Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Дерябина, О гиперболических уравнениях второго порядка с сильным характеристическим вырождением на начальной гиперплоскости, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 4, 29–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:27:19

УДК 517.956

А. В. Дерябина

**О гиперболических уравнениях
второго порядка с сильным характеристическим
вырождением на начальной гиперплоскости**

Рассматриваются уравнения вида

$$\psi^2(t, x)u_{tt} + \varphi(t, x)u_t - \sum_{i,j} (a^{ij}(t, x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_i b^i(t, x)u_{x_i} + c(t, x)u = f(t, x), \quad (1)$$

где

$$(t, x) \in H = (0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad \psi(t, x) \geq 0, \quad \varphi(t, x) \geq 0; \\ \sum_{i,j} a^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall (t, x) \in H, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Вместо задачи Коши для уравнения (1) рассматривается задача без начальных условий, но с ограничениями на допустимый рост решения при $t \rightarrow 0$ и при $|x| \rightarrow \infty$. Доказана однозначная разрешимость уравнения (1) в определенных весовых пространствах типа Соболева. Исследованы дифференциальные свойства обобщенных решений.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются уравнения вида

$$\psi^2(t, x)u_{tt} + \varphi(t, x)u_t - (a^{ij}(t, x)u_{x_i})_{x_j} + b^i(t, x)u_{x_i} + c(t, x)u = f(t, x), \quad (1.1)$$

где $(t, x) \in H = (0, T] \times \mathbb{R}^n$. Здесь и ниже по повторяющимся индексам i, j производится суммирование от 1 до n . Мы предполагаем также, что $\psi(t, x) \geq 0$, $\varphi(t, x) \geq 0$, $A(t, x, \xi) \equiv a^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \geq 0$ при любых $(t, x) \in H$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Таким образом, уравнение (1.1) является строго гиперболическим на множестве

$$G = \left\{ (t, x) \in H : \psi(t, x) > 0, \inf_{|\xi|=1} a^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j > 0 \right\}$$

и вырождается на множестве $\overline{H} \setminus G$.

Вырождающиеся гиперболические уравнения изучались многими авторами. Укажем, например, работы [1]–[20], где можно найти дальнейшие ссылки.

Будем предполагать, что функции $\psi(t, x)$ и $\varphi(t, x)$ обращаются в нуль на гиперплоскости $t = 0$ (которая, следовательно, является характеристикой) с такой скоростью, которая делает невозможным задание начальных условий при $t = 0$.

Вместо задачи Коши мы будем рассматривать задачу без начальных условий, но с ограничениями на допустимый рост решения при $t \rightarrow 0$ и при $|x| \rightarrow \infty$. Такая задача изучалась в [21] при дополнительных предположениях об ограниченности коэффициентов уравнения (1.1), равномерной положительной определенности квадратичной формы $A(t, x, \xi)$ и справедливости соотношений $\varphi(t, x) = O(t)$, $\psi(t, x) = O(\varphi(t, x))$ при $t \rightarrow 0$. Были указаны точные классы, в которых существует единственное обобщенное решение задачи без начальных условий. Эти исследования были продолжены в [22], где допускался как рост коэффициентов уравнения (1.1) при $|x| \rightarrow \infty$, так и вырождение формы $A(t, x, \xi)$ на произвольных подмножествах H . Была найдена зависимость классов однозначной обобщенной разрешимости от скорости роста коэффициентов. Близким вопросам посвящена статья [23], где изучены растущие обобщенные решения гиперболических систем с сильным характеристическим вырождением на начальной гиперплоскости.

Настоящая работа содержит развитие результатов статьи [22] в нескольких направлениях.

Во-первых, ослабляются предположения относительно поведения функций $\varphi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ при $t \rightarrow 0$. Во-вторых, исследуются дифференциальные свойства обобщенного решения, в частности, устанавливаются условия, при которых оно является классическим. В-третьих, приводится пример, показывающий, что при нарушении этих условий обобщенное решение может не иметь предписываемой уравнением гладкости.

В §2 рассматриваются вопросы единственности. В п. 2.1 приводятся основные обозначения и предположения. В п. 2.2 дается определение обобщенного решения уравнения (1.1), вводятся весовые пространства и формулируется теорема единственности, которая затем доказывается в п. 2.3. Далее, в п. 2.4 строится пример неединственности, свидетельствующий о точности доказанной теоремы в общем случае. В п. 2.5 показано, что более медленный рост коэффициентов уравнения (1.1) приводит к расширению классов единственности.

В §3 доказывается существование обобщенных решений в классах единственности при соответствующих предположениях о коэффициентах и свободном члене уравнения (1.1).

Параграф 4 посвящен исследованию дифференциальных свойств обобщенных решений. В п. 4.1 формулируются требования, налагаемые на коэффициенты уравнения (1.1) и его правую часть. В п. 4.2 доказывается теорема о повышении гладкости для общего случая. В п. 4.3 содержится видоизменение этой теоремы для случая коэффициентов с меньшим ростом. В п. 4.4 строится пример негладкого обобщенного решения.

Автор благодарит А. С. Калашникова за внимание к работе.

§2. Теоремы единственности

2.1. Основные обозначения и предположения. Будем считать, что функция $\psi(t, x) \in C^2(H)$ представима в следующем виде:

$$\psi(t, x) = \psi^0(t) \cdot \psi^1(t, x), \\ \psi^1(t, x), \psi_t^1(t, x) \in L_\infty(H), \quad \psi^0(t) \in C([0, T]) \cap C^1((0, T]).$$

Предположим также, что функция $\psi^0(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, T]$ и обращается в нуль при $t = 0$ с такой скоростью, которая обеспечивает расходи-

мость интеграла $\int_0^T \frac{dt}{\psi^0(t)}$. Функция $\psi^0(t)$ “отвечает” за обращение в нуль $\psi(t, x)$ при $t = 0$, а функция $\psi^1(t, x)$ — при $t > 0$.

Рассмотрим монотонную функцию $t = g(\tau): [0, 1] \rightarrow [0, T]$, неявно заданную следующим образом: $\tau = \exp\left(\int_T^t \frac{ds}{\psi^0(s)}\right)$. Введем обозначение для обратной функции $\tau = g^{-1}(t) \equiv \exp\left(\int_T^t \frac{ds}{\psi^0(s)}\right)$. Легко видеть, что выполняются следующие равенства: $g(0) = 0$, $g(1) = T$, $\tau g'(\tau) = \psi^0(g(\tau))$. Далее, сделаем ряд предположений относительно взаимосвязи коэффициентов временной части уравнения (1.1). Обозначим

$$\psi_1(\tau, x) \equiv \tau \psi^1(g(\tau), x). \quad (2.1)$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$0 \leq \psi_1(\tau, x) \leq K\tau, \quad K = \text{const} > 0. \quad (2.2)$$

Пусть $\varphi(t, x) \in C^1(H)$. Обозначим

$$\varphi_1(t, x) = \varphi(t, x) - \psi(t, x)(\psi_t(t, x) - \psi_{1\tau}(g^{-1}(t), x)).$$

Предположим, что $\varphi_{1\tau} - \varphi_1(\ln \psi^0)_t$, $\frac{\varphi_1}{\psi^0} \in L_\infty(H)$ и выполняется неравенство

$$\varphi_1(t, x) \geq m\psi(t, x), \quad m = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Определим функции $\chi_i(t, x)$ ($i = 1, \dots, n$) с помощью равенств $\psi_{x_i}(t, x) = \chi_i(t, x)\psi(t, x)$. Будем считать, что функции c , $b_{x_i}^i$, $a^{ij}\rho^{-2}$, $b^i\rho^{-1}$, φ , $\chi_i\rho$ ($\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}$) непрерывны и ограничены в H , а также что $f(t, x) \in L_{2,\text{loc}}(H)$. Из ограниченности $\chi_i(t, x)$ ($i = 1, \dots, n$) следует, что вырождение $\psi(t, x)$ происходит слоями, т.е. если $\psi(t_0, x_0) = 0$ для некоторой точки $(t_0, x_0) \in H$, то $\psi(t, x)$ обращается в нуль на всей гиперплоскости $t = t_0$ (см. [21]).

Предположим, что всюду в H неотрицательно определена квадратичная форма $a^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j$, т.е. для всех $(t, x) \in H$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$a^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \geq 0. \quad (2.4)$$

Обозначим $A_k(t, x) \equiv \sqrt{a^{kk}(t, x)}$. Заметим, что $0 \leq A_k(t, x) \leq M_1\rho$. Предположим, что $(A_k)_{x_k} \in L_\infty(H)$, $k = 1, \dots, n$. Здесь и ниже через M_i ($i \in \mathbb{N}$) обозначаются положительные постоянные.

Далее, пусть для всех $(t, x) \in H$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$(b^i(t, x)\xi_i)^2 \leq M_2 a^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j, \quad (2.5)$$

$$a_t^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \leq M_3 a^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j. \quad (2.6)$$

Предположим также, что при некотором значении параметра $\sigma > m^{-1}$ справедливо следующее неравенство для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, $(t, x) \in H$:

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) \equiv & \left[\left(1 - \frac{\sigma}{2} \psi^0 \psi_t^1 \right) a^{ij} - \frac{\sigma}{2} \psi a_t^{ij} \right] \xi_i \xi_j + \left[c - \frac{1}{2} \left(b_{x_i}^i + \varphi_{1t} - \varphi_1 \frac{\psi_t^0}{\psi^0} \right) \right] \eta^2 \\ & + \left[\sigma \left(m - \psi^1 + \frac{3}{2} \psi^0 \psi_t^1 \right) - 1 \right] \zeta^2 + \sigma (b^i + \chi_j a^{ij}) \xi_i \zeta \\ & + (\sigma c - \psi^1 - 2\psi^0 \psi_t^1) \eta \zeta \geq \mu_0 (a^{ij} \xi_i \xi_j + \eta^2 + \zeta^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заметим, что (2.7) выполняется, например, в том случае, когда числа $c_0 = \inf_H c(t, x)$ и m положительны и достаточно велики.

2.2. Определение обобщенного решения и формулировка теоремы единственности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u(t, x) \in L_{2,\text{loc}}(H)$ назовем *обобщенным решением* уравнения (1.1) в H , если $(\varphi u)_t, (\psi u)_t \in L_{2,\text{loc}}(H)$, $(A_k u)_{x_k} \in L_{2,\text{loc}}(H)$ ($k = 1, \dots, n$) и справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \iint_H a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx dt + \iint_H b^i u_{x_i} v dx dt + \iint_H (cu - f)v dx dt \\ & + \iint_H \varphi u_t v dx dt - \iint_H \psi u_t (\psi v_t + 2\psi_t v) dx dt = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

какова бы ни была финитная функция $v(t, x)$, принадлежащая $L_2(H)$ вместе с производными $(\varphi v)_t, (\psi v)_t, (A_k v)_{x_k}$ ($k = 1, \dots, n$).

