Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Романов, Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 3, 99–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:18:14

УДК 517.95

А. В. Романов

Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений

Для широкого класса полулинейных параболических уравнений с компактным аттрактором $\mathcal{A}$ в банаховом пространстве E вопрос о возможности описания предельной фазовой динамики (динамики на $\mathcal{A}$) системой обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^N$ решен в чисто топологических терминах. Установлено, что предельная динамика параболического уравнения конечномерна тогда и только тогда, когда его аттрактор можно вложить в достаточно гладкое конечномерное подмногообразие $\mathcal{M} \subset E$. Получен ряд других критериев конечномерности предельной динамики:

- а) векторное поле уравнения удовлетворяет на $\mathcal{A}$ условию Липшица;
- б) фазовый полупоток расширяется на $\mathcal{A}$ до липшицева потока;
- в) аттрактор $\mathcal{A}$ обладает липшицевой конечномерной декартовой структурой.

Показано также, что векторное поле полулинейного параболического уравнения всегда гёльдерово на аттракторе.

Библиография: 19 названий.

Введение

Многие нестационарные задачи математической физики можно записать в виде диссипативного полулинейного параболического уравнения

$$\partial_t u = -Au + F(u) \quad (1)$$

в банаховом пространстве E с нормой $|\cdot|$. Здесь $u(t) \in E$ и $\partial_t u$ — сильная производная по t , A — линейный секториальный оператор в E с плотной областью определения $D(A)$, компактной резольвентой и спектром в правой полуплоскости. Считаем, что при некотором $\alpha \in [0, 1)$ нелинейная функция $F \in C^2(E^\alpha, E)$, где $E^\alpha = D(A^\alpha)$ с нормой $|u|_\alpha = |A^\alpha u|$. Предполагаем также, что уравнение (1) порождает в E^α полупоток $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ класса C^2 с компактным аттрактором $\mathcal{A}$ — максимальным ограниченным инвариантным множеством, равномерно притягивающим при $t \rightarrow +\infty$ шары E^α .

Идея о конечномерном поведении при большом времени решений параболических уравнений восходит к работе Хопфа [1]. В современном понимании речь идет об эквивалентности, в том или ином смысле, асимптотической (при $t \rightarrow +\infty$) динамики уравнения (1) и некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в $\mathbb{R}^N$. В наших условиях аттрактор $\mathcal{A}$ имеет конечную фрактальную размерность, что следует непосредственно из известного результата Манэ [2] об инвариантных множествах гладких компактных отображений в пространствах Банаха. При этом, однако, структура $\mathcal{A}$ может быть весьма нерегулярной, так что

одной лишь конечномерности аттрактора уравнения (1) еще мало для того, чтобы нашлось ОДУ с аналогичной динамикой при $t \rightarrow +\infty$.

Более радикальные подходы к проблеме конечномерного описания асимптотической динамики параболических уравнений связаны с концепцией инерциального многообразия – гладкой конечномерной инвариантной поверхности $\mathcal{M} \subset E^\alpha$, содержащей аттрактор и экспоненциально притягивающей при $t \rightarrow +\infty$ все решения $u(t)$. Наличие такого многообразия (с надлежащим декартовым строением) позволяет легко построить инерциальную форму – ОДУ в $\mathbb{R}^N$, полностью описывающее поведение при большом времени решений исходной задачи. Теория инерциальных многообразий предъявляет довольно жесткие (см., например, [3]–[5]) требования к спектральным свойствам линейной части (1), что ограничивает ее область приложений.

В настоящей работе обсуждается промежуточная между конечномерностью аттрактора и существованием инерциального многообразия характеристика эволюционных уравнений. Скажем, что уравнение (1) обладает *конечномерной предельной динамикой*, если найдется ОДУ

$$\dot{x} = h(x) \quad (2)$$

с липшицевым векторным полем $h(x)$ и фазовым потоком $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^N$, а также инвариантный для $\{S_t\}$ компакт $V \subset \mathbb{R}^N$ такие, что полупотоки $\{\Phi_t\}$ на аттракторе $\mathcal{A}$ и $\{S_t\}_{t \geq 0}$ на V липшиц-сопряжены. Требуется, таким образом, чтобы предельные режимы исходной задачи “вкладывались” в предельные режимы некоторого ОДУ в $\mathbb{R}^N$. Фактически ОДУ (2) описывает динамику уравнения (1) на $\mathcal{A}$. Наличие инерциального многообразия влечет для (1) и конечномерность предельной динамики (динамики на аттракторе).

Основной результат статьи (теорема 1.5) состоит в том, что условием, обеспечивающим конечномерность предельной динамики уравнения (1), оказывается возможность вложения аттрактора $\mathcal{A}$ в достаточно гладкое конечномерное подмногообразие $\mathcal{M} \subset E^\alpha$. Более точно, предельная динамика конечномерна, если $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – компактное C^2 -подмногообразие конечной размерности в E^α . Обратное утверждение справедливо с условием гладкости $\mathcal{M} \in \text{Lip}$ вместо $\mathcal{M} \in C^2$ при небольшом дополнительном ограничении на оператор A в (1).

Таким образом, для всякого уравнения вида (1) реализуется по крайней мере одна из следующих возможностей:

- а) динамика на $\mathcal{A}$ конечномерна;
- б) аттрактор $\mathcal{A}$ не содержится ни в каком конечномерном C^2 -многообразии.

Второе предположение выглядит довольно экзотическим. Во всяком случае примера параболического уравнения со столь сложной структурой аттрактора на настоящий момент нет. Все что известно – это пример [6] скалярного уравнения реакции-диффузии в кубе $\mathbb{R}^4$, не обладающего нормально-гиперболическим инерциальным многообразием класса C^1 . Для полулинейных гиперболических уравнений возможность ситуации б) фактически следует из результатов [7], хотя при этом весьма существенна специфика задач данного типа. С другой стороны, из недавних результатов Фойяша и Олсона [8] следует, что в гильбертовом пространстве любой компакт конечной фрактальной размерности можно вложить в конечномерное гёльдерово многообразие.

