Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Сбалансированные системы из примитивных идемпотентов в алгебрах матриц, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 4, 67–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 11:57:31

УДК 512.538+512.542+519.1

Д. Н. Иванов

Сбалансированные системы из примитивных идемпотентов в алгебрах матриц

В статье развивается понятие сбалансированных t -систем идемпотентов в ассоциативных полупростых конечномерных над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебрах, которое было введено автором как обобщение понятия комбинаторных t -схем, отвечающих в данном контексте случаю коммутативных алгебр. Рассматриваются сбалансированные 2-системы из v примитивных идемпотентов в алгебре матриц $M_n(\mathbb{C})$, обозначаемые как (v, n) -системы. Доказаны единственность $(n+1, n)$ -систем и несуществование $(n+s, n)$ -систем при $n > s^2 - s$ или $s > n^2 - n$. Классифицированы $(q+1, n)$ -системы, обладающие 2-транзитивной подгруппой автоморфизмов $PSL(2, q)$, q нечетно. Классифицированы $(4, 2)$ - и $(6, 3)$ -системы. Построен сбалансированный базис в алгебрах M_n , $n = 2, 3$. Установлены связи конференс-матриц и $(2n, n)$ -систем, подходящих матриц и $\left(m^2, \frac{m^2 \pm m}{2}\right)$ -систем.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Понятие сбалансированной t -системы идемпотентов в ассоциативной полупростой конечномерной над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебре $\mathbf{A}$ было введено автором в [1]. Это понятие естественным образом обобщает комбинаторные t -схемы, отвечающие случаю коммутативной алгебры $\mathbf{A}$. Напомним основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство идемпотентов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ в алгебре $\mathbf{A}$ (здесь $\dim \mathbf{A} > 1$) называется *сбалансированной t -системой*, если выполняются два условия:

- 1) (условие сбалансированности) $e_1 + \dots + e_v = k \cdot \mathbf{1}_A$, где $\mathbf{1}_A$ — единичный элемент алгебры $\mathbf{A}$, $k \in \mathbb{C}$;
- 2) (условие равноугольности) для любых s ($s \leq t$) различных идемпотентов $e_{i_1}, \dots, e_{i_s} \in \mathcal{E}$ имеем $\text{Tr}_A e_{i_1} \dots e_{i_s} = \lambda_s \neq 0$, где Tr_A — след правого (или левого) регулярного представления алгебры $\mathbf{A}$ и λ_s зависит только от s .

Сбалансированную t -систему идемпотентов $\mathcal{E}$ будем называть также t -(v, r)-системой, где $r = \lambda_1 = \text{Tr } e_i$. Если $\sigma \in \text{Aut } \mathbf{A}$, то $\mathcal{E}^\sigma = \{e_1^\sigma, \dots, e_v^\sigma\}$ является t -(v, r)-системой, сопряженной к $\mathcal{E}$. Группа $\text{Aut } \mathcal{E} = \{\sigma \in \text{Aut } \mathbf{A} : \mathcal{E}^\sigma = \mathcal{E}\}$ называется *группой автоморфизмов системы $\mathcal{E}$* .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00233).

Очевидно, каждая сбалансированная t -система является также t' -системой для всех $t' \leq t$. В этом состоит небольшое отличие приведенного определения от данного в [1].

Комбинаторные t -схемы появляются здесь следующим образом. Под комбинаторной $t(v, k, \lambda)$ -схемой понимается семейство $\mathcal{B}$ k -подмножеств (состоящих из k элементов), называемых *блоками*, множества из v точек $\mathcal{P}$ так, что каждые t точек встречаются ровно в λ блоках. Пусть $M = (v \times b)$ -матрица инцидентности t -схемы $(B, \mathcal{P})$, где $b = |\mathcal{B}|$ — число блоков, и строки матрицы M отвечают точкам, а столбцы — блокам. Рассматривая строки M как координаты элементов коммутативной алгебры $\mathbf{A} = \mathbb{C}^n$, являющейся прямой суммой n экземпляров поля $\mathbb{C}$, в базисе из примитивных идемпотентов алгебры $\mathbf{A}$, получим семейство из v идемпотентов, которое, как несложно показать, является сбалансированной t -системой в $\mathbf{A}$. При этом число k играет роль коэффициента при единичном элементе в условии сбалансированности и $\lambda = \lambda_t$ в условии равноугольности.

В данной статье рассматриваются сбалансированные t -системы из примитивных идемпотентов в алгебре матриц $M_n(\mathbb{C}) = M_n$. Примитивный идемпотент e в M_n характеризуется тем, что $\text{rank } e = \text{tr } e = 1$, где tr — след матрицы. Так как $\text{Tr}_{M_n} = n \cdot \text{tr}$, то речь идет о $t(v, n)$ -системах в M_n . Если не оговорено противное, то будем предполагать в дальнейшем, что $t(v, n)$ -система находится в M_n и, следовательно, состоит из примитивных идемпотентов. С целью упрощения записи будем $2(v, r)$ -системы обозначать как (v, r) -системы.

В [1] указывалось, что в M_2 существуют единственные с точностью до сопряженности $(3, 2)$ - и $(4, 2)$ -системы, и эти системы имеют группы автоморфизмов, изоморфные соответственно симметрической группе S_3 и знакопеременной группе A_4 . Других сбалансированных 2-систем идемпотентов в M_2 нет.

В данной статье вводятся ключевые понятия матриц полупроизведений, двойственных систем, σ - и τ -изоморфизмов, с помощью которых доказываются следующие результаты.

1. Если в алгебре матриц M_n существует $1(v, n)$ -система, то $v \geq n$.
2. В M_n существует единственная с точностью до сопряженности $1-(n+1, n)$ -система $\mathcal{E}$. При этом $\mathcal{E}$ является $(n+1)-(n+1, n)$ -системой и $\text{Aut } \mathcal{E} \cong S_{n+1}$.
3. В M_n не существует $(n+s, n)$ -систем, если $n > s^2 - s$ или $s > n^2 - n$.
4. Классифицируются $(q+1, n)$ -системы, допускающие 2-транзитивную подгруппу автоморфизмов, изоморфную $PSL(2, q)$, q нечетно.
5. Классифицируются $(6, 3)$ -системы.

Кроме этого, устанавливается связь между известным понятием конференс-матриц, или по-другому C -матриц (см. о них [2], [3]), и $(2n, n)$ -системами. В частности, доказывается, что существование C -матрицы порядка $2n$ влечет существование некоторой $(2n, n)$ -системы.

Также обнаружена связь сбалансированных систем и другого известного понятия — подходящих матриц или GH -матриц (см. о них [4], [5]). Инверсно симметричные GH -матрицы с постоянной диагональю используются для построения $\left(m^2, \frac{m^2 \pm m}{2}\right)$ -систем, $m > 2$. Эта серия сбалансированных систем содержит один особенно важный элемент. Имеется в виду $(9, 3)$ -система. Во-первых, наличие этой системы делает проблему существования $(v, 3)$ -систем открытой только

для значений $v = 7$ и $v = 8$. Во-вторых, $(9, 3)$ -система образует базис в M_3 . Сбалансированные 2-системы идемпотентов, которые образуют базисы соответствующих алгебр, представляют особый интерес. В случае коммутативных алгебр таким системам отвечают симметричные 2-схемы, среди которых наибольшее внимание получили проективные плоскости $(2-(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ -схемы) и адамаровы $2-(4n - 1, 2n - 1, n - 1)$ -схемы. Старые известные проблемы о возможных параметрах симметричных 2-схем можно объединить в одну проблему – проблему существования в данной алгебре базиса из сбалансированной 2-системы идемпотентов. Алгебры, обладающие таким базисом, будем называть *сбалансированными*. В первую очередь интересен вопрос, поставленный в [1]: когда матричная алгебра M_n является сбалансированной? Существование $(4, 2)$ - и $(9, 3)$ -систем, упоминавшихся выше, с учетом линейной независимости 2-систем [1] означает, что алгебры M_2 и M_3 являются сбалансированными.

