Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Егоров, Финитная аппроксимируемость групп и топологическая динамика,
Матем. сб., 2000, том 191, номер 4, 53–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:19:46

УДК 512.544.7

А. В. Егоров

Финитная аппроксимируемость групп и топологическая динамика

Свойство финитной аппроксимируемости конечно порожденных групп допускает истолкование в терминах топологической динамики. В предлагаемой работе доказано, что конечно порожденная группа является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она изоморфна группе, эффективно и дистально действующей на некотором компакте.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Почти периодические действия

Напомним, что группа называется *финитно аппроксимируемой*, если пересечение ее нормальных подгрупп конечного индекса тривиально. По теореме Ремака такая группа вкладывается в декартово произведение конечных групп. С установлением свойства финитной аппроксимируемости связан целый ряд известных проблем в комбинаторной теории групп. Трудность этих вопросов во многом определяется отсутствием достаточно гибкого геометрического признака финитной аппроксимируемости. Данный параграф посвящен установлению критерия финитной аппроксимируемости конечно порожденной группы в терминах ее действий на банаховых пространствах и компактах.

Сначала мы установим критерий финитной аппроксимируемости в терминах почти периодических действий на банаховых пространствах. Для того чтобы его сформулировать, нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathbf{B}$ – сепарабельное банахово пространство над полем вещественных чисел и G – подгруппа группы обратимых линейных непрерывных операторов на пространстве $\mathbf{B}$. *Замкнутой орбитой* вектора из $\mathbf{B}$ называется замыкание множества значений всевозможных операторов из группы G на этом векторе. Если замкнутая орбита любого вектора компактна, то G называется *почти периодической группой операторов*.

ПРИМЕР 1.2. Финитно аппроксимируемая конечно порожденная группа G изоморфно вкладывается в свое проконечное пополнение $\widehat{G}$. Проконечное пополнение является компактной топологической группой со второй аксиомой счетности. Такая группа может быть метризована левоинвариантной метрикой. Пусть группа G действует левыми сдвигами в сепарабельном банаховом пространстве $C[\widehat{G}]$ непрерывных вещественнозначных функций на $\widehat{G}$ с равномерной нормой. Замкнутая орбита каждой функции из $C[\widehat{G}]$ является замкнутым равномерно ограниченным и

равностепенно непрерывным относительно введенной инвариантной метрики множеством функций. Это легко следует из теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. По теореме Арцела–Асколи все замкнутые орбиты компактны, и рассматриваемая группа G реализована как почти периодическая группа операторов на $C[\hat{G}]$.

Существование эффективного почти периодического действия позволяет дать неконструктивное обоснование наличия достаточной системы подгрупп конечного индекса. Идея предлагаемого рассуждения восходит к построению так называемой компактификации Бора локально компактной группы. В дальнейшем будет показано, что построить эффективное почти периодическое действие легче, чем построить периодические действия, ядра которых образуют достаточную систему подгрупп конечного индекса, требуемую в определении финитной аппроксимируемости.

Пусть G – конечно порожденная почти периодическая группа операторов в банаховом пространстве $\mathbf{B}$. Замкнутую орбиту вектора $b \in \mathbf{B}$ будем обозначать через $\hat{G}_b$. Рассмотрим топологическое произведение $\tilde{G} = \prod_{b \in \mathbf{B}} \hat{G}_b$ замкнутых орбит всех векторов пространства $\mathbf{B}$. Согласно теореме Тихонова пространство $\tilde{G}$ компактно. Точка γ в пространстве $\tilde{G}$ интерпретируется как отображение, ставящее в соответствие каждому вектору $b \in \mathbf{B}$ некоторый вектор $\gamma_b \in \hat{G}_b$. Вектор γ_b суть координата точки γ по индексу b . Поэтому произвольной точке $\gamma \in \tilde{G}$ соответствует некоторое отображение пространства $\mathbf{B}$ в себя.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Пространство $\tilde{G}$ наделяется структурой полугруппы с единицей (моноида).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если рассмотреть композицию отображений вышеуказанного вида, то получим снова отображение, происходящее из некоторой точки пространства $\tilde{G}$. Действительно, пусть точка $\gamma \in \tilde{G}$ переводит вектор b в вектор $\gamma_b \in \hat{G}_b$, а точка $\gamma' \in \tilde{G}$ переводит вектор γ_b в вектор $\gamma'_{\gamma_b} \in \hat{G}_{\gamma_b}$. Ясно, что $\hat{G}_{\gamma_b} \subseteq \hat{G}_b$ и $\gamma'_{\gamma_b} \in \hat{G}_b$. Следовательно, отображение, переводящее b в γ'_{γ_b} , соответствует некоторой точке $\gamma\gamma'$, называемой *произведением* γ и γ' . Итак, компактное топологическое пространство $\tilde{G}$ приобретает структуру моноида. Ассоциативность умножения следует из ассоциативности композиции. Единицей является точка, координата которой по индексу $b \in \mathbf{B}$ равна b . Этой точке соответствует тождественное отображение $\text{id}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$.