Далее, в работе установлено (теорема 1.6) несколько альтернативных критериев конечномерности предельной динамики уравнения (1). Один из них – условие Липшица $|G(u) - G(v)|_\alpha \leq K|u - v|_\alpha$ для векторного поля $G = -A + F$ на аттракторе $\mathcal{A}$. Другой критерий заключается в том, что полупоток $\{\Phi_t\}$ на $\mathcal{A}$ должен быть инъективным и расширяться до липшицева в E^α -метрике потока. Третий критерий конечномерности предельной динамики есть требование к аттрактору иметь липшицеву декартову структуру над низшими модами оператора A . Иными словами, при некотором $a > 0$ для конечномерного спектрального проектора P , отвечающего части спектра оператора A с $\operatorname{Re} \lambda \leq a$, должна иметь место оценка $|u - v|_\alpha \leq K|P(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{A}$, где $K = K(a)$. Еще один критерий сводится к аналогичной оценке для произвольного конечномерного проектора P , ограниченного в E^α (а также в $E^{\alpha-1}$, если E нереклексивно), и последний – к эквивалентности на $\mathcal{A}$ метрик пространств E^α и $E^{\alpha-1}$, где $E^{\alpha-1}$ – пополнение E по норме $|A^{\alpha-1}u|$. Поясним, что ряд заключений теоремы 1.6 справедлив при таком же, как и в теореме 1.5, ограничении на линейный оператор A (в гильбертовом случае годятся, например, все операторы с “ведущей” нормальной частью).

В связи с первым из перечисленных критериев конечномерности предельной динамики (векторное поле – класса Липшица на $\mathcal{A}$) представляет интерес теорема 4.1, согласно которой для уравнений вида (1) векторное поле $G = -A + F$ всегда гёльдерово на аттракторе в E^α -метрике с показателем $\beta = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)$. Отметим, что система Навье–Стокса с достаточно регулярной внешней силой на двумерном торе Ω допускает оценку $|G(u) - G(v)|_\alpha \leq K|u - v|_\alpha^\beta$ для $u, v \in \mathcal{A}$ при любом $\beta < 1$ и $K = K(\beta, \mathcal{A})$. Здесь E – надлежащее подпространство в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ и $\alpha > 1/2$.

§1. Основные результаты

Итак, в бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве E , снабженном нормой $|\cdot|$, рассматривается эволюционное уравнение (1) с линейным оператором A и нелинейностью F . Замкнутый оператор A с плотной областью определения $D(A) \subset E$ предполагается секториальным, т.е. $(-A)$ порождает в E аналитическую полугруппу ограниченных операторов $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$. Здесь и далее используются (иногда без ссылок) сведения о полулинейных параболических уравнениях из [9]. Для секториального оператора A со спектром $\sigma(A)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (будем записывать $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$) можно корректно определить степени A^θ при всех $\theta \in \mathbb{R}$ и соответствующую шкалу банаховых пространств $\{E^\theta\}$, полагая: $E^\theta = D(A^\theta)$ при $\theta \geq 0$ и E^θ – пополнение E по норме $|A^\theta u|$ при $\theta < 0$. В обоих случаях пространства E^θ наделяются нормой графика $|u|_\theta = |A^\theta u|$. Заметим, что если пространство E гильбертово, то и все E^θ гильбертовы. При $\nu < \theta$ вложение $E^\theta \subset E^\nu$ плотно и непрерывно:

$$|u|_\nu \leq c(\nu, \theta)|u|_\theta \quad (3)$$

для $u \in E^\theta$. Пусть также при некотором $0 \leq \alpha < 1$ функция $F: E^\alpha \rightarrow E$ дважды непрерывно дифференцируема ($F \in C^2(E^\alpha, E)$).

Перечисленные требования к A и F обеспечивают, вообще говоря, лишь локальную (по $t > 0$) разрешимость в E^α уравнения (1) с начальным условием $u(0) \in E^\alpha$.

Мы, однако, будем постулировать диссипативность (1) в E^α . Это означает существование в E^α непрерывного полупотока $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$, $\Phi_t u_0 = u(t)$ с $u_0 = u(0)$, и наличие в E^α такого ограниченного множества U , что $\Phi_t B \subset U$ для всякого шара $B \subset E^\alpha$ и $t > \tau(B)$. При этом оказывается, что $\{\Phi_t\}$ – полупоток класса C^2 в E^α и $\Phi_t u \in E^1$ для $u \in E^\alpha$, $t > 0$. Если же еще оператор A дискретен (имеет компактную резольвенту), а функция F ограничена на шарах $B \subset E^\alpha$, то при $t > \tau(B)$ эволюционные операторы Φ_t компактны на B .

Таким образом, принимаются следующие основные предположения о коэффициентах и динамике уравнения (1).

(Н1) Линейный оператор A секториален, дискретен и имеет счетный спектр $\sigma(A)$ с $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$.

(Н2) При некотором $\alpha \in [0, 1)$ функция $F \in C^2(E^\alpha, E)$ и ограничена на шарах E^α .

(Н3) Уравнение (1) диссипативно в E^α .

Отметим, что $|\arg \lambda| < \varphi < \pi/2$ для $\lambda \in \sigma(A)$ с $\varphi = \varphi(A)$.

Множество $\mathcal{N} \subset E^\alpha$ называем *инвариантным*, если $\Phi_t \mathcal{N} = \mathcal{N}$ для любого $t > 0$. В условиях (Н1)–(Н3) полупоток $\{\Phi_t\}$ обладает компактным максимальным инвариантным множеством – аттрактором $\mathcal{A} \subset E^\alpha$ (см. в этой связи [4; §2]). Каждое инвариантное множество $\mathcal{N} \subset E^1$ (в частности $\mathcal{A} \subset E^1$), а если $\mathcal{N}$ ограничено в E^α , то $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$.

Согласно предположению (Н2) функция $F: E^\alpha \rightarrow E$ локально липшицева, а значит,

$$|F(u) - F(v)| \leq L|u - v|_\alpha \quad (4)$$

на всяком компакте $\mathcal{K} \subset E^\alpha$ с $L = L(\mathcal{K})$.

Далее, для произвольных метрических пространств V_1 и V_2 обозначим через $\operatorname{Lip}(V_1, V_2)$ класс липшицевых отображений V_1 в V_2 . Непрерывный поток $\{S_t\}$ на пространстве V с метрикой ρ называем *липшицевым*, если $S_t \in \operatorname{Lip}(V, V)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. В этом случае (см. [10; п. 8А.10])

$$\rho(S_t x, S_t y) \leq K e^{\omega|t|} \rho(x, y) \quad (5)$$

для $x, y \in V$ и $t \in \mathbb{R}$ с постоянными $K \geq 1$ и $\omega \geq 0$, не зависящими от (x, y, t) . Хорошо известно, что ОДУ $\dot{x} = h(x)$ с $h \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ порождает в $\mathbb{R}^N$ липшицев поток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{K}$ – инвариантный компакт в E^α . Скажем, что *динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна*, если при некотором $N \geq 1$ найдутся ОДУ $\dot{x} = h(x)$ с липшицевым векторным полем $h(x)$ в $\mathbb{R}^N$ и фазовым потоком $\{S_t\}$, а также липшицево вложение $g: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^N$ такие, что $g\Phi_t u = S_t g u$ для $u \in \mathcal{K}$ и $t \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из данного определения сразу следует, что эволюционные операторы Φ_t инъективны на $\mathcal{K}$ при $t > 0$. Полагая $\Phi_{-t} = g^{-1} S_{-t} g$, получаем липшицев поток $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ на $\mathcal{K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Будем говорить, что *предельная динамика уравнения (1) конечномерна*, если конечномерна динамика на аттракторе $\mathcal{A}$.

