Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. ЩигOLEв, Примеры бесконечно базисуемых T -пространств, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 3, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:46:54

УДК 512.5

В. В. Щиголев

Примеры бесконечно базисуемых T -пространств

Работа посвящена построению бесконечно базисуемых T -пространств над полями конечной характеристики и некоторыми другими кольцами. Приведены примеры T -пространств, которые порождены полиномами, зависящими от двух переменных, или полиномами, имеющими по каждой переменной ограниченную степень.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Введение

В теории ассоциативных РИ-колец хорошо известна проблема Шпехта [1] о конечной базисуемости любой системы тождеств. В случае нулевой характеристики основного поля эта проблема решена положительно А. Р. Кемером [2]. Им же положительно решена локальная проблема Шпехта в случае, когда основное поле бесконечно [3]. А. Я. Белов анонсировал положительное решение локальной проблемы Шпехта в случае, когда основное поле конечно. А. В. Гришин [4] ввел понятие абстрактного T -пространства и доказал конечную базисуемость любого T -пространства относительно свободной алгебры, содержащей стандартное тождество

$$\text{St}_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

в случае основного поля характеристики нуль. А. В. Гришин [5] доказал также, что для основного поля характеристики 2 T -пространство, порожденное многочленами $x_1^2, x_1^2 x_2^2, \dots, x_1^2 \cdots x_n^2, \dots$, бесконечно базисуемо по модулю тождества $[[x, y], z] = 0$.

Напомним, что T -пространствами (T -идеалами) алгебры $\Phi\langle X \rangle$, где Φ – коммутативное кольцо с единицей, а X – некоторый счетный алфавит, называются подмодули модуля ${}_{\Phi}\Phi\langle X \rangle$ (идеалы алгебры $\Phi\langle X \rangle$), замкнутые относительно действия всех эндоморфизмов $\Phi\langle X \rangle \rightarrow \Phi\langle X \rangle$. Всюду ниже под выражениями “конечная базисуемость” и “бесконечная базисуемость” понимается конечная и бесконечная базисуемость в смысле T -пространств.

В §§ 2 и 3 настоящей работы рассматриваются следующие свободные алгебры с единицей:

$$F = K\langle X \rangle, \quad M = \mathbb{Z}\langle X \rangle, \quad R(n) = \mathbb{Z}_n\langle X \rangle, \quad H(p_1, \dots, p_k) = \mathbb{Q}_{p_1, \dots, p_k}\langle X \rangle,$$

где $X = \{x, y, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, \dots\}$ – основной алфавит, K – бесконечное поле характеристики $p \neq 0$, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}_n$ – кольцо вычетов по модулю n , $\mathbb{Q}_{p_1, \dots, p_k} = \{n/m : n, m \in \mathbb{Z}, n \text{ не делится ни на одно из чисел } p_1, \dots, p_k\}$ – локализация поля целых чисел $\mathbb{Q}$ по $p_1, \dots, p_k$ ($p_1, \dots, p_k$ – простые числа).

Основным результатом §§ 2 и 3 является следующее утверждение:

1) существуют однородные полиномы алгебры F , зависящие от двух переменных, порождающие в F бесконечно базисуемое по модулю тождества $[[x, y], z] = 0$ T -пространство (см. теорему 1).

Далее, существуют следующие естественные эпиморфизмы $\psi_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ и $\xi_k: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$. Кроме того, мы считаем, что $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_{p_1, \dots, p_k}$. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем $\psi_{p^k}(m) = \xi_k(m)$. Эпиморфизмы ψ_n и ξ_k индуцируют эпиморфизмы $\hat{\psi}_n: M \rightarrow R(n)$ и $\hat{\xi}_k: H(p) \rightarrow R(p^k)$, и мы имеем $M \subset H(p)$.

Используя ту же технику, с помощью которой получен приведенный выше основной результат 1), мы доказываем следующие утверждения:

2) существует бесконечно базисуемое T -пространство L_1 алгебры M такое, что для любых простых чисел $p_1, \dots, p_k$ T -пространство алгебры $H(p_1, \dots, p_k)$, порожденное L_1 , конечно базисуемо, а следовательно, для любого натурального n T -пространство $\hat{\psi}_n(L_1)$ алгебры $R(n)$ конечно базисуемо (см. теорему 2);

3) существует T -пространство L_2 алгебры M , которое порождает в $H(p)$ бесконечно базисуемое T -пространство, а для любого натурального k T -пространство $\hat{\xi}_k(L_2)$ алгебры $R(p^k)$ конечно базисуемо (см. теорему 3).

Заметим, что все упомянутые в утверждениях 1)–3) T -пространства порождены полиномами, зависящими от двух переменных.

Представляется интересным открытый пока вопрос о существовании T -пространств L_1 и L_2 , порожденных полиномами, у которых степени по каждой переменной из X ограничены в совокупности и которые удовлетворяют утверждениям 2) и 3).

Далее в § 4 для основного поля характеристики $p > 2$ строится пример полиномов степени p или нуль по каждой переменной, которые порождают T -пространство, бесконечно базисуемое по модулю тождества $[x, [y, z]] = 0$ (теорема 4). В этом же параграфе показано, что такой пример может быть мономиялен, как и в случае, когда характеристика основного поля равна двум (теорема 5).

Параграф 5 посвящен доказательству конечной базисуемости системы полиномов $x_1^p, \dots, x_1^p \cdots x_n^p, \dots$ при $p > 2$, что опровергает предположение А. В. Гришина, сформулированное в [5].

Автор благодарит В. Н. Латышева, А. В. Гришина и А. Я. Белова за полезные обсуждения.

§ 2. Вычисление однородной компоненты

Ниже мы используем следующий комбинаторный факт.

Пусть имеется n мест и n_i объектов i -го класса для любого $i = 1, \dots, k$ и при этом $n_1 + \dots + n_k = n$. Тогда существует ровно $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ способов расставить эти объекты на n мест.

Через $T^{(3)}$, $T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$ и $T_{\mathbb{Z}_n}^{(3)}$ обозначим T -идеалы алгебр F , M и $R(n)$ соответственно, порожденные многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$.

Пусть q_1, q_2 – натуральные числа. Через $L^{(q_1, q_2)}$, $L_{\mathbb{Z}}^{(q_1, q_2)}$ и $L_n^{(q_1, q_2)}$ обозначим T -пространства алгебр F , M и $R(n)$ соответственно, порожденные многочленами $f_{q_1, q_2} = x^{q_1-1}[x, y]y^{q_2-1}$ и $[[x_1, x_2], x_3]$.

Пусть $0 \neq f, g \in \Phi\langle X \rangle$, где Φ – некоторое коммутативное кольцо. Считаем, что многочлен g является некоторой однородной компонентой многочлена f , если многочлен g однородный и у многочлена $f - g$ отсутствуют одночлены $f' \neq 0$ такие, что $\deg_x g = \deg_x f'$ для любого $x \in X$.

Выполним замены $x \rightarrow x_1 + \dots + x_k$ и $y \rightarrow y_1 + \dots + y_l$. Через f_{q_1, q_2}^σ обозначим однородное слагаемое многочлена, получившегося из f_{q_1, q_2} при этой замене, такое, что $\deg_{x_i} f_{q_1, q_2}^\sigma = n_i \geq 1$, $i = 1, \dots, k$, и $\deg_{y_j} f_{q_1, q_2}^\sigma = m_j \geq 1$, $j = 1, \dots, l$, где $\sigma = (n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l)$.

Ясно, что должны выполняться соотношения

$$\sum_{i=1}^k n_i = q_1, \quad \sum_{j=1}^l m_j = q_2. \quad (1)$$

Положим далее $M_0 = \mathbb{Z}\langle x, y \rangle$ и $M_{k, l} = \mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l \rangle$. Справедливы включения $M_0 \subset M$ и $M_{k, l} \subset M$.