Каждый элемент $g \in G$ рассматривается как обратимый линейный непрерывный оператор на пространстве $\mathbf{B}$ и интерпретируется как точка пространства $\tilde{G}$. Тем самым определяется некоторый гомоморфизм полугрупп $i: G \rightarrow \tilde{G}$. Этот гомоморфизм является изоморфным вложением. Обозначим замыкание образа построенного вложения через $\hat{G}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. *Топологическое пространство $\hat{G}$ является компактным и метризуемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\hat{G}$ компактно как замкнутое подпространство компактного пространства $\tilde{G}$. Сходимость в этом подпространстве равносильна поточечной сходимости отображений банахова пространства в себя. Кроме того, пространство $\hat{G}$ является замыканием множества непрерывных линей-

ных операторов на рассматриваемом банаховом пространстве. По теореме Банаха–Штейнгауза предел поточечно сходящейся направленности операторов из всюду плотного множества $G \subset \hat{G}$ также является непрерывным линейным оператором. Поэтому в принятой нами интерпретации точкам $\hat{G}$ отвечают непрерывные линейные операторы на пространстве $\mathbf{B}$.

Ввиду сепарабельности пространства $\mathbf{B}$ эти операторы однозначно определяются своими значениями на некотором счетном всюду плотном подмножестве $B \subset \mathbf{B}$. Рассмотрим непрерывную проекцию $\text{proj}: \prod_{b \in \mathbf{B}} \hat{G}_b \rightarrow \prod_{b \in B} \hat{G}_b$. Эта проекция инъективна на подпространстве $\hat{G}$. Хорошо известно, что инъективное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом на свой образ. Таким образом, пространство $\hat{G}$ топологически вкладывается в счетное произведение метрических пространств и, следовательно, само метризуемо. Итак, $\hat{G}$ – компактное метризуемое пространство, содержащее всюду плотное подмножество G .

Следующее утверждение устанавливает связь между алгебраической операцией, введенной на пространстве $\hat{G}$, и топологией этого пространства.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. *Пространство $\hat{G}$ является топологической полугруппой с единицей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что множество $\hat{G}$ замкнуто относительно операции умножения, определенной на пространстве $\hat{G}$, и эта операция непрерывна по совокупности переменных из $\hat{G}$. Из теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает, что почленные произведения элементов последовательностей непрерывных линейных операторов в банаховом пространстве, сходящихся поточечно (т.е. на каждом векторе), сходятся поточечно к произведению их пределов. Хорошо известно, что в банаховом пространстве поточечный предел непрерывных линейных операторов также является непрерывным линейным оператором. Каждому элементу группы G соответствуют точка пространства $\hat{G}$ и линейный непрерывный оператор на пространстве $\mathbf{B}$. Точке пространства $\hat{G}$, являющейся пределом последовательности элементов G , отвечают поточечные пределы соответствующих операторов в пространстве $\mathbf{B}$. В силу банаховости пространства $\mathbf{B}$ эти пределы являются непрерывными линейными операторами. Так как $\hat{G}$ метризуемо и G плотно в $\hat{G}$, то все точки $\hat{G}$ получаются указанным способом и им отвечают непрерывные линейные операторы на пространстве $\mathbf{B}$.

Пусть даны две сходящиеся последовательности $\gamma_n \rightarrow \gamma$, $\gamma'_n \rightarrow \gamma'$ элементов $\hat{G}$. Им соответствуют поточечно сходящиеся последовательности непрерывных линейных операторов на пространстве $\mathbf{B}$. Вторично используя банаховость пространства $\mathbf{B}$ и применяя утверждение о почленной композиции поточечно сходящихся последовательностей операторов, заключаем, что последовательность операторов, соответствующих композициям $\gamma_n \gamma'_n$, сходится к оператору, соответствующему композиции $\gamma \gamma'$. Сходимость имеет место на каждом векторе из $\mathbf{B}$. Так как пространство $\hat{G}$ вкладывается в тихоновское произведение $\tilde{G}$, в котором покоординатная сходимость последовательности элементов влечет ее сходимость, то последовательность $\gamma_n \gamma'_n$ сходится к элементу $\gamma \gamma'$. Итак, в пространстве $\hat{G}$ почленное произведение сходящихся последовательностей сходится к произведению их пределов.

Метризуемое пространство $\hat{G}$ содержит плотное подмножество G , и каждый элемент пространства $\hat{G}$ представим в виде предела последовательности элементов группы G . При почленном перемножении таких последовательностей, соответствующих двум элементам $\hat{G}$, получается последовательность элементов группы G , которая сходится к композиции выбранных двух элементов. Так как пространство $\hat{G}$ замкнуто в $\tilde{G}$, то эта последняя композиция лежит в $\hat{G}$. Итак, доказана замкнутость пространства $\hat{G}$ относительно композиции. Учитывая метризуемость $\hat{G}$, из утверждения о сходимости почленного произведения сходящихся последовательностей можно сделать вывод о непрерывности композиции по совокупности переменных.

