Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Воробьев, Гамильтоновы структуры систем в вариациях и симплектические связности, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 4, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:09:19

УДК 514.7+517.9

Ю. М. Воробьев

Гамильтоновы структуры систем в вариациях и симплектические связности

В терминах симплектических связностей получены необходимые и достаточные условия, при которых система в вариациях гамильтоновой системы вдоль заданного инвариантного симплектического подмногообразия является также гамильтоновой относительно некоторой допустимой симплектической структуры. Класс допустимых симплектических структур выделяется с помощью естественного условия согласования с симплектической 2-формой объемлющего пространства. Исследованы возможные препятствия к гамильтонизации систем в вариациях.

Библиография: 21 название.

Введение

При изучении линеаризованной гамильтоновой динамики весьма полезным оказывается применение теории симплектических линейных связностей. В этом контексте идея использования симплектических связностей была реализована, например, в работах [1], [2]. Для решения ряда задач, возникающих в классической и квантовой теории гамильтоновых систем, в работах [3]–[7] был развит геометрический подход, основанный на использовании симплектических связностей, в частности, адаптированных связностей. Целью настоящей работы является применение этого подхода для исследования линеаризованной гамильтоновой динамики над инвариантными симплектическими подмногообразиями. Под линеаризованной динамикой мы понимаем автономную динамическую систему на векторном расслоении (систему в вариациях), которая возникает в результате линеаризации гамильтоновой системы вдоль траекторий, лежащих на заданном симплектическом подмногообразии. Нас интересует задача гамильтонизации систем в вариациях.

Пусть имеется гамильтонова система (M, ω, H) , обладающая инвариантным симплектическим подмногообразием $B \subset M$, размерность которого меньше размерности объемлющего пространства M : $\dim B < \dim M$. Тогда “внешняя” информация по отношению к B определяется нормальным расслоением $E = (TB)^\perp$ (симплектическая нормаль) подмногообразия B в M , которое является симплектическим векторным расслоением над симплектической базой B . Процедура линеаризации по нормали, примененная к гамильтонову векторному полю $\text{ad}(H)$ функции H вдоль B , приводит к векторному полю $\mathcal{V}_H$ на E со свойством: (локальный)

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фондом фундаментальных исследований (грант № 99-01-01047).

фазовый поток векторного поля $\mathcal{V}_H$ определяется действием на E линеаризованного фазового потока векторного поля $\text{ad}(H)$. В частности, $\mathcal{V}_H$ касается нулевого сечения $B \subset E$. Итак, процедура линеаризации сопоставляет гамильтоновой системе (M, ω, H, B) модельную систему $(E, \mathcal{V}_H, B)$ – систему в вариациях, которая автоматически наследует все свойства исходной системы, кроме гамильтоновости. Возникает естественный вопрос: является ли система в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ гамильтоновой системой, для которой нулевое сечение $B \subset E$ выступает в роли инвариантного симплектического подмногообразия?

В первую очередь, для решения этой задачи гамильтонизации естественно попытаться применить результаты работы [2] и следующее наблюдение. Пусть Var_H – векторное поле на касательном расслоении TM , представляющем систему в вариациях гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ вдоль всего объемлющего пространства M . Известно, что векторное поле Var_H является гамильтоновым относительно так называемой касательной симплектической структуры Ω^{TM} (см. [2]). С другой стороны, нормальное расслоение E как подмногообразия TM инвариантно относительно Var_H и $\mathcal{V}_H = \text{Var}_H|_E$. Но оказывается, что эти факты не могут быть использованы для гамильтонизации векторного поля $\mathcal{V}_H$, поскольку 2-форма Ω^{TM} аннулируется на векторах, касательных к E .

Это обстоятельство мотивирует другой подход, основанный на рассмотрении класса допустимых симплектических структур на E . Мы называем замкнутую 2-форму Ω на E *допустимой*, если значения Ω и исходной симплектической структуры ω совпадают на касательных векторах к M в точках подмногообразия B (т.е. на сечениях расслоения $T_B M \approx T_B E$). В этом случае Ω невырождена в некоторой окрестности нулевого сечения $B \subset E$ и тем самым определяет симплектическую структуру в этой окрестности. Кроме того, по теореме Дарбу–Вейнштейна эту окрестность можно выбрать так, что Ω будет эквивалентна ограничению ω на некоторую окрестность B в M .

Теперь наша задача формулируется так: найти допустимую 2-форму Ω на E , относительно которой векторное поле $\mathcal{V}_H$ является гамильтоновым (по крайней мере в некоторой окрестности нулевого сечения $B \subset E$).

Если $\mathcal{V}_H$ является гамильтоновым векторным полем относительно некоторой допустимой 2-формы Ω с функцией Гамильтона $\mathcal{F}_H$, то исходная гамильтонова система (M, ω, H) вблизи B при подходящем диффеоморфизме из теоремы Дарбу–Вейнштейна переходит в гамильтонову систему на (E, Ω) , которая может рассматриваться как возмущение системы в вариациях $(E, \Omega, \mathcal{F}_H)$.

Но оказывается, что существуют нетривиальные препятствия к гамильтонизации систем в вариациях. Это видно уже в простейшей ситуации, когда B – это симплектический цилиндр, состоящий из периодических траекторий гармонического осциллятора (см. пример 4.1). С точки зрения теории нормальных форм эти препятствия имеют следующую интерпретацию. Пусть исходная гамильтонова система в окрестности B в M эквивалентна системе в вариациях в следующем смысле: существует диффеоморфизм f из окрестности B в M на окрестность нулевого сечения B в E такой, что $f|_B$ и $df|_{T_B M}$ – тождественные отображения и f переводит гамильтоново векторное поле $\text{ad}(H)$ в $\mathcal{V}_H$: $f_* \text{ad}(H) = \mathcal{V}_H$. Тогда отсюда сразу следует, что $\mathcal{V}_H$ является гамильтоновым относительно допустимой 2-формы $(f^{-1})^* \omega$ и, следовательно, препятствие к гамильтоновости системы в вариациях является одним из препятствий к введенной выше эквивалентности.

Итак, множество, состоящее из гамильтоновых систем (M, ω, H, B) с инвариантным симплектическим подмногообразием, можно разбить на два класса: первый класс включает системы, у которых системы в вариациях допускают гамильтонизацию, и второй класс состоит из систем с противоположным свойством. В частности, первый класс содержит системы, чья линеаризованная динамика обладает “хорошими” свойствами, типа приводимости (см. § 4).

Несколько слов о структуре и основных результатах работы. В § 1, § 2 мы приводим некоторый подготовительный материал, касающийся свойств линеаризованной гамильтоновой динамики и включающий необходимые факты из теории симплектических связностей.

Основные результаты представлены в § 3. Сначала мы доказываем критерий гамильтоновости системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$, сформулированный как условие существования симплектической связности ∇ на E , удовлетворяющей свойству инвариантности: горизонтальное подрасслоение связности ∇ инвариантно относительно фазового потока векторного поля $\mathcal{V}_H$ (теорема 3.1). Условие такого типа как достаточное условие гамильтоновости появилось в [7]. Мы показываем, что оно является также и необходимым для разрешения задачи гамильтонизации в классе допустимых симплектических 2-форм на E . Ключевым моментом здесь является взаимосвязь между симплектическими связностями и допустимыми 2-формами: каждая симплектическая связность ∇ на E индуцирует допустимую 2-форму Ω^∇ на E , которая представляет собой результат процедуры минимального спаривания [8]. Наоборот, любая допустимая 2-форма порождает симплектическую связность на E типа Ботта [9]. Далее, используя понятие “адаптированной связности” [4], мы формулируем критерий гамильтоновости системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ только в терминах исходного гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ (теорема 3.2).

В § 4 обсуждаются возможные препятствия к гамильтонизации систем в вариациях и их связь с теорией приводимости линеаризованной динамики [3], [4], [7], [10]–[12].

В § 5 дается реализация полученных в § 3 условий гамильтоновости систем в вариациях в случае, когда симплектическое подмногообразие B тривиально расслоено условно периодическими торами размерности $\frac{1}{2} \dim B$, которые по отношению к объемлющему пространству являются изотропными подмногообразиями. Такая ситуация, например, является характерной для систем с обобщенными переменными “действие-угол” [13] и для вполне интегрируемых систем в некоммутативном смысле [14].

Автор весьма благодарен М. В. Карасеву за многочисленные плодотворные обсуждения, а также А. Т. Фоменко и участникам его научного семинара за ценные замечания и интерес к работе.

§ 1. Процедура линеаризации

В этом параграфе мы приводим необходимые факты, связанные с процедурой линеаризации гамильтоновой системы в окрестности заданного инвариантного симплектического подмногообразия. Более детальное рассмотрение этого вопроса может быть найдено, например, в работах [2], [4], [7].

Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие, состоящее из гладкого мно-

гообразия M с невырожденной замкнутой 2-формой (симплектической структурой) ω . Гамильтоново векторное поле функции $H \in C^\infty(M)$ обозначим через $\text{ad}(H)$, $\text{ad } H \rfloor \omega = -dH$. Напомним, что скобка Пуассона на M , симплектическая структура и производная Ли вдоль гамильтоновых векторных полей связаны соотношениями:

$$\{H_1, H_2\} = \omega(\text{ad}(H_1), \text{ad}(H_2)) = L_{\text{ad}(H_1)} H_2.$$

Предположим, что гамильтонова система (M, ω, H) обладает инвариантным симплектическим многообразием $B \subset M$:

- $\text{ad}(H)$ касается B ;
- ограничение $\omega_0 = \omega|_B$ невырождено.

Рассмотрим векторное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ над B , слой которого над точкой $\xi \in B$ определяется как косоортогональное дополнение к касательной плоскости $T_\xi B$:

$$E_\xi = (T_\xi B)^\perp \equiv \{X \in T_\xi M : \omega(X, u) = 0 \ \forall u \in T_\xi B\}.$$

Поскольку $T_\xi B$ является симплектическим подпространством в $T_\xi M$, то слой E_ξ – так же симплектическое подпространство и имеет косоортогональное разложение в прямую сумму:

$$T_\xi M = T_\xi B \oplus E_\xi.$$

Таким образом, E является симплектическим подрасслоением ограниченного касательного расслоения $T_B M$, при этом размерность тотального пространства E совпадает с размерностью объемлющего многообразия M : $\dim E = \dim M$.