Далее выполним замену $x_i \rightarrow u_i$ и $y_j \rightarrow v_j$, где u_i, v_j – слова алгебры M_0 и $\deg_x u_i = a_i$, $\deg_y u_i = b_i$, $\deg_x v_j = c_j$, $\deg_y v_j = d_j$. Гомоморфизм алгебры $M_{k, l}$ в алгебру M , определяемый этой заменой, обозначим через η .

Рассмотрим однородный многочлен $\eta(f_{q_1, q_2}^\sigma)$. Приведем его по модулю $T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$ к виду $\gamma[x, y]x^{r_1-1}y^{r_2-1}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, и вычислим γ .

Заметим, что $[x, x_1][x, x_2] \in T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$. Отсюда следует, что $[h_1, h_2][h_3, h_4] \in T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$, если $h_1, h_2, h_3, h_4 \in M_0$.

Имеем

$$\begin{aligned} h_1[h_2[h_3, h_4]h_5, h_6]h_7 &= h_1[h_3, h_4]h_5h_2, h_6]h_7 \\ &= h_1[h_3, h_4][h_5h_2, h_6]h_7 \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что справедлива

ЛЕММА 1. Пусть $h_1, \dots, h_7 \in M_0$. Тогда

$$h_1[h_2[h_3, h_4]h_5, h_6]h_7 = 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $h_1[h_3, h_4][h_5h_2, h_6]h_7 = 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}$. Лемма доказана.

Тогда получаем соотношения

$$\begin{aligned} [u_i, v_j] &= [x^{a_i}y^{b_i}, x^{c_j}y^{d_j}] = [x^{a_i}, y^{d_j}]x^{c_j}y^{b_i} + [y^{b_i}, x^{c_j}]x^{a_i}y^{d_j} \\ &= a_id_j[x, y]x^{c_j+a_i-1}y^{b_i+d_j-1} + b_ic_j[y, x]x^{a_i+c_j-1}y^{d_j+b_i-1} \\ &= (a_id_j - b_ic_j)[x, y]x^{a_i+c_j-1}y^{b_i+d_j-1} \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}. \end{aligned}$$

Теперь посмотрим, сколько раз выражения $w'_i[x_i, y_j]w''_j$, где w'_i и w''_j – слова, встречаются в f_{q_1, q_2}^σ . Для расстановки переменных $x_1, \dots, x_k$ на те места, где в f_{q_1, q_2}^σ стоит x^{q_1-1} , имеется q_1-1 мест. При этом x_i должно входить n_i-1 раз, а $x_{i'}$ должно входить $n_{i'}$ раз при $i' \neq i$. Используя формулы комбинаторики, получаем

$\frac{(q_1 - 1)!}{n_1! \cdots n_{i-1}! (n_i - 1)! n_{i+1}! \cdots n_k!} = n_i \frac{(q_1 - 1)!}{n_1! \cdots n_k!}$ вариантов расстановки. Аналогично, для расстановки переменных $y_1, \dots, y_l$ имеется $m_j \frac{(q_2 - 1)!}{m_1! \cdots m_l!}$ вариантов. Общее количество интересующих нас выражений получается равным $n_i m_j E$, где $E = \frac{(q_1 - 1)!}{(q_2 - 1)! n_1! \cdots n_k! m_1! \cdots m_l!}$. Заметим, что E может быть нецелым.

Таким образом, слагаемое $(a_i d_j - b_i c_j)[x, y] x^{r_1-1} y^{r_2-1}$ надо взять $n_i m_j E$ раз. Отсюда

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (a_i d_j - b_i c_j) n_i m_j E \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l ((n_i a_i)(m_j d_j) - (n_i b_i)(m_j c_j)) E = (AD - BC)E, \end{aligned}$$

где $A = \sum_{i=1}^k n_i a_i$, $B = \sum_{i=1}^k n_i b_i$, $C = \sum_{j=1}^l m_j c_j$ и $D = \sum_{j=1}^l m_j d_j$.

Вычислим теперь показатели степени r_1, r_2 . Так как переменная x_i входит в каждый моном f_{q_1, q_2}^σ n_i раз, а вместо нее подставляется слово u_i степени a_i по x и b_i по y , то степень по x оказывается равной $n_i a_i$, а по y — $n_i b_i$. Аналогично, переменная y_j дает вклад $m_j c_j$ по x и $m_j d_j$ по y . Суммируя по $i = 1, \dots, k$ и $j = 1, \dots, l$, получаем

$$r_1 = \sum_{i=1}^k n_i a_i + \sum_{j=1}^l m_j c_j = A + C, \quad r_2 = \sum_{i=1}^k n_i b_i + \sum_{j=1}^l m_j d_j = B + D.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\gamma = (AD - BC)E = ((r_1 - C)(r_2 - B) - BC)E = (r_1 r_2 - r_1 B - r_2 C)E. \quad (2)$$

Для дальнейшего нам будет важно знать величину γ в случае, когда $r_1 = r_2 = q_0 q_1 = q_0 q_2 \geq 1$. Положим $r = r_1 = r_2$ и $q = q_1 = q_2$.

Формула (2) теперь переписывается в виде

$$\gamma = (r^2 - r(B - C))E.$$

Имеем

$$Er^2 = q_0^2 \cdot \frac{q!}{n_1! \cdots n_k!} \cdot \frac{q!}{m_1! \cdots m_l!}. \quad (3)$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} rBE &= q_0 \sum_{i=1}^k b_i n_i \frac{(q-1)!}{n_1! \cdots n_k!} \cdot \frac{q!}{m_1! \cdots m_l!} \\ &= q_0 \sum_{i=1}^k b_i \frac{(q-1)!}{n_1! \cdots n_{i-1}! (n_i - 1)! n_{i+1}! \cdots n_k!} \cdot \frac{q!}{m_1! \cdots m_l!}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$rCE = q_0 \sum_{j=1}^l c_j \frac{q!}{n_1! \cdots n_k!} \cdot \frac{(q-1)!}{m_1! \cdots m_{j-1}! (m_j - 1)! m_{j+1}! \cdots m_l!}.$$

Из приведенных выше равенств и формул комбинаторики видно, что γ делится на q_0 . Таким образом, справедлива

ЛЕММА 2. Если $r = q_0q$, то γ делится на q_0 .

Приведем теперь еще один факт о многочленах f_{q_1, q_2} . Пусть ${}_Z V^{(q_1, q_2)}$ – свободный $\mathbb{Z}$ -модуль, порожденный всеми словами алгебры M_0 степени q_1 по x и q_2 по y . Определим гомоморфизм φ модуля ${}_Z V^{(q_1, q_2)}$ в модуль ${}_Z \mathbb{Z}$ на словах из M_0 следующим образом:

$$\varphi(x^{a_1} y^{b_1} \dots x^{a_n} y^{b_n}) = \sum_{i < j} b_i a_j. \quad (4)$$

Другими словами, $\varphi(u)$, где u – слово, есть число перестановок $yx \rightarrow xy$, необходимых для приведения u к виду $x^{q_1} y^{q_2}$. Далее слова из M_0 , в которых все x предшествуют всем y , называем *правильными*.

Справедлива

ЛЕММА 3. Если $h_1, \dots, h_5 \in M_0$, $\deg_x h_1 \dots h_5 = q_1$ и $\deg_y h_1 \dots h_5 = q_1$, то

$$\varphi(h_1 [[h_2, h_3], h_4] h_5) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать, что h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – слова. Пусть $g = u_1 [[u_2, u_3], u_4] u_5$, где $u_1, \dots, u_5$ – слова из M_0 . Обозначим через r_i количество перестановок $yx \rightarrow xy$, нужных для приведения u_i к правильному виду, где $i = 1, \dots, 5$. Пусть $\deg_x u_i = a_i$ и $\deg_y u_i = b_i$, $i = 1, \dots, 5$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(u_1 u_{\sigma(2)} u_{\sigma(3)} u_{\sigma(4)} u_5) &= a_5(b_2 + b_3 + b_4) + b_1(a_2 + a_3 + a_4) + a_5 b_1 \\ &+ r_1 + \dots + r_5 + \varphi(x^{a_1+a_5} x^{a_{\sigma(2)}} y^{b_{\sigma(2)}} x^{a_{\sigma(3)}} y^{b_{\sigma(3)}} x^{a_{\sigma(4)}} y^{b_{\sigma(4)}} y^{b_1+b_5}), \end{aligned}$$

где σ – взаимно однозначное отображение множества $\{2, 3, 4\}$ на себя.