В построенной топологической полугруппе возможно деление. Это обстоятельство выясняется в следующем предложении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. *В полугруппе $\hat{G}$ каждый элемент обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше мы доказали, что $\hat{G}$ является компактной метризуемой топологической полугруппой, содержащей всюду плотную подгруппу G . Рассмотрим элемент γ этой полугруппы и последовательность элементов G , сходящуюся к нему. Последовательность элементов, обратных к элементам этой последовательности, содержит сходящуюся подпоследовательность. Ввиду непрерывности умножения $\hat{G}$ предел такой подпоследовательности является обратным элементом к γ . Ясно, что так определяется единственный обратный элемент.

Из возможности осуществлять деление в компактной полугруппе следует более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 1.7. *Пространство $\hat{G}$ является компактной метризуемой топологической группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше было показано, что пространство $\hat{G}$ наделено структурой компактной метризуемой топологической полугруппы, в которой каждый элемент обратим. Стандартные рассуждения показывают, что такая компактная полугруппа является топологической группой [1]. Мы вложили рассматриваемую конечно порожденную почти периодическую группу операторов G в метризуемую компактную топологическую группу $\hat{G}$.

ТЕОРЕМА 1.8. *Конечно порожденная группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой почти периодической группе операторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость предложенного условия доказана в примере 1.2. Основную трудность представляет доказательство достаточности предложенного условия. Именно эта часть теоремы будет использоваться в дальнейших приложениях. Суть доказательства состоит в использовании компактного расширения $\hat{G}$ рассматриваемой группы G . Для конечно порожденных групп вложимость в метризуемую компактную топологическую группу равносильна финитной аппроксимируемости. Это можно показать средствами абстрактного гармонического анализа. По теореме Петера–Вейля для каждого элемента $g \in G \subset \hat{G}$ существует конечномерное линейное представление $PW_g: \hat{G} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ такое, что

$PW_g(g) \neq E$, где E – единичный оператор. На языке алгебры доказанное означает, что группа G аппроксимируется образами своих всевозможных линейных представлений. Такие образы являются конечно порожденными линейными группами и оказываются финитно аппроксимируемыми по известной теореме Мальцева об аппроксимации [2]. Окончательно получаем, что группа G аппроксимируется финитно аппроксимируемыми группами и, следовательно, сама является финитно аппроксимируемой. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.9. *Конечно порожденная группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфна группе изометрий некоторого метрического компакта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если рассматриваемая группа финитно аппроксимируема, то она может быть реализована как группа изометрий своего проконечного пополнения. Действительно, такая группа вкладывается в свое проконечное пополнение и действует на нем левыми сдвигами. Проконечное пополнение является компактной топологической группой и допускает введение левоинвариантной метрики.

Обратно, если конечно порожденная группа G является группой изометрий компакта K , то она оказывается почти периодической группой операторов на сепарабельном банаховом пространстве $C[K]$ непрерывных вещественнозначных функций на K . Таким образом, по теореме 1.8 группа G финитно аппроксимируема.

Условие изометричности рассматриваемого действия на компакте является слишком жестким и трудно проверяемым на практике. Действительно, построение инвариантной метрики может оказаться задачей столь же трудной, как и построение достаточной системы подгрупп конечного индекса. Поэтому мы ослабляем это условие и заменяем его топологическим условием дистальности, которое относительно легко проверяется в конкретных случаях.

Мы докажем, что с эффективным дистальным действием на компакте можно связать эффективное изометричное действие на некотором другом компакте. Таким образом, утверждение о финитной аппроксимируемости групп дистальных преобразований будет сведено к доказанной в конце данного параграфа теореме 1.9. При осуществлении такого сведения будут использоваться методы современного функционального анализа.

§ 2. Дистальные действия

Доказанный критерий финитной аппроксимируемости можно переформулировать в терминах топологической динамики. Для того чтобы это сделать, нам потребуется понятие дистального действия и связанная с ним конструкция инвариантной метрики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть конечно порожденная группа G действует гомеоморфизмами на компакте K . Это действие называется *дистальным*, если ни для какой пары различных точек $k, k' \in K$ не существует такой последовательности элементов $g_i \in G$, что последовательности $g_i(k)$ и $g_i(k')$ сходятся к одному пределу в K .