В дальнейшем нам будет удобно считать, что послойная симплектическая структура на E задается антисимметричным морфизмом $\mathcal{J}: E \rightarrow E^*$, который индуцируется исходной симплектической структурой ω :

$$\langle \mathcal{J} X, Y \rangle = \omega(X, Y), \quad X, Y \in E_\xi, \quad \xi \in B, \quad (1.1)$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание между векторами и ковекторами.

Пару $(E, \mathcal{J})$ будем называть (*симплектическим*) *нормальным расслоением* подмногообразия B в M .

Процедура линеаризации позволяет сопоставить гамильтоновой системе с инвариантным симплектическим подмногообразием (M, ω, H, B) векторное поле $\mathcal{V}_H$ на E со свойствами:

- фазовый поток G_H^t векторного поля $\mathcal{V}_H$ совпадает с линеаризованным действием фазового потока гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ на E ;
- нулевое сечение $B \subset E$ инвариантно относительно G_H^t .

Будем называть динамическую систему с инвариантным подмногообразием $(E, \mathcal{V}_H, B)$ *системой в вариациях гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ вдоль B* .

Следуя [2], [7], дадим теперь аккуратное определение.

Система в вариациях на TM . Рассмотрим векторное поле $\text{ad}(H)$ как гладкое отображение

$$\text{ad}(H): M \rightarrow TM$$

и рассмотрим дифференциал этого отображения

$$T \operatorname{ad}(H): TM \rightarrow TTM.$$

Заметим, что последнее отображение не определяет векторного поля на касательном расслоении TM . Чтобы подправить это “дефект”, рассмотрим каноническую инволюцию [2] $\sigma: TTM \rightarrow TTM$, $\sigma^2 = \operatorname{id}$, которая определяется из следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{\sigma} & TTM \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow T\pi_1 \\ TM & \xrightarrow{\operatorname{id}} & TM \end{array}$$

Здесь $\pi_1: TM \rightarrow M$ и $\pi_2: TTM \rightarrow TM$ – естественные проекции. В локальных терминах σ задается так:

$$\sigma(\xi, u, \dot{\xi}, \dot{u}) = (\xi, \dot{\xi}, u, \dot{u}),$$

где $\xi \in M$, $u \in T_\xi M$, $(\dot{\xi}, \dot{u}) \in T_{(\xi, u)} TTM$. Теперь система в вариациях на TM определяется следующим векторным полем

$$\operatorname{Var}_H = \sigma \circ T \operatorname{ad}(H).$$

Хорошо известно [2], что фазовый поток векторного поля Var_H совпадает с дифференциалом фазового потока гамильтонова векторного поля $\operatorname{ad}(H)$ на M .

Система в вариациях на E . Очевидно, что имеется последовательность вложений

$$B \subset E \subset T_B M \subset TM,$$

в частности, тотальное пространство E можно рассматривать как подмногообразие в TM . Из инвариантности B относительно фазового потока векторного поля $\operatorname{ad}(H)$ следует, что Var_H касается E . Таким образом, ограничение Var_H на E определяет векторное поле

$$\mathcal{V}_H = \operatorname{Var}_H|_E, \quad (1.2)$$

которое и задает систему в вариациях гамильтонова векторного поля $\operatorname{ad}(H)$ вдоль B .

Пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{2k})$ – локальные координаты на B и $x = (x^1, \dots, x^{2r})$ – координаты слоя расслоения E , отвечающие некоторому базису (локальных) сечений $X_1(\xi), \dots, X_{2r}(\xi)$. Тогда в терминах координатной системы (ξ, x) на E векторное поле $\mathcal{V}_H$ (1.2) представляется так:

$$\mathcal{V}_H = \sum_{i=1}^{2k} v^i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \sum_{\sigma, \sigma'=1}^{2r} V_{\sigma}^{\sigma'}(\xi) x^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma'}}. \quad (1.3)$$

Здесь

$$v_H = \operatorname{ad}(H)|_B = \sum_{i=1}^{2k} v^i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad (1.4)$$

и $V(\xi) = ((V_{\sigma'}^{\sigma'}(\xi)))$ – матрица в вариациях гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ вдоль B , взятая относительно базиса $\{X_{\sigma}(\xi)\}$.

Инвариантность послойной симплектической структуры на E относительно дифференциала фазового потока исходной гамильтоновой системы ведет к следующему соотношению между $V(\xi)$ и матрицей $J(\xi) = ((\langle \mathcal{J} X_{\sigma}(\xi), X_{\sigma'}(\xi) \rangle))$ локального представления морфизма $\mathcal{J}$ (1.1):

$$L_{v_H} J = -(JV + V^* J). \quad (1.5)$$

В различного рода выкладках полезно следующее представление матрицы в вариациях $V(\xi)$ в терминах скобки Пуассона на M . Пусть B локально задается уравнениями $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_{2r} = 0$. Тогда относительно базиса локальных сечений

$$X_1(\xi) = \text{ad}(\Phi_1)(\xi), \dots, X_{2r}(\xi) = \text{ad}(\Phi_{2r})(\xi), \quad \xi \in B,$$

мы имеем следующее представление для матриц J и V :

$$J = \{\Phi \otimes \Phi\}|_B, \quad \det J \neq 0, \quad (1.6)$$

$$V = -J^{-1} \{\Phi \otimes \{\Phi \otimes H\}\}|_B. \quad (1.7)$$

Здесь используются тензорные обозначения: $\Phi \otimes \Psi = ((\Phi_{\sigma} \Psi_{\sigma'}))$.

Обсудим теперь некоторые свойства систем в вариациях. Пусть $\text{Vect}(E)$ – алгебра Ли всех векторных полей на E . Первый естественный вопрос: является ли подпространство, состоящее из всевозможных векторных полей вида $\mathcal{V}_H$, подалгеброй Ли в $\text{Vect}(E)$?

Пусть $\text{Ham}(M)$ – алгебра Ли всех гамильтоновых векторных полей на M и $\text{Ham}_B(M)$ – подалгебра, состоящая из тех гамильтоновых векторных полей, которые касаются данного симплектического подмногообразия B . Заметим, что $\text{ad}(H) \in \text{Ham}_B(M)$, только если

$$dH|_E = 0. \quad (1.8)$$

Условие (1.8) выделяет подалгебру пуассоновой алгебры $C^{\infty}(M)$, и отображение $H \mapsto \text{ad}(H)$ является гомоморфизмом этой подалгебры на $\text{Ham}_B(M)$.

Обозначим через $\mathcal{D}^{\text{var}} \subset \text{Vect}(E)$ образ при отображении

$$\text{Ham}_B(M) \ni \text{ad}(H) \mapsto \mathcal{V}_H. \quad (1.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Для любых $H_1, H_2 \in C^{\infty}(M)$, удовлетворяющих (1.8), имеет место тождество*

$$\mathcal{V}_{\{H_1, H_2\}} = [\mathcal{V}_{H_1}, \mathcal{V}_{H_2}]. \quad (1.10)$$

Другими словами, $\mathcal{D}^{\text{var}}$ – алгебра Ли и отображение (1.9) является гомоморфизмом алгебр Ли.

Понятно, что для нахождения системы в вариациях гамильтоновой системы (M, ω, H, B) достаточно знать значения ω и H только в окрестности B . Точнее говоря, система в вариациях однозначно определяется ограничением $\omega|_{T_B M}$ (т.е. парой $(\omega_0, \mathcal{J})$) и квадратичным ростком H на B .

Таким образом, полезно дать “аксиоматическое” определение систем в вариациях, используя только данные $(\omega_0, \mathcal{J})$.

Обозначим через $\mathcal{D}^{\omega_0, \mathcal{J}}$ подпространство векторных полей $\mathcal{V}$ на E , удовлетворяющих условиям:

- (V1) нулевое сечение $B \subset E$ инвариантно относительно фазового потока G^t векторного поля $\mathcal{V}$;
- (V2) ограничение $v = \mathcal{V}|_B$ является гамильтоновым векторным полем на (B, ω_0) ;
- (V3) $G^t: E \rightarrow E$ – послойно линейное отображение, накрывающее фазовый поток $g^t: B \rightarrow B$ векторного поля v и сохраняющее послойную симплектическую структуру $\mathcal{J}$ на E .

Заметим, что в инфинитезимальных терминах подпространство $\mathcal{D}^{\omega_0, \mathcal{J}}$ можно описать также, используя понятие “ковариантного дифференциального оператора” на E (см., например, [4], [7]).

Аналогично определению, данному выше, для каждой окрестности U подмногообразия B в M введем подпространство $\mathcal{D}_U^{\text{var}} \subset \text{Vect}(E)$, ассоциированное с симплектическим многообразием $(U, \omega|_U)$. Очевидно, что имеется включение

$$\mathcal{D}_U^{\text{var}} \subseteq \mathcal{D}^{\omega_0, \mathcal{J}}$$

и $\mathcal{D}_U^{\text{var}}$ зависит, вообще говоря, от выбора U .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Можно выбрать окрестность U подмногообразия B в M таким образом, что*

$$\mathcal{D}_U^{\text{var}} = \mathcal{D}^{\omega_0, \mathcal{J}}$$

и соответствие $\mathcal{D}^{\omega_0, \mathcal{J}} \ni \mathcal{V} \mapsto v \in \text{Ham}(B)$ является отображением “на”. Другими словами, каждое векторное поле $\mathcal{V} \in \mathcal{D}^{\omega_0, \mathcal{J}}$ определяет систему в вариациях гамильтоновой системы $(U, \omega|_U, H, B)$ для некоторой $H \in C^\infty(U): \mathcal{V} = \mathcal{V}_H$. Если B замкнуто, то можно положить $U = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы будем опираться на факты из §2, основанные на теории симплектических связностей. Фиксировав симплектическую связность ∇ на $(E, \mathcal{J})$, мы имеем соответствие

$$\mathcal{D}^{\omega_0, \mathcal{J}} \ni \mathcal{V} \mapsto \mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{\nabla} \in C^\infty(E), \quad (1.11)$$

где функция $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{\nabla}$ задается формулой (2.11). Используя экспоненциальное отображение, мы строим диффеоморфизм $h: U \rightarrow \mathcal{O}$ из некоторой окрестности B в M на окрестность $\mathcal{O}$ нулевого сечения $B \subset E$, удовлетворяющий условию

$$dh|_{T_B M} = \iota. \quad (1.12)$$

Здесь $\iota: T_B M \rightarrow T_B E$ – естественный изоморфизм.