Заметим, что левая часть тождества (2.8) имеет смысл для функций u и v с перечисленными выше свойствами.

Введем следующую квадратичную форму, зависящую от параметров α и λ :

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\lambda}(\xi, \eta, \zeta) & \equiv F(\xi, \eta, \zeta) - \alpha \psi^1 (\sigma a^{ij} \xi_i \xi_j + \sigma \zeta^2 + 2\eta \zeta) \\ & + \left(\lambda \rho^{-2} x_i b^i - \alpha \frac{\varphi_1}{\psi_0} \right) \eta^2 - 2\lambda \rho^{-2} x_j a^{ij} \xi_i (\eta + \sigma \zeta). \end{aligned}$$

Пусть числа α и λ таковы, что для всех $(t, x) \in H$, для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$G_{\alpha,\lambda}(\xi, \eta, \zeta) \geq \mu_1 (a^{ij} \xi_i \xi_j + \eta^2 + \zeta^2), \quad (2.9)$$

где $\mu_1 = \text{const} > 0$. Заметим, что в силу выполнения неравенства (2.7) найдутся такие числа α_0, λ_0 , что для любых $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$ неравенство (2.9) справедливо.

Рассмотрим для указанных значений α и λ класс функций $u(t, x)$, для которых

$$\iint_H \frac{1}{\psi^0(t)} \exp \left[-2\alpha \int_t^T \frac{ds}{\psi^0} \right] \rho^{-2\lambda} (u^2 + (\psi u_t)^2 + (A_k u_{x_k})^2) dx dt < \infty. \quad (2.10)$$

Обозначим этот функциональный класс через $X_{\alpha,\lambda}(H)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть справедливы все сформулированные в §1 и п. 2.1 предположения относительно коэффициентов уравнения (1.1). Тогда обобщенное решение уравнения (1.1) единственно в классе $X_{\alpha,\lambda}(H)$.

2.3. Доказательство теоремы 1. Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть $y(t, x) \in L_{2,\text{loc}}(H)$ и D — любое внутреннее подмножество H . Тогда для $(t, x) \in D$ и достаточно малых значений параметра $\theta > 0$ положим $y_\theta(t, x) = \frac{y(t+\theta, x) - y(t-\theta, x)}{2\theta}$. Для функций, определенных таким образом, выпишем ряд свойств, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. Если существует обобщенная производная $y_t \in L_{2,\text{loc}}(H)$, то

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|y_\theta - y_t\|_{L_2(D)} = 0.$$

2. Допустим, что $y, y_t \in C(H)$, y финитна в H , а $z \in L_{2,\text{loc}}(H)$. Тогда

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \iint_H y z z_\theta dx dt = -\frac{1}{2} \iint_H y_t z^2 dx dt.$$

Зададим “срезающие” по x и по τ функции $\gamma_R(|x|)$ и $h_1^\beta(\tau)$ следующим образом:

$$\gamma_R(|x|) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < |x| < R, \\ 0, & \text{если } |x| > 2R, \\ \frac{|x| - R}{R}, & \text{если } R \leq |x| \leq 2R; \end{cases}$$

$$h_1^\beta(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \tau \leq \beta, \text{ и } 1 - \beta < \tau \leq 1, \\ \frac{\tau - \beta}{\beta}, & \text{если } \beta \leq \tau \leq 2\beta, \\ 1, & \text{если } 2\beta \leq \tau \leq 1 - 2\beta, \\ \frac{1 - \beta - \tau}{\beta}, & \text{если } 1 - 2\beta < \tau \leq 1 - \beta. \end{cases}$$

Обозначим $h(t) = h_1^\beta(g^{-1}(t))$. Пусть $u(t, x)$ – обобщенное решение однородного уравнения (1.1), принадлежащее классу $X_{\alpha, \lambda}(H)$. Докажем, что $u(t, x) = 0$ почти всюду в H .

Возьмем любые числа $\varepsilon > 0$, $R_0 > 0$, $B_0 \in (0, T/2)$ и докажем, что

$$\iint_{\Pi_{R_0, B_0}} u^2(t, x) dt dx < \varepsilon,$$

$$\Pi_{R_0, B_0} = \{(t, x) \in H : |x| < R_0, B_0 < t < T - B_0\}.$$

Пусть $R > R_0$, а β таково, что $g(2\beta) < B_0$, $g(1 - 2\beta) > T - B_0$. Подставим в тождество (2.8) с $f \equiv 0$ в качестве v функцию

$$v = \frac{h\gamma^2\omega}{g'(g^{-1}(t))} (u + \sigma((\psi u)_\theta - \psi_t u)), \quad \text{где } \omega = (g^{-1}(t))^{2\alpha-1} \rho^{-2\lambda}.$$

Преобразуем отдельные члены полученного равенства интегрированием по частям, используя перечисленные ранее свойства функций y_θ . Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} & \iint_H \frac{h\gamma^2\omega}{g'(g^{-1}(t))} \left[\left(\left(1 - \frac{\sigma}{2} \psi^0 \psi_t^1 \right) a^{ij} - \frac{\sigma}{2} \psi a_t^{ij} \right) u_{x_i} u_{x_j} \right. \\ & + \left(c - \frac{1}{2} (b_{x_i}^i - \varphi_1(\ln \psi^0)_t) \right) u^2 \\ & + \left(\sigma \left(m - \psi^1 - \frac{3}{2} \psi^0 \psi_t^1 \right) - 1 \right) (\psi u_t)^2 + \sigma (b^i + \chi_j a^{ij}) u_{x_i} \psi u_t \\ & + (\sigma c - \psi^1 - 2\psi^0 \psi_t^1) u \psi u_t - \alpha \psi^1 (\sigma a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sigma (\psi u_t)^2 + \psi u_t u) \\ & \left. + \left(\lambda \rho^{-2} x_i b^i - \alpha \frac{\varphi_1}{\psi^0} \right) u^2 - 2\lambda \rho^{-2} x_j a^{ij} u_{x_i} (u + \sigma \psi u_t) \right] dx dt \leq I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_H \frac{2h\gamma\gamma_{x_j}\omega}{g'(g^{-1}(t))} (-2a^{ij} u_{x_i} u + b_j u^2) dx dt, \\ I_2 &= \iint_H \frac{2h\gamma\gamma_{x_j}\omega}{g'(g^{-1}(t))} (-\sigma \psi u_t a^{ij} u_{x_i}) dx dt, \\ I_3 &= \frac{1}{2} \iint_H \frac{h_t \gamma^2 \omega}{g'(g^{-1}(t))} (\sigma \psi a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \varphi_1 u^2 + 2\psi^2 u u_t + \sigma \psi^3 u_t^2) dx dt. \end{aligned}$$

Произведем оценку интегралов I_i ($i = 1, 2, 3$). Заметим предварительно, что $(a^{ij}u_{x_i})^2 \leq M_4 \rho^2 a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}$. Обозначим $\omega_1(\tau, x) = \tau^{2\alpha-1} \rho^{-2\lambda}$. Получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{\beta}^{1-\beta} d\tau \int_{R < |x| < 2R} h_1^{\beta}(\tau) \gamma_R(|x|) \frac{1}{R} \rho \omega_1 \left(\frac{|b^i|}{\rho} u^2 + 2\rho^{-1} A_i A_j |u_{x_i}| |u| \right) dx \\ &\leq M_5 \int_{\beta}^{1-\beta} d\tau \int_{R < |x| < 2R} \frac{\sqrt{4R^2 + 1}}{R} \omega_1(\tau, x) (u^2 + (A_i u_{x_i})^2) dx \\ &\leq M_6 \int_0^T dt \int_{R < |x| < 2R} \frac{\omega(t, x)}{g'(g^{-1}(t))} (u^2 + A_i^2 u_{x_i}^2) dx < \frac{\varepsilon \omega_0 \mu_1}{3}, \end{aligned}$$

где $R > R_1(\varepsilon) > R_0$, $\omega_0 = \min_{\Pi_{R_0, B_0}} \frac{\omega(t, x)}{g'(g^{-1}(t))}$. Действуя аналогично, получаем следующие неравенства:

$$|I_2| \leq M_7 \int_{\beta}^{1-\beta} d\tau \int_{R < |x| < 2R} \omega_1(\tau, x) (a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + (\psi u_t)^2) dx < \frac{\varepsilon \omega_0 \mu_1}{2},$$

если $R > R_2(\varepsilon) > R_1(\varepsilon)$;

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{2\beta} \int_{\beta}^{2\beta} d\tau \int_{|x| < 2R} \omega_1(\tau, x) \tau \left(\sigma \psi_1 \tau^{-1} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_1(g^{-1}(\tau), x)}{\psi^0(g(\tau))} u^2 + 2\psi_1 \tau^{-1} u \psi_1 u_{\tau} + \sigma \psi_1 \tau^{-1} (\psi_1 u_{\tau})^2 \right) dx \\ &\leq M_8 \int_{g(\beta)}^{g(2\beta)} dt \int_{|x| < 2R} \frac{\omega(t, x)}{g'(g^{-1}(t))} (a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2 + (\psi u_t)^2) dx < \frac{\varepsilon \omega_0 \mu_1}{3}, \end{aligned}$$

если $\beta < \beta_1(\varepsilon)$, причем $g(2\beta_1(\varepsilon)) < B_0$, $g(1 - 2\beta_1(\varepsilon)) > T - B_0$.

Учитывая полученные оценки и неравенство (2.9), приходим к следующему соотношению:

$$\mu_1 \iint_H \frac{h \gamma^2 \omega}{g'(g^{-1}(t))} (u^2 + a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + (\psi u_t)^2) dt dx < \varepsilon \omega_0 \mu_1,$$

и, следовательно, $\iint_{\Pi_{R_0, B_0}} u^2 dt dx < \varepsilon$.

2.4. Пример неединственности. В полосе $H = (0, T] \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение

$$\left(t \ln \frac{eT}{t} \right)^2 u_{tt} + \left(\ln \frac{eT}{t} + 1 \right) t \ln \frac{eT}{t} u_t - (x^2 u_x)_x + 3u = 0. \quad (2.11)$$

Для уравнения (2.11) выполняются все предположения, при которых была доказана теорема 1. Здесь

$$\begin{aligned} c(t, x) &= 3, \quad \psi(t, x) = \psi^0(t) = t \ln \frac{eT}{t}, \quad \varphi(t, x) = \left(\ln \frac{eT}{t} + 1 \right) t \ln \frac{eT}{t}, \\ \psi^1(t, x) &\equiv 1, \quad b^1(t, x) = 0, \quad a^{11}(t, x) = x^2. \end{aligned}$$

Далее, функция $g(\tau) = T \exp\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)$ является решением уравнения $g \ln \frac{eT}{g} = g' \cdot \tau$, удовлетворяющим условиям $g(0) = 0$, $g(1) = T$.