Поэтому $\varphi(g) = \varphi(x^{a_1+a_5} [[x^{a_2} y^{b_2}, x^{a_3} y^{b_3}], x^{a_4} y^{b_4}] y^{b_1+b_5})$.

В соответствии с формулой (4)

$$\begin{aligned} \varphi(x^{a_1+a_5} x^{a_2} y^{b_2} x^{a_3} y^{b_3} x^{a_4} y^{b_4} y^{b_1+b_5}) &= b_3 a_4 + b_2(a_3 + a_4), \\ \varphi(x^{a_1+a_5} x^{a_3} y^{b_3} x^{a_2} y^{b_2} x^{a_4} y^{b_4} y^{b_1+b_5}) &= b_2 a_4 + b_3(a_2 + a_4), \\ \varphi(x^{a_1+a_5} x^{a_4} y^{b_4} x^{a_2} y^{b_2} x^{a_3} y^{b_3} y^{b_1+b_5}) &= b_2 a_3 + b_4(a_2 + a_3), \\ \varphi(x^{a_1+a_5} x^{a_4} y^{b_4} x^{a_3} y^{b_3} x^{a_2} y^{b_2} y^{b_1+b_5}) &= b_3 a_2 + b_4(a_3 + a_2). \end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что $\varphi(g) = 0$. Лемма доказана.

Заметим теперь, что

$$\varphi(f_{q_1, q_2}) = \varphi(x^{q_1-1} [x, y] y^{q_2-1}) = \varphi(x^{q_1} y^{q_2}) - \varphi(x^{q_1-1} y x y^{q_2-1}) = -1.$$

§ 3. Построение T -пространств

Считаем далее, что $\mathbb{Z}_p \subset K$. Определим отображения (проекции) $\mu^{(q_1, q_2)}: F \rightarrow F$, $\mu_n^{(q_1, q_2)}: R(n) \rightarrow R(n)$ следующим образом:

$$\mu(u) = \begin{cases} u, & \text{если } u \text{ зависит только от } x \text{ и } y \text{ и } \deg_x u = q_1, \deg_y u = q_2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где u – слово из $\langle X \rangle$, а μ – любой из символов $\mu^{(q_1, q_2)}$ или $\mu_n^{(q_1, q_2)}$.

ЛЕММА 4. Пусть $t > s$. Тогда $\mu^{(p^t, p^t)}(L(p^s, p^s)) \subset T^{(3)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать, что любой элемент из $\mu^{(p^t, p^t)}(L^{(p^s, p^s)})$ является линейной комбинацией над K многочленов $\widehat{\psi}_p \eta(f_{p^s, p^s}^\sigma)$ для различных допустимых σ и η , т.е. таких σ и η , что степени многочлена $\eta(f_{p^s, p^s}^\sigma)$ по всем переменным совпадают с соответствующими степенями многочлена f_{p^t, p^t} . Если в лемме 2 положить $r = p^t$, $q = p^s$, $q_0 = p^{t-s}$, то получим, что $\widehat{\psi}_p \eta(f_{p^s, p^s}^\sigma) \in T^{(3)}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. T -пространство алгебры F , порожденное полиномами

$$\{\widehat{\psi}_p(f_{p^s, p^s}) : s \in \mathbb{N}\},$$

является бесконечно базлируемым по модулю тождества $[[x, y], z] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 получаем $\widehat{\psi}_p(f_{p^s, p^s}) \notin T^{(3)}$. Отсюда и из леммы 4 следует утверждение теоремы.

Положим теперь $m(s) = \tau(1) \cdots \tau(s)$, где $\tau(i)$ есть i -е простое число. Заметим, что $L_n^{(q_1, q_2)} = \widehat{\psi}_n(L_{\mathbb{Z}}^{(q_1, q_2)})$.

ЛЕММА 5. Пусть $t > s$. Тогда $\mu_{\tau(s+1)}^{(m(t), m(t))}(L_{\tau(s+1)}^{(m(s), m(s))}) \subset T_{\mathbb{Z}_{\tau(s+1)}}^{(3)}$.

Доказательство получается применением леммы 2 при $r = m(t)$, $q = m(s)$ и $q_0 = \tau(s+1) \cdots \tau(t)$.

ТЕОРЕМА 2. T -пространство L_1 алгебры M , порожденное многочленами $\{f_{m(s), m(s)} : s \in \mathbb{N}\}$ и T -идеалом $T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$, бесконечно базлируемо. Но для любых простых чисел $p_1, \dots, p_k$ T -пространство алгебры $H(p_1, \dots, p_k)$, порожденное L_1 , конечно базлируемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы следует из лемм 5 и 2.

Далее, при $t > s$ имеем

$$\begin{aligned} & (x^{\tau(s+1) \cdots \tau(t)} y^{m(s)-1} [x^{\tau(s+1) \cdots \tau(t)}, y^{\tau(s+1) \cdots \tau(t)}] (y^{\tau(s+1) \cdots \tau(t)})^{m(s)-1} \\ &= (\tau(s+1) \cdots \tau(t))^2 x^{m(t)-1} [x, y] y^{m(t)-1} \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $p_1 < \cdots < p_k = \tau(s) -$ простые числа. Тогда число $(\tau(s+1) \cdots \tau(t))^2$ не делится ни на одно из чисел $p_1, \dots, p_k$ и полиномы $x_1[[x_2, x_3], x_4]x_5$, $f_{m(1), m(1)}, \dots, f_{m(s), m(s)}$ образуют базис T -пространства алгебры $H(p_1, \dots, p_k)$, порожденного L_1 . Теорема доказана.

Пусть $g_s = p^s f_{p^{s^2}, p^{s^2}}$ и $L_2 - T$ -пространство алгебры M , порожденное многочленами $\{g_s : s \in \mathbb{N}\}$ и T -идеалом $T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$. Легко видеть, что T -пространство $\widehat{\xi}_k(L_2)$ конечно базлируемо при любом k , так как лишь конечное число многочленов $\{\widehat{\xi}_k(g_s) : s \in \mathbb{N}\}$ отлично от нуля.

Пусть $t^2 - s^2 > t$. Если в лемме 2 положить $r = p^{t^2}$, $q = p^{s^2}$ и $q_0 = p^{t^2-s^2}$, то получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. Имеет место включение

$$\mu_{p^{t+1}}^{(p^{t^2}, p^{t^2})} L_{p^{s+1}}^{(p^{t^2}, p^{t^2})} \subset T_{p^{s+1}}^{(3)}.$$

С другой стороны, по лемме 2 имеем $g_t \notin T_{p^{t+1}}^{(3)}$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 3. T -пространство алгебры $H(p)$, порожденное L_2 , бесконечно базлируемо. Но для любого k T -пространство $\hat{\xi}_k(L_2)$ алгебры $R(p^k)$ конечно базлируемо.

§ 4. Случай ограниченных степеней

В этом параграфе мы будем использовать обозначения, независимые от §§ 2 и 3. Пусть K – бесконечное поле характеристики $p \neq 0$, $F = K\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$, $\tilde{F} = K\langle x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, \dots \rangle$ – алгебры с единицей, а $T^{(3)}$ и $\tilde{T}^{(3)}$ – идеалы алгебр F и $\tilde{F}$ соответственно, порожденные полиномом $[[x_1, x_2], x_3]$. Считаем, что $F \subset \tilde{F}$. Везде ниже выражение $z \in f$, где f – однородный полином, означает, что $\deg_z f > 0$. Пусть также S_p обозначает симметрическую группу степени p .