С действием группы на компакте можно связать так называемую оболочивающую полугруппу. Конструкция оболочивающей полугруппы введена в теорию динамических систем Эллисом. Ему же принадлежит характеристика дистальных

действий как действий, обволакивающие полугруппы которых являются группами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Обволакивающей полугруппой $E(G, K)$ называется замыкание множества преобразований компакта K , соответствующих элементам группы G , в топологии поточечной сходимости пространства непрерывных отображений K в себя. Структура полугруппы индуцируется обычной композицией отображений.*

Требуется обоснование корректности такого определения операции. Действительно, в пространстве отображений K в K с топологией поточечной сходимости композиция uv непрерывна по аргументу u при любом v и непрерывна по v , если u есть непрерывное отображение. Если непрерывные преобразования u_i сходятся поточечно к преобразованию $u \in E(G, K)$, а непрерывные преобразования v_j сходятся поточечно к $v \in E(G, K)$, то преобразования $u_i v_j \in E(G, K)$ сходятся поточечно к uv . Таким образом, множество $E(G, K)$ действительно замкнуто относительно композиции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Теорема Эллиса [3] утверждает, что действие группы на компакте дистально тогда и только тогда, когда обволакивающая полугруппа является группой. Группу G можно рассматривать как подгруппу в $E(G, K)$, действующую на $E(G, K)$ гомеоморфизмами левых сдвигов.

Теорема Эллиса раскрывает смысл понятия дистальности. При дистальном действии группы любые две точки компакта “не сливаются в бесконечности”. В частности, изометричные действия оказываются дистальными. Если действие группы на компакте равномерно непрерывно, то можно построить метрику на этом компакте, относительно которой действие будет изометричным. На интуитивном уровне трудно представить себе дистальное действие, которое не являлось бы равномерно непрерывным. Однако, пользуясь некоторыми достижениями теории алгебр Ли, можно обнаружить континуальные семейства попарно неизоморфных дистальных не равномерно непрерывных динамических систем [4]. Теория Фюрстенберга [3] позволяет описать минимальные дистальные действия как трансфинитные пределы равномерно непрерывных расширений.

Мы свяжем с каждым эффективным дистальным действием на компакте эффективное изометричное действие на некотором другом компакте. Для осуществления этой конструкции нам потребуются введение приемлемой метрики на группе Эллиса с топологией поточечной сходимости τ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Метрика ρ на группе Эллиса $E(G, K)$ называется *приемлемой*, если выполнены следующие условия:

- i) соответствующая этой метрике топология τ_ρ слабее, чем топология поточечной сходимости τ . Это означает, что всякое открытое множество в топологии τ_ρ является открытым в топологии τ ;
- ii) правые сдвиги на элементы группы $E(G, K)$ и левые сдвиги на элементы группы G непрерывны на $E(G, K)$ в топологии τ_ρ .

Фактически мы намерены ослабить топологию поточечной сходимости на группе Эллиса, заменив ее на метризуемую с сохранением свойства компактности и непрерывности всех правых и некоторых левых сдвигов.

ЛЕММА 2.5. *Приемлемая метрика на обволакивающей группе Эллиса существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что всякий компакт сепарабелен. Если сузить функции, принадлежащие обволакивающей группе Эллиса $E(G, K)$, на счетное всюду плотное подмножество компакта K , то такое сужение определяет непрерывное отображение обволакивающей группы $E(G, K)$ с топологией поточечной сходимости τ в пространство суженных функций с топологией поточечной сходимости. Пространство суженных функций компактно и метризуемо, поскольку теперь область определения становится счетной (это пространство лежит в тихоновском произведении счетного числа метризуемых компактных пространств K).

Отображение сужения инъективно на множестве гомеоморфизмов, которые соответствуют действиям элементов исходной группы G . Действительно, эти гомеоморфизмы полностью определяются своими значениями на выбранном всюду плотном подмножестве компакта K . Поэтому вложение пространства гомеоморфизмов в пространство сужений индуцирует некоторую метрику на пространстве гомеоморфизмов.

Эта метрика равномерно непрерывна на обволакивающей группе в смысле теории равномерных пространств [5] (здесь используется существование равномерности на хаусдорфовом компактном пространстве и равномерная непрерывность непрерывных функций на компактном пространстве). Пространство гомеоморфизмов плотно в обволакивающей группе. Поэтому метрика может быть распространена на обволакивающую группу по равномерности.

Получится метрика ρ на обволакивающей группе, которая индуцирует топологию τ_ρ , быть может более слабую, чем топология поточечной сходимости τ . В новой топологии сохраняется компактность обволакивающей группы. Действительно, становится меньше открытых множеств и меньше открытых покрытий, значит, тем более из каждого покрытия выделяется конечное подпокрытие.