О содержании статьи по параграфам. В §§ 2, 3 вводятся понятия матриц полупроизведений, приведенных матриц полупроизведений (ПМП), ассоциированных идемпотентов, двойственных систем, σ - и τ -изоморфизмов. Доказывается ряд необходимых технических результатов. В § 4 доказываются утверждения 1–3 из приведенного выше перечня. В § 5 исследуются сбалансированные системы, допускающие 2-транзитивную группу автоморфизмов. В § 6 исследуются $(2n, n)$ - и $\left(m^2, \frac{m^2 \pm m}{2}\right)$ -системы и их связи с конференс-матрицами и подходящими матрицами.

Приведем обозначения. Через $X_{m \times n}$ будем обозначать матрицу X размера $m \times n$, т.е. имеющую m строк и n столбцов; $X^{(i)}$ – i -й столбец, X_i – i -я строка матрицы X ; X^t – матрица, транспонированная к X ; E_n – единичная матрица порядка n ; E_{ij} – матричные единицы, т.е. матрицы, у которых нули всюду, кроме позиции в i -й строке и j -м столбце, где стоит единица; $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ – диагональная матрица с диагональю $(x_1, \dots, x_n)$; $X \otimes Y = (x_{ij}Y)$ – тензорное (кронекеровское) произведение матриц; $M(n, \mathbb{C}) = M(n)$ – группа мономиальных матриц порядка n .

Автор приносит благодарность А. И. Кострикину за поддержку и внимание к работе.

§ 2. Матрицы полупроизведений, симметрические и двойственные системы

2.1. Матрицы полупроизведений. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – сбалансированная 2-система из примитивных идемпотентов в алгебре матриц M_n , $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} e_1 + \dots + e_v &= k \cdot E_n, & \text{tr } e_i e_j &= \lambda, & \text{tr } e_i &= 1, \\ k &= k(v, n) = \frac{v}{n}, & \lambda &= \lambda(v, n) = \frac{v - n}{n(v - 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{E}$ есть (v, n) -система. Коэффициент k найден применением к обеим частям условия сбалансированности функции tr . Значение λ найдено аналогичным

способом из условия сбалансированности, умноженного на e_i . Представим идемпотенты в виде произведения матрицы-столбца и матрицы-строки:

$$e_i = X^{(i)} \cdot Y_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \cdot (y_{i1}, \dots, y_{in}).$$

Положим $a_{ij} = Y_i X^{(j)}$. Тогда матрица $A = (a_{ij})_{v \times v}$ называется *матрицей полупроизведений* системы $\mathcal{E}$. Будем говорить, что $\mathcal{E}$ *допускает* матрицу полупроизведений A , которая, очевидно, определена неоднозначно.

Рассмотрим матрицы из столбцов и соответственно строк системы $\mathcal{E}$:

$$X = (x_{ij})_{n \times v} = (X^{(1)} \dots X^{(v)}), \quad Y = (y_{ij})_{v \times n} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_v \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $A = YX$ и условие сбалансированности равносильно равенству $XY = kE_n$.

ЛЕММА 2.1. *Матрица полупроизведений A обладает свойствами:*

- 1) $a_{ii} = 1$, $a_{ij}a_{ji} = \lambda$ при $i \neq j$;
- 2) $A^2 = kA$;
- 3) $\text{rank } A = \text{rank } X = \text{rank } Y = n$.

При этом 2) и 3) выполняются и в случае, когда $\mathcal{E}$ является 1-системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем: $1 = \text{tr } e_i = Y_i X^{(i)} = a_{ii}$. Далее, $\lambda = \text{tr } e_i e_j = \text{tr } X^{(i)} Y_i X^{(j)} Y_j = Y_i X^{(j)} Y_j X^{(i)} = a_{ij} a_{ji}$.

2) $A^2 = YX YX = Y k E_n X = k YX = kA$.

3) Так как $\left(\frac{1}{k}A\right)^2 = \frac{1}{k^2} \cdot kA = \frac{1}{k}A$, то $\frac{1}{k}A$ есть идемпотент. Но ранг идемпотента совпадает с его следом, поэтому $\text{rank } A = \text{rank } \frac{1}{k}A = \text{tr } \frac{1}{k}A = \frac{v}{k} = n$. Равенство $A = YX$ влечет $\text{rank } Y, \text{rank } X \geq n$, и в силу размеров матриц X и Y получаем $\text{rank } Y = \text{rank } X = n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Пусть матрица A порядка v имеет ранг n , тогда существуют матрицы $Y_{v \times n}$ и $X_{n \times v}$ ранга n такие, что $A = YX$. Кроме того, если $A = Y'X'$ для некоторых матриц $Y'_{v \times n}$, $X'_{n \times v}$, то существует единственная невырожденная матрица T порядка n такая, что $Y' = YT$ и $X' = T^{-1}X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в случае необходимости матрицу A матрицей PAQ , где P и Q – подстановочные матрицы, без ограничения общности можем считать, что A имеет ненулевой минор порядка n в верхнем левом углу. В качестве матрицы Y возьмем первые n столбцов матрицы A : $Y = (A^{(1)} \dots A^{(n)})$. Тогда условие $YX^{(i)} = A^{(i)}$ однозначно определяет столбец $X_{n \times 1}^{(i)}$ для $i = n+1, \dots, v$. Полагая теперь $X = (E_n X^{(n+1)} \dots X^{(v)})$, получим требуемое представление $A = YX$.

Пусть

$$Y = \begin{pmatrix} B_{n \times n} \\ C_{m \times n} \end{pmatrix}, \quad X = (D_{n \times n} F_{n \times m}), \quad Y' = \begin{pmatrix} B'_{n \times n} \\ C'_{m \times n} \end{pmatrix}, \quad X' = (D'_{n \times n} F'_{n \times m}),$$

где $n + m = v$. Без ограничения общности можем считать, что B, D – невырожденные матрицы. Так как $BD = B'D'$, то B', D' тоже невырождены. Положим $T = B^{-1}B'$. Тогда $BT = B'$. Из $CD = C'D'$ получаем $C' = CD(D')^{-1}$. Отсюда выводим $CT = CB^{-1}B' = CB^{-1}B'D'(D')^{-1} = CB^{-1}BD(D')^{-1} = CD(D')^{-1} = C'$. Значит, $YT = Y'$.

Аналогично $T^{-1}D = (B')^{-1}BD = (B')^{-1}B'D' = D'$ и $T^{-1}F = (B')^{-1}BF = (B')^{-1}B'F' = F'$. Значит, $X' = T^{-1}X$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. 1) Множество матриц полупроизведений, отвечающих данной (v, n) -системе $\mathcal{E}$, является орбитой группы мономиальных матриц $M(n)$ относительно действия сопряжением.

2) Две (v, n) -системы допускают одинаковую матрицу полупроизведений тогда и только тогда, когда они сопряжены.

3) Каждая матрица $A = (a_{ij})$ порядка v такая, что $A^2 = \frac{v}{n}A$, $a_{ii} = 1$, $a_{ij}a_{ji} = \lambda \neq 0$ при $i \neq j$, где $n \neq 1$, является матрицей полупроизведений некоторой (v, n) -системы и $\lambda = \frac{v-n}{n(v-1)}$.

Таким образом, имеется биективное соответствие между классами сопряженности сбалансированных (v, n) -систем и классами $M(v)$ -сопряженности матриц, обладающих свойствами 1) и 2) леммы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) вытекает из того, что если перейти к новой записи примитивного идемпотента e_i , умножив столбец $X^{(i)}$ на α_i , а строку Y_i на α_i^{-1} , то новая матрица полупроизведений будет сопряжена исходной посредством диагональной матрицы $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ii}$. Также перестановке идемпотентов отвечает сопряжение матрицы полупроизведений соответствующей подстановочной матрицей.

2) Пусть (v, n) -системы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ допускают одинаковую матрицу полупроизведений $A = Y_1 X_1 = Y_2 X_2$, где X_i, Y_i – матрицы столбцов и соответственно строк системы $\mathcal{E}_i$. Тогда по лемме 2.2 существует невырожденная матрица T порядка n такая, что $Y_1 = Y_2 T$, $X_1 = T^{-1} X_2$. Отсюда получаем $\mathcal{E}_1 = T^{-1} \mathcal{E}_2 T$. В обратную сторону, пусть $\mathcal{E}_1 = T^{-1} \mathcal{E}_2 T$. Ясно, что матрица полупроизведений системы $\mathcal{E}_1$, построенная по представлениям идемпотентов $e_i = X^{(i)} Y_i \in \mathcal{E}_1$, совпадает с матрицей полупроизведений системы $\mathcal{E}_2$, построенной по представлениям идемпотентов $T^{-1} e_i T = T^{-1} X^{(i)} Y_i T \in \mathcal{E}_2$.