Теперь, вводя функцию $H = h^* \mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{\nabla}$, мы видим, что H удовлетворяет (1.8) и, следовательно, $\text{ad}(H) \in \text{Ham}_B(U)$. Теперь из (1.12) и того факта, что отображение (1.11) взаимно однозначно (см. §2), мы получаем $\mathcal{V} = \mathcal{V}_H$.

§ 2. Симплектические связности и адаптируемость

Пусть $(E, \mathcal{J})$ – симплектическое нормальное расслоение симплектического подмногообразия B в (M, ω) . Обозначим через $\Gamma(E)$ пространство всех гладких сечений E .

Напомним, что линейная связность $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*B \otimes E)$ на E называется *симплектической*, если ковариантная производная ∇_u вдоль любого векторного поля $u \in \text{Vect}(B)$ сохраняет посылонную симплектическую структуру на E :

$$L_u(\langle \mathcal{J}(X), Y \rangle) = \langle \mathcal{J}(\nabla_u X), Y \rangle + \langle \mathcal{J}(X), \nabla_u Y \rangle$$

для всех $X, Y \in \Gamma(E)$.

Имеется факт: любое симплектическое расслоение обладает симплектической связностью (см., например, [2], [7]).

Предположим, что симплектическая связность ∇ на $(E, \mathcal{J})$ задана. Тогда возникает отображение

$$\text{Vect}(B) \ni u \mapsto \nabla_u^\# \in \text{Vect}(E),$$

сопоставляющее каждому векторному полю u на базе B векторное поле $\nabla_u^\#$ на E , которое имеет следующее координатное представление:

$$\nabla_u^\# = \sum_i u^i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \sum_{\sigma, \sigma'} (u^\sigma \theta_{\sigma'}^{\sigma'}) x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^{\sigma'}}. \quad (2.1)$$

Здесь $\theta = ((\theta_{\sigma'}^{\sigma}))$ – матричнозначная 1-форма связности ∇ на B , взятая относительно базиса локальных сечений $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_B, \dots, X_{2r} = \frac{\partial}{\partial x^{2r}} \Big|_B$:

$$\nabla X_\sigma = \sum_{\sigma'} \theta_{\sigma'}^{\sigma'} X_{\sigma'}. \quad (2.2)$$

Линейная оболочка векторных полей вида (2.1) порождает подрасслоение касательного расслоения TE :

$$\text{Hor}^\nabla(E) = \text{Span}\{\nabla_u^\#, \text{ где } u \text{ пробегает } \text{Vect}(B)\}, \quad (2.3)$$

которое называется *горизонтальным* [15]. Касательное расслоение TE распадается в прямую сумму

$$TE = \text{Hor}^\nabla(E) \oplus \text{Vert}(E), \quad (2.4)$$

где $\text{Vert}(E)$ – *вертикальное подрасслоение*:

$$\text{Vert}(E) = \text{Ker}(d\pi), \quad \pi: E \rightarrow B.$$

Векторное поле на E называется *горизонтальным* или *вертикальным*, если в каждой точке приложения $z \in E$ оно принадлежит $\text{Hor}_z^\nabla(E)$ или $\text{Vert}_z(E)$ соответственно.

Для любого $\text{ad}(H) \in \text{Ham}_B(M)$ из (2.4) следует, что соответствующее векторное поле $\mathcal{V}_H$ разлагается на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$\mathcal{V}_H = \nabla_{v_H}^\# + \Xi_H^\#. \quad (2.5)$$

Вертикальная составляющая имеет следующее координатное представление:

$$\Xi_H^\# = \sum_{\sigma, \sigma'} \Xi_{\sigma}^{\sigma'}(\xi) x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^{\sigma'}}, \quad (2.6)$$

$$\Xi_{\sigma}^{\sigma'} = -(V_{\sigma}^{\sigma'} + v_H \rfloor \theta_{\sigma}^{\sigma'}). \quad (2.7)$$

Здесь матрица в вариациях $V = ((V_{\sigma}^{\sigma'}))$ гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ и 1-форма $\theta = ((\theta_{\sigma}^{\sigma'}))$ связности ∇ берутся относительно базиса локальных сечений $\{X_{\sigma}\}$.

Введем также эндоморфизм Ξ_H расслоения E (или тензорное поле типа (1.1)), которое действует следующим образом:

$$\Xi_H: E \rightarrow E, \quad \Xi_H(X_{\sigma}) = \sum_{\sigma'} \Xi_{\sigma}^{\sigma'} X_{\sigma'}. \quad (2.8)$$

В силу (1.5), (2.7) мы имеем

$$\mathcal{J} \circ \Xi + \Xi^* \circ \mathcal{J} = 0, \quad (2.9)$$

т.е. $\Xi(\xi): E_{\xi} \rightarrow E_{\xi}$ — инфинитезимальный симплектический оператор в слое E_{ξ} . Пространство эндоморфизмов расслоения E , удовлетворяющих (2.9), обозначим через $\text{End}(E, \mathcal{J})$.

Теперь каждой функции $H \in C^{\infty}(M)$, удовлетворяющей (1.8), мы можем сопоставить следующую функцию на E :

$$Q_H^{\nabla} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}(\xi) \circ \Xi(\xi) z, z \rangle, \quad z \in E, \quad \xi = \pi(z), \quad (2.10)$$

которая характеризует квадратичный росток функции H в точках подмногообразия B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Соответствие

$$\mathcal{D}^{\text{var}} \ni \mathcal{V}_H \mapsto \mathcal{F}_H^{\nabla} = \pi^*(H|_B) + Q_H^{\nabla} \quad (2.11)$$

задает линейное взаимно однозначное отображение на свой образ.

Таким образом, при заданной симплектической связности ∇ системы в вариациях, ассоциированные с тройкой (M, ω, B) , параметризуются функциями вида (2.10).

Теперь перейдем к определению *адаптированных связностей* [4]–[7].

Имея симплектическую связность ∇ на $(E, \mathcal{J})$, для произвольного параметризованного пути $t \mapsto \xi(t)$ на B , выходящего из точки $\xi^0 \in B$, можно ввести *оператор параллельного переноса* [15], [16]

$$\mathcal{P}_{\xi^0 \mapsto \xi(t)}^{\nabla}: E_{\xi^0} \rightarrow E_{\xi(t)},$$

действующий на E послойными симплектоморфизмами. Если (M, ω, H, B) — гамильтонова система с инвариантным симплектическим подмногообразием B , то понятие адаптируемости связности ∇ на E к такой системе вводится путем согласования линеаризованного действия фазового потока системы на E и параллельного переноса связности ∇ вдоль траекторий ограниченной гамильтоновой системы $(B, \omega_0, H|_B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Симплектическая связность ∇ на $(E, \mathcal{J})$ называется *адаптированной* к гамильтоновой системе (M, ω, H, B) (или к гамильтонову полю $\text{ad}(H)$ над B), если действие фазового потока G_H^t системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ в E совпадает с параллельным переносом связности ∇ вдоль произвольной траектории гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ на B :

$$G_H^t(\xi^0, X^0) = \mathcal{P}_{\xi^0 \mapsto g_H^t(\xi^0)}^\nabla(X^0) \quad (2.12)$$

для любых $\xi^0 \in B$, $X^0 \in E_{\xi^0}$. Здесь g_H^t – фазовый поток ограничения $v_H = \text{ad}(H)|_B$.

В зависимости от ситуации мы будем говорить также, что ∇ адаптирована к системе в вариациях или к соответствующему векторному полю $\mathcal{V}_H$.

Используя свойства параллельного переноса (см., например, [4], [7]), нетрудно получить следующий критерий адаптируемости в инфинитезимальных терминах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Симплектическая связность ∇ на E адаптирована к гамильтоновой системе (M, ω, H, B) тогда и только тогда, когда векторное поле $\mathcal{V}_H$ является горизонтальным:

$$\mathcal{V}_H = \nabla_{v_H}^\# \quad (\text{или } \Xi_H = 0). \quad (2.13)$$

Для данной симплектической связности ∇ на $(E, \mathcal{J})$ введем следующее подпространство в пространстве гамильтоновых векторных полей на M , касающихся B :

$$\text{Ham}_B^\nabla(M) = \{\text{ad}(H) \in \text{Ham}_B(M) : \nabla \text{ адаптирована к } \text{ad}(H) \text{ над } B\}. \quad (2.14)$$

Отметим следующее свойство: если векторное поле $\text{ad}(H)$ принадлежит подпространству (2.14), то соответствующая система в вариациях однозначно определяется ограничением $v_H = \text{ad}(H)|_B$. Кроме того, “отклонение” подпространства (2.14) от алгебры Ли измеряется 2-формой кривизны связности ∇ : $\text{Ham}_B^\nabla(M)$ – алгебра Ли только в том случае, если ∇ плоская.

§ 3. Критерии гамильтоновости

В этом параграфе в терминах симплектических связностей формулируются необходимые и достаточные условия существования гамильтоновых структур для систем в вариациях. Мы начнем с описания класса допустимых симплектических структур.