В новой топологии остаются непрерывными все правые сдвиги и левые сдвиги на элементы группы G . Действительно, возьмем какой-нибудь сдвиг одного из этих сортов. Этот сдвиг действует на подпространстве гомеоморфизмов, т.е. на группе G , отображая это подпространство в его сдвиг. Такое отображение непрерывно относительно новой топологии, индуцированной на G и на сдвиге G . Дело в том, что в рамках G сходимость в старой топологии и в новой равносильны. Последовательность элементов из G , сходящаяся в новой топологии, сходится в старой топологии, и ее сдвиг сходится в старой топологии (а значит, и в новой). Это отображение сдвига, действующее из G в обволакивающую группу, равномерно непрерывно. Оно может быть продолжено по равномерности до непрерывного (в новой топологии). Такое непрерывное продолжение совпадает с исходным сдвигом на всей обволакивающей группе. Возьмем последовательность элементов из G , которая сходится к какому-то элементу f обволакивающей группы в новой топологии τ_ρ , и выделим из нее, пользуясь компактностью, подпоследовательность, сходящуюся к этому же элементу в старой топологии τ . Под действием сдвига подпоследовательность перейдет в последовательность сдвигов, сходящуюся к сдвигу элемента f . Сходимость имеет место в старой топологии, а значит, и в новой. Следовательно, сдвиг элемента f является возможным значением непрерывного продолжения. Так как это значение существует и единственно, то сдвиг f

им и является. Непрерывное продолжение совпадает со сдвигом, следовательно, отображение сдвига непрерывно.

Таким образом, топология обволакивающей группы ослабляется до метризуемой с сохранением компактности и непрерывности всех правых и некоторых левых сдвигов.

Введенная приемлемая метрика будет использована при построении инвариантного интегрирования на обволакивающей группе. Наличие приемлемой метрики позволяет осуществить метризацию слабой сходимости мер посредством расстояния с хорошими свойствами линейности. В дальнейшем эти хорошие аффинные свойства позволят нам доказать зубчатость слабо компактных выпуклых множеств вероятностных мер и показать наличие меры, неподвижной относительно действия групповых сдвигов.

§ 3. Слабая сходимость мер

Для построения на обволакивающей группе меры, инвариантной относительно левых сдвигов на элементы группы G , нам потребуются некоторые сведения о слабой сходимости вероятностных мер на компактах. Общая теория сходимости вероятностных мер изложена в монографии [6]. Мы приведем определение слабой сходимости вероятностных борелевских мер, остановимся на топологических свойствах совокупности вероятностных мер и затронем вопрос о метризации слабой сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Говорят, что последовательность борелевских вероятностных мер μ_n , $n \in \mathbb{N}$, на компакте *слабо сходится* к борелевской вероятностной мере μ , если для каждой непрерывной функции f на компакте имеет место сходимость

$$\int f(t) d\mu_n(t) \rightarrow \int f(t) d\mu(t).$$

Заметим, что у слабо сходящейся последовательности вероятностных мер существует не более одного предела.

Множество всех вероятностных борелевских мер на компакте обладает важным свойством слабой компактности. Если на пространстве борелевских зарядов в качестве банаховой нормы взять вариацию заряда, то * слабая топология в силу теоремы представления Рисса будет соответствовать слабой сходимости вероятностных мер. Из теоремы Банаха–Алаоглу вытекает * слабая компактность множества вероятностных мер. В частности, справедлив принцип выбора Хелли: из любой последовательности вероятностных мер можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Обозначим через BL совокупность непрерывных липшицевых функций на рассматриваемом компакте с метрикой ρ , т.е. функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)} < \infty.$$

Рассмотрим также равномерную норму $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ и положим $\|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + \|f\|_L$. Для двух вероятностных борелевских мер μ и μ' определим *BL-расстояние*

$$\|\mu - \mu'\|_{BL}^* = \sup_{f \in BL} \left\{ \left| \int f d(\mu - \mu') \right| : \|f\|_{BL} \leq 1 \right\}.$$

Определенная таким образом функция $\|\cdot - \cdot\|_{BL}^*$ действительно обладает всеми свойствами метрики.

Сходимость вероятностных мер по *BL-расстоянию* равносильна слабой сходимости [7]. Доказательство соответствующего утверждения связано с интерпретацией слабой сходимости мер как сходимости их значений на борелевских множествах с границей нулевой меры и теорией Леви–Прохорова. В следующем параграфе мы используем введенное *BL-расстояние* для доказательства существования *G*-инвариантной меры на обволакивающей группе $E(G, K)$.

§ 4. Теорема о неподвижной точке

Нам потребуется результат, обеспечивающий существование инвариантной меры у действий некоторого специального вида. Доказательство этого результата аналогично рассуждению Намиоки и Эспланда, которое было предложено ими для геометрического обоснования теоремы Рыль–Нарджевского о неподвижной точке [8]. Напомним формулировку теоремы Рыль–Нарджевского.