Положим $\varphi_m = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \cdots x_{m-1}^{p-1}[x_{m-1}, x_m]x_m^{p-1}$ для четного m . При этом считаем, что $\varphi_0 = 1$. Для любых $f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, g_1, \dots, g_p \in \tilde{F}$ пусть

$$B(f_1, \dots, f_p, g_p, \dots, g_1) = \sum_{\sigma, \tau \in S_p} f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(p-1)} [f_{\sigma(p)}, g_{\tau(p)}] g_{\tau(p-1)} \cdots g_{\tau(1)},$$

$$D(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}) = \sum_{\sigma \in S_p} f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(p-1)} [f_{\sigma(p)}, f_{p+1}] f_{p+1}^{p-1}.$$

Здесь и далее выражение $\prod_{i=1}^n f_i$ интерпретируется как $f_1 \cdots f_n$ (некоммутативное умножение).

Имеет место

ЛЕММА 7. T -пространство L_m алгебры F , порожденное многочленом φ_m и T -идеалом $T^{(3)}$, есть линейное пространство над K , натянутое на T -идеал $T^{(3)}$ и на полиномы вида

$$\begin{aligned} & \psi_{2q}(v_{1,1}, \dots, v_{1,p}, \dots, v_{2q,1}, \dots, v_{2q,p}, v_{2q+1}, \dots, v_m) \\ &= \prod_{i=1}^q B(v_{2i-1,1}, \dots, v_{2i-1,p}, v_{2i,p}, \dots, v_{2i,1}) \prod_{j=q+1}^{m/2} v_{2j-1}^{p-1} [v_{2j-1}, v_{2j}] v_{2j}^{p-1}, \\ & \psi_{2q-1}(v_{1,1}, \dots, v_{1,p}, \dots, v_{2q-1,1}, \dots, v_{2q-1,p}, v_{2q}, \dots, v_m) \\ &= \prod_{i=1}^{q-1} B(v_{2i-1,1}, \dots, v_{2i-1,p}, v_{2i,p}, \dots, v_{2i,1}) \\ & \quad \times D(v_{2q-1,1}, \dots, v_{2q-1,p}, v_{2q}) \prod_{j=q+1}^{m/2} v_{2j-1}^{p-1} [v_{2j-1}, v_{2j}] v_{2j}^{p-1}, \end{aligned}$$

где $v_{i,j}$ и v_k – некоторые слова из F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & x_1^{p-1}[x_1, x_3]x_3^{p-1}x_2^{p-1}[x_2, x_4]x_4^{p-1} \\ &= -x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}x_3^{p-1}[x_3, x_4]x_4^{p-1} \pmod{T^{(3)}}. \end{aligned}$$

Линеаризуя это выражение (в силу бесконечности поля K) по переменным x_1 и x_2 , получаем

$$\begin{aligned} D(f_1, \dots, f_p, f_{p+1})D(g_1, \dots, g_p, g_{p+1}) \\ = -B(f_1, \dots, f_p, g_p, \dots, g_1)f_{p+1}^{p-1}[f_{p+1}, g_{p+1}]g_{p+1}^{p-1} \pmod{T^{(3)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что T -пространство L_m есть линейное пространство над K , натянутое на T -идеал $T^{(3)}$ и некоторые произведения $A_1 \cdots A_m$, где A_i есть либо $D(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$, либо $B(u_1, \dots, u_p, v_p, \dots, v_1)$, либо $v_1^{p-1}[v_1, v_2]v_2^{p-1}$, а $u_1, \dots, u_{p+1}, v_1, \dots, v_{p+1}$ — некоторые слова алгебры F . Используя соотношение (5), мы избавляемся от всех $D(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$, кроме, может быть, одного.

Далее имеем

$$\begin{aligned} [x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}, x_3] &= [x_1^{p-1}x_2^{p-1}, x_3][x_1, x_2] \\ &= (p-1)[x_1, x_3][x_1, x_2]x_1^{p-2}x_2^{p-1} \\ &\quad + (p-1)[x_2, x_3][x_1, x_2]x_1^{p-1}x_2^{p-2} = 0 \pmod{T^{(3)}}. \end{aligned}$$

Линеаризуя это выражение по переменной x_1 , получаем

$$[D(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}), g] = 0 \pmod{\tilde{T}^{(3)}}. \quad (6)$$

Линеаризуя то же выражение по переменным x_1 и x_2 , получаем

$$[B(f_1, \dots, f_p, g_p, \dots, g_1), g_{p+1}] = 0 \pmod{\tilde{T}^{(3)}}. \quad (7)$$

Теперь, используя формулы (6) и (7), получаем утверждение леммы.

Однородный полином $f \in \tilde{F}$ назовем p -полным, если для любой переменной z из $\tilde{F}$ выполнено равенство $\deg_z f = 0 \pmod{p}$.

Основной технической задачей является доказательство равенства нулю по модулю T -идеала $T^{(3)}$ полиномов

$$\psi_{2q}(v_{1,1}, \dots, v_{2q,p}, v_{2q+1}, \dots, v_m), \quad \psi_{2q-1}(v_{1,1}, \dots, v_{2q-1,p}, v_{2q}, \dots, v_m)$$

в случае, когда p -полны полиномы $\prod_{i=1}^{2q} \prod_{j=1}^p v_{i,j}$, $\prod_{i=1}^{2q-1} \prod_{j=1}^p v_{i,j}$ и $q \geq 1$.

Для приведения задачи к более симметричному виду сначала докажем равенство нулю по модулю $\tilde{T}^{(3)}$ полиномов

$$\psi_{2q}(v_{1,1}, \dots, v_{2q,p}, v_{2q+1}, \dots, v_m)y_1^{p-1}[y_1, y_2]y_2^{p-1} \cdots y_{2q-1}^{p-1}[y_{2q-1}, y_{2q}]y_{2q}^{p-1}, \quad (8)$$

$$\psi_{2q-1}(v_{1,1}, \dots, v_{2q-1,p}, v_{2q}, \dots, v_m)y_1^{p-1}[y_1, y_2]y_2^{p-1} \cdots y_{2q-1}^{p-1}[y_{2q-1}, y_{2q}]y_{2q}^{p-1} \quad (9)$$

при выполнении условий на $v_{i,j}$, сформулированных выше.

Аналогично тому, как было доказано соотношение (5), получаем

$$\begin{aligned} D(f_1, \dots, f_p, f_{p+1})g_1^{p-1}[g_1, g_2]g_2^{p-1} \\ = D(f_1, \dots, f_p, g_1)f_{p+1}^{p-1}[f_{p+1}, g_2]g_2^{p-1} \pmod{\tilde{T}^{(3)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, в силу соотношений (5) и (10) для доказательства равенства нулю по модулю T -идеала $\tilde{T}^{(3)}$ полиномов (8) и (9) достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 8. Пусть полином $\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^p v_{i,j}$ p -полный. Тогда справедливо соотношение

$$h = \prod_{i=1}^r D(v_{i,1}, \dots, v_{i,p}, y_i) = 0 \pmod{\tilde{T}^{(3)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \tilde{F}$ – полином и $A \subset \{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, \dots\}$. Обозначим через $e(f, A)$ полином, получаемый из f подстановкой единицы вместо каждой буквы из A . Легко проверить, что для слова $v \in \tilde{F}$ и переменной $z_0 \in \tilde{F}$ справедлива формула

$$[z_0, v] = \sum_{z \in v} \deg_z v [z_0, z] z^{(\deg_z v) - 1} e(v, \{z\}) \pmod{\tilde{T}^{(3)}}.$$

Отсюда следует, что для слова $v \in \tilde{F}$ такого, что $\deg_z v = 0 \pmod{p}$ при $z \neq z_0$, выполнено соотношение $[z_0, v] = 0 \pmod{\tilde{T}^{(3)}}$.

Предположим теперь, что $g_1, \dots, g_s$ – однородные полиномы из $\tilde{F}$ такие, что их образы при факторизации по $\tilde{T}^{(3)}$ принадлежат центру алгебры $\tilde{F}/\tilde{T}^{(3)}$.

