оператор B есть тождественный нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B \neq 0$, то можно выбрать точку $y \in K$ и число $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ таким образом, что $By \neq 0$ и при этом точки $x + \varepsilon y$ и $x - \varepsilon y$ принадлежат K , что противоречит невырожденности конуса K .

Предварительная подготовка закончена, и мы можем приступить к оценке величин $\max_{\ell} A(x)$ и $\min_{\ell} A(x)$ с помощью $\hat{\rho}(A)$ и $\check{\rho}(A)$. Для начала разберем два частных случая: $\hat{\rho}(A) = 0$ и $\check{\rho}(A) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательстве лемм 6 и 7 мы будем использовать специальную норму в $\mathbb{R}^s$, соответствующую конусу K . Единичной сферой в этой норме является граница множества $\text{conv}(S \cap K, -(S \cap K))$, где через S обозначен единичный евклидов шар в пространстве $\mathbb{R}^s$. Такая нормировка обладает следующим свойством: норма любого оператора с инвариантным конусом K достигается в какой-то точке этого конуса.

ЛЕММА 6. Пусть $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ – произвольный набор операторов с инвариантным конусом $K \subset \mathbb{R}^s$.

- а) Если $\check{\rho}(A) = 0$, то ядро одного из операторов содержит некоторую граничную плоскость конуса K .

- б) Если $\hat{\rho}(A) = 0$, то пересечение ядер операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$ содержит некоторую граничную плоскость конуса K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $A_i = 0$ для некоторого i , то доказывать нечего. Пусть $A_i \neq 0$ для всех $i = 0, \dots, m-1$. Обозначим через L_i линейную оболочку множества $\text{Ker } A_i \cap \partial K$. Из леммы 5 следует, что

$$\text{Ker } A_i \cap \text{int } K = \{0\}.$$

Тогда $L_i \cap \text{int } K = \emptyset$. Далее разберем два возможных случая.

- 1) $L_i \neq \{0\}$ для некоторого $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Обозначим через M_i минимальную граничную плоскость множества L_i . Так как $A_i L_i \subset L_i$, то, применив лемму 4, получим $A_i M_i \subset M_i$. Если при этом $L_i = M_i$, то все доказано. Если же $L_i \neq M_i$, то для некоторого $y \in M_i$ имеем $A_i y \neq 0$. Далее, для произвольного множества $P \subset \mathbb{R}^s$ обозначим $P^* = \{x \in \mathbb{R}^s : \langle x, P \rangle \leq 0\}$. Для любого $x \in (A_i K)^*$ имеем $\langle A_i^* x, K \rangle \leq 0$ и, кроме того, $\langle A_i^* x, L_i \rangle = \langle x, A_i L_i \rangle = 0$, так как $L_i \subset \text{Ker } A_i$. Тогда согласно лемме 3 имеем $\langle A_i^* x, y \rangle = 0$. Итак, $0 = \langle A_i^* x, y \rangle = \langle x, A_i y \rangle$. Таким образом, $(A_i K)^* \subset (A_i y)^\perp$ и, следовательно, $K^* \subset (A_i y)^\perp$. Значит, $\text{int } K^* = \emptyset$, что противоречит невырожденности конуса K .
- 2) $L_i = \{0\}$ для любого $i = 0, \dots, m-1$. Поскольку в данном случае величина

$$\alpha_1 = \min_{\substack{x \in K, \|x\|=1 \\ i=0, \dots, m-1}} \|A_i x\|$$

положительна, имеем

$$\|A_{d_1} \cdots A_{d_\ell} y\| \geq \alpha_1^\ell \|y\|$$

для любой точки $y \in K$ и любого набора индексов $\{d_j\} \in \{0, \dots, m-1\}^\ell$. Отсюда немедленно выводим $\check{\rho}(A) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} (\min_\ell A)^{1/\ell} \geq \alpha_1 > 0$, что противоречит условию $\check{\rho}(A) = 0$.

- б) Обозначим через L линейную оболочку множества $\partial K \cap \text{Ker } A_0 \cap \cdots \cap \text{Ker } A_{m-1}$. В случае $L \neq \{0\}$ мы показываем, как и в случае а), что L совпадает со своей минимальной граничной плоскостью. Если же $L = \{0\}$, то

$$\beta_1 = \max_{i=0, \dots, m-1} \min_{\substack{x \in K \\ \|x\|=1}} \|A_i x\| > 0.$$

Значит, для любой точки $y \in K$ найдется такой индекс $j \in \{0, \dots, m-1\}$, что $\|A_j y\| \geq \beta_1 \|y\|$. Поэтому $\max_\ell A(y) \geq \beta_1^\ell \|y\|$ для любого $\ell \geq 1$. Итак, $\hat{\rho}(A) \geq \beta_1$. Противоречие завершает доказательство леммы 6.

ЛЕММА 7. Для произвольного набора операторов $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ с инвариантным конусом $K \subset \mathbb{R}^s$ найдутся такие точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in K \setminus \{0\}$, что для любого $\ell \geq 1$

- а) $\max_\ell A(z_1) \leq \hat{\rho}^\ell \|z_1\|$,
- б) $\max_\ell A(z_2) \geq \hat{\rho}^\ell \|z_2\|$,
- в) $\min_\ell A(z_3) \leq \check{\rho}^\ell \|z_3\|$,
- г) $\min_\ell A(z_4) \geq \check{\rho}^\ell \|z_4\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\hat{\rho} = 0$, то утверждение п. б) очевидно, а п. а) следует из леммы 6. Так же доказываем пп. в) и г) в случае $\check{\rho} = 0$. Поэтому при выводе а) и б) мы предполагаем, что $\hat{\rho} \neq 0$, а в случаях в) и г) считаем, что $\check{\rho} \neq 0$. Обозначим через K_1 пересечение конуса K с единичной сферой и пусть

$$\|A\| = \sup_{j=0, \dots, m-1} \|A_j\|.$$

а) Предположим обратное: для любого $x \in K \setminus \{0\}$ найдется число $\ell \in \mathbb{N}$ и набор индексов $\{d_1, \dots, d_\ell\} \in \{0, \dots, m-1\}^\ell$, для которых $\|A_{d_1} \cdots A_{d_\ell}(x)\| > \hat{\rho}^\ell \|x\|$. Далее, для каждого $i \geq 1$ обозначим

$$U_i = \{x \in K_1 : \exists \ell \leq i \text{ такое, что } \max_{\ell} A(x) > \hat{\rho}^\ell\}.$$

Имеем

$$U_1 \subset U_2 \subset \cdots \text{ и } \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = K_1.$$

Из компактности множества K_1 следует, что для достаточно большого N

$$U_N = \bigcup_{i=1}^N U_i = K_1.$$

Тогда

$$\beta_2 = \min_{x \in K_1} \max_{\ell \leq N} (\hat{\rho}^{-\ell} \max_{\ell} A(x)) > 1. \quad (17)$$

Возьмем произвольную точку $x_1 \in K \setminus \{0\}$. Применив (17), получим число $\ell_1 \leq N$ и произведение операторов $\prod_{\ell_1} = A_{d_1} \cdots A_{d_{\ell_1}}$ такие, что

$$\left\| \prod_{\ell_1} (x_1) \right\| \geq \beta_2 \hat{\rho}^{\ell_1} \|x_1\|.$$

Обозначим $x_2 = \prod_{\ell_1} x_1$ и найдем $\ell_2 \leq N$ и произведение $\prod_{\ell_2} = A_{d_{\ell_1+1}} \cdots A_{d_{\ell_1+\ell_2}}$ такие, что

$$\left\| \prod_{\ell_2} (x_2) \right\| \geq \beta_2 \hat{\rho}^{\ell_2} \|x_2\|.$$

Проделав так q раз, получим

$$\|x_q\| \geq \beta_2^{q-1} \hat{\rho}^{\ell_1 + \cdots + \ell_{q-1}} \|x_1\|,$$

из чего следует

$$\left\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} \right\| \geq \beta_2^{q-1} \hat{\rho}^{\ell_1 + \cdots + \ell_{q-1}}, \quad \ell_k \leq N, \quad k = 1, \dots, q-1.$$

Возводим обе части неравенства в степень $(\ell_1 + \cdots + \ell_{q-1})^{-1}$ и переходим к пределу при $q \rightarrow \infty$. Получаем $\hat{\rho} \geq \beta_2^{1/N} \hat{\rho}$. Противоречие завершает доказательство п. а).

б) Предположим обратное: для любой точки $x \in K \setminus \{0\}$ существует $\ell \in \mathbb{N}$, для которого $\max_{\ell} A(x) < \hat{\rho}^{\ell} \|x\|$. Для произвольного $i \geq 1$ обозначим

$$V_i = \{x \in K_1 : \exists \ell \leq i \text{ такое, что } \max_{\ell} A(x) < \hat{\rho}^{\ell}\}.$$

Ясно, что $V_1 \subset V_2 \subset \dots$ и, кроме того, $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = K_1$. Из компактности K_1 следует, что найдется число N , для которого

$$\gamma_1 = \max_{x \in K_1} \min_{\ell \leq N} (\hat{\rho}^{-\ell} \max_{\ell} A(x)) < 1. \quad (18)$$

Возьмем произвольную точку $x_1 \in K \setminus \{0\}$ и число $j > N$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{d_1, \dots, d_j\} \in \{0, \dots, m-1\}^j$. Из определения величины γ_1 следует, что существует $\ell_1 \leq N$, для которого $\max_{\ell_1} A(x_1) \leq \gamma_1 \hat{\rho}^{\ell_1} \|x_1\|$. Получаем

$$\|A_{d_{j-\ell_1+1}} \cdots A_{d_j} x_1\| \leq \gamma_1 \hat{\rho}^{\ell_1} \|x_1\|.$$

Теперь обозначаем $x_2 = A_{d_{j-\ell_1+1}} \cdots A_{d_j} x_1$ и находим число $\ell_2 < N$ такое, что

$$\max_{\ell_2} A(x_2) \leq \gamma_1 \hat{\rho}^{\ell_2} \|x_2\|.$$

Далее обозначаем $x_3 = A_{d_{j-\ell_1-\ell_2+1}} \cdots A_{d_j} x_2$ и т.д., пока не получим после i -го шага $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_i > j$. Итак,

$$\|A_{d_1} \cdots A_{d_j} x_1\| \leq \|A_{d_1} \cdots A_{d_{j-\ell_1-\dots-\ell_i}}\| \cdot \gamma_1^i \hat{\rho}^{\ell_1+\dots+\ell_i} \|x_1\|.$$

Теперь заметим, что $\|A_{d_1} \cdots A_{d_{j-\ell_1-\dots-\ell_i}}\| \leq \max(1, \|A\|^N)$. С другой стороны,

$$\hat{\rho}^{\ell_1+\dots+\ell_i} \leq \frac{\hat{\rho}^j}{\min(1, \hat{\rho}^N)}.$$

Так как $i \geq j/N - 1$, имеем неравенство

$$\|A_{d_1} \cdots A_{d_j} x_1\| \leq \frac{\max(1, \|A\|^N)}{\min(1, \hat{\rho}^N)} \cdot \hat{\rho}^j \gamma_1^{j/N-1} \|x_1\|,$$

которое выполнено для любого произведения операторов длины j и любой точки $x_1 \in K \setminus \{0\}$. Поэтому мы можем положить $\|A_{d_1} \cdots A_{d_j}\| = \max_j A$ и, более того,

$$\|A_{d_1} \cdots A_{d_j} x_1\| = \|A_{d_1} \cdots A_{d_j}\| \cdot \|x_1\|$$

(см. замечание 1). Таким образом,

$$\max_j A \leq \frac{\max(1, \|A\|^N)}{\min(1, \hat{\rho}^N)} \hat{\rho}^j \gamma_1^{j/N-1}.$$

Возведя обе части неравенства в степень j^{-1} и перейдя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим $\hat{\rho} \leq \gamma_1^{1/N} \hat{\rho}$. Противоречие завершает доказательство п. б).