Пусть далее I – тождественный оператор в пространствах Банаха, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_\theta$ – нормы ограниченных линейных операторов в E и E^θ . Упорядочим множество

$\{\mu = \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ по возрастанию ($0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$). Обозначим через P_n ограниченный в E спектральный проектор оператора A , отвечающий части спектра с $\operatorname{Re} \lambda \leq \mu_n$ (см. [11; п. 3.2.2]), и пусть $Q_n = I - P_n$. Проектор P_n конечномерен (ранга $k \geq n$) и $P_n A = A P_n$ на $D(A) = E^1$. Конечномерное подпространство $P_n E$ порождено собственными и присоединенными векторами оператора A , так что для любого $\theta > 0$ имеем: $P_n E = P_n E^\theta \subset E^\theta$ и P_n, Q_n — ограниченные проекторы в E^θ (см. (3)). Важно отметить, что P_n и Q_n коммутируют с операторами e^{-tA} при $t > 0$. Это следует, например, из стандартного представления e^{-tA} как сильного предела при $m \rightarrow \infty$ ограниченных линейных операторов $(I + m^{-1}tA)^{-m}$ в E .

Известны оценки [9; § 1.5]:

$$|e^{-tA}u|_\alpha \leq M(n, \alpha, \omega_n) t^{-\alpha} e^{-\omega_n t} |u| \quad (6)$$

для $n \geq 1$, $u \in Q_n E$ и произвольных $\omega_n \in (0, \mu_{n+1})$. В некоторых дальнейших формулировках придется считать, что для линейного оператора A справедливо дополнительное

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.4. Найдется последовательность положительных чисел $\omega_n < \mu_{n+1}$ таких, что $\omega_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\inf_{n \geq 1} \omega_n^{\alpha-1} M(n, \alpha, \omega_n) \|Q_n\| = 0, \quad (7)$$

где $M(n, \alpha, \omega_n)$ — минимальная константа в (6).

Если пространство E гильбертово и оператор A самосопряжен, то $\|Q_n\| = 1$ и прямое вычисление дает $M(n, \alpha, \omega_n) \leq (\alpha \mu_{n+1} / (e\varepsilon))^\alpha$ с $\varepsilon = \mu_{n+1} - \omega_n$, так что предположение 1.4 выполнено, например, с $\omega_n = \mu_{n+1}/2$. То же верно и для нормального оператора A . В общем случае, однако, величины $\|Q_n\|$ и $M(n, \alpha, \omega_n)$ могут иметь любой порядок роста по n и ω_n в зависимости от спектральных свойств A .

Основной результат статьи выглядит так.

ТЕОРЕМА 1.5. Если аттрактор $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — компактное конечномерное C^2 -подмногообразие в E^α , то предельная динамика уравнения (1) конечномерна. Обратно, если предельная динамика (1) конечномерна, оператор A удовлетворяет предположению 1.4 и P_n — его спектральные проекторы, то аттрактор $\mathcal{A}$ есть часть конечномерного липшицева многообразия $\mathcal{M}$ в E^α , представляющего собой график функции $f \in \operatorname{Lip}(P_n E^\alpha, Q_n E^\alpha)$ при некотором $n \geq 1$ и $Q_n = I - P_n$.

Заключения теоремы справедливы и с заменой $\mathcal{A}$ на любой инвариантный компакт $\mathcal{K} \subset E^\alpha$, если говорить о “конечномерной динамике на $\mathcal{K}$ ” в смысле определения 1.1.

Пусть $G(u) = -Au + F(u)$ — векторное поле уравнения (1). Если $\mathcal{N}$ — инвариантное множество в E^α , то $G(u) \in E^\theta$ с любым $\theta < 1$ для $u \in \mathcal{N}$ (см. [9; теорема 3.5.2]).

Сформулируем теперь предложение, дающее несколько различных необходимых и достаточных условий конечномерности динамики (1) на произвольном инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ и, в частности, на аттракторе $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть оператор A удовлетворяет предположению 1.4 и $\mathcal{K}$ – инвариантный компакт в E^α . Тогда следующие утверждения равносильны.

- (FD) Динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна.
- (VF) $|G(u) - G(v)|_\alpha \leq C|u - v|_\alpha$ на $\mathcal{K}$ с $C = C(\mathcal{K})$.
- (Fl) Полупоток $\{\Phi_t\}$ на $\mathcal{K}$ инъективен и расширяется до липшицева в E^α -метрике потока.
- (GrF) При некотором $n \geq 1$ для спектрального проектора P_n справедлива оценка $|u - v|_\alpha \leq C|P_n(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{K}$ с $C = C(\mathcal{K}, n)$.
- (Gr) Найдется конечномерный проектор P , ограниченный в E^α ($u \in E^{\alpha-1}$, если E нерефлексивно), такой, что $|u - v|_\alpha \leq C|P(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{K}$ с $C = C(\mathcal{K}, P)$.
- (EM) Метрики E^α и $E^{\alpha-1}$ на $\mathcal{K}$ эквивалентны.

В случае $\mathcal{K} = \mathcal{A}$ теорема дает пять различных критериев конечномерности предельной динамики уравнения (1). Условие (VF) означает, что векторное поле G липшицево на $\mathcal{K}$. Условие (EM) сводится (см. (3)) к оценке $|A(u - v)|_{\alpha-1} \leq C|u - v|_{\alpha-1}$ на $\mathcal{K}$. Согласно условию (GrF) отображение $P_n: \mathcal{K} \rightarrow P_n E^\alpha$ есть липшицево вложение, откуда следует, что $\mathcal{K}$ есть часть липшицева графика над $P_n E^\alpha$. Смысл условия (Gr) – тот же, но с заменой спектрального проектора P_n на конечномерный проектор общего вида.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Фактически в теореме 1.6 устанавливаются замкнутый логический цикл (VF) $\rightarrow$ (Fl) $\rightarrow$ (GrF) $\rightarrow$ (Gr) $\rightarrow$ (EM) $\rightarrow$ (VF) и импликации (FD) $\rightarrow$ (Fl), (Gr) + (VF) $\rightarrow$ (FD). Подчеркнем, что ограничение 1.4 на оператор A используется при этом лишь в переходе (Fl) $\rightarrow$ (GrF).