Пусть (M, ω, B) – симплектическое многообразие с симплектическим подмногообразием $B \subset M$ и $(E, \mathcal{J})$ – нормальное расслоение над B . Тогда ограничение касательного расслоения TE на нулевое сечение B изоморфно прямой сумме:

$$T_B E \approx TB \oplus E.$$

Следовательно, имеется естественное отождествление

$$T_B E \approx T_B M. \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. 2-форма Ω на E называется *допустимой*, если

- (i) Ω – замкнута;
- (ii) ограничения Ω и исходной симплектической структуры ω на касательные векторы к объемлющим пространствам в точках B совпадают:

$$\Omega(X, Y) = \omega(X, Y) \quad \forall X, Y \in T_\xi E, \quad \xi \in B. \quad (3.2)$$

Таким образом, значение допустимой 2-формы Ω на $T_B E$ фиксировано и определяется данными $(\omega_0, \mathcal{J})$. Отсюда следует, что Ω невырождена в некоторой окрестности B в E и, следовательно, задает симплектическую структуру в этой окрестности.

Отметим следующие свойства:

- если Ω – допустимая 2-форма на E , невырожденная в окрестности $\mathcal{O}$ нулевого сечения $B \subset E$, то B является симплектическим подмногообразием в $(\mathcal{O}, \Omega|_{\mathcal{O}})$ и Ω -ортогональное дополнение к $T_B \subset T_B E$ изоморфно нормальному расслоению E ;
- две допустимые 2-формы Ω_1 и Ω_2 на E эквивалентны вблизи B , т.е. существуют окрестности $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ подмногообразия $B \subset E$ и такой диффеоморфизм $f: \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$, что $f|_B = \text{id}_B$ и $f^* \Omega_2 = \Omega_1$;
- любая допустимая 2-форма на E эквивалентна вблизи B исходной симплектической структуре ω .

Эти свойства следуют из теоремы Дарбу–Вейнштейна [17] и теоремы о трубчатой окрестности.

Важный класс допустимых 2-форм дает процедура минимального спаривания [8], а точнее, ее инфинитезимальный аналог [7].

ПРИМЕР 3.1. Пусть ∇ – симплектическая связность на E . Пусть $X_1(\xi), \dots, X_{2r}(\xi)$ – базис локальных сечений расслоения E и $x^1, \dots, x^{2r}$ – соответствующие координаты слоя. Введем 1-форму на B :

$$\mu^\nabla = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} J_{\sigma\sigma'} x^{\sigma'} \left[dx^\sigma + \sum_{\sigma'', i} x^{\sigma''} \theta_{\sigma'' i}^\sigma d\xi^i \right] = \frac{1}{2} \langle Jx, dx \rangle + \frac{1}{2} \langle Jx, \theta x \rangle, \quad (3.3)$$

где $J_{\sigma\sigma'}(\xi)$ и $\theta_{\sigma'' i}^\sigma(\xi)$ – компоненты морфизма (1.1) и 1-формы связности ∇ относительно базиса $\{X_\sigma(\xi)\}$. Используя законы преобразования для J и θ при замене базиса, нетрудно проверить, что (3.3) не зависит от выбора координатной системы на E . Таким образом, каждая симплектическая связность ∇ индуцирует глобальную 1-форму μ^∇ на E , имеющую координатное представление (3.3).

Заметим, что μ^∇ совпадает (локально) с вертикальной компонентой 1-формы $\frac{1}{2} \langle Jx, dx \rangle$ относительно разложения (2.4), таким образом, μ^∇ *аннулируется* на горизонтальном подрасслоении $\text{Hor}^\nabla(E)$. Теперь определим 2-форму на E , ассоциированную с триплетом $(\omega_0, \mathcal{J}, \nabla)$ как

$$\Omega^\nabla = \pi^*(\omega_0) + d\mu^\nabla. \quad (3.4)$$

Очевидно, что Ω^∇ является допустимой 2-формой. Рассмотрим 2-форму кривизны $\text{Curv}(\nabla)$ связности ∇ :

$$\text{Curv}(\nabla)(u_1, u_2) = [\nabla_{u_1}, \nabla_{u_2}] - \nabla_{[u_1, u_2]}$$

для произвольных $u_1, u_2 \in \text{Vect}(B)$. Относительно координатной системы $\xi = (\xi^i)$ имеем представления

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j,$$

$$\text{Curv}(\nabla) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{R}_{ij}(\xi) \otimes d\xi^i \wedge d\xi^j.$$

Здесь $\mathcal{R}_{ij}(\xi) \in \text{sp}(E_\xi)$ – инфинитезимальный симплектический оператор в слое E_ξ . Множество точек, в которых 2-форма Ω^∇ невырождена, определяется следующим образом:

$$\mathcal{O}^\nabla = \left\{ (\xi, x) \in E : \det \left(\left(\omega_{ij}(\xi) + \frac{1}{2} \langle Jx, \mathcal{R}_{ij}x \rangle \right) \right) \neq 0 \right\}. \quad (3.5)$$

Ясно, что $B \subset \mathcal{O}^\nabla$.

ТЕОРЕМА 3.1 (критерий гамильтоновости). *Пусть M, ω, H, B – гамильтонова система с инвариантным симплектическим подмногообразием $B \subset M$. Тогда соответствующая система в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ является гамильтоновой относительно некоторой допустимой 2-формы Ω на E :*

$$\mathcal{V}_H \rfloor \Omega = -d\mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in C^\infty(E), \quad (3.6)$$

тогда и только тогда, когда существует симплектическая связность ∇ на $(E, \mathcal{J})$ со свойством: горизонтальное подрасслоение $\text{Hor}^\nabla(E)$ инвариантно относительно дифференциала фазового потока векторного поля $\mathcal{V}_H$.

Более подробно,

(а) пусть имеется симплектическая связность ∇ на E такая, что тензорное поле $\Xi_H = ((\Xi_\sigma'(\xi)))$ (2.7), (2.8), ассоциированное с парой $(\mathcal{V}_H, \nabla)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению на B :

$$d\Xi_H + [\theta, \Xi_H] = v_H \rfloor \text{Curv}(\nabla), \quad (3.7)$$

тогда векторное поле $\mathcal{V}_H$ является гамильтоновым относительно 2-формы Ω^∇ (3.4) с функцией Гамильтона

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_H = \pi^*(H|_B) + Q_H^\nabla, \quad (3.8)$$

где посылочно квадратичная функция Q_H^∇ на E задается формулой (2.10). Форма Ω^∇ невырождена в окрестности $\mathcal{O}^\nabla$ (3.5), которая инвариантна относительно сдвигов по траекториям системы в вариациях;

(б) наоборот, пусть $\mathcal{V}_H$ является гамильтоновым относительно некоторой допустимой 2-формы Ω на E . Тогда существует такая симплектическая связность ∇ на E , что соотношение (3.7) выполнено. Эта связность однозначно определяется 2-формой Ω из следующего условия: для произвольных $u \in \text{Vect}(B)$ и $X \in \Gamma(E)$ имеет место равенство

$$\mathcal{J}(\nabla_u X) = (u \rfloor L_{\tilde{X}} \Omega)|_B; \quad (3.9)$$

здесь $\tilde{X}$ – любое гладкое продолжение сечения X в окрестность подмногообразия B в E .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Левая часть уравнения (3.7) записана в терминах матрично-значной функции $\Xi = ((\Xi_\sigma'(\xi)))$ компонент тензорного поля (2.7), (2.8) и матрично-значной 1-формы θ связности ∇ . В инвариантных терминах левая часть (3.7) определяется как 1-форма на B со значениями в $\text{End}(E, \mathcal{J})$ и действующая на $u \in \text{Vect}(B)$ по формуле

$$\nabla_u \circ \Xi - \Xi \circ \nabla_u.$$

Доказательство теоремы 3.1 разобьем на несколько этапов. Сначала отметим, что условие инвариантности горизонтального подрасслоения $\text{Hor}^\nabla(E)$ относительно дифференциала фазового потока векторного поля $\mathcal{V}_H$ в инфинитезимальных терминах может быть представлено в следующем виде

$$[\nabla_u^\#, \mathcal{V}_H] = \nabla_{[u, v_H]}^\# \quad \forall u \in \text{Vect}(B). \quad (3.10)$$

Далее, представляя (3.10) в терминах тензорного поля Ξ , приходим к уравнению (3.7).

Достаточность. Равенство (3.6) проверяется непосредственно при подстановке в него соотношений (3.4) и (3.8) и использовании (2.9).

Необходимость. Пусть Ω – допустимая 2-форма на E , удовлетворяющая (3.6). В локальных координатах на E имеем представление

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{A}_{ij}(\xi, x) d\xi^i \wedge d\xi^j \\ & + \sum_{i,\sigma} \mathcal{D}_{i\sigma}(\xi, x) d\xi^i \wedge dx^\sigma + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} \mathcal{B}_{\sigma\sigma'}(\xi, x) dx^\sigma \wedge dx^{\sigma'}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{2k})$ – координаты на B , $x = (x^1, \dots, x^{2r}) \in \mathbb{R}^{2r}$ – координаты слоя. Относительно коэффициентов разложений (1.3) и (3.11) соотношение (3.6) представляется в виде двух уравнений

$$\mathcal{A}v(\xi) + \mathcal{D}V(\xi)x = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{B}V(\xi)x - \mathcal{D}^*v(\xi) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Здесь используются матричные обозначения: $\mathcal{A} = ((\mathcal{A}_{ij}(\xi, x)))$, $\mathcal{D} = ((\mathcal{D}_{i\sigma}(\xi, x)))$, $\mathcal{B} = ((\mathcal{B}_{\sigma\sigma'}(\xi, x)))$. Исследуем уравнения (3.12), (3.13) и условие замкнутости $d\Omega = 0$ вблизи B , т.е. при $x \rightarrow 0$.