Выпишем все соотношения, встречающиеся в формулировке теоремы 1, для этой функции и коэффициентов уравнения (2.11):

$$\begin{aligned} \tau = g^{-1}(t) &= \frac{1}{\ln(eT/t)}, \quad \psi_1 = \tau, \quad \varphi_1 = 3t \ln \frac{eT}{t} = 3\psi, \quad m = 3, \\ \varphi_{1t} - \varphi_1(\ln \psi^0)_t &= 3\psi_t - 3\psi \frac{\psi_t}{\psi} \equiv 0, \quad \frac{\varphi_1}{\psi^0} = 3. \end{aligned}$$

Квадратичная форма $G_{\alpha,\lambda}(\xi, \eta, \zeta)$ выражается через коэффициенты уравнения следующим образом:

$$G_{\alpha,\lambda}(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \alpha)(x\xi)^2 + (1 - \alpha)\zeta^2 + 3(1 - \alpha)\eta^2 - 2\lambda\rho^{-2}x^2(x\xi)(\eta + \zeta).$$

Функциональный класс $X_{\alpha,\lambda}(H)$ определяется условием

$$\iint_H \frac{\rho^{-2\lambda}}{t(\ln(eT/t))^{2\alpha+1}} \left[u + \left(t \ln \frac{eT}{t} \right)^2 + (xu_x)^2 \right] dt dx < \infty, \quad (2.12)$$

где положительные числа α, λ таковы, что

$$G_{\alpha,\lambda}(\xi, \eta, \zeta) \geq \mu_1((x\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad \mu_1 = \text{const} > 0, \quad (2.13)$$

Согласно критерию Сильвестра заключаем, что для выполнения (2.13) достаточно, чтобы были справедливы неравенства:

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \lambda < 1 - \alpha. \quad (2.14)$$

Пусть $0 < \alpha_0 < 1$, $0 < \lambda_0 < 1 - \alpha_0$. Тогда по теореме 1 обобщенное решение уравнения (2.11) единственно в классе функций, удовлетворяющих следующему неравенству:

$$|u(t, x)| + |xu_x| + \left| t \ln \frac{eT}{t} u_t \right| \leq M_9 \rho^{-1/2+\lambda_0} \left| \ln \frac{eT}{t} \right|^{\alpha_0}. \quad (2.15)$$

Действительно, для $\alpha \in (\alpha_0, 1 - \alpha_0)$ и $\lambda \in (\lambda_0, 1 - \alpha)$ выполняется условие (2.14) и, следовательно, условие (2.13). При этом из неравенства (2.15) следует (2.12).

Пусть теперь, как и раньше, $0 < \alpha_0 < 1$, но $1 - \alpha_0 < \lambda_0 < 1$. Тогда существует нетривиальное обобщенное решение однородного уравнения (2.11), удовлетворяющее условию (2.15). Таковым решением является функция

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \left(\ln \frac{eT}{t} \right)^{\alpha_0} |x|^{-1/2+\lambda_0} \cos \left[-\lambda_0 \theta \ln \ln \frac{eT}{t} + (1 - \alpha_0) \theta \ln |x| \right] \\ \text{при } \theta &= \left[\frac{2.25 + (\alpha_0 - 1)^2 - \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - (1 - \alpha_0)^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, теорема 1 не может быть существенно усилена.

2.5. Зависимость классов единственности от скорости роста коэффициентов. Покажем теперь, что при более сильных ограничениях на рост коэффициентов классы единственности расширяются.

Пусть наряду с предположениями предыдущего параграфа и п. 2.1 для некоторого $s \in [0, 2)$ выполняются неравенства $0 \leq A_k(t, x) \leq M_{10}\rho^{s/2}$, $k = 1, \dots, n$. Предположим также, что функции $a^{ij}\rho^{-s}$, $b^i\rho^{-s/2}$, $\rho^{s/2}\chi_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) непрерывны и ограничены в H . Рассмотрим квадратичную форму следующего вида, зависящую от параметров α, λ, s :

$$G_{\alpha, \lambda, s}(\xi, \eta, \zeta) \equiv F(\xi, \eta, \zeta) - \alpha\psi^1(t, x)(\sigma a^{ij}\xi_i\xi_j + \sigma\zeta^2 + 2\eta\zeta) + \left(\lambda\rho^{-1-s/2}x_ib^i - \alpha\frac{\varphi_1(t, x)}{\psi^0(t)}\right)\eta^2 - 2\lambda\rho^{-1-s/2}x_ja^{ij}\xi_i(\eta + \sigma\zeta).$$

Предположим, что положительные числа α, λ таковы, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$G(\xi, \eta, \zeta) \geq \mu_s(a^{ij}\xi_i\xi_j + \eta^2 + \zeta^2), \quad \text{где } \mu_s = \text{const} > 0$$

Для указанных значений α, λ рассмотрим класс функций $u(t, x)$, для которых

$$\iint_H \frac{1}{\psi^0(t)} \exp\left(-2\alpha \int_t^T \frac{ds}{\psi^0(s)} + \frac{4\lambda}{s-2}\rho^{-s/2+1}\right) \times (u^2 + (\psi u_t)^2 + (A_k(t, x)u_{x_k})^2) < \infty.$$

Обозначим его через $X_{\alpha, \lambda, s}(H)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть наряду с предположениями §1 и п. 2.1 выполняются указанные в данном пункте предположения. Тогда обобщенное решение $u(t, x)$ уравнения (2.1) единственно в классе $X_{\alpha, \lambda, s}(H)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только в качестве $v(t, x)$ берем функцию

$$v(t, x) = \frac{h\gamma^2\omega_s}{g'(g^{-1}(t))}(u + \sigma((\psi u)_\theta - \psi_t u)),$$

где

$$\omega_s(t, x) = (g^{-1}(t))^{2\alpha-1} \exp\left(\frac{4\lambda}{s-2}\rho^{-s/2+1}\right).$$

§3. Теоремы существования

3.1. Общий случай.

ТЕОРЕМА 3. Пусть наряду с условиями §1 и п. 2.1 выполняются следующие предположения:

- 1) существуют постоянные $m_k \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, n$, такие, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство: $m_k A_k^2 \xi_k^2 \leq a^{ij} \xi_i \xi_j \leq A_k^2 \xi_k^2$;
- 2) для любого D – ограниченного подмножества H – существует такая положительная постоянная m_D , что всюду в D выполняется неравенство $\varphi(t, x) \leq m_D \psi(t, x)$;
- 3) $(g^{-1}(t))^{\alpha-1/2} \rho^{-\lambda} f(t, x) \in L_2(H)$, где числа α, λ удовлетворяют условию теоремы 1;
- 4) $0 < \alpha < 1/2$;
- 5) функции $\varphi, \psi, a^{ij}, b^i, c \in C^{[n/2]+4}(H)$, $i, j = 1, \dots, n$;
- 6) функция $g'(\tau)$ ограничена на отрезке $[0, 1]$.

Тогда в слое H существует обобщенное решение уравнения (1.1), принадлежащее классу $X_{\alpha,\lambda}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо уравнения (1.1) рассмотрим последовательность регуляризованных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\psi^2 + \left(\frac{g'}{l} \right)^2 \right) u_{tt}^l + \left(\varphi + \frac{N}{l} g' + \frac{2}{l^2} g'' \right) u_t^l \\ - \left(\left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) u_{x_i}^l \right)_{x_j} + b^i u_{x_i}^l + c u^l = f^l \end{aligned} \quad (3.1)$$

в цилиндрах $\Pi_l = [2^{-l}T, T] \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq l\}$, $l = 1, 2, 3, \dots$,

$$N = \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sup_{[0,1]} |\psi_{1\tau}| + \left(\sup_{[0,1]} g'(\tau) \right)^2 + \left(\frac{8M_4}{\mu_1} + 2n \right) \lambda^2.$$

В уравнении (3.1) $\{f^l\}$ — последовательность финитных в H , бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль при $|x| \geq l$ и при $t \leq 2^{-l}T$, сходящаяся к функции f при $l \rightarrow \infty$ по норме пространства $L_{2,\text{loc}}(H)$. При этом для каждой из таких функций f_l справедлива оценка, аналогичная оценке для f :

$$\iint_H \frac{\omega(t, x)}{g'(g^{-1}(t))} (f^l)^2 dx dt \leq M_{11}, \quad \text{где } \omega(t, x) = (g^{-1}(t))^{2\alpha-1} \rho^{-2\lambda}.$$

Пусть $u^l(t, x)$ — классическое решение уравнения (3.1) в Π_l , удовлетворяющее условиям:

$$u^l(2^{-l}T, x) = u_t^l(2^{-l}T, x) = 0, \quad u^l(t, x) = 0 \quad \text{при } |x| = l. \quad (3.2)$$

Однозначная разрешимость задачи (3.1), (3.2) при каждом $l = 1, 2, 3, \dots$ доказана в работе [24].

Умножим обе части равенства (3.1) на функцию $\frac{\omega}{g'(g^{-1}(t))} (u^l + \sigma \psi u_t^l) + \omega \frac{1}{l} u_t^l$ и проинтегрируем полученное равенство по Π_l , преобразуя отдельные члены интегрированием по частям. При этом нам понадобятся следующие соотношения: $\psi_1 \frac{g''}{g'} = \psi_t - \psi_{1\tau}$, $\psi = \psi_1 g'$, $\psi_{1t} = \psi_{1\tau} \frac{1}{g'}$. В результате приходим к оценке

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_l} \frac{\omega}{g'(g^{-1}(t))} \left((u^l)^2 + (\psi u_t^l)^2 + m_k (A_k(t, x) u_{x_k}^l)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{l^2} (u_{x_k}^l)^2 + \frac{1}{l^2} (g' u_t^l)^2 \right) dx dt \leq M_{12}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из оценки (3.3) следует, что из последовательности $\{u^l\}$ можно выделить с помощью диагонального процесса подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), сходящуюся к u при $l \rightarrow \infty$ слабо в $L_{2,\text{loc}}(H)$. При этом $(\psi u^l)_t$, $(\varphi u^l)_t$, $(A_i u^l)_{x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) также слабо сходятся в $L_{2,\text{loc}}(H)$ к функциям $(\psi u)_t$, $(\varphi u)_t$, $(A_i u)_{x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) соответственно.