ТЕОРЕМА 4.1 (Рыль–Нарджевский). *Пусть E – банахово пространство, G – группа, действующая аффинно на некотором слабо компактном выпуклом множестве $K \subset E$. Пусть это действие дистально относительно топологии нормы в E , тогда группа G имеет неподвижную точку в K .*

Теорема Рыль–Нарджевского была первоначально получена с помощью методов теории вероятностей. В оригинальном рассуждении Рыль–Нарджевского [9] использовалась теорема Дуба о сходимости мартингалов. В данном параграфе мы докажем аналог теоремы Рыль–Нарджевского для мер. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что K – слабо компактное выпуклое множество вероятностных мер, и пусть $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Тогда существует такое слабо замкнутое выпуклое подмножество $K^{r(\varepsilon)} \subset K$, что для любых двух мер $\mu, \mu' \in K \setminus K^{r(\varepsilon)}$ расстояние $\|\mu - \mu'\|_{BL}^*$ меньше ε .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – слабое замыкание множества крайних точек K . Рассмотрим произвольную точку $p \in P$ и ее окрестность

$$N_\varepsilon^p = \left\{ p' : \|p - p'\|_{BL}^* < \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Слабо замкнутые выпуклые оболочки множеств $P \setminus N_\varepsilon^p$ и $P \cap N_\varepsilon^p$ обозначим через O_1 и O_2 . Без потери общности можно предполагать, что множества O_1, O_2 непусты. В противном случае достаточно взять в качестве $K^{r(\varepsilon)}$ пустое множество. По теореме Крейна–Мильмана [10] множество K является выпуклой оболочкой множеств O_1, O_2 . Ясно, что $O_1 \neq K$, так как некоторые крайние точки K не принадлежат O_1 . Рассмотрим множества

$$K^r = \{to_1 + (1-t)o_2 : o_i \in O_i, t \in [r, 1]\}, \quad r \in [0, 1].$$

Так определенные множества слабо компактны, выпуклы и возрастают при $r \rightarrow +0$ от $K^1 = O_1$ до $K^0 = K$. Заметим, что $K^r \neq K$ при всех $r \in (0, 1]$. В противном случае каждая крайняя точка $z \in K$ имела бы вид

$$z = \lambda o_1 + (1 - \lambda) o_2$$

при $o_i \in O_i$, $\lambda \in [r, 1]$. Это означает, что $z = o_1 \in O_1$. Мы получаем противоречие с неравенством $O_1 \neq K$.

Если $y \in K \setminus K^r$, то $y = \lambda o_1 + (1 - \lambda) o_2$, где $o_i \in O_i$, $\lambda \in [0, r]$, и выполнено неравенство

$$\|y - o_2\|_{BL}^* = \|\lambda o_1 + (1 - \lambda) o_2 - o_2\|_{BL}^* = |\lambda| \cdot \|o_1 - o_2\|_{BL}^* \leq r \|o_1 - o_2\|_{BL}^*.$$

Поэтому каждая точка $y \in K \setminus K^r$ находится на расстоянии от O_2 , меньшем, чем $r \cdot \text{diam}(K)$. Так как $\text{diam}(O_2) \leq \varepsilon/2$, то при $r \rightarrow +0$ найдется такое значение $r(\varepsilon)$ параметра r , что $\text{diam}(K \setminus K^{r(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$. Диаметр понимается в смысле метрики $\|\cdot - \cdot\|_{BL}^*$. Лемма доказана.

Говоря неформально, доказанная выше лемма позволяет отломить сколь угодно малый “зубчик” от любого выпуклого слабо компактного множества вероятностных мер. Эта лемма применяется в доказательстве следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть группа G действует линейно и дистально по отношению к слабой сходимости на слабо компактном выпуклом множестве вероятностных мер K . Тогда это действие имеет неподвижную точку, т.е. в этом множестве мер существует некоторая G -инвариантная мера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересечение убывающей цепи непустых слабо замкнутых выпуклых подмножеств K , инвариантных под действием группы G , является множеством такого же типа. По лемме Цорна в K существует минимальное непустое слабо замкнутое выпуклое подмножество, инвариантное под действием G . Обозначим это множество через $K_{\min}$. Докажем, что множество $K_{\min}$ содержит только один элемент. Действительно, пусть μ, μ' — две различные меры из $K_{\min}$. В силу дистальности $\inf_{g \in G} \|g(\mu) - g(\mu')\|_{BL}^* = \Delta > 0$. По предыдущей лемме существует такое слабо замкнутое выпуклое подмножество $K_{\min}^{r(\Delta/2)} \neq K$, что диаметр его дополнения $K_{\min} \setminus K_{\min}^{r(\Delta/2)}$ в смысле метрики $\|\cdot - \cdot\|_{BL}^*$ меньше $\Delta/2$.

Заметим, что из линейности действия и определения метрики $\|\cdot - \cdot\|_{BL}^*$ вытекает соотношение

$$\left\| g(\mu) - g\left(\frac{\mu + \mu'}{2}\right) \right\|_{BL}^* = \left\| g(\mu') - g\left(\frac{\mu + \mu'}{2}\right) \right\|_{BL}^* > \frac{\Delta}{2}, \quad g \in G.$$

Поэтому мера $g((\mu + \mu')/2)$ принадлежит множеству $K_{\min}^{r(\Delta/2)}$ для любого g . В противном случае меры $g(\mu)$ и $g(\mu')$ должны принадлежать множеству $K_{\min}^{r(\Delta/2)}$ для некоторого g , что противоречит выпуклости $K_{\min}$ и линейности действия g . Поэтому слабо замкнутая выпуклая оболочка множества $\{g(\mu + \mu')/2 : g \in G\} \subset K_{\min}^{r(\Delta/2)}$ инвариантна под действием G , что противоречит минимальности $K_{\min}$. Источником противоречия является предположение о существовании разных элементов в $K_{\min}$. Поэтому множество $K_{\min}$ состоит из одной меры, которая G -инвариантна. Теорема доказана.