Сразу отметим, что из Ω -ортогональности подпространств $T_\xi B$ и E_ξ следует, что

$$\mathcal{D}|_{x=0} = 0. \quad (3.14)$$

Кроме того, $\det \mathcal{A}(\xi, 0) \neq 0$ и $\det \mathcal{B}(\xi, 0) \neq 0$. Далее, из (3.13) при $x = 0$ и (3.14) следует, что

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Теперь имеем следующие разложения при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}^{(0)} + \sum_{\sigma} \mathcal{A}_{\sigma}^{(1)} x^{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \mathcal{A}_{\sigma\sigma'}^{(2)} x^{\sigma} x^{\sigma'} + O(\|x\|^3), \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}^{(0)} + \sum_{\sigma} \mathcal{B}_{\sigma}^{(1)} x^{\sigma} + O(\|x\|^2), \\ \mathcal{D} &= \sum_{\sigma} \mathcal{D}_{\sigma}^{(1)} x^{\sigma} + O(\|x\|^2), \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \mathcal{F}_{\sigma\sigma'} x^{\sigma} x^{\sigma'} + O(\|x\|^3). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя разложения (3.15) в (3.12), (3.13), учитывая условие замкнутости 2-формы Ω и приравнивая выражения при одинаковых степенях координат x^σ , для коэффициентов разложений (3.15) мы получаем серию соотношений, среди которых имеются следующие соотношения:

$$\mathcal{B}^{(0)} = -J, \quad \mathcal{A}_{ij}^{(0)} = \omega_{ij}.$$

Здесь правые части этих равенств определяются относительно данной координатной системы (ξ, x) на E . Кроме того, получаем, что матричнозначные функции

$$\theta_{\sigma'i}^\sigma = \sum_{\alpha} J^{\sigma\alpha} (\mathcal{D}_{i\alpha}^{(1)})_{\sigma'}$$

определяют компоненты 1-формы связности ∇ , задаваемой условием (3.9). Остается заметить: соотношения, которые получаются из (3.12), (3.13), (3.15) и выделением слагаемых порядка $\|x\|$ и $\|x\|^2$, приводят к уравнению (3.7).

Теперь используем классификацию гамильтоновых векторных полей из пространства $\text{Ham}_B(M)$, основанную на понятии адаптируемости симплектических связностей (см. § 2), для формулировки критерия гамильтоновости (3.7) системы в вариациях в терминах самого гамильтонова поля $\text{ad}(H)$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Система в вариациях гамильтоновой системы (M, ω, H, B) является гамильтоновой относительно некоторой допустимой 2-формы на E тогда и только тогда, когда существует такая симплектическая связность ∇ на E , что гамильтоново векторное поле $\text{ad}(H)$ сохраняет подпространство $\text{Ham}_B^\nabla(M)$ (2.14), ассоциированное с ∇ :*

$$[\text{Ham}_B^\nabla(M), \text{ad}(H)] \subset \text{Ham}_B^\nabla(M). \quad (3.16)$$

Доказательство сводится к проверке эквивалентности условий (3.10) и (3.16) и базируется на предложении 2.2 и свойстве (1.10).

§ 4. Препятствия к гамильтоновости и приводимость

Оказывается, что существуют нетривиальные препятствия к разрешимости уравнения (3.7), представляющего условие гамильтонизации системы в вариациях. Как мы увидим ниже, разрешимость уравнения (3.7) зависит, в частности, от топологических свойств базы B нормального расслоения E и поведения ограниченной гамильтоновой системы $(B, \omega_0, H|_B)$.

Мы начнем с простых, но важных следствий теоремы 3.1 относительно системы в вариациях $(E, \mathcal{V}, B)$ данной гамильтоновой системы (M, ω, H, B) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. (а) Пусть симплектическая связность $\tilde{\nabla}$ на $(E, \mathcal{J})$ удовлетворяет условиям:

- (i) $\tilde{\nabla}$ адаптирована к $\text{ad}(H)$ на B ;
- (ii) ограничение v_H гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H)$ на B аннулирует 2-форму кривизны:

$$v_H \rfloor \text{Curv}(\tilde{\nabla}) = 0. \quad (4.1)$$

Тогда условие (3.7) выполнено относительно $\nabla = \tilde{\nabla}$.

(б) Пусть v_H удовлетворяет условию: существует замкнутая 1-форма η на B , принимающая значение 1 на v_H :

$$d\eta = 0, \quad v_H \lrcorner \eta = 1 \quad \text{на } B. \quad (4.2)$$

Тогда из выполнения условия (3.7) относительно некоторой симплектической связности ∇ на E следует существование симплектической связности $\tilde{\nabla}$ на E , которая удовлетворяет условиям (i), (ii) из п. (а) (возможно, ∇ не совпадает с $\tilde{\nabla}$). Другими словами, если ограниченная гамильтонова система $(B, \omega_0, H|_B)$ обладает свойством (4.2), то условие гамильтоновости (3.7) системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ и условия (i), (ii) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (а) непосредственно следует из предложения 2.2.

Для доказательства п. (б) предположим, что существует 1-форма η на B , удовлетворяющая условию (4.2), и условие (3.7) выполнено относительно симплектической связности ∇ . Тогда симплектическая связность $\tilde{\nabla}$, обеспечивающая выполнение условий (i), (ii), строится следующим образом:

$$\tilde{\nabla} = \nabla + \Xi \otimes \eta. \quad (4.3)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1 (локальная разрешимость). Пусть $\xi^0 \in B$ – неособая точка векторного поля v_H . Тогда найдется окрестность Σ точки ξ^0 в B и существуют 1-форма η на Σ и симплектическая связность $\tilde{\nabla}$ на $E|_\Sigma$, удовлетворяющие (4.2) и условиям (i), (ii) соответственно.

Это утверждение фактически является аналогом теоремы о выпрямлении векторного поля в окрестности неособой точки.

Теперь, используя предложение 4.1, выделим следующий достаточный критерий гамильтоновости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\tilde{\nabla}$ – симплектическая связность на E , удовлетворяющая условиям:

- (i) $\tilde{\nabla}$ адаптирована к $\text{ad}(H)$ на B ;
- (ii) связность $\tilde{\nabla}$ плоская, т.е. $\text{Curv}(\tilde{\nabla}) = 0$.

Тогда система в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ является гамильтоновой относительно 2-формы $\Omega^{\tilde{\nabla}}$ (3.4), которая невырождена всюду на E . Соответствующая функция Гамильтона имеет вид $\mathcal{F} = \pi^*(H|_B)$.

Подчеркнем, что условие существования плоской симплектической связности на E , адаптированной к гамильтоновой системе (M, ω, H, B) , является, вообще говоря, только достаточным условием гамильтоновости соответствующей системы в вариациях. Кроме того, при предположении об интегрируемости ограниченной гамильтоновой системы $(B, \omega_0, H|_B)$ это условие приводит к интегрируемости по Лиувиллю системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ (см. [7]). Но в частном случае условия (i), (ii) из предложения 4.2 становятся необходимыми.

Комбинируя предложение 4.1 и предложение 4.2, мы получаем следующее необходимое и достаточное условие гамильтоновости.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\dim B = 2$ и векторное поле v_H допускает существование 1-формы η на B со свойствами (4.2). Тогда система в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ является гамильтоновой относительно некоторой допустимой 2-формы Ω на E в том и только том случае, если существует плоская симплектическая связность $\tilde{\nabla}$ на E , адаптированная к $\text{ad}(H)$ на B .

Проиллюстрируем полученные выше результаты в следующей простейшей ситуации.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим на фазовом пространстве $M = \mathbb{R}_\xi^2 \times \mathbb{R}_x^{2r}$ с канонической симплектической структурой $\omega = d\xi^1 \wedge d\xi^2 + \frac{1}{2} \langle J dx \wedge dx \rangle$ гамильтонову систему

$$H = \frac{1}{2}[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2] + \frac{1}{2} \langle S(\xi)x, x \rangle. \quad (4.4)$$

Здесь $S(\xi)$ – матричнозначная гладкая функция, $S^* = S$ и $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ – симплектическая матрица.

Подногообразие $B = \mathbb{R}_\xi^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{2+2r}$ является 2-мерным симплектическим подногообразием, инвариантным относительно системы (4.4). Ограниченная гамильтонова система $B, \omega_0, H|_B$ совпадает с системой *одномерного гармонического осциллятора*. В этом случае нормальное расслоение E тривиально:

$$E = B \times \mathbb{R}_x^{2r},$$

где $x = (x^1, \dots, x^{2r})$ – симплектические координаты слоя. База B тривиально расщепляется периодическими траекториями гармонического осциллятора. Пусть $(s, \varphi(\text{mod } 2\pi))$ – соответствующие переменные “действие-угол” на $B = S^1 \times (0, \infty)$: $\xi^1 = \sqrt{2s} \cos \varphi$, $\xi^2 = \sqrt{2s} \sin \varphi$. Тогда относительно координатной системы (s, φ, x) на E система в вариациях гамильтоновой системы (4.4) вдоль B записывается так:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= 1, \\ \dot{x} &= V(s, \varphi)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2r}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$V(s, \varphi) = V(s, \varphi + 2\pi) = JS(\sqrt{2s} \cos \varphi, \sqrt{2s} \sin \varphi). \quad (4.6)$$

Поскольку имеется естественное вложение $E \subset M$, условие допустимости 2-формы Ω на E в этом случае формулируется так: Ω – замкнутая 2-форма на E , совпадающая с исходной симплектической структурой ω с точностью до 2-формы, которая аннулируется на касательных векторах, приложенных в точках подногообразия B :

$$\Omega = ds \wedge d\varphi + \frac{1}{2} \langle J dx \wedge dx \rangle + O(\|x\|) \quad (4.7)$$

при $\|x\| \rightarrow 0$.