Докажем, что предельная функция $u(t, x)$ является обобщенным решением уравнения (1.1).

Средней функцией для $w(z)$, соответствующей вектору $\alpha \vec{e}_i$, назовем функцию

$$w_{\alpha \vec{e}_i}(z) \equiv \frac{1}{2\alpha} (w(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i + \alpha, z_{i+1}, \dots, z_d) - w(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i - \alpha, z_{i+1}, \dots, z_d)),$$

где α — достаточно малое положительное число, $\vec{e}_i$ — единичный координатный вектор.

Предположим теперь, что определена средняя функция $w_{\vec{\beta}'}(z)$, соответствующая вектору $\vec{\beta}'$, у которого k компонент отличны от нуля, а $d - k$ компонент равны нулю ($k \leq d - 1$). Пусть j -я компонента вектора $\vec{\beta}'$ равна нулю. Тогда средняя для $w(z)$ функция $w_{\vec{\beta}}(z)$, соответствующая вектору $\vec{\beta} = \vec{\beta}' + \beta_j \vec{e}_j$ определяется так:

$$w_{\vec{\beta}}(z) = \frac{1}{2\beta_j} (w_{\vec{\beta}'}(z + \beta_j \vec{e}_j) - w_{\vec{\beta}'}(z - \beta_j \vec{e}_j)).$$

Пусть $v(t, x)$ — финитная в H функция, обладающая свойствами, указанными в определении обобщенного решения. Рассмотрим функцию

$$V(t, x) = \int_0^t d\tau \int_0^{x_1} dy_1 \cdots \int_0^{x_n} v(\tau, y) dy_n,$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Обозначим через $(\tau, \vec{\mu})$ вектор из $\mathbb{R}^{n+1}$, у которого первая компонента равна τ , а остальные равны μ . Тогда средняя функция для $V(t, x)$, соответствующая этому вектору, имеет вид

$$V_{(\tau, \vec{\mu})}(t, x) = \frac{1}{2^{n+1} \tau \mu^n} \int_{t-\tau}^{t+\tau} ds \int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v(s, y) dy_n.$$

Пусть, как и в п. 2.3, $v_{\beta}(t, y) \equiv \frac{1}{2\beta} (v(t + \beta, y) - v(t - \beta, y))$. Заметим, что

$$\begin{aligned} (V_{(\beta, \vec{\mu})}(t, x))_t &= \frac{1}{(2\mu)^n} \int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_{\beta}(t, y) dy_n, \\ (V_{(\beta, \vec{\mu})}(t, x))_{x_j} &= \frac{1}{2^n \mu^{n-1} \beta} \int_{t-\beta}^{t+\beta} ds \int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \\ &\quad \cdots \int_{x_{j-1}-\mu}^{x_{j-1}+\mu} dy_{j-1} \int_{x_{j+1}-\mu}^{x_{j+1}+\mu} dy_{j+1} \\ &\quad \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_{\mu} \vec{e}_j(s, y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) dy_n, \\ &\quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

При достаточно малых положительных значениях β , μ функция $V_{(\beta, \vec{\mu})}(t, x)$ обращается в нуль вне некоторого компакта D , содержащегося внутри H .

Пусть l настолько велико, что D целиком содержится внутри цилиндра Π_l . Умножим обе части равенства (3.1) на $V_{(\beta, \vec{\mu})}(t, x)$ и проинтегрируем полученное выражение по Π_l . Отдельные слагаемые в полученном равенстве преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_l} \left(\psi^2 + \left(\frac{g'}{l} \right)^2 \right) u_{tt}^l V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt + \iint_{\Pi_l} \frac{2}{l^2} g'' u_t^l V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt \\ &= - \iint_{\Pi_l} \psi u_t^l \psi \frac{1}{(2\mu)^n} \left(\int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\beta(t, y) dy_n \right) dx dt \\ & \quad - 2 \iint_{\Pi_l} \psi u_t^l \psi_t V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt \\ & \quad - \iint_{\Pi_l} \left(\frac{g'}{l} \right)^2 u_t^l \frac{1}{(2\mu)^n} \left(\int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\beta(t, y) dy_n \right) dx dt; \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_l} \frac{N}{l} g' u_t^l V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt = - \iint_{\Pi_l} \frac{N}{l} \frac{g''}{g'} u^l V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt \\ & \quad - \iint_{\Pi_l} \frac{N}{l} g' u^l \frac{1}{(2\mu)^n} \left(\int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\beta(t, y) dy_n \right) dx dt; \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Pi_l} \left(\left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) u_{x_i}^l \right)_{x_j} V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt = \int_{\Pi_l} \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) u_{x_i}^l \frac{1}{2^n \beta \mu^{n-1}} \\ & \quad \times \left(\int_{t-\beta}^{t+\beta} ds \int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_{j-1}-\mu}^{x_{j-1}+\mu} dy_{j-1} \int_{x_{j+1}-\mu}^{x_{j+1}+\mu} dy_{j+1} \right. \\ & \quad \left. \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\mu \tilde{e}_j(s, y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) dy_n \right) dx dt. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Учитывая формулы (3.4)–(3.6), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & \iint_D a^{ij} u_{x_i}^l \frac{1}{2^n \beta \mu^{n-1}} \left(\int_{t-\beta}^{t+\beta} ds \int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_{j-1}-\mu}^{x_{j-1}+\mu} dy_{j-1} \right. \\ & \quad \left. \times \int_{x_{j+1}-\mu}^{x_{j+1}+\mu} dy_{j+1} \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\mu \tilde{e}_j(s, y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) dy_n \right) dx dt \\ & + \iint_D b^i u_{x_i}^l V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt + \iint_D (cu^l - f^l) V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt + \iint_D \varphi u_t^l V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt \\ & - \iint_D \psi u_t^l \psi \frac{1}{\mu^n} \left(\int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\beta(t, y) dy_n + 2\psi_t V_{(\beta, \vec{\mu})} \right) dx dt \\ & - \iint_D \frac{N}{l} \frac{g''}{g'} u^l V_{(\beta, \vec{\mu})} dx dt - \iint_D \frac{N}{l} g' u^l \frac{1}{(2\mu)^n} \\ & \quad \times \left(\int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\beta(t, y) dy_n \right) dx dt \\ & - \iint_D \left(\frac{g'}{l} \right)^2 u_t^l \frac{1}{(2\mu)^n} \left(\int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\beta(t, y) dy_n \right) dx dt \\ & + \frac{1}{l^2} \iint_D u_{x_i}^l \frac{1}{2^n \beta \mu^{n-1}} \left(\int_{t-\beta}^{t+\beta} ds \int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} dy_1 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdots \int_{x_{i-1}-\mu}^{x_{i-1}+\mu} dy_{i-1} \int_{x_{i+1}-\mu}^{x_{i+1}+\mu} dy_{i+1} \\ & \cdots \int_{x_n-\mu}^{x_n+\mu} v_\mu \varepsilon_i(s, y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) dy_n \Big) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В равенстве (3.7) перейдем к пределу сначала при $l \rightarrow \infty$, затем при $\beta, \mu \rightarrow 0$. В результате получим тождество (2.8). То есть функция $u(x, t)$ действительно является обобщенным решением уравнения (1.1), согласно определению. Принадлежность $u(x, t)$ классу $X_{\alpha, \lambda}(H)$ следует из неравенства (3.3).

3.2. Уравнение с коэффициентами более медленного роста.

ТЕОРЕМА 4. Пусть наряду с предположениями теоремы 3 выполняются условия теоремы 2 и $(g^{-1}(t))^{\alpha-1/2} \exp \left\{ \frac{2\lambda}{s-2} \rho^{-s/2+1} \right\} f \in L_2(H)$. Тогда в слое H существует обобщенное решение уравнения (1.1) из класса $X_{\alpha, \lambda, s}(H)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, только функция $\omega(t, x)$ заменяется на $\omega_s(t, x) = (g^{-1}(t))^{2\alpha-1} \exp \left\{ \frac{4\lambda}{s-2} \rho^{-s/2+1} \right\}$.

§ 4. Дифференциальные свойства обобщенных решений

4.1. Основные обозначения и предположения. Предположим, что функции $\varphi, \psi, a^{ij}, b^i$, s принадлежат классу $C^{[n/2]+1+s_1}(H)$, s_1 — некоторое натуральное число, большее или равное 2. Предположим также, что $f \in W_{2, \text{loc}}^{[n/2]-1+s_1}(H)$.

Пусть справедливы следующие условия:

$$0 \leq m\psi \leq \varphi \leq \tilde{m}\psi \leq Kt, \quad K > 0, \quad m > 0, \quad \tilde{m} > 0 \quad - \text{постоянные}; \quad (4.1)$$

$$m_k A_k^2(t, x) \xi_k^2 \leq a^{ij}(t, x) \xi_i \xi_j, \quad 0 < m_k < 1, \quad k = 1, \dots, n; \quad (4.2)$$

$$0 \leq A_k(x) \leq M_{13}\rho, \quad A_{kx_k} \in L_{\infty, \text{loc}}(H). \quad (4.3)$$

Здесь, как и прежде, $A_k(t, x) = \sqrt{a^{kk}(t, x)}$.

Введем следующие обозначения:

$$D^\beta F \equiv \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n} F}{\partial x_n^{\beta_n}}; \quad (A^\varepsilon)^\beta \equiv (A_1 + \varepsilon)^{\beta_1} \cdots (A_n + \varepsilon)^{\beta_n},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс, т.е. n -мерный вектор с целочисленными неотрицательными координатами, ε — любое достаточно малое положительное число. Пусть e_i — n -мерный вектор, у которого i -я координата равна единице, а остальные — нулю. Мультииндексы β и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ связаны соотношением $\beta \leq \gamma$, если $\beta_i \leq \gamma_i, i = 1, \dots, n$. Пусть справедливо условие (2.6).

Предположим, что $D^\beta \psi = \chi_\beta \psi$, $D^\beta \varphi = \tilde{\chi}_\beta \psi$ ($|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n \leq s_1$), где функции $\chi_\beta(t, x)$, $\tilde{\chi}_\beta(t, x)$ непрерывны и ограничены в H .