в) Если найдется точка $z \in K \setminus \{0\}$ такая, что для некоторого $i \in \{0, \dots, m-1\}$ имеем $A_i z = 0$, то неравенство в) выполнено при $z_3 = z$. Если такой точки не существует, то

$$a = \min_{\substack{i=0, \dots, m-1 \\ x \in K_1}} \|A_i x\| > 0.$$

Предположив теперь, что утверждение п. в) неверно, мы, как и в доказательстве п. б), находим числа $\ell, N \in \mathbb{N}$, $\gamma_2 > 1$ такие, что $\ell \leq N$ и неравенство

$$\min_{\ell} A(x) \geq \gamma_2 \check{\rho}^{\ell} \|x\|$$

выполнено для любого $x \in K \setminus \{0\}$. Теперь возьмем произвольный $x_1 \in K \setminus \{0\}$ и произведение $A_{d_1} \cdots A_{d_j}$ длины $j > N$. Как и в п. б), строим последовательность $x_1, x_2, \dots, x_{i+1}$, для которой

$$x_{k+1} = A_{d_{j-\ell_1-\dots-\ell_k+1}} \cdots A_{d_{j-\dots-\ell_{k-1}}} x_k, \quad \|x_{k+1}\| \geq \gamma_2 \hat{\rho}^{\ell} \|x_k\|$$

при любом $k = 1, \dots, i$. Здесь обозначено $\ell_0 = 0$; i — это наибольшее целое число, для которого $\ell_1 + \dots + \ell_i \leq j$. Таким образом, $\|x_{i+1}\| \geq \gamma_2^i \check{\rho}^{\ell_1+\dots+\ell_i} \|x_1\|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|A_{d_1} \cdots A_{d_j} x_1\| &= \|A_{d_1} \cdots A_{d_{j-\ell_1-\dots-\ell_{i+1}}} x_i\| \geq a^{j-\ell_1-\dots-\ell_i} \|x_i\| \\ &\geq \gamma_2^i \check{\rho}^{\ell_1+\dots+\ell_{i-1}} a^{j-\ell_1-\dots-\ell_{i-1}} \|x_1\| \geq \frac{\min(1, a^N)}{\max(1, \check{\rho}^N)} \check{\rho}^j \gamma_2^{j/N-1} \|x_1\|. \end{aligned}$$

Полученное неравенство выполнено для любого произведения длины j , поэтому

$$\min_j A x_1 \geq \frac{\min(1, a^N)}{\max(1, \check{\rho}^N)} \check{\rho}^j \gamma_2^{j/N-1} \|x_1\|.$$

Возводя обе части неравенства в степень j^{-1} и переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, имеем $\check{\rho} \geq \gamma_2^{1/N} \check{\rho}$. Противоречие доказывает п. в).

г) Предположим обратное: для любой точки $x \in K \setminus \{0\}$ найдется число $\ell \in \mathbb{N}$ и произведение $A_{d_1} \cdots A_{d_{\ell}}$ такие, что $\|A_{d_1} \cdots A_{d_{\ell}} x\| < \check{\rho}^{\ell} \|x\|$. Теперь мы повторяем доказательство п. а), подставляя везде “max”, “ $\check{\rho}$ ”, “ $\leq$ ” вместо “min”, “ $\check{\rho}$ ”, “ $\geq$ ” соответственно. Взяв произвольную точку $x_1 \in K \setminus \{0\}$, строим последовательность $x_1, x_2, \dots$ и произведения операторов $\prod_{\ell_1}, \prod_{\ell_2}, \dots$ такие, что для любого $q \in \mathbb{N}$

$$\left\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} x_1 \right\| \leq \beta_3^{q-1} \check{\rho}^{\ell_1+\dots+\ell_{q-1}} \|x_1\|,$$

где $\beta_3 < 1$. Не ограничивая общности, предполагаем $h(x_1) > 0$. Возьмем точку $x_0 \in K$, для которой

$$\left\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} x_0 \right\| = \left\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} \right\| \cdot \|x_0\|$$

(см. замечание 1). Применив лемму 2, получим

$$\left\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} \right\| = \frac{\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} x_0 \|}{\| x_0 \|} \leq \frac{\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} x_1 \|}{\mu h(x_1)}.$$

Таким образом,

$$\left\| \prod_{\ell_{q-1}} \cdots \prod_{\ell_1} \right\| \leq \frac{1}{\mu h(x_1)} \beta_3^{q-1} \check{\rho}^{\ell_1 + \cdots + \ell_{q-1}} \| x_1 \|.$$

Возводим обе части в степень $(\ell_{q-1} + \cdots + \ell_1)^{-1}$ и переходим к пределу при $q \rightarrow \infty$. Получаем $\check{\rho} = \beta_3^{1/N} \check{\rho}$, что противоречит условию. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть дано семейство операторов $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ с инвариантным конусом $K \subset \mathbb{R}^s$. Тогда для любых $x \in \text{int } K$, $\ell \in \mathbb{N}$ имеем

- а) $\min_{\ell} A(x) \geq \check{\rho}^{\ell} \mu \gamma(x) \|x\|$;
- б) $\max_{\ell} A(x) \geq \hat{\rho}^{\ell} \mu \gamma(x) \|x\|$, где константа $\mu = \mu(K)$ определена в лемме 1;
- в) если для операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$ никакое общее собственное подпространство не является граничной плоскостью конуса K , то существует такая константа $H > 0$, что для любого $x \in K$

$$\max_{\ell} A(x) \leq H \hat{\rho}^{\ell} \|x\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из леммы 7 следует, что существует точка $z_3 \in K \setminus \{0\}$ такая, что для любого $\ell \in \mathbb{N}$

$$\min_{\ell} A(z_3) \geq \check{\rho}^{\ell} \|z_3\|.$$

Возьмем произвольный элемент $x \in \text{int } K$. Применив лемму 2 к точкам x и z_3 , получим

$$\min_{\ell} A(x) \|z_3\| \geq \mu \gamma(x) \|x\| \min_{\ell} A(z_3) \geq \mu \gamma(x) \|x\| \check{\rho}^{\ell} \|z_3\|,$$

что доказывает п. а). Пункт б) устанавливается аналогично. Докажем п. в). Лемма 6 позволяет без ограничения общности предположить, что $\hat{\rho} \neq 0$. Обозначим через U множество всех точек $y \in \mathbb{R}^s$, для которых множество $\{\hat{\rho}^{-\ell} \max_{\ell} A(y), \ell \in \mathbb{N}\}$ ограничено. Ясно, что U является общим собственным подпространством операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$. Кроме того, $U \cap K \neq \{0\}$ (это следует из п. а) леммы 7). Возможны два случая.

1. $U \cap \text{int } K \neq \emptyset$. Из леммы 2 следует, что для любого $y_0 \in U \cap \text{int } K$ и $x \in K$

$$\max_{\ell} A(y_0) \|x\| \geq \mu h(y_0) \max_{\ell} A(x).$$

Далее, как следует из определения множества U , существует константа H , для которой $\max_{\ell} A(x) \leq H \hat{\rho}^{\ell} \|x\|$.

2. $U \cap \text{int } K = \emptyset$. В данном случае $U \cap K \subset \partial K$, откуда, пользуясь леммой 7, получаем $U \cap \partial K \neq \{0\}$. Обозначим через M минимальную граничную плоскость множества $U \cap \partial K$. Согласно лемме 4 M является общим собственным подпространством операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$. Противоречие завершает доказательство предложения 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В формулировке предложения 1 напрашивается еще один пункт, без которого предложение выглядит неполным. Именно, можно предположить, что при некоторых условиях на общие собственные подпространства операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$ существует такая константа $H_1 > 0$, что для любых $\ell \in \mathbb{N}$, $x \in K$

$$\min_{\ell} A(x) \leq H_1 \check{\rho}^{\ell} \|x\|. \quad (19)$$

Однако подобное утверждение, вообще говоря, неверно. Рассмотрим следующий пример.

Возьмем два линейных оператора A_0, A_1 , действующих в $\mathbb{R}^2$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оба оператора невырождены, кроме того, они не имеют общих инвариантных подпространств. Положительный квадрант $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0\}$ является их общим инвариантным конусом. Тем не менее, утверждение (19) для данных операторов не выполнено. Действительно, так как $\rho(A_0 A_1) = 1$, то из (10) выводим, что $\check{\rho} \leq 1$. С другой стороны, если ввести в $\mathbb{R}^2$ норму $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$, получим

$$\|A_0 x\|_1 \geq \|x\|_1, \quad \|A_1 x\|_1 \geq \|x\|_1 \quad \text{для всех } x \in K.$$

Откуда $\check{\rho} \geq 1$ и, следовательно, $\check{\rho} = 1$. Далее, поскольку для каждого $x \in K$

$$A_0^2 x = 2x, \quad \|A_1^2 x\|_1 \geq \frac{3}{2} \|x\|_1, \quad (20)$$

для любого $x \in \text{int } K$ и любой последовательности из нулей и единиц $d_1 d_2 \dots$ имеем

$$A_{d_1} \dots A_{d_j} x \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty. \quad (21)$$

В самом деле, если данная последовательность содержит бесконечно много пар $(0, 0)$ или $(1, 1)$, то (21) следует из (20). С другой стороны, для любого $x \in \text{int } K$ имеем

$$(A_0 A_1)^k x \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

Итак, соотношение (19) для операторов A_0, A_1 не выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В п. б) предложения 1 условие на собственные подпространства операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$ существенно. В самом деле, рассмотрим “набор”, состоящий из одного оператора A_0 в $\mathbb{R}^2$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем тот же инвариантный конус K , что и в замечании 2. Легко видеть, что $\hat{\rho} = 1$, однако для любого $x \in \text{int } K$ $A_0^{\ell} x \rightarrow \infty$ при $\ell \rightarrow \infty$.