Учитывая, что $v_H = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ и условие (4.2) выполнено относительно 1-формы $\eta = d\varphi$ на B , из следствия 4.2 мы выводим: гамильтоновость системы (4.5) относительно симплектической структуры на E вида (4.7) эквивалентна существованию $\mathrm{sp}(r, \mathbb{R})$ -значной 1-формы θ на $B = \mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$, удовлетворяющей соотношениям:

$$J\theta + \theta^* J = 0 \quad (\text{симплектичность}), \quad (4.8)$$

$$d\theta + \theta \wedge \theta = 0 \quad (\text{нулевая кривизна}), \quad (4.9)$$

$$v_H \lrcorner \theta = -V(s, \varphi) \quad (\text{адаптируемость}). \quad (4.10)$$

Пусть $g(t, s) \in \mathrm{Sp}(r, \mathbb{R}) \otimes C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ – фундаментальное решение 2π -периодической задачи, ассоциированной с системой (4.5):

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} - V(s, t)g &= 0, \\ g|_{t=0} &= I. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь переменная “действие” s играет роль параметра. Рассмотрим матрицу монодромии

$$M(s) = g(2\pi, s), \quad (4.12)$$

которая, очевидно, гладко зависит от s .

Резюмируя наши рассмотрения, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Следующие условия эквивалентны:*

- (а) *система (4.5) является гамильтоновой относительно симплектической структуры Ω вида (4.7);*
- (б) *существует плоская симплектическая связность на E , адаптированная к системе (4.5) (т.е. выполнены соотношения (4.8)–(4.10));*
- (в) *существует такая $Z(s) \in \mathrm{Sp}(r, \mathbb{R}) \otimes C^\infty((0, \infty))$, что матрица монодромии (4.12) удовлетворяет уравнению Лакса*

$$\frac{dM(s)}{ds} = [M(s), Z(s)], \quad (4.13)$$

в частности, собственные числа матрицы монодромии не зависят от s ;

- (г) *система (4.5) приводима на $B = \mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$, а именно, существует замена*

$$x \mapsto y = F(s, \varphi)x, \quad F \in \mathrm{Sp}(r, \mathbb{C}) \otimes C^\infty(B),$$

приводящая систему (4.5) к “постоянному” виду

$$\dot{y} = Wy, \quad W \in \mathrm{Sp}(r, \mathbb{C}).$$

Эквивалентность условий (а) и (б) вытекает из следствия 4.2. Импликации (а) $\iff$ (в) следуют из более общих результатов, приведенных в §5. Эквивалентность пп. (б) и (г) получается из интерпретации приводимости в терминах адаптированных связностей (см. [4], [7]). Заметим, что из условия (4.13) вытекает аналог

теоремы Флоке для *семейства* линейных 2π -периодических гамильтоновых систем. Окончательно мы делаем вывод: *препятствием к гамильтонизации системы (4.5) является неприводимость этой системы.*

Теперь вернемся к общему случаю. Предположим дополнительно, что гамильтонова система (M, ω, H, B) имеет *инвариантное подмногообразие*

$$\Lambda \subseteq B, \quad \text{ad}(H)(\alpha) \in T_\alpha \Lambda \quad (\alpha \in \Lambda).$$

В этой ситуации можно определить *ограниченную систему в вариациях* с помощью соответствия

$$(E, \mathcal{V}_H, B) \mapsto (E_\Lambda, \mathcal{V}_H^\Lambda).$$

Здесь $E_\Lambda = E|_\Lambda$ – ограничение по базе, $\mathcal{V}_H^\Lambda = \mathcal{V}_H|_{E_\Lambda}$ – сужение $\mathcal{V}_H$ на инвариантное подмногообразие $E_\Lambda \subset E$. Понятно, что E_Λ – симплектическое расслоение над Λ . Если ∇ – симплектическая связность на E , то ее ограничение

$$\nabla^\Lambda = \nabla|_{E_\Lambda}$$

также является симплектической связностью. Пусть ${}^{\mathbb{C}}E_\Lambda = E_\Lambda \otimes \mathbb{C}$ – *комплексификация* расслоения E_Λ . Тогда ${}^{\mathbb{C}}E_\Lambda$ – комплексное симплектическое расслоение над Λ , где послойная симплектическая структура индуцируется морфизмом $\mathcal{J}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Ограниченная система в вариациях $(\Lambda, \mathcal{V}_H^\Lambda)$ называется *приводимой* в ${}^{\mathbb{C}}E$, если ${}^{\mathbb{C}}E$ тривиально и существует симплектический базис $Y_1, \dots, Y_{2r} \in \Gamma({}^{\mathbb{C}}E_\Lambda)$ глобальных сечений:

$$\langle \mathcal{J}Y \otimes Y \rangle = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

относительно которого матрица в вариациях V (1.3) постоянна на Λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3 [4], [7]. Пусть инвариантное подмногообразие $\Lambda \subset B$ диффеоморфно s -мерному тору:

$$\Lambda \approx \mathbb{T}^s, \tag{4.14}$$

и существует такая 1-форма η^Λ на Λ , что

$$d\eta^\Lambda = 0, \quad v_H \lrcorner \eta^\Lambda = 1 \quad \text{на } \Lambda. \tag{4.15}$$

Тогда ограниченная система в вариациях $(E_\Lambda, \mathcal{V}_H^\Lambda)$ приводима в ${}^{\mathbb{C}}E_\Lambda$ тогда и только тогда, когда существует плоская симплектическая связность на E_Λ , адаптированная к $\mathcal{V}_H^\Lambda$.

Отметим важное свойство: уравнение (3.7) инвариантно относительно операции сужения на инвариантное подмногообразие Λ , т.е. из (3.7) следует, что пара $(\nabla^\Lambda, \mathcal{V}_H^\Lambda)$ также удовлетворяет аналогичному уравнению на Λ .

Учитывая это свойство, из предложения 4.3 и следствия 4.2 мы выводим необходимый критерий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть гамильтонова система (M, ω, H, B) допускает инвариантное подмногообразие $\Lambda \subset B$, которое диффеоморфно 2-мерному тору:

$$\Lambda \approx \mathbb{T}^2, \quad (4.16)$$

и существует 1-форма η^Λ , удовлетворяющая (4.15). Тогда необходимым условием для гамильтоновости системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ относительно допустимой 2-формы на E является приводимость ограниченной системы в вариациях $(E_\Lambda, \mathcal{V}_H^\Lambda)$ в E_Λ .

Типичная ситуация, в которой условие (4.15) реализуется: Λ – лагранжев или изотропный тор с условно периодическим движением. Непосредственно из предложения 4.4 получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\dim B = 4$, ограниченная гамильтонова система $(B, \omega_0, H|_B)$ является вполне интегрируемой и подмногообразие B расслаивается 2-мерными торами Лиувилля Λ_a над 2-мерной поверхностью $\mathcal{U}$:

$$\mathbb{T}^2 \rightarrow B \xrightarrow{p} \mathcal{U}, \quad \Lambda_a = p^{-1}(a), \quad a \in \mathcal{U}. \quad (4.17)$$

Тогда необходимым условием гамильтонизации системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_H, B)$ является приводимость ограниченной системы в вариациях $(E_{\Lambda_a}, \mathcal{V}_H^{\Lambda_a})$ в E_{Λ_a} для каждого $a \in \mathcal{U}$.

Остается отметить, что примеры неприводимых линейных гамильтоновых систем с условно периодическими коэффициентами могут быть найдены в [11].

§ 5. Критерии коллективной гамильтоновости

Непосредственным обобщением примера 4.1 является ситуация, когда имеется набор гамильтоновых систем, обладающих общим инвариантным симплектическим подмногообразием, которое расслоено условно периодическими торами. Здесь нас интересует вопрос о гамильтоновости соответствующих систем в вариациях относительно одной и той же симплектической структуры.

Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие и $\dim M = 2(k + r)$. Предположим, что существует набор гладких функций $H_1, \dots, H_k, \Phi_1, \dots, \Phi_{2r}$ на M , удовлетворяющих условиям:

(i) дифференциалы $d\Phi_1, \dots, d\Phi_{2r}$ линейно независимы в точках совместного множества нулевого уровня функций $\Phi_1, \dots, \Phi_{2r}$:

$$\mathcal{S} = \{m \in M : \Phi_1(m) = 0, \dots, \Phi_{2r}(m) = 0\};$$

матрица

$$J(\xi) = ((J_{\sigma\sigma'}(\xi))), \quad J_{\sigma\sigma'}(\xi) = \{\Phi_{\sigma'}, \Phi_\sigma\}(\xi), \quad (5.1)$$

состоящая из попарных скобок Пуассона этих функций, невырождена:

$$\det J(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathcal{S}; \quad (5.2)$$

(ii) попарные скобки Пуассона функций H_i, Φ_σ равны нулю в точках $\mathcal{S}$:

$$\{H_i, H_j\}|_{\mathcal{S}} = 0, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad (5.3)$$

$$\{H_i, \Phi_\sigma\}|_{\mathcal{S}} = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sigma = 1, \dots, 2r; \quad (5.4)$$

(iii) дифференциалы $dH_1, \dots, dH_k$ линейно независимы в точках совместного множества нулевого уровня функций (H_i, Φ_σ) :

$$\Lambda_0 = \{\xi \in \mathcal{S} : H_1(\xi) = 0, \dots, H_k(\xi) = 0\}; \quad (5.5)$$

кроме того, Λ_0 связно и компактно в $\mathcal{S}$.

Из условий (i)–(iii) вытекают следующие факты.

1) $\mathcal{S}$ – $2k$ -мерное симплектическое подмногообразие в M и Λ_0 – лагранжесов тор в $\mathcal{S}$. Подмногообразия $\mathcal{S}$ и Λ_0 инвариантны относительно фазовых потоков гамильтоновых векторных полей $\text{ad}(H_1), \dots, \text{ad}(H_k)$. Ограничения $H_1|_{\mathcal{S}}, \dots, H_k|_{\mathcal{S}}$ образуют полный набор функций в инволюции на $(\mathcal{S}, \omega|_{\mathcal{S}})$.