Будем предполагать непрерывность и ограниченность в H следующих функций при $|\beta| \leq s_1$:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & (A^\varepsilon)^\beta \chi_\beta; \quad \text{б)} \quad (A^\varepsilon)^\beta \tilde{\chi}_\beta; \quad \text{в)} \quad (A^\varepsilon)^{\beta-e_i-e_j} (\psi + \varepsilon)^p \frac{\partial^p}{\partial t^p} D^\beta a^{ij}; \\ \text{г)} \quad & (A^\varepsilon)^\beta (\psi + \varepsilon)^{p-2} D^\beta \frac{\partial^p}{\partial t^p} \psi^2, \quad p + |\beta| \leq s_1; \quad \text{д)} \quad (A^\varepsilon)^\beta (\psi + \varepsilon)^{p-1} D^\beta \frac{\partial^p}{\partial t^p} \varphi; \\ \text{е)} \quad & (A^\varepsilon)^{\beta-e_i} (\psi + \varepsilon)^p D^\beta \frac{\partial^p}{\partial t^p} (b^i - a_{x_j}^{ij}); \quad \text{ж)} \quad (A^\varepsilon)^\beta (\psi + \varepsilon)^p D^\beta \frac{\partial^p c}{\partial t^p}; \\ \text{з)} \quad & (A^\varepsilon)^{e_j-e_k} (A_k)_{x_j}, \quad k = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n; \\ \text{и)} \quad & D^\beta (A^\varepsilon)^\nu (A^\varepsilon)^{\beta-\nu}, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n). \end{aligned}$$

Далее, любому мультииндексу $\nu, \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $|\nu| = s_2 \leq s_1$, поставим в соответствие $(n+2)$ -мерный вектор $\{\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu\}$.

Введем следующую квадратичную форму от $n+2$ переменных

$$\begin{aligned} F_{s_2}^\varepsilon(\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) \equiv & \left[1 - \frac{\sigma}{2} \left(\psi_t - \frac{\psi}{t} \right) \right] (a^{ij} + \delta_{ij} \varepsilon^2) \xi_i^\nu \xi_j^\nu - \frac{1}{2} \sigma \psi a_t^{ij} \xi_i^\nu \xi_j^\nu \\ & + \left[c - \frac{1}{2} \left(b_{x_i}^i + \varphi_t - \frac{\varphi}{t} \right) \right] (\eta^\nu)^2 + \left[\sigma \left(m - \frac{3}{2} \psi_t + \frac{\psi}{t} \right) - 1 \right] (\zeta^\nu)^2 \\ & + \sigma [b^i + \chi_{e_j} (a^{ij} + \delta_{ij} \varepsilon^2)] \xi_i^\nu \zeta^\nu + \left(\sigma c - 2\psi_t + \frac{\psi}{t} \right) \eta^\nu \zeta^\nu \\ & + (A^\varepsilon)^{-2\nu} ((A^\varepsilon)^{2\nu})_{x_j} (a^{ij} + \delta_{ij} \varepsilon^2) \xi_i^\nu (\eta^\nu + \sigma \zeta^\nu) - \frac{1}{2} (A^\varepsilon)^{-2\nu} ((A^\varepsilon)^{2\nu})_{x_i} b_i (\eta^\nu)^2 \\ & + C_{\nu, e_k} (A^\varepsilon)^{e_k-e_i} \frac{(\psi^2)_{x_k}}{\psi^2 + \varepsilon^2} (a^{ij} + \delta_{ij} \varepsilon^2) \xi_j^{\nu-e_k+e_i} \sigma \zeta^\nu. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем суммирование по повторяющимся индексам i, j , мультииндексам ν ($|\nu| = s_2$), e_k ($e_k \leq \nu$). Через $C_{\nu, \gamma}$ (ν, γ — мультииндексы) обозначены числовые множители, возникающие при дифференцировании произведения двух функций:

$$D^\nu (F_1 \cdot F_2) = \sum_{\gamma \leq \nu} C_{\nu, \gamma} D^\gamma (F_1) D^{\nu-\gamma} (F_2).$$

Будем считать, что при всех достаточно малых положительных ε , некотором $\sigma > m^{-1}$ и для любого набора действительных чисел $\{\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu\}$, $|\nu| = s_2$, выполняется неравенство

$$F_{s_2}^\varepsilon(\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) \geq \mu_{s_2} [((A_i + \varepsilon) \xi_i^\nu)^2 + (\eta^\nu)^2 + (\zeta^\nu)^2], \quad \mu_{s_2} = \text{const} > 0. \quad (4.4)$$

Можно показать, что неравенство (4.4) выполняется, например, в том случае, когда числа $c_0 = \inf_H c(t, x)$ и m положительны и достаточно велики.

Рассмотрим еще одну квадратичную форму, зависящую от параметров α, λ :

$$\begin{aligned} G_{\alpha, \lambda}^{\varepsilon, |\nu|}(\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) \equiv & F_{|\nu|}^\varepsilon(\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) \\ & - \alpha \frac{\psi}{t} (\sigma (a^{ij} + \delta_{ij} \varepsilon^2) \xi_i^\nu \xi_j^\nu + \sigma (\zeta^\nu)^2 + 2\eta^\nu \zeta^\nu) \\ & + \left(\lambda \rho^{-2} x_i b^i - \alpha \frac{\varphi}{t} \right) (\eta^\nu)^2 \\ & - 2\lambda \rho^{-2} x_j (a^{ij} + \varepsilon^2 \delta_{ij}) \xi_i^\nu (\eta^\nu + \sigma \zeta^\nu). \end{aligned}$$

Далее, будем рассматривать такие числа $\alpha > 0$ и $\lambda \in (0, 1/2)$, что при всех достаточно малых положительных ε и при всех ν , $|\nu| \leq s_1$, имеет место неравенство

$$G_{\alpha, \lambda}^{\varepsilon, |\nu|}(\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) \geq \tilde{\mu}_{|\nu|}((A_i + \varepsilon)^2(\xi_i^\nu)^2 + (\eta^\nu)^2 + (\zeta^\nu)^2), \quad \tilde{\mu}_{|\nu|} = \text{const} > 0. \quad (4.5)$$

Можно показать, что вследствие выполнения неравенства (4.4) найдутся такие числа α_0, λ_0 , что при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$ справедливо (4.5).

Пусть весовая функция $\omega(t, x) \equiv t^{2\alpha-1}\rho^{-2\lambda}$. Будем рассматривать указанные выше значения λ и α . Совокупность функций, для которых

$$\iint_H \omega \left(\psi^k A^\nu D^\nu \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right)^2 dx dt < \infty, \quad k + |\nu| \leq s_1,$$

назовем *классом* $Z_{\alpha, \lambda, s_1}(H)$.

4.2. Общая теорема о повышении гладкости.

ТЕОРЕМА 5. Пусть справедливы все предположения п. 4.1, а функция f такова, что при всех достаточно малых положительных ε

$$\iint_H \omega \left((\psi + \varepsilon)^k (A^\varepsilon)^\nu D^\nu \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right)^2 dx dt < \infty,$$

где $k + |\nu| \leq s_1$, $k \leq s_1 - 2$. Тогда обобщенное решение уравнения (1.1) принадлежит классу $Z_{\alpha, \lambda, s_1}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f^l(t, x)\}$ — бесконечная сходящаяся к функции $f(t, x)$ в $L_{2, \text{loc}}(H)$ последовательность функций, каждая из которых принадлежит классу $C_0^\infty(H)$, обращающихся в нуль при $|x| \geq l$ и при $t \leq 2^{-l}T$. При этом

$$\iint_H \omega \left((\psi + \varepsilon)^k (A^\varepsilon)^\nu D^\nu \frac{\partial^k f^l}{\partial t^k} \right)^2 dx dt \leq M_{14}, \quad k + |\nu| \leq s_1. \quad (4.6)$$

Уравнение (3.1) здесь принимает вид

$$\left(\psi^2 + \frac{1}{l^2} \right) u_{tt}^l + \left(\varphi + \frac{N_1}{l} \right) u_t^l - \left(\left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) u_{x_i}^l \right)_{x_j} + b^i u_{x_i}^l + cu^l = f^l. \quad (4.7)$$

Здесь N_1 — некоторая достаточно большая постоянная, которую мы укажем позднее.

Пусть $u^l(t, x)$ – решение смешанной задачи для уравнения (4.7) в Π_l с условиями (3.2).

Заметим, что для функции $u^l(t, x)$ справедлива оценка (3.3), из которой следует, что

$$\iint_H \omega \left(\left(A_k + \frac{1}{l} \right)^2 (u_{x_k}^l)^2 + \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^2 (u_t^l)^2 + (u^l)^2 \right) dx dt \leq M_{15}. \quad (4.8)$$

Далее, докажем справедливость следующей оценки:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_l} \left(((A^{1/l})^\nu D^\nu u_{x_j}^l)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left((A^{1/l})^\nu \left(\psi + \frac{1}{l} \right) D^\nu u_t^l \right)^2 + ((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l)^2 \right) dx dt \leq M_{16}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

проведя индукцию по $|\nu|$. При $|\nu| = 0$ оценка (4.9) превращается в (4.8) и, значит, справедлива. Далее, предполагая, что оценка (4.9) верна при $|\nu| \leq k \leq s_1 - 2$, докажем, что она выполняется и при $|\nu| = k + 1$. Применим к обоим частям равенства (4.7) оператор $(A^{1/l})^\nu D^\nu$, выделяя при дифференцировании произведений слагаемые, содержащие производные от u^l максимального порядка. Умножим обе части полученного равенства на функцию

$$\omega \left((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l + \sigma \psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l + \frac{1}{l} (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l \right).$$