В связи с необходимостью проверки предположения 1.4 отметим, что для данного уравнения (1) представление векторного поля в виде суммы линейной части $(-A)$ и нелинейности F неединственно. Пусть $A_0 = A - TA^\alpha$, где T – ограниченный линейный оператор в E , причем спектр $\sigma(A_0)$ счетен и $\operatorname{Re} \sigma(A_0) > 0$. Из результатов [9; § 1.4] следует, что оператор A_0 с областью определения $D(A_0) = D(A)$ секториален и дискретен. Более того, для $0 \leq \theta \leq 1$ пространства E^θ и $E_0^\theta = D(A_0^\theta)$ совпадают, нормы графика в них эквивалентны. Отсюда видим, что уравнение (1), записанное в виде $\partial_t u = -A_0 u + F_0(u)$ с $F_0 = F - TA^\alpha$, удовлетворяет основным гипотезам (Н1)–(Н3), причем возможна ситуация, когда для оператора A_0 выполняется предположение 1.4, а для A – нет. Таким образом, можно сказать, что в теоремах 1.5, 1.6 линейный оператор A должен удовлетворять предположению 1.4 с точностью до возмущений вида TA^α с ограниченным оператором T в E .

§ 2. Доказательство теоремы 1.5

Здесь будет дан вывод основной теоремы из (доказываемой ниже) теоремы 1.6.

Для $\theta \in \mathbb{R}$ и $k \geq 1$ через $\Pi(\theta, k)$ обозначаем множество ограниченных в E^θ проекторов ранга k . Введение метрики $\rho(P, Q) = \|P - Q\|_\theta$ превращает $\Pi(\theta, k)$ в полное метрическое пространство. Следующее утверждение – это частный случай леммы 9.2.1 из [9], представляющей собой бесконечномерный вариант теоремы вложения Уитни.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\theta \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{M}$ – компактное C^2 -подмногообразие конечной размерности m в E^θ . Тогда найдется проектор $P \in \Pi(\theta, k)$, $k = 2m + 1$, такой, что сужение $P|_{\mathcal{M}}$ есть диффеоморфизм класса C^2 многообразия $\mathcal{M}$ на $P\mathcal{M} \subset PE^\theta$.

Нам понадобятся конечномерные проекторы, ограниченные одновременно в разных пространствах E^θ , в связи с чем придется привлечь к рассмотрению сопряженные пространства $Y_\theta = (E^\theta)'$.

Если исходное пространство E рефлексивно, то для секториального оператора A в E его сопряженный A' плотно определен и секториален в $X = E'$ [9; § 7.3], что позволяет определить соответствующую A' шкалу банаховых пространств $\{X^\theta\}$. При любом $\theta \in \mathbb{R}$ отображения $A^\theta: E^\theta \rightarrow E$ и $(A')^\theta: X \rightarrow X^{-\theta}$ суть изометрии, то же верно и для сопряженного отображения $(A^\theta)': X \rightarrow Y_\theta$. Из элементарных свойств секториальных операторов (см. [9; гл. 1]) следует, что $(A^\theta)' = (A')^\theta$, значит, $Y_\theta = X^{-\theta}$ и при $\theta > \nu$ вложение $Y_\nu \subset Y_\theta$ непрерывно и плотно.

Пусть теперь E – произвольное банахово пространство. Так как для $\theta > \nu$ вложение $E^\theta \subset E^\nu$ непрерывно и плотно, то вложение $Y_\nu \subset Y_\theta$ непрерывно. При этом множество функционалов Y_ν тотально, т.е. равенство $\zeta(u) = 0$ для всех $\zeta \in Y_\nu$ и какого-то $u \in E^\theta$ влечет $u = 0$. Но отсюда следует [11; п. 1.4.5], что Y_ν *-слабо плотно в Y_θ при $\theta > \nu$.

Покажем, что конечномерных проекторов, ограниченных одновременно в разных пространствах E^θ , “достаточно много”.

ЛЕММА 2.2. При $\theta > \nu$ и $k \geq 1$ множество проекторов $\Pi(\theta, k) \cap \Pi(\nu, k)$ сильно плотно в $\Pi(\theta, k)$ (плотно по норме, когда E рефлексивно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P \in \Pi(\theta, k)$, то

$$Pu = \sum_{i=1}^k \zeta_i(u) u_i \quad (8)$$

для $u \in E^\theta$, где $\{u_i\}$ и $\{\zeta_i\}$ – линейно независимые взаимно сопряженные ($\zeta_i(u_j) = \delta_{ij}$) системы из k векторов в пространствах E^θ и Y_θ соответственно. Фактически, для всякого проектора P вида (8) в E^θ нужно построить последовательность проекторов того же вида с (χ_i, v_i) вместо (ζ_i, u_i) , где $\chi_i \in Y_\nu$, $\chi_i \rightarrow \zeta_i$ *-слабо в Y_θ и $v_i \rightarrow u_i$ сильно в E^θ . Если для каких-то k функционалов $\chi_i \in Y_\nu$ матрица $W = \{a_{ij}\} = \{\chi_j(u_i)\}$ обратима, то сопряженной к $\{\chi_i\}$ будет система векторов $\{v_i\} \subset E^\theta$ с $v_i = Tu_i$, где T – линейный оператор в k -мерном подпространстве PE^θ с матрицей W^{-1} в базисе $\{u_i\}$. Пользуясь *-слабой плотностью Y_ν в Y_θ , выберем функционалы $\chi_i \in Y_\nu$, *-слабо сходящиеся к ζ_i в Y_θ . Тогда соответствующие $(k \times k)$ -матрицы $W \rightarrow I$, значит, операторы $T \rightarrow I$ в PE^θ , а потому $v_i = Tu_i \rightarrow u_i$ сильно в E^θ , что и требовалось.

Если же пространство E рефлексивно, то Y_ν сильно плотно в Y_θ и найдутся функционалы $\chi_i \in Y_\nu$, сильно сходящиеся к ζ_i в Y_θ , откуда следует равномерная сходимость проекторов, построенных по той же схеме. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\theta > \nu$, $k \geq 1$ и $\mathcal{M}$ – компактное C^1 -подмногообразие конечной размерности в E^θ . Тогда для любого проектора $P \in \Pi(\theta, k)$ найдется сильно (в $\Pi(\theta, k)$) сходящаяся к P последовательность проекторов

$P_l \in \Pi(\nu, k)$ таких, что $|(P - P_l)(u - v)|_\theta \leq \varepsilon_l |u - v|_\theta$ на $\mathcal{M}$ и $\varepsilon_l = o(1)$ при $l \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 2.2 гарантирует существование нужных проекторов P_l , но без оценки на $\mathcal{M}$. Так как нормы $\|P_l\|_\theta$ равномерно ограничены, то на всяком компакте $\mathcal{K} \subset E^\theta$ функции $P_l: \mathcal{K} \rightarrow E^\theta$ равностепенно непрерывны и по теореме Асколи–Арцела $P_l \rightarrow P$ равномерно на $\mathcal{K}$. Полагаем $\psi(u, v) = (u - v)/|u - v|_\theta$ для $u, v \in E^\theta$ ($u \neq v$). Все будет доказано, если установить, что значения $\psi(u, v)$ для $u, v \in \mathcal{M}$ образуют относительно компактное множество в E^θ .