Верхняя оценка роста, данная в п. в) предложения 1, неудобна на практике, поскольку константа H зависит от операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$, а не только от инвариантного конуса, и, вообще говоря, может быть сколь угодно большой (см. [10]). Кроме того, в общем случае мы не имеем аналогичной оценки снизу на величину $\max_{\ell} A(x)$ (замечание 2). Эти трудности могут быть преодолены с помощью второго инвариантного конуса.

§4. Второй инвариантный конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Конус $K' \subset \mathbb{R}^s$ называется *вложенным* в данный конус K , если $(K' \setminus \{0\}) \subset \text{int } K$.

Пусть (K, K') – пара вложенных конусов (т.е. K' вложен в K). Обозначим

$$\gamma = \gamma(K, K') = \inf_{x \in K' \setminus \{0\}} \frac{h(x)}{\|x\|}.$$

Ясно, что $\gamma > 0$ и, кроме того, $\gamma(x) \geq \gamma$ для любого $x \in K'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пара (K, K') называется *парой инвариантных конусов* (инвариантной парой) набора операторов $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ если K и K' являются инвариантными конусами данного набора и K' вложен в K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если набор операторов $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ имеет инвариантную пару (K, K') , то для любых $x \in K'$, $\ell \in \mathbb{N}$ имеем

$$\check{\rho}^\ell \mu \gamma \|x\| \leq \min_\ell A(x) \leq \check{\rho}^\ell (\mu \gamma)^{-1} \|x\|, \quad (22)$$

$$\hat{\rho}^\ell \mu \gamma \|x\| \leq \max_\ell A(x) \leq \hat{\rho}^\ell (\mu \gamma)^{-1} \|x\|. \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что константа $\mu = \mu(K)$ определена в лемме 1. Эта константа зависит от конуса K . В случае евклидовой нормы $\mu = \cos(\varphi/2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Левые части неравенств (22) и (23) следуют непосредственно из предложения 1. Осталось доказать правые части. Применив лемму 7 к конусу K' , получим точку $z_3 \in K'$, для которой

$$\min_\ell A(z_3) \leq \check{\rho}^\ell \|z_3\| \quad (24)$$

при любом $\ell \in \mathbb{N}$. Теперь берем произвольный элемент $x \in K'$. Применив лемму 2 к точкам z_3 , x и к конусу K , получим

$$\mu \gamma (z_3) \|z_3\| \min_\ell A(x) \leq \|x\| \min_\ell A(z_3) \leq \check{\rho}^\ell \|z_3\| \cdot \|x\|.$$

Поскольку $\gamma(z_3) \geq \gamma$, имеем

$$\min_\ell A(x) \leq \check{\rho}^\ell (\mu \gamma)^{-1} \|x\|.$$

Правая часть неравенства (23) устанавливается аналогично.

Приведем несколько примеров инвариантных пар.

ПРИМЕР 1. Возьмем произвольный набор операторов $A = \{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ с инвариантным конусом K . Предположим, что для любого $j = 0, \dots, m-1$ множество $A_j K \setminus \{0\}$ содержится во внутренней конуса K . Обозначим

$$\overline{AK} = \text{conv}(A_0 K, \dots, A_{m-1} K).$$

Легко показать, что существует конус K' , вложенный в K и такой, что $\overline{AK} \subset K'$. Таким образом, (K, K') является инвариантной парой набора A .

ПРИМЕР 2. Предположим, что матрицы операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$ имеют только положительные элементы. Возьмем в качестве внешнего инвариантного конуса положительный октант $K = \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s : x_i \geq 0, i = 1, \dots, s\}$; тогда, как следует из предыдущего примера, существует инвариантный конус K' , вложенный в K . Итак, операторы, матрицы которых состоят из положительных элементов, всегда имеют инвариантную пару. Отметим, однако, что набор $\{A_0, A_1\}$ из замечания 2 не имеет инвариантной пары, хотя все элементы операторов A_0, A_1 неотрицательны.

ПРИМЕР 3. Теорема 2.1 из работы [14] дает достаточные условия существования инвариантной пары для стохастических матриц.

§ 5. Асимптотика функции разбиения

Теперь применим полученные результаты для оценки функции $b_{m,d}(n)$. Мы докажем, что для любой пары (m, d) существуют положительные константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, зависящие от m и d , такие, что для любого целого $\ell > 1 + \log_m d$

$$\alpha_1 \leq \max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n)n^{-\lambda_2} \leq \alpha_2 m, \quad (25)$$

$$\alpha_3 \leq \min_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n)n^{-\lambda_1} \leq \alpha_4 m, \quad (26)$$

где λ_1 и λ_2 определены равенством (3). Мы покажем, что $\lambda_1 = \log_m \check{\rho}$, $\lambda_2 = \log_m \hat{\rho}$, где $\check{\rho}$ и $\hat{\rho}$ — соответственно нижний спектральный радиус и совместный спектральный радиус подходящего набора линейных операторов. Мы вычислим эти значения для некоторых пар (m, d) , для прочих пар получим оценки. Также мы получим оценки на величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Пусть дана пара натуральных чисел (m, d) , причем $2 \leq m \leq d - 1$. Положим

$$d = km + r, \quad (27)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, \dots, m-1\}$. Для произвольного натурального n и произвольного $t_0 \in \{0, \dots, m-1\}$ рассмотрим разложение по основанию m числа $mn + t_0$:

$$mn + t_0 = \sum_{j=0}^{\ell} a_j m^j, \quad a_j \in \{0, \dots, d-1\}. \quad (28)$$

Поскольку $a_0 \equiv t_0 \pmod{m}$, имеем $a_0 = k_0 m + t_0$ для некоторого целого $k_0 \geq 0$. Следовательно,

$$n - k_0 = \sum_{j=1}^{\ell} a_j m^{j-1}. \quad (29)$$

Так как $k_0 \in \{0, \dots, \lfloor (d-1-t_0)/m \rfloor\}$, то формулы (28) и (29) устанавливают взаимно однозначное соответствие между разложениями числа $mn + t_0$ и разложениями чисел $n, n-1, \dots, n - \lfloor (d-1-t_0)/m \rfloor$. Поскольку

$$\left\lfloor \frac{d-1-t_0}{m} \right\rfloor = \begin{cases} k, & t_0 < r, \\ k-1, & t_0 \geq r, \end{cases}$$

получаем рекуррентную формулу

$$b(mn + t_0) = \begin{cases} b(n) + \dots + b(n - k + 1), & t_0 \geq r, \\ b(n) + \dots + b(n - k), & t_0 < r, \end{cases} \quad (30)$$

которую можно переписать в виде следующего матричного соотношения:

$$\begin{pmatrix} b(mn + m - 1) \\ b(mn + m - 2) \\ \vdots \\ b(mn + r) \\ b(mn + r - 1) \\ \vdots \\ b(mn) \\ b(m(n - 1) + m - 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ b(m(n - 1)) \\ b(m(n - 2) + m - 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & 1 & 0 & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & 1 & 1 & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & \dots & 1 & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & 1 & \dots & 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(n) \\ b(n - 1) \\ \vdots \\ b(n - k + 1) \\ b(n - k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Обозначим через M бесконечную матрицу в правой части равенства (31), через $(M)_{ij}$ ее элемент в i -й строке и j -м столбце, $i, j \in \mathbb{N}$. Матрица M состоит из одинаковых $(m \times (k + 1))$ -блоков следующего вида:

$$\begin{matrix} m-r \\ \vdots \\ r \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right| \\ \vdots \\ \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right| \end{array} \right\}.$$

Строки с первой по $(m - r)$ -ю имеют вид $(1, \dots, 1, 0)$ (k единиц и один нуль). Остальные строки имеют вид $(1, \dots, 1)$ ($k + 1$ единица). Таким образом, блок имеет d единиц и $m - r$ нулей. Он расположен в пересечении первых m строк и первых $k + 1$ столбцов матрицы M . Остальные элементы указанных строк матрицы M равны нулю. Следующий блок расположен в строках $m + 1, \dots, 2m$ и столбцах со второго по $(k + 2)$ -й. Остальные элементы строк $m + 1, \dots, 2m$ матрицы M равны

нулю. Далее мы снова перемещаем блок на m строк вниз и на один столбец вправо и т.д.

Теперь мы разобьем равенство (31) на m линейных соотношений в пространстве $\mathbb{R}^s$, где размерность s определяется из условия

$$s = k + \left\lceil \frac{k + r - 1}{m - 1} \right\rceil. \quad (32)$$

Рассмотрим m линейных операторов $A_0, \dots, A_{m-1}$, действующих в пространстве $\mathbb{R}^s$ и заданных с помощью матриц следующим образом:

$$(A_t)_{ij} = (M)_{i+m-t-1,j}, \quad i, j \in \{1, \dots, s\}, \quad t \in \{0, \dots, m-1\}. \quad (33)$$

Данная формула может быть интерпретирована наглядно: матрица A_t расположена в первых m столбцах и строках $m-t, \dots, m-t+s-1$ матрицы M . Читатель без труда покажет, что любая строка матрицы A_t содержит либо k , либо $k+1$ единицу подряд; остальные элементы строки равны нулю.