3) Как и в доказательстве п. 3) леммы 2.1 заключаем, что $\text{rank } A = n > 1$. Отсюда следует в силу леммы 2.2 существование матриц $Y_{v \times n}, X_{n \times v}$ ранга n таких, что $A = YX$. Из равенства $YXYX = \frac{v}{n} YX$ по лемме 2.2 получаем $XY = \frac{v}{n} E_n$. Это значит, что семейство матриц $e_i = X^{(i)} Y_i$, $i = 1, \dots, v$, является (v, n) -системой идемпотентов. Отсюда без труда находим λ . Теорема доказана.

2.2. Симметрические и двойственные системы. Очевидно, что $\mathcal{E}^t = \{e_1^t, \dots, e_v^t\}$ – является, как и $\mathcal{E}$, (v, n) -системой, которую будем называть *транспонированной* к $\mathcal{E}$. Система $\mathcal{E}$ называется *симметрической*, если она состоит из симметрических идемпотентов.

ЛЕММА 2.3. Пусть система $\mathcal{E}$ допускает матрицу полупроизведений A . Тогда $\mathcal{E}^t$ допускает матрицу полупроизведений A^t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_i = X^{(i)}Y_i \in \mathcal{E}$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = Y_iX^{(j)}$. Построим матрицу полупроизведений $A' = (a'_{ij})$ системы $\mathcal{E}^t$ по представлениям $e_i^t = Y_i^t(X^{(i)})^t$. Имеем $a'_{ij} = (X^{(i)})^tY_j^t = (Y_jX^{(i)})^t = Y_jX^{(i)} = a_{ji}$. Значит, $A' = A^t$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть A — симметрическая матрица порядка v и ранга n . Тогда существует матрица $Z_{v \times n}$ ранга n такая, что $A = ZZ^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2 существуют матрицы $Y_{v \times n}$, $X_{n \times v}$ такие, что $A = YX$. Из $A = A^t$ следует $YX = X^tY^t$. По лемме 2.2 существует матрица T порядка n такая, что $YT = X^t$, $T^{-1}X = Y^t$. Имеем $X = TY^t = (YT)^t = T^tY^t$. Так как $\text{rank } Y = n$, то $T = T^t$. В силу того, что каждая квадратичная форма над $\mathbb{C}$ приводится к сумме квадратов, существует матрица $Q_{n \times n}$: $T = QQ^t$. Положим $Z = YQ$. Тогда $A = YX = YTY^t = YQQ^tY^t = ZZ^t$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Система $\mathcal{E}$ сопряжена симметрической системе тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ допускает симметрическую матрицу полупроизведений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}'$ — симметрическая система, сопряженная $\mathcal{E}$, тогда по лемме 2.4 каждый идемпотент $e_i \in \mathcal{E}'$ можно записать в виде $e_i = X_iX_i^t$ для некоторого столбца X_i . Имеем $a_{ij} = X_i^tX_j = (X_i^tX_j)^t = X_j^tX_i = a_{ji}$. То есть отвечающая этим представлениям матрица полупроизведений $A = (a_{ij})$ симметрическая.

Обратно, пусть $\mathcal{E}$ допускает симметрическую матрицу полупроизведений A . Тогда по лемме 2.4 существует матрица $Z_{v \times n}$: $A = ZZ^t$. В силу леммы 2.2 $\mathcal{E}$ сопряжена системе из симметрических идемпотентов $Z_iZ_i^t$. Теорема доказана.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица полупроизведений (v, n) -системы $\mathcal{E}$ и $v > n + 1$. Тогда в силу леммы 2.1 матрица $F = \frac{n}{v}A$ есть идемпотент, который будем называть ассоциированным идемпотентом системы $\mathcal{E}$. Очевидно, что $\overline{F} = E_v - \frac{n}{v}A$ также является идемпотентом. Положим $B = \frac{v}{v-n}\overline{F} = \frac{v}{v-n}\left(E_v - \frac{n}{v}A\right) = (b_{ij})$. Тогда $B^2 = \frac{v}{v-n}B$, $b_{ii} = 1$ и

$$b_{ij}b_{ji} = \frac{v^2}{(v-n)^2} \cdot \frac{n^2}{v^2} \cdot a_{ij}a_{ji} = \frac{n^2}{(v-n)^2} \cdot \frac{v-n}{n(v-1)} = \frac{n}{(v-n)(v-1)} = \lambda(v, v-n).$$

Таким образом, в силу п. 3) теоремы 1 B есть матрица полупроизведений некоторой $(v, v-n)$ -системы $\overline{\mathcal{E}}$ и $\overline{F}$ есть ассоциированный идемпотент этой системы.

Две сбалансированные системы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ из v примитивных идемпотентов будем называть *двойственными*, если они допускают ортогональные ассоциированные идемпотенты F_1, F_2 : $F_1 + F_2 = E_v$.

2.3. Приведенные матрицы полупроизведений. Пусть $A = (a_{ij})_{v \times v}$ — матрица полупроизведений (v, n) -системы $\mathcal{E}$. Матрицу

$$B = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(A - \frac{v}{2n} E_v \right) \quad (2.1)$$

будем называть *приведенной матрицей полупроизведений* или сокращенно ПМП. Свойства ПМП $B = (b_{ij})$, вытекающие из леммы 2.1:

- 1) $b_{ii} = \alpha = \alpha(v, n) = \frac{1}{2}(2n - v) \sqrt{\frac{v-1}{n(v-n)}}$;
- 2) $b_{ij}b_{ji} = 1$ при $i \neq j$;
- 3) $B^2 = \frac{v^2}{4n^2\lambda} E_v = \frac{v^2(v-1)}{4n(v-n)} E_v$.

Матрица полупроизведений A однозначно восстанавливается по ПМП B следующим образом. Приравняв диагональные элементы в равенстве 3), получаем $\alpha^2 = \frac{v^2(v-1)}{4n(v-n)}$. Отсюда находим $n = \frac{1}{2} \left(v \pm \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha^2 + v - 1}} \right)$. Так как в силу 1) α должно иметь одинаковый знак с $2n - v$, то выбираем $n = \frac{1}{2} \left(v + \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha^2 + v - 1}} \right)$.

Далее, из (2.1) определяем $A = \sqrt{\frac{v-n}{n(v-n)}} B + \frac{v}{2n} E_v$.

Будем называть квадратную матрицу $X = (x_{ij})$ *инверсно симметричной*, если $x_{ij}x_{ji} = 1$ при $i \neq j$. Если X^2 — скалярная матрица, то X называется *проективной инволюцией*. Если $x_{ii} = \alpha$ для всех i , то X называется α -*диагональной* матрицей.

Таким образом, приведенные матрицы полупроизведений являются инверсно симметричными α -диагональными проективными инволюциями.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X — инверсно симметричная α -диагональная проективная инволюция порядка $v \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1 - \frac{v}{2}$, и $n = \frac{1}{2} \left(v + \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha^2 + v - 1}} \right)$. Тогда X есть ПМП некоторой (v, n) -системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $X^2 = (\alpha^2 + v - 1)E_v$, то собственные значения X равны $\mu_1 = \sqrt{\alpha^2 + v - 1}$, $\mu_2 = -\sqrt{\alpha^2 + v - 1}$. Пусть μ_i имеет кратность a_i , $i = 1, 2$. Из равенств $\text{tr } X = \alpha v = (a_1 - a_2)\sqrt{\alpha^2 + v - 1}$, учитывая $v = a_1 + a_2$, получаем, что $n = \frac{1}{2}(v + a_1 - a_2) = a_1 \in \mathbb{N}$. Так как $\alpha \neq 1 - \frac{v}{2}$, то $n \neq 1$. Положим $A = \sqrt{\frac{v-n}{n(v-1)}} X + \frac{v}{2n} E_v$. Тогда прямым вычислением несложно показать, что $A^2 = \frac{v}{n} A$ и диагональные элементы матрицы A равны 1. Значит, в силу п. 3) теоремы 1 A является матрицей полупроизведений некоторой (v, n) -системы $\mathcal{E}$. Ясно, что X есть ПМП системы $\mathcal{E}$. Теорема доказана.