Мы намерены использовать теорему о неподвижной точке при построении G -левинвариантной борелевской вероятностной меры на обволакивающей группе дистального действия. Справедливость посылок теоремы о неподвижной точке применительно к мерам на группе Эллиса проверяется в следующем параграфе.

§ 5. Усреднение на группе Эллиса

Для применения доказанной в предыдущем параграфе теоремы к рассматриваемой нами ситуации необходимо выбрать приемлемую метрику на обволакивающей группе (см. лемму 2.5). Рассмотрим множество всех борелевских вероятностных мер K на обволакивающей группе дистального действия $E(G, K)$ с приемлемой топологией τ_ρ . Следующее утверждение обосновывает применимость теоремы о неподвижной точке к множеству K .

ЛЕММА 5.1. *Пусть K – множество всевозможных борелевских вероятностных мер на $E(G, K)$. Тогда левые сдвиги на элементы группы $G \subset E(G, K)$ действуют на K дистально по отношению к слабой сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν_1 и ν_2 – две меры из K . Рассмотрим произвольную последовательность элементов $\{g_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, из группы $G \subset E(G, K)$. Необходимо доказать, что левые сдвиги мер ν_1 и ν_2 на элементы выбранной последовательности не могут иметь общего слабого предела. Пусть последовательность $\{g_i\}$ выбрана так, что последовательность из обратных элементов $\{g_i^{-1}\}$ сходится к пределу g^{-1} в приемлемой топологии τ_ρ на $E(G, K)$. Тогда для произвольной непрерывной функции $f: E(G, K) \rightarrow \mathbb{R}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \int f(t) d\nu_1(g_it) &= \int f(g_i^{-1}t) d\nu_1(t) \rightarrow \int f(g^{-1}t) d\nu_1(t) = \int f(t) d\nu_1(gt), \\ \int f(t) d\nu_2(g_it) &= \int f(g_i^{-1}t) d\nu_2(t) \rightarrow \int f(g^{-1}t) d\nu_2(t) = \int f(t) d\nu_2(gt). \end{aligned}$$

Воспользуемся непрерывностью некоторых сдвигов в приемлемой топологии. Непрерывность правых сдвигов на обволакивающей группе влечет поточечную сходимость последовательности функций $f(g_i^{-1}t) \rightarrow f(g^{-1}t)$. Поэтому сходимость интегралов в приведенных соотношениях вытекает из теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Из непрерывности правых сдвигов также вытекает, что левый сдвиг на элемент g^{-1} является борелевским изоморфизмом как поточечный предел гомеоморфизмов компакта. Левый сдвиг на элемент g также является борелевским изоморфизмом как отображение, обратное к левому сдвигу на g^{-1} . Поэтому если меры $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ были различны, то функции $\nu_1(gt)$ и $\nu_2(gt)$ также будут различными борелевскими мерами. Из рассмотренных соотношений следует, что различные меры $\nu_1(gt)$ и $\nu_2(gt)$ являются слабыми пределами последовательностей мер $\nu_1(g_it)$ и $\nu_2(g_it)$ соответственно. Лемма доказана.

Множество K является слабо компактным выпуклым множеством вероятностных мер. Левые сдвиги обволакивающей группы на элементы группы G индуцируют линейное действие на K . Это действие дистально относительно слабой сходимости мер, и по теореме о неподвижной точке существует G -инвариантная мера $\mu \in K$. В следующем параграфе интегрирование по этой инвариантной мере будет использовано для построения почти периодического действия в пространстве функций на некотором компакте с инвариантной метрикой.

§6. Почти периодичность и дистальность

Приведенное выше рассуждение обосновывает существование на $E(G, K)$ G -инвариантной вероятностной борелевской меры μ . Пусть ρ — приемлемая метрика на $E(G, K)$. Каждой паре элементов $x_1, x_2 \in G \subset E(G, K)$ можно поставить в соответствие непрерывную функцию

$$M[x_1, x_2](y) = \rho(x_1 y, x_2 y).$$

Здесь аргумент y принадлежит обволакивающей группе $E(G, K)$. Непрерывность этой функции вытекает из непрерывности левых сдвигов на элементы группы G . Рассмотрим соответствующий интеграл Лебега