Рассмотрим вектор-функцию

$$v(n) = v_{m,d}(n) = (b(n), \dots, b(n-s+1))^T, \quad \text{где} \quad b(n) = \begin{cases} b_{m,d}(n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (34)$$

В частности, $v(0) = (1, 0, \dots, 0)^T$. Формулы (30) и (31) эквивалентны m равенствам

$$v(mn+t) = A_t v(n), \quad t = 0, \dots, m-1. \quad (35)$$

Итак, доказана

ЛЕММА 8. *Для любой пары (m, d) , где $2 \leq m \leq d-1$, функция $v(n) = v_{m,d}(n)$ вычисляется по формуле*

$$v(n) = A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-1}} v(0),$$

где $t_{\ell-1}, \dots, t_0$ — цифры в (обычном) разложении числа n в системе счисления по основанию m :

$$n = \sum_{j=0}^{\ell-1} t_j m^j, \quad t_j \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Лемма 8 дает точную формулу вычисления функции разбиения $b_{m,d}(n)$ для любой пары параметров m и d . Теперь формулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Для любой пары (m, d) , где $2 \leq m \leq d - 1$, существуют положительные константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, зависящие от m и d , такие, что для любого $\ell > 1 + \log_m d$

$$\alpha_1 \hat{\rho}^\ell \leq \max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) \leq \alpha_2 \hat{\rho}^\ell, \quad (36)$$

$$\alpha_3 \check{\rho}^\ell \leq \min_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) \leq \alpha_4 \check{\rho}^\ell, \quad (37)$$

где $\hat{\rho} = \hat{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1})$, $\check{\rho} = \check{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1})$, операторы $A_0, \dots, A_{m-1}$ определяются для данных параметров (m, d) с помощью формул (31) и (33).

Более того, величины $\hat{\rho}$ и $\check{\rho}$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\lfloor \frac{d}{m} \right\rfloor \leq \check{\rho} \leq \frac{d}{m} \leq \hat{\rho} \leq \left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil. \quad (38)$$

Перед доказательством теоремы сформулируем некоторые ее следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Неравенства (25) и (26) выполнены при любых $\ell > 1 + \log_m d$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой пары (m, d) , где $2 \leq m \leq d - 1$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b(n)}{\log n} &= \lambda_2 = \log_m \hat{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}), \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b(n)}{\log n} &= \lambda_1 = \log_m \check{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}); \\ \alpha_1 &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b(n) n^{-\lambda_2} \leq \alpha_2 m, \\ \alpha_3 &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b(n) n^{-\lambda_1} \leq \alpha_4 m. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любого $n > md$

$$\alpha_3 n^{\lambda_1} \leq b(n) \leq \alpha_2 m n^{\lambda_2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В доказательстве теоремы 1 мы получим оценки на величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим через $K = \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s : x_i \geq 0, i = 1, \dots, s\}$ положительный октант в $\mathbb{R}^s$. Поскольку каждая из матриц $A_0, \dots, A_{m-1}$ имеет только неотрицательные элементы, K является инвариантным конусом данного набора. Константа $\mu = \mu(K)$ в этом случае равна $\cos(\varphi/2) = \sqrt{2}/2$ (лемма 1). Как мы увидим далее, существование второго инвариантного конуса зависит от соотношения между параметрами m и d . Для некоторых пар (m, d) внутренний инвариантный конус K' существует, и мы сможем применить предложение 2. Для других пар внутреннего конуса нет, в этом случае мы применим результаты §3.

Будем говорить, что $x_1 \geq x_2$ для пары векторов $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^s$, если $x_1 - x_2 \in K$. Аналогично, для операторов B_1, B_2 , действующих в $\mathbb{R}^s$, мы скажем, что $B_1 \geq B_2$, если $(B_1 - B_2)K \subset K$ (т.е. матрица $B_1 - B_2$ имеет неотрицательные элементы).

Легко видеть, что если операторы B_1, B_2 и векторы x_1, x_2 имеют неотрицательные элементы, то

$$x_1 \geq x_2, B_1 \geq B_2 \Rightarrow B_1 x_1 \geq B_2 x_2. \quad (39)$$

Из этого, в частности, следует, что совместный спектральный радиус и нижний спектральный радиус являются неубывающими функциями от матриц с неотрицательными коэффициентами.

Приступим к доказательству теоремы 1. Предположим сначала, что операторы $A_0, \dots, A_{m-1}$ не имеют внутреннего инвариантного конуса.

Случай 1. $d \leq 2m - 1$. В данном случае $k = \lfloor d/m \rfloor = 1$, поэтому $s = k + \left\lceil \frac{k+r-1}{m-1} \right\rceil = 2$. Теперь из (33) выводим $A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Применив лемму 8 к числам $n_\ell = \sum_{t=0}^{\ell-1} r m^t$, получим $v(n_\ell) = A_r^\ell v(0) = (1, \ell)^T$. Тогда $b(n_\ell) = 1$ для любого $\ell \in \mathbb{N}$. Итак,

$$\min_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) = 1, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

следовательно, $\check{\rho} = 1, \lambda_1 = 0, \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Далее необходимо рассмотреть два подслучая.

а) $m + 2 \leq d \leq 2m - 1$. Так как $r \geq 2$, имеем $A_{r-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому неравенство $A_{r-1} \geq A_i$ выполнено для каждого $i = 0, \dots, m - 1$. Из леммы 8 и соотношения (39) следует, что

$$v(n) = A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-1}} v(0) \leq A_{r-1}^\ell v(0) = (2^{\ell-1}, 2^{\ell-1})^T.$$

Таким образом,

$$\max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) = 2^{\ell-1}.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

б) $d = m + 1$.

В этом подслучае

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остальные матрицы нашего набора меньше чем A_1 . В самом деле, если $m \geq 3$, то

$$A_{m-1} = \cdots = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, для любого натурального ℓ и любых $(t_0, \dots, t_{\ell-1}) \in \{0, \dots, m-1\}^\ell$

$$A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-1}} \leq A_{\tilde{t}_0} \cdots A_{\tilde{t}_{\ell-1}},$$

где $\tilde{t}_k = 0$, если $t_k = 0$, и $\tilde{t}_k = 1$ иначе. Получаем

$$\max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b_{m,m+1}(n) = \max_{2^{\ell-1} \leq n < 2^\ell} b_{2,3}(n).$$

Таким образом, случай $d = m + 1$ сведен к случаю $m = 2$, $d = 3$, который был разобран Б. Резником в [2]. Было, в частности, показано, что

$$\max_{2^{\ell-1} \leq n < 2^\ell} b_{2,3}(n) = u_\ell,$$

где $\{u_j\}$ – последовательность Фибоначчи: $u_0 = u_1 = 1$, $u_{j+1} = u_j + u_{j-1}$. Пользуясь известной формулой

$$u_j = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{j+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{j+1} \right),$$

закключаем, что

$$\max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b_{m,m+1}(n) = u_\ell = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^\ell + o(1), \quad \ell \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = (\sqrt{5}+1)/2$. Доказательство теоремы для $d \leq 2n-1$ завершено. Заметим теперь, что в этом случае наш набор операторов $\{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ не имеет пары инвариантных конусов, поскольку таковой нет уже у набора

$$\{A_0, A_r\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Далее мы увидим, что во всех остальных случаях, т.е. при $d \geq 2m$, инвариантная пара существует. Везде далее мы берем в качестве внешнего инвариантного конуса K положительный октант в $\mathbb{R}^s$. Однако внутренний конус K' будет своим для каждого случая.

Случай 2. $d = km$, $k \geq 2$. Здесь $r = 0$, поэтому сумма элементов в каждой строке матриц $A_0, \dots, A_{m-1}$ равна k , т.е. матрицы $k^{-1}A_0, \dots, k^{-1}A_{m-1}$ стохастические по строкам. Следовательно, $\hat{\rho} = \check{\rho} = k$. Таким образом, при $d = km$ все неравенства (38) обращаются в равенства.

Для произвольного $\beta > 1$ рассмотрим конус

$$K_\beta = \{(x_1, \dots, x_s) \in K : \max_{i=1, \dots, s} x_i \leq \beta \cdot \min_{i=1, \dots, s} x_i\}.$$

Он является инвариантным конусом для любой стохастической по строкам матрицы. Поэтому в нашем случае операторы $\{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ имеют континуальное семейство инвариантных пар $\{(K, K_\beta), \beta \in (1, +\infty)\}$. Для константы $\gamma = \gamma(K, K_\beta)$ (см. § 4) получаем

$$\gamma(K, K_\beta) = \inf_{x \in K_\beta \setminus \{0\}} \frac{h(x)}{\|x\|} = \inf_{x \in K_\beta \setminus \{0\}} \min_{i=1, \dots, s} \frac{x_i}{\|x\|} \geq \frac{1}{\beta\sqrt{s}}. \quad (40)$$

(Напомним, что норма в $\mathbb{R}^s$ евклидова.)

Перед тем как получить оценки на величины $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, докажем сначала существование инвариантных пар в остальных случаях.

Случай 3. $d \geq 2m + 1$, $r \neq 0$, $m \geq 3$. В этом случае K_β будет инвариантным конусом при любом $\beta \geq 2$. Напомним, что любая строка каждой матрицы A_j содержит либо k , либо $k+1$ последовательных единиц; будем говорить, что каждая строка является либо k -строкой, либо $(k+1)$ -строкой. Теперь нам понадобится следующее вспомогательное утверждение:

В случае 3 любая k -строка матрицы A_t имеет с любой $(k+1)$ -строкой A_t по крайней мере две общие единицы (т.е. единицы в одинаковых столбцах).

Для доказательства заметим сначала, что в случае 3 неравенство

$$\left\lceil \frac{k+r-1}{m-1} \right\rceil \leq k-1$$

выполнено для всех k и r , кроме $k=2$, $r=m-1$. Из неравенства следует, что $s \leq 2k-1$, а значит, любая k -строка и любая $(k+1)$ -строка имеют по крайней мере две общие единицы. В оставшемся случае ($k=2$, $r=m-1$) доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Возьмем теперь произвольный вектор $x \in K_\beta \setminus \{0\}$. Надо доказать, что $y = A_j x \in K_\beta$. Поскольку x имеет положительные компоненты, мы можем считать, что $\min_{i=1, \dots, s} x_i = 1$. Следовательно, $\max_{i=1, \dots, s} x_i \leq \beta$. Обозначим через y_t и y_q наименьшую и наибольшую координаты (вектора y) соответственно. Ясно, что $y_t \geq k$. Если q -я строка матрицы A_j является k -строкой, то $y_q \leq \beta k$ и, следовательно, $y \in K_\beta$. Если же она является $(k+1)$ -строкой, то она имеет по крайней мере две общие единицы со строкой y_t . Обозначим через i_1 и i_2 номера столбцов, содержащих эти единицы. Имеем $y_q \leq x_{i_1} + x_{i_2} + \beta(k-1)$. С другой стороны, $y_t \geq x_{i_1} + x_{i_2} + k - 2$. Поэтому $\beta y_t \geq y_q$, а значит, $y \in K_\beta$. Итак, $A_j K_\beta \subset K_\beta$, что и требовалось доказать.