Проинтегрируем полученное равенство по Π_l и преобразуем интегралы, соответствующие выделенным слагаемым, интегрированием по частям аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы существования. Обозначим через $\int_{t=t_0} f_1 dx$ интеграл по сечению $\Pi_l \cap \{t = t_0\}$ от функции $f_1(t, x)$. В результате приходим в следующем соотношении:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t=2^{-l}T} \omega \left((\psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 \sigma \psi + 2\psi (\psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l) (A^{1/l})^\nu D^\nu u^l \right. \\ & \quad \left. + \varphi ((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l) + \sigma \psi \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u_{x_i}^l D^\nu u_{x_j}^l \right) dx \\ & \quad + \iint_{\Pi_l} \omega \left(1 - \frac{\sigma}{2} \left(\psi_t - \frac{\psi}{t} \right) \right) \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u_{x_i}^l D^\nu u_{x_j}^l dx dt \\ & \quad - \frac{\sigma}{2} \iint_{\Pi_l} \omega \psi a_t^{ij} (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u_{x_i}^l D^\nu u_{x_j}^l dx dt \\ & \quad + \iint_{\Pi_l} \omega \left(c - \frac{1}{2} \left(b_{x_i}^i + \varphi_t - \frac{\varphi}{t} \right) \right) ((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt \\ & \quad + \iint_{\Pi_l} \omega \left(\sigma \left(m - \frac{3}{2} \psi_t + \frac{\psi}{2t} \right) - 1 \right) (\psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt \\ & \quad + \iint_{\Pi_l} \omega \sigma (b^i + \chi_{e_j} \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u_{x_i}^l \psi D^\nu u_t^l dx dt \\ & \quad + \iint_{\Pi_l} \omega \left(\sigma c - 2\psi_t + \frac{\psi}{t} \right) (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u^l \psi D^\nu u_t^l dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Pi_l} \omega \left(((A^{1/l})^{2\nu})_{x_j} \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) D^\nu u_{x_i}^l \left(D^\nu u^l + \left(\sigma\psi + \frac{1}{l} \right) D^\nu u_t^l \right) \right. \\
& - \frac{1}{2} ((A^{1/l})^{2\nu})_{x_i} b_i (D^\nu u^l)^2 \Big) dx dt \\
& - \alpha \iint_{\Pi_l} \omega \frac{\psi}{t} \left(\sigma \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u_{x_i}^l D^\nu u_{x_j}^l + \sigma (\psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 \right. \\
& + 2(A^{1/l})^\nu D^\nu u^l \psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l \Big) dx dt \\
& + \iint_{\Pi_l} \omega \left(\lambda \rho^{-2} x_i b^i - \alpha \frac{\varphi}{t} \right) ((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l)^2 dx dt \\
& - \iint_{\Pi_l} \omega \cdot 2\lambda \rho^{-2} x_j \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) (A^{1/l})^\nu D^\nu u_{x_i}^l \\
& \times ((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l + \sigma \psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l) dx dt \\
& + \iint_{\Pi_l} \frac{1}{l^2} \omega ((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 \left(N_1 - 1 - \frac{\sigma}{2} \psi + (1 - 2\alpha) \frac{\sigma \psi}{2t} \right) dx dt \\
& + \iint_{\Pi_l} \frac{1}{2l} \omega \left(\frac{1 - 2\alpha}{t} \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) - a_t^{ij} \right) (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u_{x_i}^l D^\nu u_{x_j}^l dx dt \\
& + \iint_{\Pi_l} \frac{1}{l} \omega (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l (b^i - 2\lambda \rho^{-2} x_j a^{ij}) (A^{1/l})^\nu D^\nu u_{x_i}^l \\
& + c(A^{1/l})^\nu D^\nu u^l) dx dt \\
& + \iint_{\Pi_l} \frac{1}{l} \omega ((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 \left(N_1 \sigma \psi - \psi \psi_t + (1 - 2\alpha) \frac{\psi^2}{2t} + \varphi \right) dx dt \\
& + \int_{t=2^{-l}T} \frac{1}{2l} \omega \left(a^{ij} (A^{1/l})^{2\nu} D^\nu u_{x_i}^l D^\nu u_{x_j}^l + \psi \left(\psi + \frac{\sigma}{l} \right) ((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 \right. \\
& + (N_1 - 1) (A^{1/l})^{2\nu} \left(D^\nu u^l + \frac{1}{l} D^\nu u_t^l \right)^2 \Big) dx \\
& + \sum_{|\beta| > 0, \beta \leq \nu} C_{\nu, \beta} \iint_{\Pi_l} (A^{1/l})^\nu (D^\beta \psi^2 D^{\nu-\beta} u_{tt}^l + D^\beta \varphi D^{\nu-\beta} u_t^l \\
& - (D^\beta a^{ij} D^{\nu-\beta} u_{x_i}^l)_{x_j} + D^\beta b^i D^{\nu-\beta} u_{x_i}^l + D^\beta c D^{\nu-\beta} u^l) \\
& \times \omega (A^{1/l})^\nu \left(D^\nu u^l + \left(\sigma\psi + \frac{1}{l} \right) D^\nu u_t^l \right) dx dt \\
& \leq \frac{\tilde{\mu}_{k+1}}{2} \iint_{\Pi_l} \omega ((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l)^2 dx dt + \frac{\tilde{\mu}_{k+1}}{2} \iint_{\Pi_l} \omega (\psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt \\
& + \frac{1 + \sigma^2}{2\tilde{\mu}_{k+1}} \iint_{\Pi_l} \omega ((A^{1/l})^\nu D^\nu f^l)^2 dx dt + \iint_{\Pi_l} \frac{1}{l^2} \omega ((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt \\
& + \frac{1}{4} \iint_{\Pi_l} \omega ((A^{1/l})^\nu D^\nu f^l)^2 dx dt. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Добавив к сумме интегралов со второго по десятый в левой части (4.10) вспомогательный интеграл, запишем итоговую сумму в виде одного выражения, допуска-

ющего следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_l} \omega G_{\alpha, \lambda}^{1/l, |\nu|} ((A^{1/l})^\nu D^\nu u_{x_1}^l, \dots, \\ & (A^{1/l})^\nu D^\nu u_{x_n}^l, (A^{1/l})^\nu D^\nu u^l, \psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l) dx dt \\ & \geq \tilde{\mu}_{k+1} \iint_{\Pi_l} \omega \left(((A^{1/l})^{\nu+e_j} D^\nu u_{x_j}^l)^2 \right. \\ & \quad \left. + ((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l)^2 + (\psi (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Заметим, что оставшиеся интегралы в левой части неравенства (4.10), кроме некоторых интегралов, входящих в сумму вида:

$$\sum_{|\beta| > 0, \beta \leq \nu} C_{\nu, \beta} \iint_{\Pi_l} \dots dx dt,$$

либо неотрицательны, либо содержат сколь угодно малые множители вида $\frac{1}{l}, \frac{1}{l^2}$, либо оцениваются по предположению индукции. В указанную сумму вместо слагаемого $(A^{1/l})^\nu D^\beta \psi^2 D^{\nu-\beta} u_{tt}^l$ подставим следующее выражение, полученное с помощью формулы (4.7):

$$\begin{aligned} (A^{1/l})^\nu D^\beta \psi^2 D^{\nu-\beta} u_{tt}^l &= (A^{1/l})^\nu D^\beta \psi^2 D^{\nu-\beta} \frac{f^l}{\psi^2 + 1/l^2} + (A^{1/l})^\nu D^\beta \psi^2 \\ &\times \sum_{\nu' \leq \nu-\beta} C_{\nu-\beta, \nu'} \left(-D^{\nu'} \frac{\varphi + N_1/l}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-\beta-\nu'} u_t^l + D^{\nu'} \frac{a^{ij} + \delta_{ij}/l^2}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-\beta-\nu'} u_{x_i x_j}^l \right. \\ &\left. + D^{\nu'} \frac{a_{x_j}^{ij} - b^i}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-\beta-\nu'} u_{x_i}^l - D^{\nu'} \frac{c}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-\beta-\nu'} u^l \right). \end{aligned}$$

Напишем оценки для интегралов, которые еще не оценены после предыдущего шага индукции, полученных в результате такой подстановки, применяя, если потребуется, интегрирование по частям. Для $\beta = e_k, \nu' = 0$ получим

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\Pi_l} \omega (A^{1/l})^\nu \frac{a^{ij} + \delta_{ij}/l^2}{\psi^2 + 1/l^2} (\psi^2)_{x_k} D^{\nu-e_k+e_i+e_j} u^l (A^{1/l})^\nu D^\nu u^l dx dt \right| \\ & \leq \frac{1}{N_2} \tilde{\mu}_{k+1} \sum_{\nu_1=k+1} \iint_{\Pi_l} (\omega (A^{1/l})^{\nu_1} D^{\nu_1} u^l)^2 dx dt \\ & \quad + M_{17} \iint_{\Pi_l} \omega ((A^{1/l})^\nu D^\nu u^l)^2 dx dt, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где N_2 – некоторое достаточно большое число, которое будет выбрано позже;

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Pi_l} \omega(A^{1/l})^\nu \frac{a^{ij} + \delta_{ij}/l^2}{\psi^2 + 1/l^2} (\psi^2)_{x_k} D^{\nu-e_k+e_j+e_i} u^l (A^{1/l})^\nu \left(\sigma\psi + \frac{1}{l} \right) D^\nu u_t^l dx dt \\
& \geq \iint_{\Pi_l} \omega(A^{1/l})^{e_k-e_i} \frac{(\psi^2)_{x_k}}{\psi^2 + 1/l^2} \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) \\
& \quad \times (A^{1/l})^{\nu-e_k+e_i} D^{\nu-e_k+e_i} u_{x_j}^l (A^{1/l})^\nu \sigma\psi D^\nu u_t^l dx dt \\
& \quad - \frac{\tilde{\mu}_{k+1}}{N_2} \sum_{|\nu_1|=k+1} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^{\nu_1} D^{\nu_1} u^l)^2 dx dt \\
& \quad - \frac{M_{18}}{l^2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Для $|\beta| = 2$ имеем

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Pi_l} \omega(A^{1/l})^\nu D^\beta \psi^2 \frac{a^{ij} + \delta_{ij}/l^2}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-\beta+e_i+e_j} u^l (A^{1/l})^\nu \sigma\psi D^\nu u_t^l dx dt \\
& \quad + \iint_{\Pi_l} \omega(A^{1/l})^\nu D^\beta \psi^2 \frac{a^{ij} + \delta_{ij}/l^2}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-\beta+e_i+e_j} u^l \frac{1}{l} (A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l \\
& \geq - \iint_{\Pi_l} \omega(A^{1/l})^\nu D^\beta \psi^2 \frac{a^{ij} + \delta_{ij}/l^2}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-\beta+e_i+e_j+e_k} u^l (A^{1/l})^\nu \\
& \quad \times \sigma\psi D^{\nu-e_k} u_t^l dx dt - M_{19} \\
& \quad - \frac{1}{l^2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Pi_l} (A^{1/l})^\nu (\psi^2)_{x_k} \frac{a_{x_j}^{ij} - b^i}{\psi^2 + 1/l^2} D^{\nu-e_k+e_i} u^l \omega(A^{1/l})^\nu \left(\sigma\psi + \frac{1}{l} \right) D^\nu u_t^l \\
& \geq - \frac{\tilde{\mu}_{k+1}}{N_2} \sum_{|\nu_1|=k+2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^{\nu_1} D^{\nu_1} u^l)^2 dx dt - M_{20} \\
& \quad - \frac{1}{l^2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt \quad (\beta = e_k),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Pi_l} \omega(A^{1/l})^{2\nu} D^\beta (a^{ij}) D^{\nu-\beta+e_i+e_j} u^l \left(\sigma\psi + \frac{1}{l} \right) D^\nu u_t^l dx dt \\
& \geq - \frac{\tilde{\mu}_{k+1}}{N_2} \sum_{|\nu_1|=k+2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^{\nu_1} D^{\nu_1} u^l)^2 dx dt - M_{21} \\
& \quad - \frac{M_{22}}{l^2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt \quad (|\beta| = 2),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Pi_l} \omega(A^{1/l})^{2\nu} (b_{x_k}^i - a_{x_j x_k}^{ij}) D^{\nu-e_k+e_i} u^l \left(\sigma\psi + \frac{1}{l} \right) D^\nu u_t^l dx dt \\
& \geq - \frac{\tilde{\mu}_{k+1}}{N_2} \sum_{|\nu_1|=k+2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^{\nu_1} D^{\nu_1} u^l)^2 dx dt - M_{23} \\
& \quad - \frac{1}{l^2} \iint_{\Pi_l} \omega((A^{1/l})^\nu D^\nu u_t^l)^2 dx dt \quad (\beta = e_k).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Исходя из формул (4.10)–(4.16), выбираем числа N_1, N_2 таким образом, чтобы выполнялось неравенство (4.9) при всех достаточно больших l .