Несложно показать, что если матрица B — ПМП системы $\mathcal{E}$, то матрицы B^t , $-B$, $-B^t$ являются ПМП соответственно систем $\mathcal{E}^t$, $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{E}}^t$.

§ 3. Автоморфизмы сбалансированных систем идемпотентов

Пусть $\mathcal{E} = \{e_i = X^{(i)}Y_i\}$ – (v, n) -система, $X, Y, A = YX$ – матрицы соответственно столбцов, строк и полупроизведений системы $\mathcal{E}$, $F = \frac{n}{v}A$ – ассоциированный идемпотент системы $\mathcal{E}$. Обозначим через π_n канонический эпиморфизм группы $GL(n, \mathbb{C})$ на $\text{Aut } M_n \cong PGL(n, \mathbb{C})$; таким образом, $\pi_n(T)(U) = TUT^{-1}$.

ТЕОРЕМА 4. 1) Матрицы $e_i e_j$, $i, j = 1, \dots, v$, линейно порождают алгебру M_n ;

2) группа $\text{Aut } \mathcal{E}$ действует точно на $\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для любой матрицы $X \in M_n$ имеем

$$X = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^v e_i \right) X \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^v e_i \right) = \frac{1}{k^2} \sum_{i,j=1}^v e_i X e_j.$$

Так как $e_i e_j \neq 0$ (ибо $\text{tr } e_i e_j = \lambda \neq 0$) и $\dim e_i M_n e_j = 1$, то получаем требуемое.

2) вытекает из 1). Теорема доказана.

3.1. Изоморфизм $\sigma: M_n \rightarrow FM_v F$. Для $T \in M_n$ положим $\sigma(T) = \frac{n}{v} Y T X$.

Так как $XY = \frac{v}{n} E_n$, то σ – гомоморфизм из M_n в M_v . Из $\text{rank } X = \text{rank } Y = n$ вытекает $\text{Ker } \sigma = 0$ и $M_n = XM_v Y$. Из второго равенства получаем $\text{Im } \sigma = YM_n X = YXM_v Y X = FM_v F$.

Так как $\text{tr } \sigma(T) = \text{tr } \frac{n}{v} Y T X = \text{tr } \frac{n}{v} X Y T = \text{tr } E_n T = \text{tr } T$, то σ сохраняет след матриц.

Заметим, что хотя определение σ зависит от матриц Y и X , но $\sigma(\mathcal{E})$ уже от них не зависит: $\sigma(e_i) = \frac{n}{v} Y X^{(i)} Y_i X = \frac{n}{v} A^{(i)} A_i = \frac{n}{v} A E_{ii} A$.

3.2. Изоморфизм $\tau: \pi_n^{-1}(\text{Aut } \mathcal{E}) \rightarrow C_{M(v)}(A)$. Пусть $T \in M_n$, $\pi_n(T) \in \text{Aut } \mathcal{E}$, $T e_i T^{-1} = e_{\pi(i)}$, где π – некоторая подстановка. Тогда

$$TX^{(i)} = \alpha_i X^{(\pi(i))}, \quad Y_i T^{-1} = \alpha_i^{-1} Y_{\pi(i)}, \quad \text{где } \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Имеем

$$TX = (\alpha_1 X^{(\pi(1))} \dots \alpha_v X^{(\pi(v))}) = X P^{-1}, \quad (3.1)$$

где $P^{-1} = \sum_{i=1}^v \alpha_i E_{\pi(i), i}$ – однозначно определенная мономиальная матрица порядка v . Кроме того,

$$YT^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} Y_{\pi(1)} \\ \vdots \\ \alpha_v^{-1} Y_{\pi(v)} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^v \alpha_i^{-1} E_{i\pi(i)} \right) Y = PY. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) получаем $PAP^{-1} = PYXP^{-1} = YT^{-1}TX = YX = A$, т.е. P принадлежит централизатору матрицы A в группе мономиальных матриц $M(v)$. Обозначим этот централизатор через $C_{M(v)}(A)$. Таким образом, мы имеем гомоморфизм $\tau: T \mapsto P$ из группы $\pi_n^{-1}(\text{Aut } \mathcal{E})$ в группу $C_{M(v)}(A)$.

ТЕОРЕМА 5. *Гомоморфизм $\tau: \pi_n^{-1}(\text{Aut } \mathcal{E}) \rightarrow C_{M(v)}(A)$ является изоморфизмом, сохраняющим скалярные матрицы: $\tau(\mathbb{C}^* E_n) = \mathbb{C}^* E_v$. Таким образом, τ индуцирует изоморфизм $\text{Aut } \mathcal{E} \cong \pi_v(C_{M(v)}(A))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $TX = X$, то в силу того, что $\text{rank } X = n$, получаем $T = E_n$. Значит, $\text{Ker } \tau = E_n$.

Пусть $P = \sum_{i=1}^v \alpha_i^{-1} E_{i\pi(i)} \in C_{M(v)}(A)$. Тогда $PYXP^{-1} = YX$. В силу леммы 2.2 существует $T \in M_n$: $PY = YT^{-1}$, $XP^{-1} = TX$. Отсюда следует $TX^{(i)} = \alpha_i X^{(\pi(i))}$, $Y_i T^{-1} = \alpha_i^{-1} Y_{\pi(i)}$, т.е. $Te_i T^{-1} = e_{\pi(i)}$. Значит, $\pi_n(T) \in \text{Aut } \mathcal{E}$ и $P = \tau(T)$. Таким образом, $\text{Im } \tau = C_{M(v)}(A)$ и τ есть изоморфизм.

Равенство $\tau(\mathbb{C}^* E_n) = \mathbb{C}^* E_v$ очевидно. Теорема доказана.

Так как отображение $X \mapsto (X^{-1})^t$ является изоморфизмом между $C_{M(v)}(A)$ и $C_{M(v)}(A^t)$, то $\text{Aut } \mathcal{E} \cong \text{Aut } \mathcal{E}^t$.

Для дальнейшего нам понадобится

ЛЕММА 3.1. *Для любого $T \in \pi_n^{-1}(\text{Aut } \mathcal{E})$ выполняется $\sigma(T) = \tau(T)^{-1} F = F\tau(T)^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем по определению τ :

$$\begin{aligned} \tau(T)^{-1} Y &= YT \Rightarrow \tau(T)^{-1} YX = YTX \Rightarrow \tau(T)^{-1} F = \sigma(T), \\ X\tau(T)^{-1} &= TX \Rightarrow YX\tau(T)^{-1} = YTX \Rightarrow F\tau(T)^{-1} = \sigma(T). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3.3. Автоморфизмы двойственных систем. Пусть двойственные (v, n) -система $\mathcal{E}_1$ и $(v, v-n)$ -система $\mathcal{E}_2$ имеют соответственно матрицы столбцов X', X'' и матрицы строк Y', Y'' такие, что $\frac{n}{v} Y' X' + \frac{v-n}{v} Y'' X'' = E_v$. Так как централизаторы матриц полупроизведений $A_1 = Y' X'$ и $A_2 = Y'' X''$ совпадают, то в силу теоремы 5 $\text{Aut } \mathcal{E}_1 \cong \text{Aut } \mathcal{E}_2$.

Пусть Γ — подгруппа в $\text{Aut } \mathcal{E}_1$ и G — универсальная накрывающая Γ . Тогда вложение $\Gamma \leq \text{Aut } M_n$ линейризуется представлением $\Phi_1: G \rightarrow M_n$, т.е. $\Gamma = (\pi_n \circ \Phi_1)(G)$.

Обозначим через σ_i и τ_i изоморфизмы, построенные в предыдущих пунктах для системы $\mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$.

Положим $\Phi_2 = \tau_2^{-1} \circ \tau_1 \circ \Phi_1$ и $\Phi = \tau_1 \circ \Phi_1 = \tau_2 \circ \Phi_2$. Таким образом, мы имеем три представления группы G : $\Phi: G \rightarrow M_v$, $\Phi_1: G \rightarrow M_n$, $\Phi_2: G \rightarrow M_{v-n}$. Обозначим их характеры соответственно через ϕ, ϕ_1, ϕ_2 . Пусть идемпотент $e_j = X^{(j)} Y_j \in \mathcal{E}_i$ и H — стабилизатор e_j в группе G . Тогда для $g \in H$ имеем $\Phi_i(g) X^{(j)} = \theta(g) X^{(j)}$, $Y_j \Phi_i^{-1}(g) = \bar{\theta}(g) Y_j$, где θ — линейный характер группы H . Отметим, что подстановочные действия сопряжением группы G на $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и на диагональных идемпотентах $E_{jj} \in M_v$ эквивалентны.