Случай 4. $m=2$, $d=2k+1$. Это последний и наиболее трудный случай. Дело в том, что конусы K_β уже не будут инвариантными ни при каком β . Придется искать инвариантный конус с более сложной структурой.

Так как $m=2$, то $s=d-1=2k$. Набор A состоит теперь из двух матриц:

$$(A_0)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq 2j-i \leq d, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (A_1)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq 2j-i \leq d-1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (41)$$

Матрица A_0 имеет $k+1$ единицу в каждой нечетной строке и k единиц в каждой четной строке; A_1 имеет $k+1$ единицу в четных строках и k — в нечетных. Возьмем следующее семейство целочисленных векторов:

$$V = \{(x_1, \dots, x_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k} : x_i \in \{1, 2, 3, 4\}, i = 1, \dots, 2k\}.$$

Удалим из него два вектора: $a = (4, \dots, 4, 1, \dots, 1)$, $b = (1, \dots, 1, 4, \dots, 4)$ (оба состоят из k единиц и k четверок). Получим новое семейство, которое обозначим через V' . Положим

$$K' = \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i x_i : \mu_i \geq 0, x_i \in V', i = 1, \dots, N; N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Покажем теперь, что K' является инвариантным конусом набора $\{A_0, A_1\}$. Мы докажем, что $A_0 K' \subset K'$; включение $A_1 K' \subset K'$ устанавливается аналогично.

Возьмем произвольный вектор $x \in V'$. Надо доказать, что $y = A_0 x$ является положительной линейной комбинацией векторов семейства V' . Прежде всего, ясно, что $k \leq y_i \leq 4(k+1)$ для любого $i = 1, \dots, 2k$. Если $\min_{i=1, \dots, 2k} y_i \geq k+1$, то каждая координата y_i может быть представлена как сумма $k+1$ числа из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, а значит, y может быть представлен как сумма $k+1$ вектора семейства V (векторы в сумме могут совпадать). Рассмотрим теперь другой случай, когда некоторые из координат $\{y_i\}$ равны k . Если

$$\max_{i=1, \dots, 2k} y_i \leq 4k, \quad (42)$$

то y является суммой k векторов из V . Покажем, что неравенство (42) выполнено в случае $\min_{i=1, \dots, 2k} y_i = k$. Предположим сначала, что $y_{2k} = k$; тогда последние k координат вектора x суть единицы: $x_{k+1} = \dots = x_{2k} = 1$. Поскольку $x \in V'$, получаем $x \neq a$, а значит, хотя бы одна из координат $x_1, \dots, x_k$ меньше четверки. Каждая из координат y_j равна сумме не более чем $k+1$ координаты вектора x , одна из которых равна 1 (это x_{k+1}) и еще одна меньше чем 4. Следовательно, $y_j \leq 1 + 3 + 4(k-1) = 4k$.

С другой стороны, если найдется номер $j < 2k$, для которого $y_j = k$, то как минимум две координаты вектора x равны единице. Действительно, согласно формуле (41) во всех строках матрицы A_0 , исключая последнюю, на k -м и $(k+1)$ -м местах стоят единицы. Таким образом, $x_k = x_{k+1} = 1$ и, следовательно, $y_i \leq 1 + 1 + 4(k-1) = 4k-2$ для любого i . Значит, y является суммой k векторов семейства V .

Итак, образ любого вектора из V' является суммой k или $k+1$ вектора из V . Осталось показать, что эта сумма может быть взята без использования “запрещенных” векторов a и b .

Рассмотрим сначала случай суммы k векторов. Положим $x \in V'$, $y = A_0 x = v_1 + \dots + v_k$, где $v_i \in V$, $i = 1, \dots, k$. Ясно, что $y_i \in [k, 4k]$ для всех $i = 1, \dots, 2k$. Возьмем координаты y_k и y_{k+1} . Не ограничивая общности, предполагаем $y_k \leq y_{k+1}$. Теперь если $y_{k+1} \leq 3k$, то каждое из чисел y_k, y_{k+1} является суммой k чисел из множества $\{1, 2, 3\}$. Следовательно, векторы $v_1, \dots, v_k$ могут быть выбраны так, что у каждого из них k -я и $(k+1)$ -я координаты принадлежат множеству $\{1, 2, 3\}$. Значит, ни один из векторов v_i не равен a или b .

Случай $y_k \geq 2k$ рассматривается аналогично. Именно, мы показываем, что найдутся векторы $v_1, \dots, v_k \in V$ такие, что $v_1 + \dots + v_k = y$ и у каждого вектора k -я и $(k+1)$ -я координаты принадлежат множеству $\{2, 3, 4\}$. Значит, ни один из этих векторов не совпадает с a или b .

Рассмотрим теперь оставшийся случай: $y_k \leq 2k-1$, $y_{k+1} \geq 3k+1$. Положим $y_k = k + t_1$, $y_{k+1} = 4k - t_2$. Ясно, что $t_1, t_2 \leq k-1$. Как обычно, будем обозначать j -ю координату вектора v_i через $(v_i)_j$. В нашем случае векторы $v_1, \dots, v_k$ могут быть выбраны таким образом, что

$$(v_i)_k = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq t_1, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (v_i)_{k+1} = \begin{cases} 3, & k - t_2 + 1 \leq i \leq k, \\ 4 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если при этом $t_1 + t_2 \geq k$, то $a, b \notin \{v_1, \dots, v_k\}$, и все доказано. Покажем теперь, что действительно $t_1 + t_2 \geq k$. Поскольку любые две соседние строки матрицы A_0 совпадают, за исключением, разве что, одной координаты, имеем $y_{k+1} - y_k \leq 4$,

поэтому $(4k - t_2) - (k + t_1) \leq 4$. Тогда получим $t_1 + t_2 \geq 3k - 4 \geq k$, так как $k \geq 2$. Итак, случай k векторов разобран полностью.

Предположим теперь, что вектор $y = A_0 x$ является суммой $k + 1$ вектора из V , $y = v_1 + \dots + v_{k+1}$. Снова необходимо удалить векторы a и b из этой суммы. Предположим опять, что $y_{k+1} \geq y_k$. Случаи $y_k \geq 2(k + 1)$ и $y_{k+1} \leq 3(k + 1)$ рассматриваются точно так же, как и случаи $y_k \geq 2k$ и $y_{k+1} \leq 3k$ соответственно. Остается рассмотреть последний случай: $y_k \leq 2(k + 1) - 1$, $y_{k+1} \geq 3(k + 1) + 1$. Положим $y_k = (k + 1) + t_1$, $y_{k+1} = 4(k + 1) - t_2$. Поскольку $t_1, t_2 \leq k$, мы можем предположить, что векторы $v_1, \dots, v_k$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} (v_i)_k &= 2 \quad \text{для } i = 1, \dots, t_1, \\ (v_i)_{k+1} &= 3 \quad \text{для } i = (k + 1) - t_2 + 1, \dots, k + 1. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $t_1 + t_2 \geq k + 1$, это следует из неравенства $y_{k+1} - y_k \leq 4$. Далее действуем аналогично предыдущему случаю.

Итак, мы доказали, что K' является инвариантным конусом набора $\{A_0, A_1\}$. Заметим, что $V' \subset K_\beta$ при $\beta \geq 4$, следовательно, $K' \subset K_\beta$. Таким образом,

$$\gamma(K, K') \geq \gamma(K, K_\beta) \geq \frac{1}{\beta\sqrt{s}} = \frac{1}{4\sqrt{2k}}.$$

Заканчиваем доказательство теоремы 1 в случаях 2, 3 и 4. Мы установили, что операторы $A_0, \dots, A_{m-1}$ имеют инвариантную пару (K, K') тогда и только тогда, когда $d \geq 2m$. Кроме того, мы доказали, что $\gamma(K, K') \geq (\beta\sqrt{s})^{-1}$, где $\beta = 1$ при $r = 0$, $\beta = 4$ при $(m, d) = (2, 2k + 1)$, $\beta = 2$ в остальных случаях. Таким образом, во всех случаях

$$\gamma \geq \frac{1}{4\sqrt{s}}. \quad (43)$$

Будем обозначать $u = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$. Применив лемму 8, получим

$$\begin{aligned} b(n) &= \langle v(n), v(0) \rangle = \langle A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-1}} v(0), v(0) \rangle \\ &\leq \langle A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-1}} u, v(0) \rangle \leq \|A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-1}} u\| \end{aligned}$$

(норма евклидова). Далее, используя предложение 2, получаем

$$\begin{aligned} \min_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) &\leq \min_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} \|A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-2}} u\| \leq \frac{1}{\mu\gamma} \check{\rho}^{\ell-1} \|u\| = \frac{1}{\mu\gamma} \check{\rho}^{\ell-1} \sqrt{s}, \\ \max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) &\leq \max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} \|A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-2}} u\| \leq \frac{1}{\mu\gamma} \hat{\rho}^{\ell-1} \|u\| = \frac{1}{\mu\gamma} \hat{\rho}^{\ell-1} \sqrt{s}. \end{aligned}$$

Правые части неравенств (36) и (37) доказаны. Более того, мы получили оценки

$$\alpha_2 \leq \frac{\sqrt{s}}{\mu\gamma\hat{\rho}}, \quad \alpha_4 \leq \frac{\sqrt{s}}{\mu\gamma\check{\rho}}. \quad (44)$$

Для доказательства левых частей неравенств (36) и (37) заметим сначала, что для любого $n \geq s$ все координаты вектора $v(n)$ не меньше единицы. Поэтому если $q = \lceil \log_m s \rceil$, то для любых $t_0, \dots, t_q \in \{0, \dots, m - 1\}^{q+1}$

$$A_{t_0} \cdots A_{t_q} v(0) \geq u.$$

Поскольку любое число $n > md$ имеет по крайней мере $q + 1$ цифру в (обычном) разложении по основанию m , имеем

$$b(n) = \langle v(n), v(0) \rangle = \langle A_{t_0} \cdots A_{t_{\ell-1}} v(0), v(0) \rangle \geq \langle \Pi_{l-q-1} u, v(0) \rangle \geq \gamma \|\Pi_{l-q-1} u\|,$$

где $\Pi_{l-q-1} = A_{t_0} \cdots A_{t_{l-q-2}}$ в случае $l \geq q+2$ и Π_{l-q-1} — тождественный оператор в случае $l < q+2$. Итак, для произвольного $\ell > 1 + \log_m d$

$$\begin{aligned} \min_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) &\geq \gamma \min_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} \|\Pi_{l-q-1} u\| \geq \mu \gamma^2 \hat{\rho}^{\ell-q-1} \sqrt{s}, \\ \max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} b(n) &\geq \gamma \max_{m^{\ell-1} \leq n < m^\ell} \|\Pi_{l-q-1} u\| \geq \mu \gamma^2 \hat{\rho}^{\ell-q-1} \sqrt{s}. \end{aligned}$$

Таким образом, левые части неравенств (36) и (37) доказаны. Более того,

$$\alpha_3 \geq \frac{\mu \gamma^2 \sqrt{s}}{\hat{\rho}^{q+1}}, \quad \alpha_1 \geq \frac{\mu \gamma^2 \sqrt{s}}{\hat{\rho}^{q+1}}, \quad (45)$$

где $q = \lceil \log_m s \rceil$.