Докажем теперь справедливость оценки

$$\iint_{\mathbb{C}_l} \omega \left(\left(\psi + \frac{1}{l} \right)^k (A^{1/l})^\nu D^\nu \frac{\partial^k u^l}{\partial t^k} \right)^2 dx dt \leq M_{24}, \quad k + |\nu| \leq s_1. \quad (4.17)$$

В самом деле, при $k = 0, 1$ оценка (4.17) является следствием оценки (4.9). Если $|\nu| = 0$, то справедливость (4.17) для любого $k, 2 \leq k \leq s_1$, доказывается индукцией по k с помощью применения к обеим частям равенства (4.7) оператора

$\left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}}$. Предположим, что (4.17) верно при $k \leq s_3 - 1, k + |\nu| \leq s_1$ и докажем, что (4.17) справедливо при $k = s_3, k + |\nu| \leq s_1$.

Применив оператор $\left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} (A^{1/l})^\nu D^\nu \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}}$ к обеим частям тождества (4.7), получим

$$\begin{aligned} & \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} \left(\psi^2 + \frac{1}{l^2} \right) (A^{1/l})^\nu D^\nu \frac{\partial^k u^l}{\partial t^k} \\ &= - \sum_{|\beta| > 0, \beta \leq \nu} C_{\nu, \beta} (A^{1/l})^\nu \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} D^\beta \psi^2 D^{\nu-\beta} \frac{\partial^k u^l}{\partial t^k} \\ & \quad - \sum_{p=1}^{k-2} C_{k-2}^p \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} \frac{\partial^p \psi^2}{\partial t^p} (A^{1/l})^\nu D^\nu \frac{\partial^{k-p} u^l}{\partial t^{k-p}} \\ & \quad - \sum_{|\beta| > 0, \beta \leq \nu} C_{\nu, \beta} (A^{1/l})^\nu \sum_{p=0}^{k-2} C_{k-2}^p \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} \left(D^\beta \frac{\partial^p \varphi}{\partial t^p} D^{\nu-\beta} \frac{\partial^{k-p-1} u^l}{\partial t^{k-p-1}} \right. \\ & \quad + D^\beta \frac{\partial^p a^{ij}}{\partial t^p} D^{\nu-\beta+e_i+e_j} \frac{\partial^{k-2-p} u^l}{\partial t^{k-2-p}} - D^\beta \frac{\partial^p}{\partial t^p} (b^i - a_{x_j}^{ij}) \frac{\partial^{k-2-p}}{\partial t^{k-2-p}} D^{\nu-\beta+e_i} u^l \\ & \quad \left. - D^\beta \frac{\partial^p c}{\partial t^p} D^{\nu-\beta} \frac{\partial^{k-2-p} u^l}{\partial t^{k-2-p}} \right) \\ & \quad - \sum_{|\beta| > 0, \beta \leq \nu} C_{\nu, \beta} (A^{1/l})^\nu \sum_{p=1}^{k-2} C_{k-2}^p \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} D^\beta \frac{\partial^p \psi^2}{\partial t^p} D^{\nu-\beta} \frac{\partial^{k-p} u^l}{\partial t^{k-p}} \\ & \quad + \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} (A^{1/l})^\nu D^\nu \frac{\partial^{k-2} f^l}{\partial t^{k-2}} \\ & \quad - \sum_{p=0}^{k-2} C_{k-2}^p \left(\psi + \frac{1}{l} \right)^{k-2} (A^{1/l})^\nu \left(\frac{\partial^p}{\partial t^p} \left(\varphi + \frac{1}{l} \right) D^\nu \frac{\partial^{k-p-1} u^l}{\partial t^{k-p-1}} \right. \\ & \quad + \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left(a^{ij} + \frac{\delta_{ij}}{l^2} \right) D^{\nu+e_i+e_j} \frac{\partial^{k-2-p} u^l}{\partial t^{k-2-p}} \\ & \quad \left. - \frac{\partial^p}{\partial t^p} (b^i - a_{x_j}^{ij}) D^{\nu+e_i} \frac{\partial^{k-2-p} u^l}{\partial t^{k-2-p}} - \frac{\partial^p c}{\partial t^p} D^\nu \frac{\partial^{k-2-p} u^l}{\partial t^{k-2-p}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким образом, левую часть (4.18) можно представить в виде суммы произведений ограниченных функций на

$$\left(\psi + \frac{1}{l} \right)^k (A^{1/l})^{\nu'} D^{\nu'} \frac{\partial^k u^l}{\partial t^k}$$

или на

$$\left(\psi + \frac{1}{l}\right)^{k-p} (A^{1/l})^{\nu_1} D^{\nu_1} \frac{\partial^{k-p} u^l}{\partial t^{k-p}} \quad (p \geq 1, \quad |\nu'| < |\nu|, \quad |\nu_1| \leq |\nu| + p)$$

и слагаемых вида: $\left(\psi + \frac{1}{l}\right)^{k-2} (A^{1/l})^\nu D^\nu \frac{\partial^{k-2} f^l}{\partial t^{k-2}}$. Следовательно, (4.17) справедливо.

Из последовательности $\{u^l\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_{2,\text{loc}}(H)$ к некоторой функции $u(t, x) \in X_{\alpha, \lambda}(H)$, являющейся обобщенным решением уравнения (1.1).

Поскольку из (4.17), в частности, вытекает оценка

$$\iint_{\mathbb{C}_l} \omega \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\nu \left(\left(\psi + \frac{1}{l} \right)^k (A^{1/l})^\nu u^l \right) \right)^2 dx dt < M_{28}, \quad k + |\nu| \leq s_1, \quad (4.19)$$

то из последовательности

$$\left\{ \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\nu \left(\left(\psi + \frac{1}{l} \right)^k (A^{1/l})^\nu u^l \right) \right\}$$

можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_{2,\text{loc}}(H)$ к функции $\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\nu (\psi^k A^\nu u)$. Таким образом, получаем, что $u(t, x) \in Z_{\alpha, \lambda, s_1}(H)$.

Используя теорему вложения С. Л. Соболева [25], получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены предположения теоремы 5 и $s_1 \geq [n/2] + 3$. Тогда $(\psi(t, x) A_1(t, x) \cdots A_n(t, x))^{s_1} u(t, x) \in C^2(H)$.

4.3. Случай коэффициентов более медленного роста. Пусть

$$0 \leq A_k(t, x) \leq M_{29} \rho^{s/2}, \quad (4.20)$$

а числа $\lambda > 0$ и $\alpha \in (0, 1/2]$ таковы, что для любого набора действительных чисел $\{\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu\}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_{\alpha, \lambda}^{\varepsilon, |\nu|}(\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) \\ & \equiv F_{|\nu|}^\varepsilon(\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) - \alpha \frac{\psi}{t} (\sigma(a^{ij} + \delta_{ij} \varepsilon^2) \xi_i^\nu \xi_j^\nu \\ & \quad + \sigma(\zeta^\nu)^2 + 2\eta^\nu \zeta^\nu) + \left(\lambda \rho^{-s/2-1} x_i b^i - \alpha \frac{\varphi}{t} \right) (\eta^\nu)^2 \\ & \quad - 2\lambda \rho^{-s/2-1} x_j (a^{ij} + \delta_{ij} \varepsilon^2) \xi_i^\nu (\eta^\nu + \sigma \zeta^\nu) \\ & \geq \tilde{\mu}_{|\nu|} ((A_i + \varepsilon)^2 (\xi_i^\nu)^2 + (\eta^\nu)^2 + (\zeta^\nu)^2), \quad \tilde{\mu}_{|\nu|} = \text{const} > 0, \quad |\nu| \leq s_1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Обозначим $\omega_s(t, x) \equiv t^{2\alpha-1} \exp\left(-\frac{4\lambda \rho^{-s/2}}{2-s}\right)$. Пусть для любого достаточно малого положительного числа ε функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию

$$\iint_H \omega_s \left((\psi + \varepsilon)^k (A^\varepsilon)^\nu D^\nu \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right)^2 dx dt < \infty, \quad (4.22)$$

где $k + |\nu| \leq s_1$, $k \leq s_1 - 2$.

Пусть $\tilde{Z}_{\alpha, \lambda, s_1}(H)$ обозначает класс функций, для которых

$$\iint_H \omega_s \left((\psi)^k (A^\varepsilon)^\nu D^\nu \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right)^2 dx dt < \infty, \quad k + |\nu| \leq s_1. \quad (4.23)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия (4.20), (4.21). Тогда обобщенное решение уравнения (1.1) принадлежит классу $\tilde{Z}_{\alpha, \lambda, s_1}(H)$.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 6 и $s_1 \geq [n/2] + 3$. Тогда

$$(\psi(t, x)A_1(t, x) \cdots A_n(t, x))^{s_1} u(t, x) \in C^2(H). \quad (4.24)$$

4.4. Пример негладкого обобщенного решения. В полосе $H = (0, 5/4] \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$(t(t-1)^2)^2 u_{tt} + 4t(t-1)^2 u_t - u_{xx} + (-3t^2 + 4t + 2)u = f(t), \quad (4.25)$$

$$\text{где } f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & \text{если } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{если } 1 \leq t \leq 5/4. \end{cases}$$

Покажем, что для уравнения (4.25) выполняются все предположения теоремы 6 с $s = 0$, $s_1 = 3$, $\sigma = 1$. Очевидно, $f(t) \in C^1(H) \cap W_{2, \text{loc}}^2(H)$ и условие (4.22) выполняется при любых $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Далее, находим

$$\begin{aligned} F_{|\nu|}^\varepsilon(\xi^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) &\geq [1 - t(t-1)](1 + \varepsilon^2)(\xi^\nu)^2 + [-3t^2 + 4t + 2 - 4t(t-1)](\eta^\nu)^2 \\ &\quad + \left[4 - \frac{3}{2}(t-1)^2 - 3t(t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 - 1\right](\zeta^\nu)^2 \\ &\quad + [-3t^2 + 4t + 2 - 4t(t-1) + (t-1)^2]\eta^\nu \zeta^\nu. \end{aligned}$$