ТЕОРЕМА 6. 1) $\Phi(g^{-1}) = \sigma_1(\Phi_1(g)) + \sigma_2(\Phi_2(g))$ для всех $g \in G$;

2) $\bar{\phi} = \phi_1 + \phi_2$;

3) $\phi = \bar{\theta}^G$, если G действует транзитивно на $\mathcal{E}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Положим $\Phi(g) = T$, $\Phi_1(g) = T_1$, $\Phi_2(g) = T_2$. Тогда по лемме 3.1 имеем: $T^{-1} \cdot \frac{n}{v} Y' X' = \sigma_1(T_1)$, $T^{-1} \cdot \frac{v-n}{v} Y_2 X_2 = \sigma_2(T_2)$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

2) Вытекает из 1) с учетом того, что изоморфизмы σ_i сохраняют след: $\text{tr } \sigma_i(T_i) = \text{tr } T_i$.

3) Так как $\Phi_i(g)X^{(j)} = \theta(g)X^{(j)}$ для $g \in H$, то по определению представления Φ имеем $\Phi(g) = (\tau_i \circ \Phi_i)(g) = \theta^{-1}(g)E_{jj} + \dots$. Из линейности θ следует $\theta^{-1}(g) = \bar{\theta}(g)$. В силу транзитивности G на $\mathcal{E}_i$ получаем, что характер ϕ индуцирован характером $\bar{\theta}$. Теорема доказана.

§ 4. Случай $v = n + 1$ и границы для v

4.1. Случай $v = n + 1$. В силу п. 3) леммы 2.1 каждая $1-(n+1, n)$ -система в M_n сопряжена системе $\mathcal{E} = \{e_i = X^{(i)}Y_i, i = 1, \dots, n+1\}$, где $X^{(i)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t$ — единица на i -й позиции, $Y_i = (a_{i1}, \dots, a_{i,i-1}, 1, a_{i,i+1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, n$, $X^{(n+1)} = (x_1, \dots, x_n)^t$, $Y_{n+1} = (y_1, \dots, y_n)$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1$. Приравнявая матричные коэффициенты в условии сбалансированности

$$\sum_{i=1}^n X^{(i)}Y_i + X^{(n+1)}Y_{n+1} = \frac{n+1}{n}E_n$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (y_1, \dots, y_n) = \frac{n+1}{n}E_n,$$

получаем $1 + x_i y_i = \frac{n+1}{n}$ и $a_{ij} + x_i y_j = 0$ при $i \neq j$. Отсюда следует, что $y_i = \frac{1}{n x_i}$, $a_{ij} = -\frac{x_i}{n x_j}$. Пусть $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Тогда

$$f_i = D^{-1}e_i D = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t \cdot \left(-\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 1, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$f_{n+1} = D^{-1}e_{n+1} D = (1, \dots, 1)^t \cdot \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, каждая $1-(n+1, n)$ -система сопряжена системе $\mathcal{E}_o = D^{-1}\mathcal{E}D = \{f_i\}$. Прямым вычислением убеждаемся, что $\mathcal{E}_o$ является $(n+1)-(n+1, n)$ -системой, допускающей симметрическую матрицу полупроизведений

$$A = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 & 1 \\ -1 & n & \dots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix} \in M_{n+1},$$

построенную по указанным представлениям идемпотентов f_i . Легко видеть, что мономиальные матрицы $T(i, j) = E_{ij} + E_{ji} + \sum_{s \neq i, j} E_{ss}$, $T(i) = E_{i, n+1} - E_{n+1, i} + \sum_{s \neq i, n+1} E_{ss}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, централизуют A и порождают в $PGL(n, \mathbb{C})$ подгруппу, изоморфную S_{n+1} . Значит, в силу теорем 4 и 5 $\text{Aut } \mathcal{E}_o \cong S_{n+1}$.

Суммируем вышеизложенное в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 7. В M_n ($n \geq 2$) существует единственная с точностью до сопряженности $1-(n+1, n)$ -система $\mathcal{E}_n$. При этом $\mathcal{E}_n$ является $(n+1)-(n+1, n)$ -системой, сопряженной симметрической системе, и $\text{Aut } \mathcal{E}_n \cong S_{n+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование $(n+1)-(n+1, n)$ -системы в M_n доказывается в [1; теорема 8] методом, использующим кратно-транзитивные группы. Именно, пусть G_i – стабилизаторы точек в каноническом подстановочном представлении S_n степени $n+1$, $\phi: S_{n+1} \rightarrow M_n$ – соответствующее линейное неприводимое представление. Тогда идемпотенты $e_i = \frac{1}{n!} \sum_{g \in G_i} \phi(g)$, $i = 1, \dots, n+1$, образуют $(n+1)-(n+1, n)$ -систему, группа автоморфизмов которой, очевидно, изоморфна S_{n+1} .

4.2. Границы для v .

ТЕОРЕМА 8. 1) Если в M_n существует $1-(v, n)$ -система, то $v \geq n$.
2) Если в M_n существует $2-(v, n)$ -система, то либо $v = n+1$, либо $n + \frac{1 + \sqrt{4n+1}}{2} \leq v \leq n^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Домножая условие сбалансированности справа на M_n и учитывая равенство $\dim e_i M_n = n$, получаем, что $v \geq n$.

2) Если $\mathcal{E}$ – $2-(v, n)$ -система, то $v = n$ невозможно в силу леммы 4.6 работы [1]. В силу линейной независимости системы $\mathcal{E}$ [1; лемма 4.5] получаем $v \leq n^2$.

Пусть $v > n+1$. Тогда в силу леммы 2.5 определена двойственная $(v, v-n)$ -система $\bar{\mathcal{E}}$. Линейная независимость $\bar{\mathcal{E}}$ влечет неравенство $v \leq (v-n)^2$. Отсюда получаем $v \geq n + \frac{1 + \sqrt{4n+1}}{2}$. Теорема доказана.

Пункт 2) теоремы 8 можно переформулировать как

СЛЕДСТВИЕ 1. В M_n не существует $(n+s, n)$ -систем, если $n > s^2 - s$ или $s > n^2 - n$.

§ 5. Сбалансированные системы с 2-транзитивной группой автоморфизмов

5.1. Конструкции. (А) Пусть конечная группа G действует 2-транзитивно на множестве Ω , G_i – стабилизатор точки $i \in \Omega$. Тогда $N(G_i) = G_i$ и G действует сопряжением 2-транзитивно на множестве подгрупп G_i .

Обозначим через $\text{Irr } G$ множество неприводимых комплексных характеров группы G . Для функций классов (т.е. функций, постоянных на классах сопряженности) ϕ, ψ положим $[\phi, \psi]_G = [\phi, \psi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}$.

Пусть θ_i – характер стабилизатора G_i , $G_j = xG_i x^{-1}$. Для $g_j = xg_i x^{-1} \in G_j$, $g_i \in G_i$, положим $\theta_j(g_j) = \theta_i(g_i)$. Если $G_j = yG_i y^{-1}$, то равенство $xg'x^{-1} = yg''y^{-1} \in G_j$, $g', g'' \in G_i$, влечет $\theta_i(g') = \theta_i(g'')$, так как g' и g'' сопряжены посредством $y^{-1}x \in N(G_i) = G_i$. Таким образом, θ_j – характер стабилизатора G_j , однозначно определяемый характером θ_i . Будем называть характеры θ_i, θ_j согласованными.

Пусть $\phi \in \text{Irr } G$, $n = \phi(1) > 1$, $\theta_1 \in \text{Irr } G_1$, $[\phi_{G_1}, \theta_1]_{G_1} = a \neq 0$, $\phi_{G_1} \neq a\theta_1$. Пусть характеры θ_i , $i \in \Omega$, согласованы с θ_1 и, следовательно, согласованы между собой. Очевидно, $\theta_i \in \text{Irr } G_i$. Хорошо известно [6], что $f_i = \frac{\theta_i(1)}{|G_i|} \sum_{g \in G_i} \theta_i(g^{-1})g$ — центральный идемпотент групповой алгебры $\mathbb{C}[G_i] \subset \mathbb{C}[G]$. Положим $e_i = \Phi(f_i)$, $i \in \Omega$, где $\Phi: G \rightarrow M_n$ — представление группы G с характером ϕ .