Докажем неравенство (38). Для каждого $j = 0, \dots, m-1$ матрица A_j имеет либо k , либо $k+1$ единицу в любой строке. Добавляя по единице в k -строки, получим некоторую матрицу A_j^+ , имеющую в каждой строке $k+1$ единицу. С другой стороны, убрав по единице из каждой $(k+1)$ -строки, получим некоторую матрицу A_j^- , имеющую в каждой строке k единиц. Ясно, что $A_j^- \leq A_j \leq A_j^+$, матрицы $k^{-1} A_j^-$ и $(k+1)^{-1} A_j^+$ стохастические по строкам. Поскольку совместный спектральный радиус и нижний спектральный радиус стохастической матрицы равны единице, имеем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}) &\leq \hat{\rho}(A_0^+, \dots, A_{m-1}^+) = k+1 = \left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil, \\ \hat{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}) &\geq \hat{\rho}(A_0^-, \dots, A_{m-1}^-) = k = \left\lfloor \frac{d}{m} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Далее, матрица $B = d^{-1}(A_0 + \dots + A_{m-1})$ также является стохастической по строкам. Поскольку

$$\check{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}) \leq \frac{d}{m} \rho(B) \leq \hat{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}),$$

получаем

$$\check{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}) \leq \frac{d}{m} \leq \hat{\rho}(A_0, \dots, A_{m-1}).$$

Неравенство (38) доказано, тем самым завершено доказательство теоремы 1.

Оценки на величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Используя (43) и подставляя $\mu = \sqrt{2}/2$ в (44), получаем

$$\alpha_2 \leq \frac{\sqrt{s}}{\hat{\rho}\mu\gamma} \leq \frac{\sqrt{s}\sqrt{2}4\sqrt{s}}{\hat{\rho}} = \frac{4\sqrt{2}s}{\hat{\rho}},$$

$$\alpha_4 \leq \frac{\sqrt{s}}{\check{\rho}\mu\gamma} \leq \frac{\sqrt{s}\sqrt{2}4}{\check{\rho}} = \frac{4\sqrt{2}s}{\check{\rho}}.$$

Далее, используя неравенства $\hat{\rho} \geq d/m, \check{\rho} \geq \lfloor d/m \rfloor$, получаем

$$\alpha_2 \leq \frac{4ms\sqrt{2}}{d}, \quad \alpha_4 \leq \frac{4s\sqrt{2}}{\lfloor d/m \rfloor}, \quad (46)$$

где $s = k + \left\lceil \frac{k+r-1}{m-1} \right\rceil$. Теперь подставим оценки (43) и $\mu = \sqrt{2}/2$ в (45):

$$\alpha_3 \geq \frac{1}{\sqrt{2}16\sqrt{s}\check{\rho}^{q+1}}, \quad \alpha_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}16\sqrt{s}\hat{\rho}^{q+1}}.$$

Наконец, подставляя $\check{\rho} \leq d/m, \hat{\rho} \leq \lceil d/m \rceil, q = \lceil \log_m s \rceil$, имеем

$$\alpha_3 \geq \frac{1}{16\sqrt{2}s} \left(\frac{d}{m} \right)^{-\lceil \log_m s \rceil - 1}, \quad (47)$$

$$\alpha_1 \geq \frac{1}{16\sqrt{2}s} \left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil^{-\lceil \log_m s \rceil - 1}. \quad (48)$$

§ 6. Показатели роста в случае $m = 2, d = 2k + 1$

Как мы упоминали во введении, Б. Резник в работе [2] нашел показатели роста λ_1, λ_2 для случая $m = 2, d = 3$ и поставил вопрос о вычислении этих показателей (в случае $m = 2$) для остальных нечетных значений параметра d . Мы решили эту проблему “в принципе”, показав, что $\lambda_1 = \log_2 \hat{\rho}(A_0, A_1), \lambda_2 = \log_2 \check{\rho}(A_0, A_1)$. Естественно возникает вопрос о вычислении значений $\hat{\rho}$ и $\check{\rho}$ для каждого нечетного $d \geq 5$.

ГИПОТЕЗА 1. Для всех пар $(2, 2k + 1), k \in \mathbb{N}$, выполнены равенства

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \max\{\rho(A_0), \sqrt{\rho(A_0 A_1)}\}, \quad (49)$$

$$\check{\rho}(A_0, A_1) = \min\{\rho(A_0), \sqrt{\rho(A_0 A_1)}\} \quad (50)$$

(через ρ обозначен обычный спектральный радиус).

Вообще говоря, проблема вычисления ССР и НСР для произвольного набора операторов чрезвычайно сложна, известные алгоритмы работают очень медленно (см., например, [9]–[11]). Если гипотеза 1 верна, то проблема (для наших матриц A_0, A_1) сводится к несимметричной проблеме собственных значений для $(2k \times 2k)$ -матриц. Значения $\hat{\rho}$ и $\check{\rho}$ в этом случае будут корнями полиномов степени $2k$, которые к тому же имеют целые коэффициенты. В частности, это будет означать, что числа $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ и $\check{\rho}(A_0, A_1)$ алгебраические.

Нам неизвестно, верна ли гипотеза 1 для всех $k \geq 2$. Мы докажем ее для некоторых значений k .

ТЕОРЕМА 2. Для каждой пары $(2, 2k + 1)$, где $1 \leq k \leq 6$, равенства (49) и (50) верны.

Перед доказательством теоремы сделаем несколько замечаний. Случай $(m, d) = (2, 3)$ был, фактически, разобран в [2]. Нам нужно рассмотреть случаи $(2, 5)$, $(2, 7)$, $(2, 9)$, $(2, 11)$ и $(2, 13)$. Для этого сначала сформулируем и докажем лемму 9 и предложение 3, представляющие, возможно, самостоятельный интерес. Эти утверждения дают новый способ вычисления ССР и НСР в некоторых специальных случаях. Далее мы применим эту технику к операторам A_0, A_1 для $k = 2, \dots, 6$. Случай каждого k будет разбираться отдельно, однако метод доказательства будет общим для всех k . Вполне вероятно, что, действуя тем же методом, можно расширить теорему 2 и на другие значения k . Однако доказать, что теорема верна *при всех натуральных k* (а это был бы действительно сильный результат), автору не удалось.

В доказательстве мы будем использовать теорему Крейна–Рутмана (см., например, [15]), согласно которой для произвольного оператора B , имеющего инвариантный конус $K \subset \mathbb{R}^s$, найдется вектор $v \in K$ такой, что $Bv = \rho(B)v$. Этот вектор мы будем называть *максимальным вектором* оператора B . Вообще говоря, оператор может иметь несколько максимальных векторов.

ЛЕММА 9. Пусть операторы B_0, B_1 имеют инвариантный конус $K \subset \mathbb{R}^s$.

- а) Если существует максимальный вектор $v_0 \in \text{int } K$ оператора B_0 и инвариантный конус $\tilde{K}$ операторов B_0, B_1 такие, что $K \subset \tilde{K}$ и $(B_0 - B_1)v_0 \in \tilde{K}$, то

$$\hat{\rho}(B_0, B_1) = \rho(B_0).$$

- б) Если существует максимальный вектор $v_1 \in \text{int } K$ оператора B_1 и инвариантный конус $\tilde{K}$ операторов B_0, B_1 такие, что $K \subset \tilde{K}$ и $(B_0 - B_1)v_1 \in \tilde{K}$, то

$$\check{\rho}(B_0, B_1) = \rho(B_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Рассмотрим множество $H_0 = \tilde{K} \cap (v_0 - \tilde{K})$. Ясно, что H_0 выпукло и что $0 \in H_0$. Если при этом H_0 неограничено, то оно содержит некоторый луч $\{ty, t \geq 0\}$, где $y \in \tilde{K} \setminus \{0\}$. Из этого следует, что $\{ty, t \geq 0\} \subset v_0 - \tilde{K}$, а значит, $v_0/t - y \in \tilde{K}$ для всех $t > 0$. Следовательно, $(-y) \in \tilde{K}$, что противоречит невырожденности конуса $\tilde{K}$. Итак, множество H_0 ограничено. Поскольку $B_i H_0 \subset \rho(B_0)H_0$ для $i = 0, 1$, то при любом $x \in H_0$ множество

$$\{\rho^{-\ell}(B_0) \max_{\ell} B(x), \ell \in \mathbb{N}\} \quad (51)$$

ограничено. Заметим, что множество H_0 имеет непустую внутренность, так как $v_0 \in \text{int } K$. Поэтому без потери общности мы считаем, что $x \in \text{int } H_0$. Объединяя (51) и п. б) предложения 1, получаем $\rho(B_0) \geq \hat{\rho}(B_0, B_1)$. Теперь применим (9) и получим окончательно $\rho(B_0) = \hat{\rho}(B_0, B_1)$.

б) Заметим сначала, что множество $H_1 = v_1 + \tilde{K}$ не содержит нуля, в противном случае $(-v_1) \in \tilde{K}$, что противоречит невырожденности конуса $\tilde{K}$. Так как $B_i H_1 \subset \rho(B_1) H_1$ для $i = 0, 1$, то для любого $x \in H_1$ множество

$$\{\rho^{-\ell}(B_1) \min B(x), \ell \in \mathbb{N}\}$$

ограничено снизу. Из этого следует, что $\check{\rho}(B_0, B_1) \geq \rho(B_1)$. Учитывая (10), получаем $\check{\rho}(B_0, B_1) = \rho(B_1)$, что завершает доказательство леммы 9.