Пусть $\{u_l\}, \{v_l\}$ – две любые последовательности элементов $\mathcal{M}$ с $u_l \neq v_l$. Поскольку многообразие $\mathcal{M}$ компактно, то можно считать, что $u_l \rightarrow u, v_l \rightarrow v$ при $l \rightarrow \infty$. Если $u \neq v$, то $\psi(u_l, v_l) \rightarrow \psi(u, v)$ в E^θ , поэтому рассмотрим случай $u = v$. Обозначим через Q ограниченный в E^θ проектор на касательное пространство многообразия $\mathcal{M}$ в точке $u \in \mathcal{M}$. Заметим, что $w_l = \psi(Qu_l, Qv_l) \in QE^\theta$, и вследствие конечномерности QE^θ можно считать, что $w_l \rightarrow w$ в E^θ . Положим еще $\varkappa_l = |Qu_l - Qv_l|_\theta / |u_l - v_l|_\theta$. Из определения касательного пространства гладкого многообразия следует, что $\varkappa_l \rightarrow 1$ и $u_l - v_l = Qu_l - Qv_l + |u_l - v_l|_\theta z_l$ с $|z_l|_\theta = o(1)$ при $l \rightarrow \infty$. Отсюда видим, что $\psi(u_l, v_l) = \varkappa_l w_l + z_l$, значит, $\psi(u_l, v_l) \rightarrow w$ в E^θ при $l \rightarrow \infty$ и доказательство леммы завершено.

Сформулируем еще для удобства ссылок векторный вариант известной теоремы о продолжении липшицевых функций.

ЛЕММА 2.4. Пусть функция $f_0 \in \text{Lip}(V, X)$, где V – компакт в $\mathbb{R}^N$, а X – банахово пространство. Тогда найдется функция $f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что $f = f_0$ на X .

Лемма доказывается точно так же, как и в скалярном случае $X = \mathbb{R}^1$ (см. [12; гл. 6, теорема 3]).

Теперь можно перейти непосредственно к выводу теоремы 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Пусть аттрактор $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – компактное C^2 -многообразие в E^α размерности m . По лемме 2.1 найдется ограниченный в E^α проектор P ранга $k = 2m + 1$ такой, что $|u - v|_\alpha \leq C|P(u - v)|_\alpha$ на $\mathcal{M}$. По лемме 2.3 (с $\theta = \alpha, \nu = \alpha - 1$) найдется ограниченный в E^α и в $E^{\alpha-1}$ проектор P_0 ранга k такой, что $|(P - P_0)(u - v)|_\alpha \leq q|u - v|_\alpha$ на $\mathcal{M}$ с $q = 1/(2C)$. Для $u, v \in \mathcal{M}$ имеем:

$$|P_0(u - v)|_\alpha \geq |P(u - v)|_\alpha - |(P - P_0)(u - v)|_\alpha \geq q|u - v|_\alpha.$$

Но тогда теорема 1.6 с $\mathcal{K} = \mathcal{A}$ (импликация (Gr) $\rightarrow$ (FD)) обеспечивает конечномерность предельной динамики уравнения (1).

Обратно, пусть предельная динамика (1) конечномерна и оператор A удовлетворяет предположению 1.4. Согласно теореме 1.6 для $\mathcal{K} = \mathcal{A}$ выполнено условие (GrF), т.е. при некотором $n \geq 1$ спектральный проектор P_n билипшицев на $\mathcal{A}$ в метрике E^α . При этом $V = P_n \mathcal{A}$ – компакт в конечномерном подпространстве $P_n E^\alpha$. Положим $f_0(x) = P_n^{-1}x - x$ для $x \in V$, тогда $f_0 \in \text{Lip}(V, Q_n E^\alpha)$. Продолжим с помощью леммы 2.4 функцию f_0 до функции $f \in \text{Lip}(P_n E^\alpha, Q_n E^\alpha)$. График $\mathcal{M} = \{u \in E^\alpha : u = x + f(x), x \in P_n E^\alpha\}$ есть конечномерное липшицево многообразие в E^α и $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$. Теорема 1.5 доказана полностью.

§3. Доказательство теоремы 1.6

Начнем с двух вспомогательных предложений, первое из которых есть обобщение подобного факта для ОДУ. Напомним, что если инвариантное множество $\mathcal{N} \subset E^\alpha$, то $\mathcal{N} \subset E^1$ и $G(\mathcal{N}) \subset E^\theta$ с любым $\theta < 1$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathcal{N}$ – инвариантное множество в E^α и $|G(u) - G(v)|_\theta \leq C|u - v|_\theta$ на $\mathcal{N}$ при некотором $\theta < 1$ с $C = C(\mathcal{N}, \theta)$. Тогда полупоток $\{\Phi_t\}$ на $\mathcal{N}$ инъективен и расширяется до липшицева в E^θ -метрике потока.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из инвариантности $\mathcal{N}$ следует, что для любого $u_0 \in \mathcal{N}$ существует по крайней мере одна интегральная кривая $u(t)$ с $u(0) = u_0$, определенная при всех $t \in \mathbb{R}$ и лежащая в $\mathcal{N}$. Интегрируя уравнение (1), находим:

$$u(t) = u(0) + \int_0^t G(u(s)) ds.$$

Если $u_0, v_0 \in \mathcal{N}$ и $t > 0$, то

$$|u(t) - v(t)|_\theta \leq |u_0 - v_0|_\theta + C \int_0^t |u(s) - v(s)|_\theta ds.$$

Неравенство Гронуолла дает теперь оценку $|u(t) - v(t)|_\theta \leq |u_0 - v_0|_\theta \exp(C|t|)$. При $t < 0$ эта же оценка получается с помощью замены $t = -\tau$, откуда и следует требуемое.

Лемма остается справедливой и для $\theta \geq 1$ при наличии априорной информации о включениях $\mathcal{N} \subset E^\theta$ и $G(\mathcal{N}) \subset E^\theta$.