Пусть $u \in \tilde{F}$ – такое слово, что $\deg_z u f_1 \cdots f_s = 0 \pmod{p}$ для любого $z \neq z_0$.

Тогда в силу предыдущих замечаний имеем $[z_0, u g_1 \cdots g_s] = 0 \pmod{\tilde{T}^{(3)}}$ и, следовательно,

$$z_0 u g_1 \cdots g_s = u g_1 \cdots g_s z_0 = u z_0 g_1 \cdots g_s \pmod{\tilde{T}^{(3)}}.$$

Эти соотношения означают, что справедлива

ЛЕММА 9. Пусть w – слово из $\tilde{F}$ такое, что полином $w g_1 \cdots g_s$ p -полный, а слово w' получается из w циклическим сдвигом. Тогда

$$w g_1 \cdots g_s = w' g_1 \cdots g_s \pmod{\tilde{F}}.$$

Выясним, какие полиномы алгебры F переходят в элементы центра при факторизации по $\tilde{T}^{(3)}$. Введем обозначение:

$$C(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}) = \sum_{i=1}^p f_1 \cdots f_{i-1} [f_i, f_{p+1}] f_{p+1}^{p-1} f_{i+1} \cdots f_p.$$

Имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} [C(x_1, \dots, x_p, y_1), z] &= \left[\sum_{i=1}^p x_1 \cdots x_{i-1} [x_i, y_1] y_1^{p-1} x_{i+1} \cdots x_p, z \right] \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p [x_j, z] [x_i, y_1] y_1^{p-1} e(x_1 \cdots x_p, \{x_i, x_j\}) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j < i}^p ([x_j, z] [x_i, y_1] + [x_i, z] [x_j, y_1]) y_1^{p-1} e(x_1 \cdots x_p, \{x_i, x_j\}) \\ &= 0 \pmod{\tilde{T}^{(3)}}. \end{aligned} \tag{11}$$

ЛЕММА 10. Полином h представляется по модулю T -идеала $\tilde{T}^{(3)}$ как линейная комбинация полиномов вида

$$\prod_{i=1}^l C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i) \prod_{j=l+1}^r D(v_{j,1}, \dots, v_{j,p}, y_j), \quad (12)$$

где для любого $i = 1, \dots, l$ набор $u_{i,2}, \dots, u_{i,p}$ есть некоторая перестановка набора $v_{i,2}, \dots, v_{i,p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по l . Для $l = 0$ любое выражение (12) совпадает с h , и поэтому наше утверждение верно. Предположим, что для $l = t - 1$ утверждение выполнено: полином $D(v_{t,1}, \dots, v_{t,p}, y_t)$ представим в виде линейной комбинации полиномов вида

$$\begin{aligned} \xi(v_{t,1}, u_{t,2}, \dots, u_{t,p}, y_t) &= \sum_{s=0}^{p-2} u_{t,p-s+1} \cdots u_{t,p} v_{t,1} u_{t,2} \cdots u_{t,p-s-1} [u_{t,p-s}, y_t] y_t^{p-1} \\ &\quad + u_{t,2} \cdots u_{t,p} [v_{t,1}, y_t] y_t^{p-1}, \end{aligned}$$

где $u_{i,2}, \dots, u_{i,p}$ — некоторая перестановка набора $v_{i,2}, \dots, v_{i,p}$.

В силу соотношений (6) и (11) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{t-1} C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i) \prod_{j=t}^r D(v_{j,1}, \dots, v_{j,p}, y_j) \\ = D(v_{t,1}, \dots, v_{t,p}, y_t) g = \sum \{ \xi(v_{t,1}, u_{t,2}, \dots, u_{t,p}, y_t) g : \\ u_{t,2}, \dots, u_{t,p} \text{ — перестановка набора } v_{t,2}, \dots, v_{t,p} \}, \end{aligned}$$

где

$$g = \prod_{i=1}^{t-1} C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i) \prod_{j=t+1}^r D(v_{j,1}, \dots, v_{j,p}, y_j).$$

Если w — какой-нибудь моном полинома $\xi(v_{t,1}, u_{t,2}, \dots, u_{t,p}, y_t)$, где $u_{t,2}, \dots, u_{t,p}$ — перестановка набора $v_{t,2}, \dots, v_{t,p}$, то полином wg p -полный. По лемме 4 замена w на циклически сдвинутое слово в полиноме wg дает полином, равный wg по модулю $\tilde{T}^{(3)}$. Отсюда получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_{t,p-s+1} \cdots u_{t,p} v_{t,1} u_{t,2} \cdots u_{t,p-s-1} [u_{t,p-s}, y_t] y_t^{p-1} \\ = v_{t,1} u_{t,2} \cdots u_{t,p-s-1} [u_{t,p-s}, y_t] y_t^{p-1} u_{t,p-s+1} \cdots u_{t,p} g \pmod{\tilde{T}^{(3)}} \end{aligned}$$

при $s = 0, \dots, p - 2$ и

$$u_{t,2} \cdots u_{t,p} [v_{t,1}, y_t] y_t^{p-1} g = [v_{t,1}, y_t] y_t^{p-1} u_{t,2} \cdots u_{t,p} g \pmod{\tilde{T}^{(3)}}.$$

В силу этого имеем

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{t-1} C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i) \prod_{j=t}^r D(v_{j,1}, \dots, v_{j,p}, y_j) \\
&= \sum \{ C(v_{t,1}, u_{t,2}, \dots, u_{t,p}, y_t) g : \\
&\quad u_{t,2}, \dots, u_{t,p} \text{ — перестановка набора } v_{t,2}, \dots, v_{t,p} \} \\
&= \sum \left\{ \prod_{i=1}^t C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i) \prod_{j=t+1}^r D(v_{j,1}, \dots, v_{j,p}, y_j) : \right. \\
&\quad \left. u_{t,2}, \dots, u_{t,p} \text{ — перестановка набора } v_{t,2}, \dots, v_{t,p} \right\} \pmod{\tilde{T}^{(3)}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана.

Воспользуемся этой леммой при $l = r$. Получаем, что h представляется по модулю $\tilde{T}^{(3)}$ как линейная комбинация выражений

$$\prod_{i=1}^r C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i), \quad (13)$$

где для $i = 1, \dots, r$ набор $u_{i,2}, \dots, u_{i,p}$ есть перестановка набора $v_{i,2}, \dots, v_{i,p}$.

Докажем теперь равенство нулю по модулю T -идеала $\tilde{T}^{(3)}$ всех полиномов (13). Справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
& C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} [x_k, y_i] x_k^{a_{i,k}-1} y_i^{p-1} e(v_{i,1} u_{i,2} \dots u_{i,p}, \{x_k\}) \pmod{\tilde{T}^{(3)}},
\end{aligned}$$

где $a_{i,k} = \deg_{x_k} v_{i,1} u_{i,2} \dots u_{i,p}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^r C(v_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,p}, y_i) = \sum_{k_1, \dots, k_r} a_{1,k_1} \dots a_{r,k_r} [x_{k_1}, y_1] \dots [x_{k_r}, y_r] \\
&\quad \times x_{k_1}^{a_{1,k_1}-1} \dots x_{k_r}^{a_{r,k_r}-1} y_1^{p-1} \dots y_r^{p-1} e(g_0, \{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}\}) \\
&= \sum_{k_1 < \dots < k_r} \sum_{\sigma \in S_r} a_{1,k_{\sigma(1)}} \dots a_{r,k_{\sigma(r)}} [x_{k_{\sigma(1)}}, y_1] \dots [x_{k_{\sigma(r)}}, y_r] \\
&\quad \times x_{k_{\sigma(1)}}^{a_{1,k_{\sigma(1)}}-1} \dots x_{k_{\sigma(r)}}^{a_{r,k_{\sigma(r)}}-1} y_1^{p-1} \dots y_r^{p-1} e(g_0, \{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}\}) \\
&= \sum_{k_1 < \dots < k_r} \left(\sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,k_{\sigma(1)}} \dots a_{r,k_{\sigma(r)}} \right) [x_{k_1}, y_1] \dots [x_{k_r}, y_r] \\
&\quad \times x_{k_1}^{a_{1,k_1}-1} \dots x_{k_r}^{a_{r,k_r}-1} y_1^{p-1} \dots y_r^{p-1} e(g_0, \{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}\}) \pmod{\tilde{T}^{(3)}},
\end{aligned}$$