В качестве одного из следствий леммы 9 мы формулируем предложение 3, дающее достаточные условия для выполнения соотношений

$$\hat{\rho}(B_0, B_1) = \rho(B_0), \quad \check{\rho}(B_0, B_1) = \rho(B_1). \quad (52)$$

Перед формулировкой напомним некоторые обозначения. Для конуса $K \subset \mathbb{R}^s$, вектора $x \in \mathbb{R}^s$ и оператора B соотношения $x \geq 0$ ($x > 0$), $B \geq 0$ ($B > 0$) означают, что $x \in K$ ($x \in \text{int } K$) и $BK \subset K$ ($B(K \setminus \{0\}) \subset \text{int } K$) соответственно. В частности, если $K = \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s, x_i \geq 0, i = 1, \dots, s\}$, то неравенство $x \geq 0$ ($x > 0$) означает, что вектор x имеет неотрицательные (положительные) координаты, $B \geq 0$ ($B > 0$) означает, что матрица оператора B имеет неотрицательные (положительные) компоненты. Обозначим также через I_s единичный оператор в пространстве $\mathbb{R}^s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть даны конус $K \subset \mathbb{R}^s$ и невырожденные операторы $B_0, B_1 \geq 0$, причем каждый оператор B_i имеет максимальный вектор $v_i \in \text{int } K$ ($i = 0, 1$); тогда каждое из следующих условий достаточно для выполнения соотношений (52):

- (1) существует число $r \in \mathbb{N}$ такое, что

$$B_{i_1} \cdots B_{i_r} (B_0 - B_1) v_{i_0} \geq 0$$

для всех $(i_0, \dots, i_r) \in \{0, 1\}^{r+1}$;

- (2) существуют невырожденные операторы R_0, R_1 и натуральные числа r, q, N , для которых выполнены следующие условия:

а) для каждого $i \in \{0, 1\}$ либо $R_i = I_s$, либо $R_i > 0$, и при этом $R_i^{-1} B_i^\ell R_i \geq 0$ для $\ell = q, \dots, 2q - 1$;

б) $B_{i_1} \cdots B_{i_r} (B_0 - B_1) B_{i_0}^N R_{i_0} \geq 0$ для всех $(i_0, \dots, i_r) \in \{0, 1\}^{r+1}$;

- (3) существуют невырожденный оператор $P \geq 0$ и натуральное число N , для которых выполнены следующие условия:

$$P B_i P^{-1} \geq 0, \quad P (B_0 - B_1) B_i^N \geq 0 \quad \text{для } i = 0, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) непосредственно следует из леммы 9, где

$$\tilde{K} = \bigcap_{(i_1, \dots, i_r) \in \{0, 1\}^r} (B_{i_1} \cdots B_{i_r})^{-1} K.$$

(2) В случае $R_i = I_s$ имеем $v_i \in B_i^N K = B_i^N R K$. Следовательно, неравенство $B_{i_1} \cdots B_{i_r} (B_0 - B_1) B_{i_0}^N R_{i_0} \geq 0$ влечет $B_{i_1} \cdots B_{i_r} (B_0 - B_1) v_{i_0} \geq 0$.

В случае $R_i > 0$, $R_i^{-1} B_i^\ell R_i \geq 0$, $\ell = q, \dots, 2q - 1$, возьмем множество $K_i = \text{conv}(B_i^q R_i K, \dots, B_i^{2q-1} R_i K)$. Заметим сначала, что $K_i \subset R_i K$. Так как $R_i > 0$, то конус K_i вложен в K . Кроме того, $B_i K_i \subset K_i$. Теперь, используя теорему Крейна–Рутмана, заключаем, что B_i имеет максимальный вектор $u_i \in K_i$. Не ограничивая общности, мы можем положить $v_i = u_i$. Остается заметить, что $v_i \in B_i^N K_i \subset B_i^N R_i K$. Итак, в обоих случаях имеем

$$B_{i_1} \cdots B_{i_r} (B_0 - B_1) v_i \geq 0.$$

Теперь применяем п. (1) предложения и завершаем доказательство.

(3) Поскольку множество $P^{-1}K$, содержащее K , является инвариантным конусом операторов B_0, B_1 , мы можем применить лемму 9, где полагаем $\tilde{K} = P^{-1}K$. Предложение 3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как обычно, обозначаем базисные векторы пространства $\mathbb{R}^{2k}$ через $\{e_i\}_{i=1}^{2k} = \{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T\}$. Для любого вектора $(a_1, \dots, a_{2k})^T \in \mathbb{R}^{2k}$ обозначим через $[a_1, \dots, a_{2k}]$ $(2k \times 2k)$ -матрицу, у которой i -я строка равна $(a_i, \dots, a_i)$, $i = 1, \dots, 2k$. Наконец, определим матрицу M следующим образом: $M e_j = e_{2k+1-j}$. Легко видеть, что $M^2 = I_{2k}$.

Итак, у нас есть две $(2k \times 2k)$ -матрицы A_0, A_1 , заданные соотношениями (41) и имеющие инвариантную пару (K, K') , определенную в доказательстве теоремы 1. Заметим, что $A_1 = M A_0 M$. Из этого, в частности, следует, что $\rho(A_1) = \rho(A_0)$. Более того,

$$\sqrt{\rho(A_0 A_1)} = \sqrt{\rho(A_0 M A_0 M)} = \rho(A_0 M) = \rho(M A_0).$$

Непосредственно из определения ССР имеем

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \hat{\rho}(A_0, M A_0 M) = \hat{\rho}(A_0, M A_0).$$

Аналогично, $\check{\rho}(A_0, A_1) = \check{\rho}(A_0, M A_0)$. В самом деле, для любых $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_0^{k_1} A_1^{k_2} \cdots A_1^{k_{n-1}} A_0^{k_n} &= A_0^{k_1} (M A_0 M)^{k_2} \cdots (M A_0 M)^{k_{n-1}} A_0^{k_n} \\ &= A_0^{k_1} (M A_0) A_0^{k_2-1} (M A_0) \cdots (M A_0) A_0^{k_{n-1}-1} (M A_0) A_0^{k_n-1}, \\ A_1^{k_1} A_0^{k_2} \cdots A_1^{k_{n-1}} A_0^{k_n} &= (M A_0 M)^{k_1} A_0^{k_2} \cdots (M A_0 M)^{k_{n-1}} A_0^{k_n} \\ &= (M A_0) A_0^{k_1-1} (M A_0) A_0^{k_2-1} \cdots (M A_0) A_0^{k_{n-1}-1} (M A_0) A_0^{k_n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, любое произведение операторов A_0, A_1 , оканчивающееся оператором A_0 , является произведением (с тем же числом сомножителей) операторов $A_0, M A_0$. Точно так же показываем, что любое произведение операторов A_0, A_1 , оканчивающееся оператором A_1 , является произведением (с тем же числом сомножителей) операторов $A_0, M A_0$, умноженным справа на M . Отсюда немедленно следует, что $\hat{\rho}(A_0, A_1) \leq \hat{\rho}(A_0, M A_0)$. Аналогично убеждаемся в том, что $\hat{\rho}(A_0, A_1) \geq \hat{\rho}(A_0, M A_0)$.

Таким образом, равенства (49) и (50) принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A_0, M A_0) &= \max\{\rho(A_0), \rho(M A_0)\}, \\ \check{\rho}(A_0, M A_0) &= \min\{\rho(A_0), \rho(M A_0)\}. \end{aligned}$$

По построению конуса K' (см. доказательство теоремы 1, случай 4) имеем $MK' = K'$, а также $MK = K$. Значит, (K, K') является инвариантной парой и для набора $\{A_0, MA_0\}$. Далее, нетрудно показать, что $\det A_0 = (-1)^k$ и, следовательно, операторы A_0 и MA_0 невырожденные. Теперь мы собираемся воспользоваться предложением 3, полагая $\{B_0, B_1\} = \{A_0, MA_0\}$. Однако для такого набора операторов и нашего конуса K ни одно из условий предложения 3 не выполнено. Эту неприятность мы преодолеем, перейдя к другому базису в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$. Матрицу перехода T определим следующим образом: j -я строка матрицы T равна

$$\begin{aligned} & (e_{j+k} - e_j)^T, & \text{если } 1 \leq j \leq k, \\ & (e_k)^T, & \text{если } j = k + 1, \\ & (e_{2k-j+1} - e_{3k-j+2})^T, & \text{если } k + 2 \leq j \leq 2k. \end{aligned}$$

Обратная матрица T^{-1} имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{при } i \leq k \quad (T^{-1})_{ij} &= \begin{cases} 1, & i + 1 \leq j \leq 2k - i + 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ \text{при } i \geq k + 1 \quad (T^{-1})_{ij} &= \begin{cases} 1, & i - k \leq j \leq 3k - i + 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим $F = T^{-1}A_0T$, $G = T^{-1}MA_0T$. Читатель без труда установит общий вид матриц F и G . Нам же достаточно будет того факта, что каждая из них состоит из нулей, единиц и двоек. Из этого, в частности, следует, что положительный октант K является инвариантным конусом для F и G . Заметим, наконец, что конус $T^{-1}K'$ вложен в K (так как матрица T^{-1} невырождена и имеет неотрицательные компоненты) и также является инвариантным конусом для F и G . Таким образом, набор $\{F, G\}$ имеет инвариантную пару $(K, T^{-1}K')$. По теореме Крейна–Рутмана конус $T^{-1}K'$ содержит максимальные векторы операторов F и G . Теперь мы можем применить предложение 3. Наиболее просто было бы использовать п. (3), для этого достаточно лишь предъявить подходящую матрицу P . Однако это не всегда возможно. Можно показать, что если $\rho(F) > \rho(G)$, то условия п. (3) не выполняются. В этом случае мы будем применять п. (2). Для этого достаточно выбрать подходящие матрицы R_0, R_1 и числа r, q, N . Мы не будем выписывать результаты всех матричных произведений, объем настоящей статьи не позволяет этого сделать. Все приводимые вычисления точны (так как матрицы целочисленные) и легко проверяются, например с помощью компьютера. В случае $d = 5$ мы предъявим результаты всех вычислений, в остальных случаях выпишем основные матрицы.

$d = 5$. В этом случае у нас есть две матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad MA_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем теперь матрицу перехода T и ее обратную T^{-1} :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычисляем матрицы F и G :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяем п. (3) предложения 3, где полагаем $B_0 = G$, $B_1 = F$. Предъявляем матрицу P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала проверяем неравенства $PB_iP^{-1} \geq 0$, $i = 0, 1$. Действительно,

$$PB_0P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PB_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $N = 7$ имеем

$$P(B_0 - B_1)B_0^7 = \begin{pmatrix} 74 & 20 & 35 & 107 \\ 76 & 22 & 18 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(B_0 - B_1)B_1^7 = \begin{pmatrix} 198 & 80 & 1 & 9 \\ 176 & 110 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A_0, MA_0) &= \hat{\rho}(F, G) = \rho(G) = \rho(MA_0), \\ \check{\rho}(A_0, MA_0) &= \check{\rho}(F, G) = \rho(F) = \rho(A_0), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 2 в случае $d = 5$.