ТЕОРЕМА 9. *Идемпотенты e_i , $i \in \Omega$, образуют сбалансированную 2-систему в M_n , которая обладает 2-транзитивной группой автоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr } e_i &= \phi(f_i) = \frac{\theta_i(1)}{|G_i|} \sum_{g \in G_i} \theta_i(g^{-1})\phi(g) \\ &= \theta_i(1)[\phi_{G_i}, \theta_i]_{G_i} = \theta_1(1)[\phi_{G_1}, \theta_1]_{G_1} = a\theta_1(1). \end{aligned}$$

Так как $a \neq 0$, то $e_i \neq 0$. Из $\phi_{G_1} \neq a\theta_1$ следует $\phi(1) > a\theta_1(1) = \text{tr } e_i$. Отсюда получаем $e_i \neq E_n$.

Далее, в силу согласованности характеров θ_i идемпотенты e_i образуют G -орбиту относительно действия сопряжением. Отсюда в силу неприводимости представления Φ по лемме Шура выводим $\sum_{i \in \Omega} e_i = kE_n$.

Пусть $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \Omega$, $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$. В силу 2-транзитивности группы G на Ω существует $x \in G$: $x(i_1) = i_2$, $x(j_1) = j_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr } e_{i_1} e_{i_2} &= \frac{\theta_{i_1} \theta_{i_2}}{|G_{i_1}| |G_{i_2}|} \sum_{g_1 \in G_{i_1}, g_2 \in G_{i_2}} \theta_{i_1}(g_1^{-1}) \theta_{i_2}(g_2^{-1}) \phi(g_1 g_2) \\ &= \frac{\theta_1^2(1)}{|G_1|^2} \sum_{g_1 \in G_{i_1}, g_2 \in G_{i_2}} \theta_{j_1}(xg_1^{-1}x^{-1}) \theta_{j_2}(xg_2^{-1}x^{-1}) \phi(xg_1 g_2 x^{-1}) \\ &= \frac{\theta_{j_1} \theta_{j_2}}{|G_{j_1}| |G_{j_2}|} \sum_{h_1 \in G_{j_1}, h_2 \in G_{j_2}} \theta_{j_1}(h_1^{-1}) \theta_{j_2}(h_2^{-1}) \phi(h_1 h_2) = \text{tr } e_{j_1} e_{j_2}. \end{aligned}$$

Это доказывает, что идемпотенты e_i образуют сбалансированную 2-систему $\mathcal{E}$. Очевидно, подгруппа $\pi_n(\Phi(G))$ в $\text{Aut } \mathcal{E}$ действует на $\mathcal{E}$ 2-транзитивно. Теорема доказана.

(В) Пусть группа G действует сопряжением 2-транзитивно на множестве подгрупп $H_1, \dots, H_v$. В групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$ рассмотрим идемпотенты

$$f_i = \frac{1}{|H_i|} \sum_{g \in H_i} g, \quad i = 1, \dots, v.$$

Пусть $\Phi: G \rightarrow M_n$ — представление группы G с характером ϕ , $n > 1$, такое, что $[\phi_{H_i}, 1_{H_i}] \neq 0$ и $H_i \not\leq \text{Ker } \Phi$. Тогда, используя те же аргументы, что и в конструкции **(А)**, легко видеть, что идемпотенты $\Phi(f_i)$ образуют сбалансированную 2-систему, на которой $\pi_n(\Phi(G))$ действует 2-транзитивно.

Заметим, что в качестве подгрупп H_i можно взять любые характеристические подгруппы в G_i , например, коммутанты G'_i .

(С) Эта конструкция использует матрицы полупроизведений и относится к сбалансированным системам из примитивных идемпотентов.

Пусть $\Psi: g \mapsto D(g)P(g)$ – мономиальное представление степени v группы G , $D(g)$ – диагональная матрица и $P(g) = \sum_{i=1}^v E_{\pi(i),i}$ – подстановочная матрица. Отображение $\bar{\Psi}: g \mapsto \pi$ является гомоморфизмом G в симметрическую группу S_v и называется *подстановочной составляющей* представления Ψ . Положим $g(i) = \bar{\Psi}(g)(i)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть матрица $X = (x_{ij})_{v \times v}$ централизует матрицы $\psi(g)$, $g \in G$, и $X^2 = X$, $\text{tr } X \neq 1, v$. Если $\bar{\Psi}(G)$ – 2-транзитивная группа подстановок, то $\frac{v}{n}X$ есть матрица полупроизведений некоторой (v, n) -системы $\mathcal{E}$ и G действует 2-транзитивно на $\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $\Psi(g)X = X\Psi(g)$ следует

$$D^{-1}(g)XD(g) = P(g)XP^{-1}(g),$$

т.е.

$$x_{ii} = x_{g^{-1}(i)g^{-1}(j)}, \quad d_i^{-1}(g)x_{ij}d_j(g) = x_{g^{-1}(i)g^{-1}(j)} \quad \text{при } i \neq j, \quad (5.1)$$

где $D(g) = \text{diag}(d_1(g), \dots, d_v(g))$. Из (5.1) получаем $x_{ij}x_{ji} = x_{g^{-1}(i)g^{-1}(j)} \times x_{g^{-1}(j)g^{-1}(i)}$. Так как $\bar{\Psi}(G)$ действует 2-транзитивно, то $x_{ii} = \text{const} = \lambda_1$, $x_{ij}x_{ji} = \text{const} = \lambda_2$. Из $\text{tr } X = n$ находим $\lambda_1 = \frac{v}{n}$. Таким образом, матрица $\frac{v}{n}X$ удовлетворяет условиям п. 3) теоремы 1, применяя которую получаем требуемое. Теорема доказана.

5.2. Общие результаты. Покажем, что для систем из примитивных идемпотентов конструкция (А) является максимально общей, т.е. таким образом может быть получена любая сбалансированная (v, n) -система, обладающая 2-транзитивной группой автоморфизмов. Будем рассматривать в дальнейшем только (v, n) -системы, для которых $v - 1 > n$, и называть такие системы *нетривиальными*.

Пусть группа Γ действует 2-транзитивно на нетривиальной (v, n) -системе $\mathcal{E}_1 = \{e_i\}$, G – универсальная накрывающая Γ и представление $\Phi_1: G \rightarrow M_n$ с характером ϕ_1 линейризует естественное вложение $\Gamma \leq \text{Aut } M_n$. Группа G действует сопряжением на $\mathcal{E}_1$, ядро этого действия совпадает с центром $Z(G)$, который изоморфен мультипликатору Шура группы Γ . Обозначим через G_i стабилизатор в G идемпотента $e_i = X^{(i)}Y_i$. Для $g \in G_i$ имеем

$$\Phi_1(g)X^{(i)} = \theta_i(g)X^{(i)}, \quad Y_i\Phi_1(g)^{-1} = \bar{\theta}_i(g)Y_i, \quad (5.2)$$

где θ_i – линейный характер группы G_i . Пусть $\mathcal{E}_2$ – двойственная к $\mathcal{E}_1$ $(v, v - n)$ -система и обозначения $F_1, F_2, \Phi, \Phi_2, \phi, \phi_2$ имеют тот же смысл, что и в §3.

Нам понадобится следующий известный результат.