Следующее утверждение о регулярности векторного поля уравнения (1) представляет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 3.2. Функция $u \rightarrow G(\Phi_t u)$ липшицева в E^α -метрике на компактах $\mathcal{K} \subset E^\alpha$ при любом фиксированном $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Psi(t, u) = \Phi_t u$ для $t > 0$ и $u \in E^\alpha$. Так как $F \in C^2(E^\alpha, E)$ по условию (H2), то согласно [9; следствие 3.4.6] функция $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^+ \times E^\alpha, E^\alpha)$. При фиксированных t и u частная производная $\Psi_t(t, u)$ есть линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}$ в E^α по правилу $\tau \rightarrow \tau G(\Phi_t u)$. Поскольку $\Psi \in C^2$, то функция $(t, u) \rightarrow G(\Phi_t u)$ – класса C^1 по (t, u) , а значит, при фиксированном t функция $u \rightarrow G(\Phi_t u)$ – класса C^1 и, тем более, локально липшицева из E^α в E^α . Но $\mathcal{K}$ – компакт в E^α , так что функция $G(\Phi_t)$ липшицева на $\mathcal{K}$ при любом $t > 0$ и лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы 1.6, разбив его на отдельные блоки.

(VF) $\rightarrow$ (F1) Достаточно применить лемму 3.1 с $\mathcal{N} = \mathcal{K}$ и $\theta = \alpha$.

(F1) $\rightarrow$ (GrF) Всякое решение $u(t)$ уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}F(u(s))ds \quad (9)$$

для $t > t_0$, $u(t_0) \in E^\alpha$. Если $u(0) = u_0 \in \mathcal{K}$, то по условию (F1) существует единственное решение $u(t) = \Phi_t u_0 \in \mathcal{K}$, определенное при всех $t \in \mathbb{R}$. Применим

к обеим частям (9) проекционный оператор Q_n (с произвольным пока $n \geq 1$) и положим $t = 0$, $u(0) = u$. Так как $Q_n e^{At_0} = e^{At_0} Q_n$ и компакт $\mathcal{K}$ ограничен в E , то оценка (6) дает $|Q_n e^{At_0} u(t_0)|_\alpha = o(1)$ при $t_0 \rightarrow -\infty$. Это приводит к равенству

$$Q_n u = \int_{-\infty}^0 e^{As} Q_n F(\Phi_s u) ds$$

со сходящимся в норме E^α интегралом. По предположению 1.4 найдутся числа $\omega_n \in (0, \mu_{n+1})$ такие, что $\omega_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и постоянная $M_n = M(n, \alpha, \omega_n)$ в (6) удовлетворяет соотношению (7). Применяя оценку (6) с $t = -s$ и пользуясь (4), находим:

$$|Q_n(u - v)|_\alpha \leq LM_n \|Q_n\| \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\alpha} e^{\omega_n s} |\Phi_s u - \Phi_s v|_\alpha ds \quad (10)$$

при $u, v \in \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Для липшицева (по условию (F1)) потока $\{\Phi_t\}$ на $\mathcal{K}$ имеем экспоненциальную (в метрике E^α) оценку разбегания траекторий (5) с некоторыми постоянными $K \geq 1$ и $\omega \geq 0$. Если $\omega_n > \omega$, то из (10) следует, что $|Q_n(u - v)|_\alpha \leq q_n |u - v|_\alpha$ с $q_n = KLM_n \|Q_n\| b_n$ и

$$b_n = \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\alpha} e^{(\omega_n - \omega)s} ds,$$

где $b_n = O(\omega_n^{\alpha-1})$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно (7) $\inf_{n \geq 1} q_n = 0$. Возьмем такое n , что $q_n < 1$. Поскольку $P_n + Q_n = I$, то

$$|Q_n(u - v)|_\alpha \leq \frac{q_n}{1 - q_n} |P_n(u - v)|_\alpha, \quad |u - v|_\alpha \leq \frac{1}{1 - q_n} |P_n(u - v)|_\alpha$$

для $u, v \in \mathcal{K}$ и вывод свойства (GrF) из (F1) завершен.

(GrF) $\rightarrow$ (Gr) В случае рефлексивного E импликация тривиальна. Если же пространство E нерефлексивно, то достаточно установить ограниченность в $E^{\alpha-1}$ спектрального проектора P_n . Из интегральных представлений линейных операторов P_n и $A^{\alpha-1}$ через резольвенту $R(\lambda; A)$ (см. [11; пп. 3.2.2, 3.3.3]) следует (с помощью тождества Гильберта), что $P_n A^{\alpha-1} = A^{\alpha-1} P_n$ на E . Это и дает требуемое.

(Gr) $\rightarrow$ (ЕМ) Исходим из наличия в $\Pi(\alpha, k)$ (при некотором $k \geq 1$) проектора P , который является билипшицевым на $\mathcal{K}$ в метрике E^α . Ясно, что множество таких проекторов открыто в $\Pi(\alpha, k)$. Если пространство E рефлексивно, то согласно лемме 2.2 (с $\theta = \alpha$, $\nu = \alpha - 1$) можно считать проектор P ограниченным и в $E^{\alpha-1}$ (в нерефлексивном случае это постулируется). Так как $PE^\alpha \subset E^{\alpha-1}$ и в конечномерном пространстве PE^α все нормы эквивалентны, то

$$|u - v|_\alpha \leq C |P(u - v)|_\alpha \leq C_1 |P(u - v)|_{\alpha-1} \leq C_2 |u - v|_{\alpha-1}$$

для $u, v \in \mathcal{K}$ с постоянной C_2 , не зависящей от u, v . Противоположное неравенство (с другой константой) следует из (3), значит, метрики E^α и $E^{\alpha-1}$ на $\mathcal{K}$ эквивалентны.

(EM)→(VF) Так как $|u - v|_\alpha \leq C|u - v|_{\alpha-1}$ на $\mathcal{K}$, то, пользуясь оценками (3) и (4), получаем:

$$\begin{aligned} |G(u) - G(v)|_{\alpha-1} &\leq |A(u - v)|_{\alpha-1} + |F(u) - F(v)|_{\alpha-1} \\ &\leq |u - v|_\alpha + c(\alpha - 1, 0)|F(u) - F(v)| \\ &\leq q|u - v|_\alpha \leq qC|u - v|_{\alpha-1} \end{aligned} \quad (11)$$

для $u, v \in \mathcal{K}$ с $q = 1 + Lc(\alpha - 1, 0)$. Таким образом, векторное поле G липшицево в $E^{\alpha-1}$ -метрике на инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset E^\alpha$, значит, по лемме 3.1 с $\theta = \alpha - 1$ полупоток $\{\Phi_t\}$ на $\mathcal{K}$ инъективен и расширяется до липшицева в $E^{\alpha-1}$ -метрике потока. С учетом эквивалентности на $\mathcal{K}$ метрик E^α и $E^{\alpha-1}$ отсюда следует свойство (F1), т.е. $|\Phi_t u - \Phi_t v|_\alpha \leq q(t)|u - v|_\alpha$ на $\mathcal{K}$ для $t \in \mathbb{R}$. По лемме 3.2 с $t = 1$ имеем на $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$:

$$|G(u) - G(v)|_\alpha \leq C_1 |\Phi_{-1} u - \Phi_{-1} v|_\alpha \leq C_1 q(-1) |u - v|_\alpha,$$

и переход (EM)→(VF) завершен.