$d = 7$. Имеем

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим п. (2) предложения 3. Положим $B_0 = F$, $B_1 = G$, $R_0 = [13, 8, 2, 16, 11, 5] + 3I_6$, $R_1 = I_6$, $r = 3$, $q = 2$, $N = 10$. Напомним, что I_{2k} — единичная $(2k \times 2k)$ -матрица, через $[a_1, \dots, a_{2k}]$ обозначается $(2k \times 2k)$ -матрица, у которой i -я строка равна $(a_i, \dots, a_i)$, $i = 1, \dots, 2k$. Проверив следующие 18 неравенств

$$R_0^{-1}B_0^2R_0 \geq 0, \quad R_0^{-1}B_0^3R_0 \geq 0, \\ B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}(B_0 - B_1)B_{i_0}^{10}R_{i_0} \geq 0, \quad (i_0, \dots, i_3) \in \{0, 1\}^4,$$

получим

$$\hat{\rho}(A_0, MA_0) = \hat{\rho}(F, G) = \rho(F) = \rho(A_0), \\ \check{\rho}(A_0, MA_0) = \check{\rho}(F, G) = \rho(G) = \rho(MA_0),$$

что завершает доказательство в случае $d = 7$.

$d = 9$. Применяем п. (3) предложения 3 к матрицам $B_0 = G$, $B_1 = F$ и

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$PB_0P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PB_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь полагаем $N = 13$ и проверяем, что

$$\begin{aligned} P(B_0 - B_1) B_0^{13} &\geq 0, \\ P(B_0 - B_1) B_1^{13} &\geq 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A_0, M A_0) &= \hat{\rho}(F, G) = \rho(G) = \rho(M A_0), \\ \check{\rho}(A_0, M A_0) &= \check{\rho}(F, G) = \rho(F) = \rho(A_0). \end{aligned}$$

$d = 11$. Применяем п. (2) предложения 3 к матрицам $B_0 = F$, $B_1 = G$, $R_0 = [36, 29, 20, 12, 3, 41, 33, 24, 16, 8] + 5I_{10}$, $R_1 = I_{10}$ и числам $r = 3$, $q = 4$, $N = 12$.

Проверяя 4 неравенства

$$R_0^{-1} B_0^\ell R_0 \geq 0, \quad \ell = 4, 5, 6, 7,$$

и 16 неравенств

$$\begin{aligned} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} (B_0 - B_1) B_1^{12} &\geq 0, \quad B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} (B_0 - B_1) B_0^{12} R_0 \geq 0, \\ (i_1, i_2, i_3) &\in \{0, 1\}^3, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A_0, M A_0) &= \hat{\rho}(F, G) = \rho(F) = \rho(A_0), \\ \check{\rho}(A_0, M A_0) &= \check{\rho}(F, G) = \rho(G) = \rho(M A_0). \end{aligned}$$

$d = 13$. Применяем п. (2) предложения 3 к матрицам $B_0 = F$, $B_1 = G$, $R_0 = [15, 12, 9, 6, 4, 1, 16, 13, 11, 8, 5, 2] + 7I_{12}$, $R_1 = I_{12}$ и числам $r = 3$, $q = 4$, $N = 16$.

Проверяя 4 неравенства

$$R_0^{-1} B_0^\ell R_0 \geq 0, \quad \ell = 4, 5, 6, 7,$$

и 16 неравенств

$$B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} (B_0 - B_1) B_1^{16} \geq 0, \quad B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} (B_0 - B_1) B_0^{16} R_0 \geq 0,$$

где $(i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A_0, M A_0) &= \hat{\rho}(F, G) = \rho(F) = \rho(A_0), \\ \check{\rho}(A_0, M A_0) &= \check{\rho}(F, G) = \rho(G) = \rho(M A_0). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Теперь мы можем предъявить значения $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ и $\check{\rho}(A_0, A_1)$ для нечетных $d \leq 13$.

$d = 3$.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(A_0, A_1) &= \sqrt{\rho(A_0 A_1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.61803 \dots, \\ \check{\rho}(A_0, A_1) &= \rho(A_0) = 1 \quad (\text{см. [2]}). \end{aligned}$$

$$d = 5.$$

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \sqrt{\rho(A_0 A_1)} = \text{root}(z^4 - 2z^3 - 2z^2 + 2z - 1) = 2.53861 \dots,$$

$$\check{\rho}(A_0, A_1) = \rho(A_0) = \sqrt{2} + 1 = 2.41421 \dots$$

(Через $\text{root}(p(z))$ обозначен наибольший по модулю корень многочлена $p(z)$. Мы применяем этот символ лишь для многочленов, у которых максимальный корень единственный.)

$$d = 7.$$

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \rho(A_0) = \frac{1}{6}(332 + 12\sqrt{321})^{1/3} + \frac{20}{3(332 + 12\sqrt{321})^{1/3}} + \frac{4}{3}$$

$$= 3.51154 \dots,$$

$$\check{\rho}(A_0, A_1) = \sqrt{\rho(A_0 A_1)} = \text{root}(z^5 - z^4 - 7z^3 - 5z^2 - 3z - 1) = 3.49189 \dots$$

$$d = 9.$$

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \sqrt{\rho(A_0 A_1)} = \text{root}(z^8 - 3z^7 - 9z^6 + 9z^5 + 5z^4 - z^3 - z^2 - z + 1)$$

$$= 4.50309 \dots,$$

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \rho(A_0) = \frac{1}{6}(908 + 12\sqrt{993})^{1/3} + \frac{44}{3(908 + 12\sqrt{993})^{1/3}} + \frac{4}{3}$$

$$= 4.49449 \dots$$

$$d = 11.$$

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \rho(A_0) = \text{root}(z^4 - 5z^3 - 3z^2 + z + 1) = 5.50589 \dots,$$

$$\check{\rho}(A_0, A_1) = \sqrt{\rho(A_0 A_1)} = \text{root}(z^{10} - 4z^9 - 12z^8 + 20z^7 + 42z^6 - 1) = 5.49704 \dots$$

$$d = 13.$$

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \rho(A_0) = \text{root}(z^6 - 8z^5 + 10z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 1) = 6.50216 \dots,$$

$$\check{\rho}(A_0, A_1) = \sqrt{\rho(A_0 A_1)}$$

$$= \text{root}(z^{12} - 4z^{11} - 20z^{10} + 20z^9 + 28z^8 + 4z^7 + 8z^6 + 4z^4 + 4z^3 - 1)$$

$$= 6.49894 \dots$$

Теорема 2 позволяет найти в явном виде последовательности чисел n , которые доставляют верхний предел λ_2 и нижний предел λ_1 в равенстве (3). Возьмем последовательности: $x_r = 4^r$, $y_r = (4^{r+1} - 1)/3$. Из леммы 8 следует:

$$v(x_r) = A_0^{2r} A_1 v(0), \quad v(y_r) = (A_1 A_0)^r A_1 v(0),$$

где $v(n) = (b_{2,d}(n), \dots, b_{2,d}(n - 2k + 1))^T$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 b_{2,d}(x_r)}{\log_2 x_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \log_2 \|A_0^{2r} A_1\|^{\frac{1}{2r+1}} = \log_2 \rho(A_0),$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 b_{2,d}(y_r)}{\log_2 y_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \log_2 \|(A_1 A_0)^r A_1\|^{\frac{1}{2r+1}} = \log_2 \sqrt{\rho(A_0 A_1)}.$$

Итак, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. При $k = 1, 2, 4$ верхний предел λ_2 и нижний предел λ_1 достигаются на последовательностях $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$ соответственно. При $k = 3, 5, 6$ пределы λ_2 и λ_1 достигаются на последовательностях $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно.

Автор выражает благодарность профессору МГУ С. В. Конягину за постоянное внимание к работе. Основные результаты статьи были получены во время работы в Институте высших исследований (Institute for Advanced Study, Princeton, USA) в 1998 году. Автор благодарит Институт за теплый прием и всяческое содействие в работе.

Список литературы

1. Euler L. Introductio in analysin infinitorum // Opera Omnia Series Prima Opera Math. V. 8. Leipzig: Teubner, 1922.
2. Reznick B. Some binary partition functions. Analytic number theory. Proc. Conf. in Honor of Paul T. Bateman, Urbana/IL (USA), 1989 // Prog. Math. 1990. V. 85. P. 451–477.
3. Stern M. A. Über eine zahlentheoretische Funktion // J. für Math. 1858. V. 55. P. 193–220.
4. Klosinsky L. F., Alexanderson G. L., Hillman A. P. The William Lowell Putman mathematical competition // Amer. Math. Monthly. 1984. V. 91. P. 487–495.
5. Mahler K. On a special functional equation // J. London Math. Soc. 1940. V. 15. № 2. P. 115–123.
6. de Bruijn N. G. On Mahler's partition problem // Indag. Math. (N.S.) 1948. V. 10. P. 210–220.
7. Knuth D. E. An almost linear recurrence // Fibonacci Quart. 1966. V. 4. P. 117–128.
8. Rota G. C., Strang G. A note on the joint spectral radius // Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Verh. Afd. Natuurk. Eerste Reeks. 1960. V. 63. P. 379–381.
9. Lagarias J. C., Wang Y. The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices // Linear Algebra Appl. 1995. V. 214. P. 17–42.
10. Протасов В. Ю. Совместный спектральный радиус и инвариантные множества нескольких линейных операторов // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. С. 205–271.
11. Berger M. A., Wang Y. Bounded semi-groups of matrices // Linear Algebra Appl. 1992. V. 166. P. 21–27.
12. Collela D., Heil C. Characterizations of scaling functions // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1994. V. 15. P. 1–23.
13. Daubechies I., Lagarias J. C. Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. № 4. P. 1031–1079.
14. Micchelli C. A., Prautzsch H. Uniform refinement of curves // Linear Algebra Appl. 1989. V. 114/115. P. 841–870.
15. Schaefer H. H., Wolff M. P. Topological vector spaces. New York: Springer-Verlag, 1999.
16. Churchhouse R. F. Congruence properties of the binary partition function // Proc. Comb. Phil. Soc. 1969. V. 66. P. 371–376.
17. Tantorri A. Sul numero delle partizioni d'un numero in potenze di 2 // Atti. Accad. Naz. Lincei. 1918. V. 27. P. 399–403.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: protasov@dionis.iasnet.ru

Поступила в редакцию
23.06.1999