где $g_0 = \prod_{i=1}^r v_{i,1} u_{i,2} \dots u_{i,p}$. Выражение $\sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,k_{\sigma(1)}} \dots a_{r,k_{\sigma(r)}}$ есть определитель матрицы $M_{k_1, \dots, k_r}$, у которой на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит элемент a_{i,k_j} . По условию

$$\sum_{i=1}^r a_{i,k_j} = \sum_{i=1}^r \deg_{x_{k_j}} v_{i,1} u_{i,2} \dots u_{i,p} = \deg_{x_{k_j}} g_0 = 0 \pmod{p}$$

для любого $j = 1, \dots, r$. Следовательно, если рассматривать матрицу $M_{k_1, \dots, k_r}$ как матрицу над полем $\mathbb{Z}_p$, то ее строки линейно зависимы (их сумма равна нулю по модулю p). Поэтому ее определитель равен нулю по модулю p . Это означает, что

$$\sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1, k_{\sigma(1)}} \cdots a_{r, k_{\sigma(r)}} = 0 \pmod{p}.$$

Отсюда $h = 0 \pmod{\tilde{F}}$. Лемма 8 доказана.

Имеет место

ЛЕММА 11. *При $p > 2$ выполняется $\varphi_m \notin T^{(3)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в полином φ_m вместо x_i полином $1 + x_i$ при $i = 1, \dots, m$ и выделяя затем полилинейное однородное слагаемое, зависящее от всех $\{x_1, \dots, x_m\}$, получаем полином $[x_1, x_2] \cdots [x_{m-1}, x_m]$. Если предположить, что $\varphi_m \in T^{(3)}$, то в силу унитарной замкнутости T -идеала $T^{(3)}$ получим, что

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{m-1}, x_m] \in T^{(3)}. \quad (14)$$

В алгебре Грассмана $G = K\langle e_1, \dots, e_n, \dots \rangle / \{e_i e_j + e_j e_i : i, j \in \mathbb{N}\}$, как известно, выполняется тождество $[[x, y], z] = 0$. С другой стороны, в алгебре G выполняется $[e_1, e_2] \cdots [e_{m-1}, e_m] = 2^{m/2} e_1 \cdots e_m \neq 0$, что показывает несправедливость соотношения (14). Таким образом, $\varphi_m \notin T^{(3)}$ при $p > 2$ (впрочем, и при $p = 2$). Лемма доказана.

ЛЕММА 12. *Полином $\varphi_m x_{m+1}^p \cdots x_{m'}^p$ не может быть представлен по модулю T -идеала $T^{(3)}$ в виде линейной комбинации однородных полиномов вида $f x_{k_1}^p \cdots x_{k_t}^p$, где $\deg_{x_k} f x_{k_1}^p \cdots x_{k_t}^p = \deg_{x_k} \varphi_m x_{m+1}^p \cdots x_{m'}^p$ для любой переменной $x_k \in \tilde{F}$ и множество $\{k_1, \dots, k_t\}$ не является подмножеством множества $\{m+1, \dots, m'\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя вместо переменных $x_{m+1}, \dots, x_{m'}$ единицу и учитывая унитарную замкнутость T -идеала $T^{(3)}$, получаем, что лемму достаточно доказать для $m' = m$. Проведем индукцию по m . Для $m = 0$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $m = n - 2$. Докажем его для $m = n$. Предположим, что это не так. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k x_{i(1,k)}^{p-1} [x_{i(1,k)}, x_{i(2,k)}] x_{i(2,k)}^{p-1} \cdots x_{i(s_k-1,k)}^{p-1} \\ &\quad \times [x_{i(s_k-1,k)}, x_{i(s_k,k)}] x_{i(s_k,k)}^{p-1} x_{j(1,k)}^p \cdots x_{j(r_k,k)}^p \pmod{T^{(3)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу леммы 11 можно считать, что $k_0 \geq 1$ и $\alpha_k \neq 0$, $r_k \geq 1$ для $k = 1, \dots, k_0$.

Считаем также, что любой член суммы из правой части формулы (15) имеет ту же степень по любой переменной $x_k \in F$, что и полином φ_m , и при этом для $k \neq l$ выполнено $\{j(1,k), \dots, j(r_k,k)\} \neq \{j(1,l), \dots, j(r_l,l)\}$. Подставляя вместо переменных $x_{j_{1,1}}, \dots, x_{j_{r_1,1}}$ единицу, получаем противоречие для некоторого $m \leq n - 2$. Лемма доказана.

Если предположить, что при $q \geq 1$ и выполнении вышеупомянутых условий на $v_{1,1}, \dots, v_{2q,p}$ справедливо

$$\psi_{2q}(v_{1,1}, \dots, v_{2q,p}, v_{2q+1}, \dots, v_m) \neq 0 \pmod{T^{(3)}},$$

то

$$\begin{aligned} & \psi_{2q}(v_{1,1}, \dots, v_{2q,p}, v_{2q+1}, \dots, v_m) \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k x_{i(1,k)}^{p-1} [x_{i(1,k)}, x_{i(2,k)}] x_{i(2,k)}^{p-1} \cdots x_{i(s_k-1,k)}^{p-1} \\ & \quad \times [x_{i(s_k-1,k)}, x_{i(s_k,k)}] x_{i(s_k,k)}^{p-1} x_{j(1,k)}^p \cdots x_{j(r_k,k)}^p \pmod{T^{(3)}}, \end{aligned}$$

где опять $k_0 \geq 1$, $\alpha_k \neq 0$, $r_k \geq 1$ для $k = 1, \dots, k_0$, любой член суммы из правой части данной формулы имеет ту же степень по любой переменной $x_k \in F$, что и полином $\psi_{2q}(v_{1,1}, \dots, v_{2q,p}, v_{2q+1}, \dots, v_m)$, и при этом для $k \neq l$ выполнено $\{j(1,k), \dots, j(r_k,k)\} \neq \{j(1,l), \dots, j(r_l,l)\}$.

Умножая $\psi_{2q}(v_{1,1}, \dots, v_{2q,p}, v_{2q+1}, \dots, v_m)$ на

$$y_1^{p-1} [y_1, y_2] y_2^{p-1} \cdots y_{m-1}^{p-1} [y_{m-1}, y_m] y_m^{p-1},$$

подставляя единицу вместо $x_{j(1,1)}, \dots, x_{j(r_1,1)}$ и учитывая лемму 8, приходим к противоречию с леммой 12.

Аналогично при $q \geq 1$ и выполнении вышеупомянутых условий на $v_{1,1}, \dots, v_{2q-1,p}$ получаем

$$\psi_{2q-1}(v_{1,1}, \dots, v_{2q-1,p}, v_{2q}, \dots, v_m) = 0 \pmod{T^{(3)}}.$$

Таким образом, можно считать, что T -пространство, порожденное полиномом φ_m и T -идеалом $T^{(3)}$, натянуто на полиномы вида

$$v_1^{p-1} [v_1, v_2] v_2^{p-1} \cdots v_{m-1}^{p-1} [v_{m-1}, v_m] v_m^{p-1}, \quad (16)$$

где $v_1, \dots, v_m$ — некоторые слова из F .

Считаем теперь, что $p > 2$. Тогда имеем

$$(x_1 x_2)^p = x_1^p x_2^p + \frac{p(p-1)}{2} [x_2, x_1] x_1^{p-1} x_2^{p-1} = x_1^p x_2^p \pmod{T^{(3)}}, \quad (17)$$

так как число $p(p-1)/2$ делится на p при $p > 2$.