2) Существует такая окрестность B тора Λ_0 в $\mathcal{S}$, что B диффеоморфно прямому произведению диска $D^k \subset \mathbb{R}^k$ и k -тора:

$$B \approx D^k \times \mathbb{T}^k, \quad \Lambda_0 \approx \{0\} \times \mathbb{T}^k. \quad (5.6)$$

Кроме того, существуют переменные “действие-угол” [18] $s = (s_1, \dots, s_k)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ ($\varphi_j \bmod 2\pi$) на B :

$$\omega_0 = \omega|_B = ds \wedge d\varphi, \quad H_j|_B = H_j^0(s), \quad j = 1, \dots, k. \quad (5.7)$$

Здесь $s \in D^k$ и $\varphi \in \mathbb{T}^k$ – угловые координаты на торе.

Таким образом, B тривиально расслаивается торами Лиувилля

$$\Lambda_a \approx \{a\} \times \mathbb{T}^k, \quad a \in D^k, \quad (5.8)$$

соответствующими полному набору $(H_1^0, \dots, H_k^0)$ функций в инволюции на (B, ω_0) . Каждый тор Λ_a несет условно периодическое движение вдоль траекторий гамильтоновых систем (B, ω_0, H_i^0) , $i = 1, \dots, k$.

Ниже мы будем предполагать, что симплектическое подмногообразие B (5.6) с координатной системой (s, φ) фиксировано. Кроме того, зададим базис глобальных сечений нормального расслоения $\pi: E \rightarrow B$ с помощью гамильтоновых векторных полей функций (связей) Φ_σ :

$$X_1 = \text{ad}(\Phi_1)|_B, \dots, X_{2r} = \text{ad}(\Phi_{2r})|_B. \quad (5.9)$$

Относительно этого базиса послойная симплектическая структура на E задается матричной функцией $J = J(s, \varphi)$ из (5.1). Мы будем также использовать координатную систему (s, φ, x) на E , где $x = (x^1, \dots, x^{2r})$ – координаты слоя, ассоциированные с тривиализацией (5.9).

Теперь рассмотрим системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_{H_1}, \dots, \mathcal{V}_{H_k}, B)$ гамильтоновых векторных полей $\text{ad}(H_1), \dots, \text{ad}(H_k)$ вдоль B . Задача о коллективной гамильтонизации формулируется так: найти допустимую 2-форму Ω на E , относительно которой все векторные поля $\mathcal{V}_{H_1}, \dots, \mathcal{V}_{H_k}$ являются гамильтоновыми. Начнем с необходимых условий существования такой “коллективной” симплектической структуры.

Введем матричнозначную 1-форму $\tilde{\theta}$ на B :

$$\tilde{\theta} = \sum_{i=1}^k \tilde{\theta}_i(s, \varphi) \otimes \eta^i, \quad \tilde{\theta}_i = J^{-1}\{\Phi, \otimes\{\Phi, H_i\}\}|_B. \quad (5.10)$$

Здесь

$$\eta^i = \frac{\langle \omega^{(i)}(s), d\varphi \rangle}{\|\omega^{(i)}(s)\|^2}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.11)$$

$\omega^{(i)} = \frac{\partial H_i^0}{\partial s}$ – вектор частот условно периодического движения гамильтоновой системы (B, ω_0, H_i^0) вдоль тора Лиувилля (5.5).

ТЕОРЕМА 5.1. (а) *Предположим, что векторные поля $\mathcal{V}_{H_1}, \dots, \mathcal{V}_{H_k}$ на E являются гамильтоновыми относительно одной и той же допустимой 2-формы на E . Тогда попарные скобки Пуассона функций (H_i, Φ_σ) удовлетворяют вблизи $B \subset M$ соотношениям:*

$$\{H_i, \Phi_\sigma\} = O(\|\Phi\|^3), \quad i = 1, \dots, k, \quad \sigma = 1, \dots, 2r, \quad (5.12)$$

при $\|\Phi\| = (\Phi_1^2 + \dots + \Phi_{2r}^2)^{1/2} \rightarrow 0$.

(б) *Матричная 1-форма $\tilde{\theta}$ (5.10) задает симплектическую связность $\tilde{\nabla}$ на E , которая адаптирована к каждой системе в вариациях $(E, \mathcal{V}_{H_i}, B)$, $i = 1, \dots, k$. Если выполнено условие (5.12), то связность $\tilde{\nabla}$ удовлетворяет “частичному” условию нулевой кривизны:*

$$v_{H_i} \rfloor \text{Curv}(\tilde{\nabla}) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.13)$$

Другими словами, для каждого $a \in D^k$ ограничение

$$\tilde{\nabla}^a = \tilde{\nabla}|_{E_{\Lambda_a}} \quad (5.14)$$

является плоской симплектической связностью на $E_{\Lambda_a} = E|_{\Lambda_a}$.

Доказательство основано на фактах из §4 и результатах, полученных в [3], [4], [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Симплектическая связность $\tilde{\nabla}$ (5.10) зависит только от выбора функций $H_1, \dots, H_k$, а точнее, от инфинитезимального коизотропного продолжения $N_a = \{H_1 = a_1, \dots, H_k = a_k\}$ изотропного тора Λ_a в M (см. [4], [7]). Если попарные скобки Пуассона функций $H_1, \dots, H_k$ аннулируются не только на B , но и в некоторой окрестности B в M , то для каждого $a \in U$ N_a – коизотропное подмногообразие в M и тор Λ_a является слоем характеристического распределения $\ker \omega|_{N_a} \subset TN_a$. В этом случае плоская связность $\tilde{\nabla}^a$ (5.14) совпадает со связностью Ботта [9], ассоциированной с характеристическим слоением подмногообразия N_a (см. также [7]).

Следует заметить: условия (i)–(iii) означают, что левая часть (5.12) в общем случае имеет нуль второго порядка на B . Ниже мы будем предполагать выполнение условия (5.12).

В терминах коэффициентов $\tilde{\theta}_i(s, \varphi)$ 1-формы (5.10) свойства связности $\tilde{\nabla}$ представляются в виде следующих соотношений на $B \approx D^k \times \mathbb{T}^k$:

$$J\tilde{\theta}_i(s, \varphi) + \tilde{\theta}_i^*(s, \varphi)J = 0 \quad (\text{симплектичность}), \quad (5.15)$$

$$\sum_{j=1}^k \omega_j^{(i)}(s) \tilde{\theta}_j(s, \varphi) = -V_{H_i}(s, \varphi) \quad (\text{адаптируемость}), \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_j(s, \varphi)}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \tilde{\theta}_i(s, \varphi)}{\partial \varphi_j} + [\tilde{\theta}_i(s, \varphi), \tilde{\theta}_j(s, \varphi)] = 0 \quad (\text{нулевая кривизна вдоль } \Lambda_a) \quad (5.17)$$

для всех $i, j = 1, \dots, k$. Здесь V_{H_i} — матрица в вариациях гамильтонова векторного поля $\text{ad}(H_i)$, взятая относительно базиса (5.9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Существует единственная матричнозначная функция $g(s, \varphi) \in GL(2r; \mathbb{R}) \otimes C^\infty(D^k \times \mathbb{R}^k)$, удовлетворяющая следующей системе дифференциальных уравнений на $D^k \times \mathbb{R}^k$:*

$$\frac{\partial g(s, \varphi)}{\partial \varphi_i} + \tilde{\theta}_i(s, \varphi)g(s, \varphi) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.18)$$

$$g(s, 0) = I, \quad (5.19)$$

и следующим соотношениям

$$g(s, \varphi + 2\pi e_j) = g(s, \varphi)G_j(s), \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.20)$$

где $\{e_j\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^k$: $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Матрицы монодромии

$$G_j(s) = g(s, 2\pi e_j), \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.21)$$

гладко зависят от переменных действия s , попарно коммутируют:

$$[G_i(s), G_j(s)] = 0, \quad s \in D^k, \quad (5.22)$$

и удовлетворяют условию симплектичности:

$$G_i^*(s)J(s, 0)G_i(s) = J(s, 0). \quad (5.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения основано на стандартных фактах из теории линейных связностей (см., например, [4], [7]) и следующей интерпретации. Решение $g(s, \varphi)$ (как функция на универсальном накрытии цилиндра $D^k \times \mathbb{T}^k$) для каждого $s = a \in D^k$ задает оператор параллельного переноса плоской симплектической связности $\tilde{\nabla}^a$ (5.14) вдоль пути на торе Λ_a , соединяющего точки $(a, 0)$ и (a, φ) . Матрицы монодромии $G_j(a)$ задают параллельный перенос вдоль базисных 1-циклов $\gamma_i(a) = \{a\} \times \{\varphi_1 = 0, \dots, 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi, \dots, \varphi_k = 0\}$ и, тем самым, являются образующими группы голономии $\text{Hol}_{(a,0)}^{\tilde{\nabla}^a} \subset \text{Sp}(r, \mathbb{R})$ связности $\tilde{\nabla}^a$ в точке $(a, 0)$.