ЛЕММА 5.1 [6; задача 5.24]. Пусть группа G действует 2-транзитивно на множестве Ω ; $i, j \in \Omega$, $i \neq j$. Если $\theta \in \text{Irr } G_i$ и $\theta_{G_{ij}} \in \text{Irr } G_{ij}$, то $[\theta^G, \theta^G] \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G 2-транзитивна на Ω , то разложение G в непесекающееся объединение двойных смежных классов по подгруппе G_i имеет вид $G = G_i \cup G_i t G_i$, где t выбрано так, что $t(i) = j$. По теореме Макки $(\theta^G)_{G_i} = \theta + (\mu_{G_{ij}})^{G_i}$, где μ — характер G_j , определяемый равенством $\mu(tgt^{-1}) = \theta(g)$, $g \in G_i$. По формуле взаимности Фробениуса имеем

$$[\theta^G, \theta^G]_G = [\theta, (\theta^G)_{G_i}]_{G_i} = [\theta, \theta + (\mu_{G_{ij}})^{G_i}]_{G_i} = 1 + [\theta_{G_{ij}}, \mu_{G_{ij}}]_{G_{ij}} \leq 2,$$

где последнее неравенство вытекает из условий $\theta_{G_{ij}} \in \text{Irr } G_{ij}$ и $\theta(1) = \mu(1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Для характеров ϕ_1 и ϕ_2 имеем $\phi_1, \phi_2 \in \text{Irr } G$ и $[\phi_1, \phi_2] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6 $\theta_i^G = \phi_1 + \phi_2$ и по лемме 5.1

$$[\phi_1 + \phi_2, \phi_1 + \phi_2] = [\phi_1, \phi_1] + [\phi_2, \phi_2] + 2[\phi_1, \phi_2] \leq 2.$$

Значит, $[\phi_1, \phi_1] = [\phi_2, \phi_2] = 1$ и $[\phi_1, \phi_2] = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 11. 1) Характеры θ_i согласованы;

$$2) e_i = \frac{1}{|G_i|} \sum_{g \in G_i} \bar{\theta}_i(g) \Phi_1(g);$$

3) ассоциированный идемпотент F_i системы $\mathcal{E}_i$ может быть найден по формуле

$$F_i = \frac{\phi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_i(g) \Phi(g), \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $G_j = hG_i h^{-1}$, $g \in G_i$. Тогда $\Phi_1(h)X^{(i)} = cX^{(j)}$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$ и

$$\begin{aligned} \theta_i(hgh^{-1})X^{(j)} &= \Phi_1(hgh^{-1})X^{(j)} = \Phi_1(hgh^{-1}) \cdot c^{-1}\Phi_1(h)X^{(i)} \\ &= \Phi_1(h) \cdot c^{-1}\theta_i(g)X^{(i)} = \theta_i(g)X^{(j)}, \end{aligned}$$

т.е. характеры θ_i и θ_j согласованы.

2) Положим $f_i = \frac{1}{|G_i|} \sum_{g \in G_i} \bar{\theta}_i(g) \Phi_1(g)$. Тогда f_i — идемпотент и по лемме 5.2 и теореме 6 имеем

$$\text{tr } f_i = [\theta_i, (\phi_1)_{G_i}]_{G_i} = [\theta_i^G, \phi_1]_G = [\phi_1 + \phi_2, \phi_1]_G = 1.$$

Из (5.2) вытекает, что $f_i e_i = e_i f_i = e_i$. Отсюда получаем

$$(f_i - e_i)^2 = f_i - e_i f_i - f_i e_i + e_i = f_i - e_i,$$

т.е. $f_i - e_i$ — идемпотент. Так как $\text{tr}(f_i - e_i) = 0$, то $f_i - e_i = 0$.

3) По лемме 3.1 имеем

$$\sigma_i(\Phi_i(g)) = \Phi(g^{-1})F_i = F_i \Phi(g^{-1}). \quad (5.3)$$

Положим

$$f_i = \frac{\phi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_i(g^{-1})g \quad \text{и} \quad \bar{f}_i = \frac{\phi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_i(g)g.$$

Тогда f_i – центральный идемпотент групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$, соответствующий неприводимому характеру ϕ_i . Поэтому $\Phi_i(f_i) = \Phi_i(1) = E_n$ или E_{v-n} . Из (5.3) следует

$$F_i = \sigma_i(\Phi_i(f_i)) = \frac{\phi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_i(g^{-1})\Phi(g^{-1})F_i = \Phi(\bar{f}_i)F_i = F_i\Phi(\bar{f}_i).$$

Так как по п. 2) теоремы 6

$$\text{tr } \Phi(\bar{f}_i) = \phi_i(1)[\phi_i, \bar{\phi}] = \phi_i(1)[\phi_i, \phi_1 + \phi_2] = \phi_i(1) = \text{tr } F_i,$$

то, как и в предыдущем пункте, получаем $F_i = \Phi(\bar{f}_i)$. Теорема доказана.

В качестве немедленного следствия доказанной теоремы получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 12. *Каждая нетривиальная сбалансированная система из примитивных идемпотентов, обладающая 2-транзитивной группой автоморфизмов Γ , определяется парой характеров (ϕ, θ) , где $\phi \in \text{Irr } G$ и θ – линейный характер подгруппы в G , стабилизирующей идемпотент, причем $[\phi, \theta^G] \geq 1$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что (v, n) -система $\mathcal{E}$ имеет параметры (Γ, ϕ, θ) , если Γ – 2-транзитивная подгруппа в $\text{Aut } \mathcal{E}$, ϕ – характер представления $\Phi: G \rightarrow M_n$, линейризующего естественное вложение $\Gamma \leq \text{Aut } M_n$, θ – характер подгруппы G_0 в G , стабилизирующей идемпотент $e_0 = X^{(0)}Y_0 \in \mathcal{E}$, определяемый из равенства $\Phi(g)X^{(0)} = \theta(g)X^{(0)}$, $g \in G_0$.

Пусть теперь Γ – 2-транзитивная группа подстановок множества Ω , G – универсальная накрывающая Γ . Группа G очевидным образом действует на Ω ; пусть G_i – стабилизатор точки в группе G . Выясним, при каких условиях

- а) группа Γ реализуется как 2-транзитивная подгруппа в группе автоморфизмов нетривиальной сбалансированной системы из $|\Omega|$ примитивных идемпотентов в алгебре матриц M_n .

Первое очевидное условие состоит в том, что $n < v - 1$. Это будет предполагаться в дальнейшем без специальных оговорок.

В силу леммы 5.2 для выполнения а) необходимым является следующее условие:

- б) существует характер $\phi \in \text{Irr } G$ степени n , для которого найдется отличный от него характер $\psi \in \text{Irr } G$ такой, что $\phi(1) + \psi(1) = |\Omega|$.

Как показывает случай группы $\Gamma = PSL(2, 9)$, условие б) не является достаточным. Ниже будет показано, что $PSL(2, 9)$ не реализуется как группа автоморфизмов ни $(10, 4)$ -, ни $(10, 6)$ -систем, хотя универсальная накрывающая $G = 6.PSL(2, 9)$ имеет неприводимые характеры степеней 4 и 6.

Необходимым и достаточным для выполнения а) является условие

- в) существует характер $\phi \in \text{Irr } G$ степени n , для которого найдется линейный характер θ подгруппы G_i такой, что $[\theta, \phi_{G_i}] \geq 1$.

При этом в силу леммы 5.1 $\theta^G = \phi + \psi$, $\psi \in \text{Irr } G$, $\psi \neq \phi$, и, следовательно, неравенство $[\theta, \phi_{G_i}] \geq 1$ равносильно равенству $[\theta, \phi_{G_i}] = 1$. Кроме того, характер θ должен быть неединичным, иначе $(1_{G_i})^G = \phi + 1_G$ и $n = \phi(1) = |\Omega| - 1$, что противоречит предположению о нетривиальности сбалансированной системы. Необходимость условия в) очевидна, достаточность же вытекает из конструкций (А) или (С). Например, если Θ – представление группы G_i , отвечающее характеру θ (фактически в силу линейности θ имеем $\Theta(g) = \theta(g)$), то индуцированное представление Θ^G , которое является мономияльным, допускает ровно два нетривиальных идемпотента F_ϕ и F_ψ , централизующих матрицы $\Theta^G(g)$, $g \in G$. Эти идемпотенты находятся по формулам

$$F_\phi = \frac{\phi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \Theta^G(g), \quad F_\psi = \frac{\psi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g^{-1}) \Theta^G(g).$$

В силу теоремы 10 идемпотенты F_ϕ и F_ψ являются ассоциированными идемпотентами двух двойственных сбалансированных систем с группой автоморфизмов, содержащей подгруппу, изоморфную Γ .

Условие в) можно заменить эквивалентным, более удобным для проверки условием.