Для доказательства неравенства (4.4) воспользуемся критерием Сильвестра. Находим

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= 1 - t(t-1) \geq \frac{9}{16}; \\ \Delta_2(t) &= (-t^2 + t + 1)(-7t^2 + 8t + 2) \geq \frac{9}{16} \cdot \frac{17}{16} = \frac{153}{256}; \\ \Delta_3(t) &= (-7t^2 + 8t + 2)(-4t^2 + 5t + 2) - \frac{1}{4}(-8t^2 + 10t + 1)^2 \\ &= 12t^4 - 27t^3 + 19.5t^2 + 21t + 3.75. \end{aligned}$$

Докажем, что $\Delta_3(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 5/4]$. В самом деле, $\Delta_3'(t) = 48t^3 - 81t^2 + 39t + 21$, $\Delta_3''(t) = 144t^2 - 162t + 39 = 0$ при $t = t_1 = \frac{27 + \sqrt{105}}{48}$ и $t = t_2 = \frac{27 - \sqrt{105}}{48}$. Наименьшее значение функции $\Delta_3'(t)$ находится среди значений этой функции в точках $t_1, t_2, t_3 = 0, t_4 = 1.25$. Поскольку $\Delta_3'(t_i) > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), то $\Delta_3'(t) > 0$, $t \in [0, 5/4]$, и $\min_{[0, 5/4]} \Delta_3(t) = \Delta_3(0) = 3.75$. Вследствие выполнения (4.4) для достаточно малых положительных α, λ справедливо следующее неравенство:

$$G_{\alpha, \lambda}^{\varepsilon, |\nu|}(\xi^\nu, \eta^\nu, \zeta^\nu) \geq \mu_1((1 + \varepsilon^2)(\xi^\nu)^2 + (\eta^\nu)^2 + (\zeta^\nu)^2).$$

Обобщенным решением уравнения (4.25) является функция

$$u(t, x) = y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq t \leq 5/4, \\ \frac{t-1}{t} \exp\left(\frac{1}{t-1}\right) \int_0^t \left[\frac{t_1-1}{t_1} \exp\left(\frac{2}{t_1-1}\right) \right. \\ \quad \left. \times \int_0^{t_1} \frac{t_2 f(t_2)}{(t_2-1)^7} \exp\left(-\frac{3}{t_2-1}\right) dt_2 \right] dt_1, & \text{если } 0 < t < 1. \end{cases}$$

В самом деле, $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (4.25) при $1 \leq t \leq 5/4$ и при $0 < t < 1$, а асимптотика $y(t)$ и $y'(t)$ при $t \rightarrow 1$ такова:

$$y(t) \underset{t \rightarrow 1-}{\cong} \frac{1}{3}(t-1), \quad y'(t) \underset{t \rightarrow 1-}{\cong} \frac{1}{3}. \quad (4.26)$$

Для доказательства (4.26) вычислим сначала

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \frac{t_2 f(t_2)}{(t_2-1)^7} \exp\left(-\frac{3}{t_2-1}\right) dt_2 \\ &= \int_0^{t_1} \frac{t_2}{(t_2-1)^5} \exp\left(-\frac{3}{t_2-1}\right) dt_2 \\ &= \exp\left(-\frac{3}{t_1-1}\right) \left[\frac{1}{3(t_1-1)^3} + \frac{2}{3(t_1-1)^2} + \frac{4}{9(t_1-1)} + \frac{4}{27} \right] - \frac{e^3}{27} \\ & \quad (0 \leq t < 1). \end{aligned} \quad (4.27)$$

При $0 \leq t < 1$ находим:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t-1}{t} \exp\left(\frac{1}{t-1}\right) \int_0^t \frac{t_1-1}{t_1} \exp\left(\frac{2}{t_1-1}\right) \\ & \quad \left[\exp\left(-\frac{3}{t_1-1}\right) \left(\frac{1}{3(t_1-1)^3} + \frac{2}{3(t_1-1)^2} + \frac{4}{9(t_1-1)} + \frac{4}{27} \right) - \frac{e^3}{27} \right] dt_1 \\ &= \frac{t-1}{t} \exp\left(\frac{1}{t-1}\right) \int_0^t \left(\exp\left(-\frac{1}{t_1-1}\right) \left(\frac{1}{3t_1(t_1-1)^2} + \frac{2}{3t_1(t_1-1)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4}{9t_1} + \frac{4}{27} \frac{t_1-1}{t_1} \right) - \frac{t_1-1}{t_1} \exp\left(\frac{2}{t_1-1}\right) \frac{e^3}{27} dt_1 \right) \underset{t \rightarrow 1-}{\cong} \frac{t-1}{3}. \end{aligned}$$

Для доказательства последней эквивалентности применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{y(t)}{\frac{1}{3}(t-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \left[\left(\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{t_1-1}\right) \left(\frac{1}{t_1(t_1-1)^2} + \frac{2}{t_1(t_1-1)} + \frac{4}{3t_1} + \frac{(4t_1-1)}{9t_1} \right) dt_1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{e^3}{9} \int_0^t \frac{t_1-1}{t_1} \exp\left(\frac{2}{t_1-1}\right) dt_1 \right) / \left(\exp\left(-\frac{1}{t-1}\right) \right) \right] = 1. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(t-1)} \right) \exp\left(\frac{1}{t-1}\right) \\ & \quad \times \int_0^t \left(\exp\left(-\frac{1}{t_1-1}\right) \left(\frac{1}{3t_1(t_1-1)^2} + \frac{2}{3t_1(t_1-1)} + \frac{4}{9t_1} + \frac{4}{27} \frac{t_1-1}{t_1} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{t_1-1}{t_1} \exp\left(\frac{2}{t_1-1}\right) \frac{e^3}{27} \right) dt_1 \\ & \quad + \exp\left(\frac{1}{t-1}\right) \frac{t-1}{t} \left(\left(\frac{1}{3t(t-1)^2} + \frac{2}{3(t-1)} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27}(t-1) \right) \right. \\ & \quad \left. \times \exp\left(-\frac{1}{t-1}\right) - \frac{1}{27t} e^3 \exp\left(\frac{2}{t-1}\right) \right) \\ & \underset{t \rightarrow 1-}{\cong} -\frac{1}{t^2(t-1)} \cdot \frac{t}{t-1} \cdot \frac{t-1}{3} + \frac{t-1}{t} \left(\frac{1}{3t(t-1)^2} + \frac{2}{3t(t-1)} \right) \underset{t \rightarrow 1-}{\cong} \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$y''(t) \underset{t \rightarrow 1-}{\cong} \frac{1}{3(t-1)^2},$$

$$y'''(t) \underset{t \rightarrow 1-}{\cong} -\frac{1}{(t-1)^3}.$$

Таким образом, $\psi^k \frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) — непрерывные в H функции.

Следовательно,

$$\int_0^{5/4} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda\rho} t^{2\alpha-1} (u^2 + (\psi u_t)^2 + (\psi^2 u_{tt})^2 + (\psi^3 u_{ttt})^2) dx < \infty,$$

где α, λ — любые положительные числа. Таким образом, $u(t, x) \in Z_{\alpha, \lambda, 3}(H)$.

Поскольку производная $y'(t)$ равна нулю при $t \in [1, 5/4]$, непрерывна на $[0, 1]$ и эквивалентна $1/3$ при $t \rightarrow 1-$, то $y(t)$ не принадлежит классу $C^1(H)$, однако $\psi^2 y \in C^1(H)$, $\psi^3 y \in C^2(H)$, что согласуется со следствием 1.

Список литературы

1. Барановский Ф. Т. Смешанная задача для гиперболического вырождающегося уравнения // Изв. вузов. Сер. матем. 1960. №3. С. 30–42.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
3. Брюханов А. В. // Характеристическая задача Коши для класса гиперболических уравнений, вырождающихся в области начальных данных. Т. 132. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1987. С. 21–34.
4. Вайнберг Б. Р., Мазья В. Г. Характеристическая задача Коши для гиперболического уравнения // Труды сем. им. И. Г. Петровского. №7. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 101–107.
5. Волевич Л. Р., Иерий В. Я. Гиперболические уравнения (комментарий к работам №1, 3) // Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. С. 395–418.
6. Волкодав В. Ф., Репин О. А. Об одной задаче в полосе для уравнения гиперболического типа с сильным вырождением // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №8. С. 1442–1443.
7. Врагов В. Н. Задача Коши для некоторых классов симметрических систем первого порядка и гиперболических уравнений второго порядка // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1975. С. 44–47.
8. Глазатов С. Н. Задача Коши для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения // Уравнения неклассического типа. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1986. С. 44–47.
9. Терсенов С. А. Об одном уравнении гиперболического типа, вырождающемся на границе // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. №2. С. 276–279.
10. Baouendi M. S., Goulaouic C. Cauchy problem with characteristic initial hypersurface // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. №4. P. 455–475.
11. Li Daqian, Yu Wenci Mixed-value problems for quasilinear hyperbolic equations with characteristic initial axis // J. Fudan Univ. Natur. Sci. 1987. V. 26. №1. P. 1–9.
12. Bove A., Lewis J., Parenti C., Tahara H. Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic operators. II // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. 1987. V. 34. №1. P. 127–157.
13. Ларькин Н. А. Задача Коши для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. №1. С. 186–188.
14. Маловичко В. А. О краевых задачах для вырождающихся и невырождающихся гиперболических систем // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. №11. С. 1977–1981.

15. *Нерсисян А. Б.* О бесконечно дифференцируемых решениях задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений // Изв. АН Арм.ССР. Сер. матем. 1969. Т. 4. № 3. С. 182–191.
16. *Оганесян Г. Р.* Начальная задача для некоторых сингулярных гиперболических уравнений и ВКБ-оценки ее решений // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1062–1064.
17. *Олейник О. А.* Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 3. С. 525–528.
18. *Олейник О. А.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе // УМН. 1969. Т. 24. № 2. С. 229–230.
19. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Матем. анализ. 1969. М.: ВИНТИ, 1971.
20. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышэйшая школа, 1977.
21. *Калашников А. С.* Задача безначальных условий для линейных вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка с бесконечной областью зависимости // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). № 4 (8). С. 609–622.
22. *Дерябина А. В.* О задаче без начальных условий для сильно вырождающихся гиперболических уравнений с растущими коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 6. С. 71–73.
23. *Дерябина А. В.* О растущих решениях сильно вырождающихся гиперболических систем // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 4. С. 447–463.
24. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953.
25. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Московский государственный
университет сервиса

Поступила в редакцию
12.05.1998 и 17.09.1999