Если существует $i = 1, \dots, m$ такое, что слово v_i не однобуквенно, то так как выполняется соотношение

$$[y_1, v_i] v_i^{p-1} = \sum_{z \in v_i} \deg_z v_i [y_1, z] z^{(\deg_z v_i) - 1} e(v_i^p, \{z\}) \pmod{\tilde{T}^{(3)}},$$

в силу (17) получаем, что (16) представляется в виде линейной комбинации полиномов вида $x_i^p f$. Поэтому предположение о том, что полином φ_{m+2} принадлежит T -пространству, порожденному полиномами $\varphi_2, \dots, \varphi_m$ и T -идеалом $T^{(3)}$, противоречит лемме 12. Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *T -пространство алгебры F , порожденное полиномами $\varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots$, при $p > 2$ не является конечно базлируемым по модулю тождества $[[x, y], z] = 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Как легко видеть, при $p > 2$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} x_2 x_1^{p-1} + x_1 x_2 x_1^{p-2} + \dots + x_1^{p-1} x_2 \\ = \frac{p(p-1)}{2} [x_2, x_1] x_1^{p-1} + p x_2 x_1^{p-1} = 0 \pmod{T^{(3)}}. \end{aligned}$$

Линеаризуя это соотношение, получаем

$$\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)} = 0 \pmod{T^{(3)}}. \quad (18)$$

Если предположить, что φ_m принадлежит идеалу, порожденному T -идеалом $T^{(3)}$ и полиномами f^p , где f — полином без свободного члена, то получим, что полином $[x_1, x_2] \cdots [x_{m-1}, x_m]$ принадлежит T -идеалу, порожденному полиномами $[[x_1, x_2], x_3]$ и $\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)}$. В силу соотношения (18) получаем тогда $[x_1, x_2] \cdots [x_{m-1}, x_m] \in T^{(3)}$, что неверно. Это означает, что справедлива

ЛЕММА 13. *T -пространство, порожденное полиномами $\varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots$, при $p > 2$ не является конечно базлируемым по модулю идеала, порожденного T -идеалом $T^{(3)}$ и полиномами $f^p = 0$, где f — полином без свободного члена.*

Пусть $Q'(f, g) = f^{p-1} g f g^{p-1}$ и для четного m положим

$$\varphi'_m = Q'(x_1, x_2) \cdots Q'(x_{m-1}, x_m).$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 5. *T -пространство, порожденное полиномами $\varphi'_2, \dots, \varphi'_m, \dots$, при $p > 2$ не является конечно базлируемым по модулю идеала, порожденного T -идеалом $T^{(3)}$ и полиномами $f^p = 0$, где f — полином без свободного члена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через L_m обозначим T -пространство, порожденное полиномами $1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, f^p$, где f — полином без свободного члена, и T -идеалом $T^{(3)}$. Считаем, что $(n_2, l_2) > (n_1, l_1)$, где n_2, l_2, n_1, l_1 — неотрицательные целые числа, если пара (n_2, l_2) лексикографически больше пары (n_1, l_1) .

Докажем, что при $l \leq n \leq m/2$ выражение

$$Q'(f_1, g_1) \cdots Q'(f_l, g_l) Q(f_{l+1}, g_{l+1}) \cdots Q(f_n, g_n) \quad (19)$$

принадлежит L_m .

Проведем индукцию по паре (n, l) .

Пусть $l \geq 1$. Пусть также $f_l = \bar{f}_l + \alpha$ и $g_l = \bar{g}_l + \beta$, где $\alpha, \beta \in K$, а $\bar{f}_l$ и $\bar{g}_l$ — полиномы без свободного члена.

Тогда

$$f_l^p g_l^p = (\bar{f}_l^p + \alpha^p)(\bar{g}_l^p + \beta^p) = \alpha^p \beta^p \pmod{L_m}.$$

Отсюда

$$Q'(f_l, g_l) = f_l^{p-1} g_l f_l g_l^{p-1} - (f_l^p g_l^p - \alpha^p \beta^p) = -Q(f_l, g_l) + \alpha^p \beta^p \pmod{L_m}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & Q'(f_1, g_1) \cdots Q'(f_l, g_l) Q(f_{l+1}, g_{l+1}) \cdots Q(f_n, g_n) \\ &= -Q'(f_1, g_1) \cdots Q'(f_{l-1}, g_{l-1}) Q(f_l, g_l) \cdots Q(f_n, g_n) \\ &+ \alpha^p \beta^p Q'(f_1, g_1) \cdots Q'(f_{l-1}, g_{l-1}) Q(f_{l+1}, g_{l+1}) \cdots Q(f_n, g_n) \pmod{L_m}. \end{aligned}$$

Два последних слагаемых принадлежат L_m по предположению индукции. Следовательно,

$$Q'(f_1, g_1) \cdots Q'(f_l, g_l) Q(f_{l+1}, g_{l+1}) \cdots Q(f_n, g_n) = L_m.$$

Если же $l = 0$, то выражение (19) принадлежит L_m по определению. По лемме 13 $\varphi_{m+2} \notin L_m$. С другой стороны, $\varphi_{m+2} = \varphi'_{m+2} \pmod{L_m}$. Поэтому $\varphi_{m+2} \notin L_m$.

Теорема доказана.

§ 5. Конечная базлируемость некоторых T -пространств

Пусть $R = \Phi\langle X \rangle$, где Φ — коммутативное кольцо с единицей, $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$. Для $f_1, \dots, f_d \in R$ положим

$$S_d(f_1, \dots, f_d) = \sum_{\sigma \in S(d)} f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(d)}.$$

Пусть $h_n = S_d(x_1, \dots, x_d) \cdots S_d(x_{(n-1)d+1}, \dots, x_{nd})$.

Обозначим через R_n T -пространство алгебры R , порожденное полиномами $h_1, \dots, h_n$. Докажем, что $R_{d+1} = R_d$.

Для удобства изложения через P обозначим множество полилинейных многочленов алгебры R (R не является подмодулем модуля ΦR). Для $f \in P$ положим $\text{vr } f$ равным множеству переменных, от которых зависит f .

ЛЕММА 14. Пусть $h = \sum_{i=1}^k g_i f g'_i \in L \cap P$, где L — T -пространство алгебры R . Тогда $\sum_{i=1}^k g_i [f, x_k] g'_i \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{vr } f = \{x_{i(1)}, \dots, x_{i(m)}\}$. Через f'_i обозначим полином, получающийся из f подстановкой: $x_{i(l)} \rightarrow x_{i(l)}$ при $l \neq j$ и $x_{i(j)} \rightarrow x_{i(j)} x_k$, а через f''_j — полином, получающийся из f подстановкой: $x_{i(l)} \rightarrow x_{i(l)}$ при $l \neq j$ и $x_{i(j)} \rightarrow x_k x_{i(j)}$.

Тогда $L \ni \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^s g_i f'_j g'_i - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^s g_i f''_j g'_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^s g_i (f'_i - f''_i) g'_i = \sum_{i=1}^s g_i [f, x_k] g'_i$.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ЛЕММЫ 14. Пусть L — T -пространство алгебры R . Тогда

- 1) $g \in L \Rightarrow [g, x_k] \in L$,
- 2) $\sum_{i=1}^s g_i x_k f g'_i \in L \cap P \Rightarrow \sum_{i=1}^k g_i x_k f x_l g'_i \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое свойство легко следует из правила дифференцирования Лейбница. Докажем второе. Имеем $\sum_{i=1}^k g_i x_l x_k f g'_i \in L$. По лемме 14 имеем также $\sum_{i=1}^k g_i [x_k f, x_l] g'_i \in L$. Суммируя эти выражения, получаем $\sum_{i=1}^k g_i x_k f x_l g'_i \in L$.

Введем обозначение: $S'_{d+1}(f_1, \dots, f_d, g) = \sum_{i=1}^d S_d(f_1, \dots, g f_i, \dots, f_d)$.