$$m_0(x_1, x_2) = \int M[x_1, x_2](y) d\mu(y)$$

как функцию точек x_1, x_2 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *Функция m_0 определяет метрику на группе G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $x_1 \neq x_2$ — два различных элемента группы G . Функция $M[x_1, x_2](y) = \rho(x_1 y, x_2 y)$ строго положительна и как непрерывная функция на компакте ограничена снизу положительным числом. Поэтому усредненное расстояние $m_0(x_1, x_2)$ положительно. Если элементы x_1, x_2 равны, то функция $M[x_1, x_2]$ тождественно равна нулю и соответствующий интеграл $m_0(x_1, x_2)$ также равен нулю. Симметричность функции $m_0(x_1, x_2)$ ясна из определения. Неравенство треугольника

$$m_0(x_1, x_2) + m_0(x_2, x_3) \geq m_0(x_1, x_3)$$

подтверждается интегрированием неравенства

$$M[x_1, x_2](y) + M[x_2, x_3](y) \geq M[x_1, x_3](y).$$

Утверждение доказано.

Докажем инвариантность усредненного расстояния $m_0: G \times G \rightarrow \mathbb{R}_+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. *Метрика m_0 инвариантна относительно правых сдвигов на группе G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} m_0(x_1 g, x_2 g) &= \int M[x_1 g, x_2 g](y) d\mu(y) = \int \rho(x_1 g y, x_2 g y) d\mu(y) \\ &= \int M[x_1, x_2](g y) d\mu(y) = \int M[x_1, x_2](y) d\mu(y) = m_0(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где $g \in G$. Предпоследнее равенство этой цепочки основано на свойстве G -левоинвариантности рассматриваемой меры μ . Утверждение доказано.

Следующее утверждение является обобщением доказанной ранее теоремы 1.9.

ТЕОРЕМА 6.3. *Конечно порожденная группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфна группе, эффективно и дистально действующей на некотором компакте.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если конечно порожденная группа финитно аппроксимируема, то она эффективно действует правыми сдвигами на своем проконечном пополнении. Проконечное пополнение является компактом, и на нем как на всякой компактной метризуемой топологической группе можно ввести инвариантную относительно правых сдвигов метрику. Поэтому соответствующее действие изометрично и тем более дистально. Обратно, если конечно порожденная группа G эффективно и дистально действует на компакте K , то согласно утверждениям 6.1 и 6.2 функция m_0 определяет правоинвариантную метрику на группе G .

Фундаментальная в смысле метрики ρ последовательность элементов G является фундаментальной в смысле метрики m_0 . Действительно, если последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ фундаментальна относительно метрики ρ , то она сходится к некоторому $x \in E(G, K)$. Тогда ввиду непрерывности всех правых сдвигов на обволакивающей группе функции $M[x_i, x](y)$ поточечно сходятся к нулю. Функции $M[x_i, x](y)$ интегрируемы, так как являются поточечными пределами непрерывных функций $M[x_i, x_j](y)$ при $x_j \rightarrow x$. Из неравенства

$$M[x_i, x_j](y) \leq M[x_i, x](y) + M[x_j, x](y)$$

вытекает неравенство для интегралов

$$m_0(x_i, x_j) \leq m_0(x_i, x) + m_0(x_j, x).$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости интегралы $m_0(x_i, x)$ сходятся к нулю, и можно подобрать номер, начиная с которого $m_0(x_i, x) < \varepsilon$, $m_0(x_j, x) < \varepsilon$ и $m_0(x_i, x_j) < 2\varepsilon$. Поэтому из каждой последовательности элементов G можно выделить фундаментальную в смысле метрики m_0 подпоследовательность, что влечет полную ограниченность метрики m_0 . Если бы метрика m_0 не была бы вполне ограниченной, то для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлась бы такая бесконечная последовательность элементов G , что расстояния между всевозможными парами ее элементов превосходят ε . Из подобной последовательности нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность.

Пополнение $\langle G \rangle$ группы G по метрике m_0 является полным и вполне ограниченным метрическим пространством. Значит, это пополнение является компактным пространством. Группа G действует изометриями левых сдвигов на пополнении $\langle G \rangle$ и, следовательно, является почти периодической группой операторов на пространстве непрерывных вещественнозначных функций на этом пополнении. Действительно, сдвиги непрерывной функции образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство, замыкание которого в пространстве непрерывных функций компактно. По доказанной ранее теореме 1.9 отсюда вытекает финитная аппроксимируемость группы G . Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Артамонову за постоянное внимание к данной работе и ряд ценных замечаний.

Список литературы

1. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
2. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.
3. Бронштейн И. У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.
4. Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф. Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1966.
5. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
7. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
8. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.
9. Ryll-Nardzewski C. On fixed points of semigroups of endomorphisms of linear spaces // Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. (Univ. Calif. 1965/66). V. 2, Part 1, 1967. P. 55–61.
10. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: andrey@egorov.mccme.ru

Поступила в редакцию
22.03.1999 и 29.07.1999