При сделанных выше предположениях теперь сформулируем результат, который дает достаточные условия гамильтонизации сразу всех векторных полей $\mathcal{V}_{H_1}, \dots, \mathcal{V}_{H_k}$ относительно одной и той же допустимой 2-формы на E .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполнено условие (5.12). Предположим, что существует набор гладких функций

$$Z_1(s), \dots, Z_k(s) \in \mathfrak{gl}(2r; \mathbb{R}) \otimes C^\infty(D^k),$$

удовлетворяющих условиям

$$J(s, 0)Z_j(s) + Z_j^*(s, 0) = 0, \quad s \in D^k, \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.24)$$

и таких, что матрицы монодромии (5.21) удовлетворяют следующей системе лаксовых уравнений на D^k :

$$\frac{\partial G_i(s)}{\partial s_j} = [G_i(s), Z_j(s)], \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (5.25)$$

Тогда системы в вариациях $(E, \mathcal{V}_{H_i}, B)$, $i = 1, \dots, k$, гамильтоновых систем (M, ω, H_i, B) вдоль B обладают свойствами:

- (а) каждое векторное поле $\mathcal{V}_{H_i}$ является гамильтоновым относительно допустимой 2-формы Ω^∇ (3.4), ассоциированной с симплектической связностью ∇ на E , которая задается следующей 1-формой на B :

$$\theta = \tilde{\theta} + \sum_{i=1}^k \left(g Z_i(s) g^{-1} - g^{-1} \frac{\partial g}{\partial s_i} \right) \otimes ds_i, \quad (5.26)$$

здесь 1-форма $\tilde{\theta}$ определяется формулой (5.10) и $g = g(s, \varphi)$ – решение задачи (5.18), (5.19);

- (б) форма Ω^∇ невырождена на E , и функции Гамильтона $\mathcal{F}_{H_i} = \pi^*(H_i|_B)$ векторных полей $\mathcal{V}_{H_i}$ находятся попарно в инволюции относительно скобки Пуассона на (E, Ω^∇) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношений (5.25) формула (5.26) определяет глобальную матричнозначную 1-форму θ на B , которая задает симплектическую связность ∇ на E , адаптированную к векторным полям $\text{ad}(H_1), \dots, \text{ad}(H_k)$ на B . Непосредственной проверкой убеждаемся, что ограничения $v_{H_1}, \dots, v_{H_k}$ этих векторных полей на B аннулируют 2-форму кривизны $\text{Curv}(\nabla)$. Таким образом, каждая пара $(\nabla, \mathcal{V}_{H_i})$ удовлетворяет условию гамильтоновости (3.7). Инволютивность функций $\mathcal{F}_{H_i}$, $i = 1, \dots, k$, следует из следующего представления для попарных скобок Пуассона координатных функций $(s_i, \varphi_i, x^\sigma)$ на E (см. также [7]):

$$\begin{aligned} \{s_i, s_j\}_E &= 0, \\ \{s_i, \varphi_j\}_E &= \delta_{ij}, \\ \{\varphi_i, \varphi_j\}_E &= -\frac{1}{2} \langle Jx, K_{ij}x \rangle, \\ \{s_i, x^\sigma\}_E &= -\tilde{\theta}_{\sigma' i}^\sigma x^{\sigma'}, \\ \{\varphi_i, x^\sigma\}_E &= \mu_{\sigma' i}^\sigma x^{\sigma'} + \frac{1}{2} \langle Jx, K_{ij}x \rangle \tilde{\theta}_{\sigma' j}^\sigma x^{\sigma'}, \\ \{x^\sigma, x^{\sigma'}\}_E &= J^{\sigma\sigma'} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{\gamma i}^\sigma \langle Jx, K_{ij}x \rangle \tilde{\theta}_{\gamma' j}^{\sigma'} x^{\gamma'} + (\tilde{\theta}_{\gamma i}^\sigma \mu_{\gamma' i}^{\sigma'} - \mu_{\gamma i}^\sigma \tilde{\theta}_{\gamma' i}^{\sigma'}) x^{\gamma'} x^{\gamma'}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Здесь по повторяющимся индексам ведется суммирование, $J^{\sigma\gamma} J_{\gamma\sigma'} = \delta_{\sigma'}^{\sigma}$, и введены обозначения:

$$\mu_i = ((\mu_{\sigma'i}^{\sigma})) = g Z_i(s) g^{-1} - g^{-1} \frac{\partial g}{\partial s_i}, \quad (5.28)$$

$$K_{ij} = ((K_{\sigma'ij}^{\sigma})) = g \left(\frac{\partial Z_j}{\partial s_i} - \frac{\partial Z_i}{\partial s_j} + [Z_i, Z_j] \right) g^{-1}. \quad (5.29)$$

Отметим, что соотношения (5.25) влекут *независимость спектров* матриц монодромии $G_1(s), \dots, G_k(s)$ от переменных действия $s_1, \dots, s_k$ (см. [19]). Это условие является необходимым для того, чтобы связность (5.26) была *плоской* [7], но отнюдь не достаточным. Действительно, 2-форма кривизны связности (5.26), вообще говоря, не равна нулю и выглядит так:

$$\text{Curv}(\nabla) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k K_{ij}(s) \otimes ds_i \wedge ds_j.$$

В силу равенства $\nabla|_{E_{\Lambda_a}} = \tilde{\nabla}^a$ связность ∇ (5.26) можно интерпретировать как продолжение на E исходного семейства плоских связностей $\{\tilde{\nabla}^a, a \in D^k\}$ в классе связностей, удовлетворяющих коллективному условию адаптируемости (5.16). Условие существования плоского продолжения семейства (5.14) дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.3 (о плоском продолжении). *Условие существования плоской симплектической связности ∇^{flat} на E , адаптированной ко всем гамильтоновым векторным полям $\text{ad}(H_1), \dots, \text{ad}(H_k)$ над B , эквивалентно выполнению условия (5.12) и следующего свойства: матрицы монодромии (5.21) представимы в виде*

$$G_i(s) = T(s) G_i(0) T^{-1}(s), \quad s \in D^k, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.30)$$

где $T(s)$ – некоторая гладкая матричная функция на D^k , удовлетворяющая условию симплектичности:

$$T^*(s) J(s, 0) T(s) = J(s, 0). \quad (5.31)$$

При выполнении (5.30), (5.31) связность ∇^{flat} задается 1-формой вида (5.26), где

$$Z_i(s) = -\frac{\partial T}{\partial s_i} T^{-1}. \quad (5.32)$$

Доказательство выводится из теоремы 5.1, теоремы 5.2 и того факта, что коэффициенты K_{ij} (5.29) 2-формы кривизны связности (5.26) заануляются для Z_i из (5.32).

Очевидно, что из условия (5.30) следует (5.25), а при $k = 1$ эти условия эквивалентны (см. пример 4.1).

Теорема 5.3 и результаты работы [7] об интегрируемости по Лиувиллю систем в вариациях позволяют сформулировать следующий критерий интегрируемости только в терминах матриц монодромии (5.21).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть при условии (5.12) матрицы монодромии (5.21) допускают представление (5.30) и выполнено следующее условие устойчивости: $G_1(0), \dots, G_k(0) \in \text{Sp}(r, \mathbb{R})$ – устойчивые симплектические матрицы (т.е. каждая $G_j(0)$ диагонализироваема и $\text{Spec } G_j(0) \subset \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$). Тогда функции Гамильтона $\mathcal{F}_{H_1}, \dots, \mathcal{F}_{H_k}$ векторных полей $\mathcal{V}_{H_1}, \dots, \mathcal{V}_{H_k}$ можно дополнить послойно квадратичными функциями $h_1, \dots, h_r$ до полного набора функций в инволюции на $(E, \Omega^{\nabla^{\text{flat}}})$. Совместные поверхности уровня функций $\mathcal{F}_{H_1}, \dots, \mathcal{F}_{H_k}, h_1, \dots, h_r$ задают слоение Лиувилля пространства E торами разной размерности от k до $k + r$.

Заметим, что функции $h_1, \dots, h_r$ из следствия 5.1, дополняющие гамильтонианы $\mathcal{F}_{H_1}, \dots, \mathcal{F}_{H_k}$ до полного набора функций в инволюции, описываются непосредственно в терминах связности (5.26) [7]. Особым слоем соответствующего слоения Лиувилля отвечают критические значения “нормального” отображения момента $h = (h_1, \dots, h_r): E \rightarrow \mathbb{R}^r$. Возникающая в этой ситуации бифуркационная диаграмма может быть исследована в рамках общей теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем [20].

Отметим также, что интересные результаты об интегрировании в квадратурах систем в вариациях (как линейных гамильтоновых систем, зависящих от времени) получены в работе [21].

Список литературы

1. Буслаев В. С., Налимова Е. А. Формула следа в общей гамильтоновой механике // ТМФ. 1984. Т. 60. №3. С. 344–355.
2. Marsden J., Ratiu T., Rangel G. Symplectic connections and the linearization of Hamiltonian systems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1991. V. 117. P. 329–380.
3. Воробьев Ю. М. Комплексный росток Маслова, порожденный линейными связностями // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №6. С. 29–37.
4. Karasev M. V., Vorobjev Yu. M. Linear connections for Hamiltonian dynamics over isotropic submanifold. Seminar on dynamical systems. Euler International Mathematical Institut, St. Petersburg, Russia, October 14–25 and November 18–29, 1991 // Progr. Non-linear Differential Equations Appl. 1994. V. 12. P. 235–252.
5. Karasev M. V., Vorobjev Yu. M. Symplectic curvature and Arnold form over an isotropic submanifold // J. Math. Sci. 1996. V. 82. №6. P. 3789–3799.
6. Karasev M. V., Vorobjev Yu. M. Integral representations over isotropic submanifolds and equations of zero curvature // Adv. Math. 1998. V. 135. №2. P. 220–286.
7. Karasev M. V., Vorobjev Yu. M. Adapted connections, Hamilton dynamics, geometric phases, and quantization over isotropic submanifolds // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1998. V. 187. P. 203–326.
8. Sternberg S. Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang–Mills field // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1977. V. 74. №12. P. 5253–5254.
9. Bott R. Lectures on characteristic classes and foliations // Lecture Notes in Math. 1972. V. 279. P. 1–94.
10. Johnson R. A., Sell G. R. Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasi-periodic linear differential systems // J. Differential Equations. 1981. V. 41. P. 262–288.
11. Eliasson L. H. Floquet solution for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation // Comm. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 447–482.
12. Kuksin S. B. An infinitesimal Liouville–Arnold theorem as a criterion of reducibility for variational Hamiltonian equations // Chaos Solitons Fractals. 1992. V. 2. №3. P. 259–269.
13. Нехорошев Н. Н. Переменные действие-угол и их обобщение // Труды ММО. 1976. Т. 26. С. 181–198.

14. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 2. С. 46–56.
15. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
16. Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
17. Weinstein A. Lectures on symplectic manifolds. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.
18. Арнольд В. И. Математические методы. М.: Наука, 1989.
19. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
20. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997.
21. Доброхотов С. Ю. Интегрирование в квадратурах $2n$ -мерных гамильтоновых систем с n известными косоортгональными решениями // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 143–144.

Московский институт
электроники и математики
E-mail: vorob@amath.msk.ru

Поступила в редакцию
19.03.1999