Итак, показано, что для произвольного инвариантного компакта $\mathcal{K}$ в E^α условия (VF), (F1), (GrF), (Gr) и (EM) равносильны. Осталось установить их связь со свойством конечномерности динамики (FD).

(FD)→(F1) Это прямое следствие определения 1.1 (см. замечание 1.2).

(Gr)→(FD) Как уже показано, условие (Gr) влечет (VF). Согласно (Gr) найдется ограниченный в E^α проектор P конечного ранга N , осуществляющий липшицево вложение $\mathcal{K} \rightarrow PE^\alpha$. При этом уравнение (1) $\partial_t u = G(u)$ на $\mathcal{K}$ проецируется в уравнение $\dot{x} = h_0(x)$ для $x \in Pu$ с липшицевой (согласно условию (VF)) функцией $h_0(x) = PG(P^{-1}x)$ на компакте $V = P\mathcal{K}$ в PE^α . Отождествляя PE^α с $\mathbb{R}^N$ и продолжая по лемме 2.4 функцию $h_0 \in \text{Lip}(V, \mathbb{R}^N)$ до функции $h \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, получаем ОДУ $\dot{x} = h(x)$ в $\mathbb{R}^N$ с фазовым потоком $\{S_t\}$. Так как $\partial_t(P\Phi_t P^{-1}x)|_{t=0} = h_0(x)$ для $x \in V$, то (по теореме единственности для ОДУ) $S_t x = P\Phi_t P^{-1}x$ на V . Но $x = Pu$, поэтому $S_t Pu = P\Phi_t u$ для $u \in \mathcal{K}$, что и означает конечномерность динамики на $\mathcal{K}$. Теорема 1.6 доказана полностью.

§ 4. Регулярность векторного поля на аттракторе

В связи с полученными в теореме 1.6 необходимыми и достаточными условиями конечномерности предельной динамики интересно выяснить, насколько данные условия близки к реальным характеристикам произвольных уравнений вида (1). Это удастся сделать по крайней мере в случаях (EM) и (VF). Оказывается, операторы A и $G = -A + F$ всегда гёльдеровы на аттракторе $\mathcal{A}$ в метриках $E^{\alpha-1}$ и E^α соответственно с показателем, зависящим только от α .

Вопрос о регулярности на аттракторе векторного поля полулинейных параболических уравнений уже обсуждался в контексте теории экспоненциальных аттракторов [13], а также в работе Робинсона [14]. Известно, в частности, что оператор G гёльдеров на $\mathcal{A}$ в метрике E с показателем $\beta = 1 - \theta^{-1}$, если аттрактор $\mathcal{A}$ ограничен в E^θ с $\theta > 1$. Мы же рассматриваем здесь вопрос о регулярности на $\mathcal{A}$ векторного поля G в метрике E^α .

Как и выше, считаем выполненными основные предположения (H1)–(H3).

ТЕОРЕМА 4.1. Для $u, v \in \mathcal{A}$ имеют место оценки:

$$|A(u - v)|_{\alpha-1} \leq C|u - v|_{\alpha-1}^\beta, \quad (12a)$$

$$|G(u) - G(v)|_\alpha \leq C|u - v|_\alpha^\beta, \quad (12б)$$

где $\beta = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)$ и $C = C(\mathcal{A})$.

Отметим, что $\beta = 1/2$ при $\alpha = 0$, $\beta = 1/3$ при $\alpha = 1/2$ и $\beta \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$. Оценки (12) справедливы, на самом деле, для широкого класса подмножеств пространства E^α .

ЛЕММА 4.2. Пусть $\beta = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)$. Если $\mathcal{N}$ — ограниченное множество в E^1 , то на $\mathcal{N}$ имеет место оценка (12a). Если $\mathcal{N}$ — компакт в E^α и множество $G(\mathcal{N})$ ограничено в E^1 , то на $\mathcal{N}$ верна оценка (12б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в [13], [14], используем интерполяцию в шкале банаховых пространств $\{E^\theta\}$ (см. [9; § 1.4]). В нашем случае это дает

$$|u - v|_\alpha \leq K|u - v|_{\alpha-1}^\beta |u - v|_1^{1-\beta}$$

для $u, v \in \mathcal{N}$ с постоянной $K = K(A)$. Если $\mathcal{N}$ ограничен в E^1 , то отсюда следует оценка (12a). Аналогично,

$$|G(u) - G(v)|_\alpha \leq K|G(u) - G(v)|_{\alpha-1}^\beta |G(u) - G(v)|_1^{1-\beta},$$

если $G(u)$ и $G(v) \in E^1$. Но $|G(u) - G(v)|_{\alpha-1} \leq q|u - v|_\alpha$ согласно (11), откуда получаем оценку (12б) на $\mathcal{N}$ при условии ограниченности множества $G(\mathcal{N})$ в E^1 . Лемма доказана.

Таким образом, для доказательства теоремы 4.1 нужна ограниченность множеств $\mathcal{A}$ и $G(\mathcal{A})$ в E^1 .

ЛЕММА 4.3. Множество $G(\mathcal{A})$ ограничено в E^1 .

Непосредственно из [9; теорема 3.5.2] следует ограниченность $G(\mathcal{A})$ в E^θ при любом $\theta < 1$. В случае, когда пространство E гильбертово, оператор A самосопряжен и $\alpha \leq 1/2$, ограниченность множества $G(\mathcal{A})$ в E^1 есть следствие более общего утверждения, полученного Чуешовым [5; лемма 12.1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Положим $\Psi(t, v) = \Phi_t v$ для $t > 0$ и $v \in E^\alpha$. Функция $F \in C^2(E^\alpha, E)$, значит [9; следствие 3.4.6], отображение $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^+ \times E^\alpha, E^\alpha)$. При заданных $t > 0$ и $v \in E^\alpha$ частная производная $\Psi_{tt}(t, v)$ есть билинейный оператор, действующий из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в E^α по правилу $(\tau_1, \tau_2) \rightarrow \tau_1 \tau_2 \partial_{tt} u(t)$, где $u(t) = \Phi_t v$, $\partial_t u = G(\Phi_t v)$, $\partial_{tt} u = (-A + F'(\Phi_t v))G(\Phi_t v) \equiv f(t, v)$ и F' — производная Фреше. Поскольку $\Psi \in C^2$, то отображение f непрерывно из $\mathbb{R}^+ \times E^\alpha$ в E^α , значит, при фиксированном t (например при $t = 1$) функция $f(t, \cdot)$ непрерывна из E^α в E^α . Но $\mathcal{A}$ — компакт в E^α , так что эта функция ограничена на $\mathcal{A}$ в метрике E^α и, тем более, в метрике E . Далее, $f(t, v) = (-A + F'(u))G(u)$, где $u = \Phi_t v$. Из леммы 3.2 следует ограниченность множества $G(\mathcal{A})$ в E^α , а условие $F \in C^2(E^\alpha, E)$ влечет равномерную по $u \in \mathcal{A}$ ограниченность норм линейных операторов $F'(u)$ из E^α в E . Таким образом, $|F'(u)G(u)| \leq M$ для $u \in \mathcal{A}$ и из

ограниченности нормы $|f(t, v)|$ на $\mathcal{A}$ следует оценка $|AG(u)| = |G(u)|_1 \leq K$ для $u \in \mathcal{A}$. Лемма доказана.