Тогда, как легко проверить,

$$S'_{d+1}(f_1, \dots, f_d, g) = \sum_{i=1}^d S_d(f_1, \dots, f_{i-1}, g, f_{i+1}, \dots, f_d) f_i. \quad (20)$$

Пусть $u_2, \dots, u_d \in R_1$ — полиномы, не содержащие переменные $x_1, \dots, x_{d+1}$.

Построим последовательность многочленов $\{f_i : i = 1, \dots, d\}$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_{d+1}) &= S'_{d+1}(x_1, \dots, x_{d+1}), \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_{d+1}) &= u_{k+1} f_k(x_1, \dots, x_{d+1}) \\ &\quad - f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1} u_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{d+1}), \end{aligned} \quad (21)$$

где $k = 1, \dots, d-1$.

ЛЕММА 15. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} f_k(x_1, \dots, x_{d+1}) &= \sum_{j_2, \dots, j_k \in \{0,1\}} (-1)^{j_2 + \dots + j_k} u_k^{1-j_k} \dots u_2^{1-j_2} \\ &\quad \times S_d(x_2 u_2^{j_2}, \dots, x_k u_k^{j_k}, x_{k+1}, \dots, x_{d+1}) x_1 + \sum_{i=k+1}^d g_i x_i \pmod{R_1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $g_{k+1}, \dots, g_d$ — некоторые многочлены такие, что полином g_i не содержит переменной x_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по k . Для f_1 утверждение справедливо по формуле (20). Пусть $k < d$ и для k формула (22) выполнена. Имеем в силу (21)

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x_1, \dots, x_{d+1}) &= \sum_{j_2, \dots, j_k \in \{0,1\}} (-1)^{j_2 + \dots + j_k} u_{k+1} u_k^{1-j_k} \dots u_2^{1-j_2} \\ &\quad \times S_d(x_2 u_2^{j_2}, \dots, x_k u_k^{j_k}, x_{k+1}, \dots, x_{d+1}) x_1 \\ &\quad + \sum_{j_2, \dots, j_k \in \{0,1\}} (-1)^{j_2 + \dots + j_k + 1} u_k^{1-j_k} \dots u_2^{1-j_2} \\ &\quad \times S_d(x_2 u_2^{j_2}, \dots, x_k u_k^{j_k}, x_{k+1} u_{k+1}, \dots, x_{d+1}) x_1 + [u_{k+1}, g_{k+1} x_{k+1}] \\ &\quad + \sum_{i=k+2}^d g'_i x_i = \sum_{j_2, \dots, j_{k+1} \in \{0,1\}} (-1)^{j_2 + \dots + j_{k+1}} u_{k+1}^{1-j_{k+1}} u_k^{1-j_k} \dots u_2^{1-j_2} \\ &\quad \times S_d(x_2 u_2^{j_2}, \dots, x_k u_k^{j_k}, x_{k+1} u_{k+1}^{j_{k+1}}, x_{k+2}, \dots, x_{d+1}) x_1 \\ &\quad + \sum_{i=k+2}^d g'_i x_i \pmod{R_1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

При $k = d$ формула (22) принимает вид:

$$\begin{aligned} f_d(x_1, \dots, x_{d+1}) \\ = \sum_{j_2, \dots, j_d \in \{0,1\}} (-1)^{j_1 + \dots + j_d} u_d^{1-j_d} \dots u_2^{1-j_2} S_d(x_2 u_2^{j_2}, \dots, x_d u_d^{j_d}, x_{d+1}) x_1. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что $f_d \in R_d$.

ЛЕММА 16. $R_{d+1} = R_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим вместо x_1 элемент u_{d+1} из R_1 . Тогда имеем соотношение

$$\begin{aligned} u_d \dots u_2 S_p(x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) u_{d+1} \\ + \sum_{\substack{j_2, \dots, j_d \in \{0,1\} \\ \exists i: j_i \neq 0}} (-1)^{j_2 + \dots + j_d} u_d^{1-j_d} \dots u_2^{1-j_2} S_d(x_2 u_2^{j_2}, \dots, x_d u_d^{j_d}, x_{d+1}) u_{d+1} \in R_d. \end{aligned}$$

Легко видеть, что выражение, стоящее под знаком суммы в последнем соотношении, принадлежит R_d . Тогда $u_d \dots u_2 S_d(x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) u_{d+1} \in R_d$. В силу произвольности выбора полиномов $u_2, \dots, u_d, u_{d+1}$ получим $R_{d+1} = R_d$. Лемма доказана.

Пусть теперь K — поле характеристики $p > 2$, $F = K\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$, L_n есть T -пространство алгебры F , порожденное многочленами $\{x_1^p \dots x_i^p : i = 1, \dots, n\}$.

Докажем, что $L_{p+1} = L_p$. Пусть $c = (p+1)/2$. По доказанному ранее $R_{p+1} = R_p$, в частности в случае $\Phi = \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$S_p(x_{1,1}, \dots, x_{1,p}) \dots S_p(x_{p+1,1}, \dots, x_{p+1,p}) \in L_p, \quad (23)$$

где $x_{i,j}$ — некоторые буквы алгебры F .

Справедлива

ЛЕММА 17. При $k = 0, \dots, c$ имеем

$$S_p(x_{1,1}, \dots, x_{1,p}) \dots S_p(x_{2(c-k),1}, \dots, x_{2(c-k),p}) z_1^p \dots z_{2k}^p \in L_p,$$

где $x_{i,j}, z_i$ — некоторые буквы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по k . Для $k = 0$ утверждение справедливо в силу (23). Пусть $k \leq 1$, тогда по предположению индукции имеем

$$f S_p(x_1, \dots, x_p) S_p(y_1, \dots, y_p) z_3^p \dots z_{2k}^p \in L_p,$$

где $f = S_p(x_{1,1}, \dots, x_{1,p}) \dots S_p(x_{2(c-k),1}, \dots, x_{2(c-k),p})$.

Но $f(z_1 + z_2)^p z_3^p \dots z_{2k}^p \in L_p$. Считая, что переменные z_1 и z_2 не входят в полиномы f и $z_3^p \dots z_{2k}^p$, выделим из многочлена $f(z_1 + z_2)^p z_3^p \dots z_{2k}^p$ однородную компоненту h степени p по переменным z_1 и z_2 . Тогда $h \in L_p$.

Пусть

$$g = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{(i!(p-i)!)^2} f S_p(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{i \text{ раз}}, z_2, \dots, z_2) S_p(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{p-i \text{ раз}}, z_2, \dots, z_2) z_3^p \cdots z_{2k}^p.$$

Заметим, что $i!(p-i)! \neq 0$ и деление корректно. Имеем $f(z_1^p z_2^p + z_2^p z_1^p) z_3^p \cdots z_{2k}^p = h - g \in L_p$. По п. 1) следствия из леммы 14 имеем $f[z_1^p, z_2^p] z_3^p \cdots z_{2k}^p \in L_p$. Следовательно, имеем $2f z_1^p z_2^p z_3^p \cdots z_{2k}^p \in L_p$. Так как $p > 2$, $f z_1^p z_2^p z_3^p \cdots z_{2k}^p \in L_p$.

Лемма доказана.

При $k = c$ утверждение леммы принимает вид $z_1^p \cdots z_{p+1}^p \in L_p$, откуда $L_{p+1} = L_p$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 6. $L_{p+1} = L_p$.

Список литературы

1. *Schpecht W.* Gesetze in Ringen // Math. Z. 1950. V. 52. №5. P. 557–589.
2. *Кемер А. Р.* Конечная базисуемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 5. С. 597–641.
3. *Кемер А. Р.* Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №4. С. 726–753.
4. *Гришин А. В.* О конечной базисуемости абстрактных T -пространств // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. №3. С. 669–700.
5. *Гришин А. В.* Бесконечно базисуемое T -пространство над полем характеристики 2 // Международная конференция по алгебре и анализу, посвященная 100-летию со дня рождения Н. Г. Чеботарева. Тезисы докладов. Казань, 5–11 июня 1994 г. С. 29.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23.02.1999