Теорема 4.1 легко выводится из лемм 4.2, 4.3. Действительно, по лемме 4.3 $|G(u)|_1 \leq K$ и, тем более, $|G(u)| \leq K_1$ для $u \in \mathcal{A}$. Компакт $\mathcal{A}$ ограничен в E^α , значит, согласно (4) $|F(u)| \leq K_2$ на $\mathcal{A}$. Так как $A = F - G$, то отсюда следует ограниченность аттрактора $\mathcal{A}$ в E^1 , и остается применить лемму 4.2. Теорема 4.1 доказана полностью.

Пусть далее основное пространство E гильбертово. Выясним, когда верны оценки (12) с произвольным показателем $0 < \beta < 1$. Будем опираться на классические результаты Ладыженской [15] о корректности в классе ограниченных решений обратной задачи Коши для полулинейных параболических уравнений с самосопряженной линейной частью. Напомним, что цитированная работа (наряду с [16]) положила в свое время начало реализации уже упоминавшейся идеи Хопфа о конечномерном характере предельных режимов таких уравнений. Именно в [15] компактный аттрактор $\mathcal{A}$ был предложен как основной объект теории бесконечномерных эволюционных систем с диссипацией и в качестве общего свойства была установлена определенного рода (отличная от обсуждаемой здесь) конечномерность динамики на $\mathcal{A}$.

Кроме того, [15; условие (2.8)] позволяет выделить класс уравнений (1) с непрерывным фазовым потоком $\{\Phi_t\}$ на аттракторе, допускающим (как прямое следствие неравенства (2.11) той же работы) оценки

$$|\Phi_{-2t}u - \Phi_{-2t}v| \leq M(t, \sigma)|u - v|^{\sigma\gamma} \quad (13)$$

для $u, v \in \mathcal{A}$ и $t > 0$ с произвольным $\sigma \in (0, 1)$ и $\gamma = e^{-2\kappa t}$, $\kappa = \kappa(\mathcal{A})$. Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} |G(u) - G(v)|_\alpha &\leq K(t)|\Phi_{-t}u - \Phi_{-t}v|_\alpha \quad (\text{лемма 3.2}), \\ |\Phi_{-t}u - \Phi_{-t}v|_\alpha &\leq K_1(t)|\Phi_{-2t}u - \Phi_{-2t}v| \quad [17; \text{лемма 5.2}], \end{aligned}$$

получаем из (13), (3) оценку (126) векторного поля G на $\mathcal{A}$ для каждого $\beta < 1$ и $C = C(\beta, \mathcal{A}) \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow 1$. Аналогичным образом выводится и (12а) с $\beta < 1$.

Рассмотрим теперь систему Навье–Стокса в прямоугольнике $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с условием периодичности на $\partial\Omega$. Предполагаем достаточную (но конечную) гладкость внешней силы $f(x)$ по $x \in \Omega$. Известно, что такая система записывается в виде (1) с $A^* = A$, $F \in C^\infty(E^\alpha, E)$ при $\alpha > 1/2$ и обладает компактным аттрактором $\mathcal{A} \subset E^\alpha$, если взять в качестве E подпространство бездивергентных вектор-функций с нулевым средним из $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. В данной ситуации можно сперва установить, пользуясь техникой [15], справедливость соотношений (2.8), (2.11) из указанной работы, а затем вывести оценки (13) и (12) с $\beta < 1$. Существование инерциального многообразия для рассматриваемой задачи пока не доказано. В то же время, “почти липшицева” оценка векторного поля на аттракторе позволяет рассчитывать, что какие-то дополнительные требования (типа аналитичности внешней силы f) могут обеспечить конечномерность предельной динамики двумерных уравнений Навье–Стокса на торе в смысле определений 1.3, 1.1.

Основные результаты статьи доложены на совместных заседаниях семинара им. И. Г. Петровского и Московского математического общества (Москва, январь

1998 г.), а также на Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, август–сентябрь 1998 г.). Тезисы докладов опубликованы в [18], [19].

Автор благодарен Дж. К. Робинсону (J. C. Robinson) за весьма полезную информацию о результатах работ [8], [13].

Список литературы

1. Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. № 4. P. 303–322.
2. Mane R. On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps // Lecture Notes in Math. 1981. V. 898. P. 230–242.
3. Романов А. В. Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 36–54.
4. Чусов И. Д. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 135–162.
5. Чусов И. Д. Введение в теорию инерциальных многообразий. Харьков: Изд-во ХГУ, 1992.
6. Mallet-Paret J., Sell G. R., Shao Z. Obstructions to the existence of normally hyperbolic inertial manifolds // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. № 3. P. 1027–1055.
7. Mora X., Sola-Morales J. Existence and non-existence of finite-dimensional globally attracting invariant manifolds in semilinear damped wave equations // Dynamics of infinite dimensional systems. New York: Springer-Verlag, 1987. P. 187–210.
8. Foias C., Olson E. Finite fractal dimension and Hölder–Lipschitz parametrization // Indiana Univ. Math. J. 1996. V. 45. № 3. P. 603–616.
9. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
10. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
11. Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. В сер. “Справочная математическая библиотека”. М.: Наука, 1973.
12. Стейн Е. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
13. Eden A., Foias C., Nicolaenko B., Temam R. Exponential attractors for dissipative evolution equations. Chichester: Wiley, 1994.
14. Robinson J. C. All possible chaotic dynamics can be approximated in three dimensions // Nonlinearity. 1998. V. 11. № 3. P. 529–545.
15. Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т. 27. Л.: ЛОМИ, 1972. С. 91–115.
16. Foias C., Prodi G. Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des equations de Navier–Stokes en dimension 2 // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1967. V. 39. P. 1–34.
17. Brunovsky P., Terescek I. Regularity of invariant manifolds // J. Dynam. Differential Equations. 1991. V. 3. № 3. P. 313–337.
18. Романов А. В. Конечномерная предельная динамика параболических уравнений // УМН. 1998. Т. 53. № 4. С. 173.
19. Романов А. В. Конечномерность динамики на аттракторе для полулинейных параболических уравнений // Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Тезисы докладов. Оптимальное управление и добавления. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 324–325.