ЛЕММА 5.3. Пусть η – характер группы H . Тогда следующие условия равносильны:

- (i) существует линейный характер θ такой, что $[\theta, \eta] \geq 1$;
- (ii) $[1_{H'}, \eta_{H'}] \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть V – H -модуль, отвечающий характеру η . Так как $[\theta, \eta] \geq 1$, то существует подмодуль W , отвечающий θ . В силу того, что H' действует на W тождественно, $[1_{H'}, \eta_{H'}] \geq 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Достаточно показать, что если η – нелинейный неприводимый характер, то $[1_{H'}, \eta_{H'}] = 0$. Но если $[1_{H'}, \eta_{H'}] \neq 0$, то по теореме Клиффорда $\eta_{H'} = \eta(1)1_{H'}$, т.е. $H' \leq \text{Ker } \eta$. Значит, η является неприводимым характером абелевой группы H/H' . Это противоречит нелинейности η . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 13. Для выполнения а) необходимо и достаточно выполнения условия

- г) существует характер $\phi \in \text{Irr } G$ степени n такой, что $[1_{G'_i}, \phi_{G'_i}] \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5.3 условия в) и г) равносильны. Как было отмечено выше, условие в) является необходимым и достаточным для выполнения а). Теорема доказана.

Будем называть нелинейные характеры $\phi, \psi \in \text{Irr } G$ *двойственными*, если существует линейный характер θ стабилизатора G_i такой, что $\theta^G = \phi + \psi$. Существование пары двойственных характеров равносильно выполнению а) для некоторого n . Сформулируем наиболее рациональный алгоритм поиска пар двойственных характеров.

1. Разбиваем нелинейные неприводимые характеры группы G на пары (ϕ, ψ) такие, что $\phi(1) + \psi(1) = |\Omega|$.

2. Для одного характера из пары, например ϕ , проверяем выполняется ли $[1_{G'_i}, \phi_{G'_i}] \geq 1$. В случае положительного результата проверяем на это условие оставшийся характер, в противном случае отбрасываем пару.

3. Для пар характеров (ϕ, ψ) , полученных в результате 1-го и 2-го шагов, проверяем существование линейного характера θ подгруппы G_i такого, что $\theta^G = \phi + \psi$. Если мы имеем только одну пару характеров фиксированных степеней, то необходимости в этой проверке нет.

С точки зрения классификации сбалансированных систем, группа автоморфизмов которых содержит Γ , полезна следующая

ТЕОРЕМА 14. *Системы с параметрами (Γ, ϕ, θ_1) и (Γ, ϕ, θ_2) сопряжены, если $[1_{G'_i}, \phi_{G'_i}] = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся конструкцией **(В)**, полагая $H_i = G'_i$. А именно, пусть сбалансированная система $\mathcal{E} = \{e_i\}$ имеет параметры $(\Gamma, \phi, *)$. Положим $f_i = \frac{1}{|G'_i|} \sum_{g \in G'_i} \Phi(g)$, где Φ – представление с характером ϕ . Тогда $f_i e_i = e_i f_i = e_i$ и $\text{tr } f_i = \text{tr } e_i = 1$. Как и в доказательстве теоремы 12, отсюда следует $f_i = e_i$. Так как все представления с характером ϕ сопряжены, то отсюда вытекает, что все системы с параметрами $(\Gamma, \phi, *)$ сопряжены. Теорема доказана.

5.3. Группа $\Gamma = PSL(2, q)$, q нечетно, и ее 2-транзитивное представление степени $q + 1$. Будем придерживаться обозначений из [7]. Рассмотрим отдельно следующие случаи.

1-й случай: $q = p^a \neq 9$, $q > 5$. В этом случае универсальная накрывающая $G = SL(2, q) = 2.\Gamma$ и стабилизатор точки $G_i \cong p^a : q - 1$, коммутант $G'_i \cong p^a$. Группа G имеет следующие степени нелинейных неприводимых характеров: $\frac{q-1}{2}$, $\frac{q+1}{2}$, $q-1$, $q, q+1$ [8]. При этом ровно два характера, обозначим их ϕ и ψ , имеют степень $\frac{q+1}{2}$. Таким образом, существует единственная пара характеров, сумма степеней которых равна $q + 1$. Эта пара – (ϕ, ψ) . Так как

$$[1_{G'_i}, \phi_{G'_i}] = [1_{G'_i}, \psi_{G'_i}] = 1, \quad (5.4)$$

то характеры ϕ, ψ двойственные, и в силу теоремы 14 каждая $(q + 1, *)$ -система с подгруппой автоморфизмов Γ сопряжена либо системе с параметрами (Γ, ϕ) , либо двойственной системе с параметрами (Γ, ψ) .

2-й случай: $q = 3$. Нетривиальная $(4, n)$ -система может существовать только при $n = 2$. Как отмечалось в [1], элементарными выкладками несложно показать, что существует единственная $(4, 2)$ -система $\mathcal{E}$ и $\text{Aut } \mathcal{E} \cong PSL(2, 3) \cong A_4$. Поэтому случай $q = 3$ можно было бы считать рассмотренным. Однако удобнее включить его в общую канву рассуждений. Группа $G = SL(2, 3)$ имеет три характера степени 2. Но только для двух из них, обозначим их ϕ и ψ , выполняется (5.4). Для оставшегося характера μ имеем $[1_{G'_i}, \mu_{G'_i}] = 0$. Значит, и в этом случае мы имеем единственную пару двойственных характеров (ϕ, ψ) .

3-й случай: $q = 5$. Помимо двух характеров ϕ и ψ степени 3 универсальная накрывающая $G = SL(2, 5)$ имеет два характера μ_1, μ_2 степени 2 и два характера

ν_1, ν_2 степени 4. Пары (μ_i, ν_j) отбрасываем, так как в силу теоремы 8 не существует $(6, 2)$ - и $(6, 4)$ -систем. Для ϕ и ψ выполняется (5.1).

4-й случай: $q = 9$. В этом случае множество $\text{Irr } G$, где универсальная накрывающая $G = 6.G$, помимо двух характеров ϕ, ψ степени 5 содержит два характера μ_1, μ_2 степени 4 и три характера ν_1, ν_2, ν_3 степени 6. Степени остальных неприводимых нелинейных характеров: 3, 8, 9, 10, 12, 15 [7]. Таким образом, кроме пары (ϕ, ψ) мы имеем еще 6 пар характеров (μ_i, ν_j) , сумма степеней которых равна 10. Характеры μ_1, μ_2 являются фактически характеристиками накрывающей $\widehat{G} = 2.G = SL(2, 9)$. Имеем $\widehat{G}'_i \cong 3^2$ и $[1_{\widehat{G}'_i}, (\mu_1)_{\widehat{G}'_i}] = [1_{\widehat{G}'_i}, (\mu_2)_{\widehat{G}'_i}] = 0$. Следовательно, в силу теоремы 13 пары (μ_i, ν_j) отбрасываем. Характеры ϕ, ψ укладываются в схему 1-го случая: $[1_{G'_i}, \phi_{G'_i}] = [1_{G'_i}, \psi_{G'_i}] = 1$.

Таким образом, в каждом случае существует единственная пара двойственных характеров (ϕ, ψ) группы G , причем их степени равны $\frac{q+1}{2}$. Следовательно, в силу теоремы 14 справедлив вывод: *каждая $(q+1, *)$ -система с подгруппой автоморфизмов Γ сопряжена либо системе с параметрами (Γ, ϕ) , либо двойственной системе с параметрами (Γ, ψ) .*

Напомним определение матриц Пэли. Пусть χ — квадратичный характер поля $\mathbb{F}_q = \{a_1, \dots, a_q\}$, q нечетно. Положим $Q = (q_{ij})_{q \times q}$, $q_{ij} = \chi(a_i - a_j)$ (Q называется матрицей Джекобстола). Матрицей Пэли называется матрица

$$C_{q+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \chi(-1)\mathbf{j}^t & Q \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{j} = (1, \dots, 1)_{1 \times q}.$$

Нам понадобятся следующие известные свойства матриц Пэли.

- ЛЕММА 5.4 [2], [9], [10]. 1) При $q \equiv 1 \pmod{4}$ матрица Пэли C_{q+1} симметрична, при $q \equiv -1 \pmod{4}$ кососимметрична;
 2) $C_{q+1}^2 = \chi(-1)qE_{q+1}$;
 3) централизатор матрицы C_{q+1} в группе мономиальных матриц $M(q+1)$ содержит подгруппу, изоморфную $SL(2, q)$;
 4) матрицы C_{q+1} и $-C_{q+1}$ сопряжены посредством мономиальной матрицы.

ТЕОРЕМА 15. Существует единственная с точностью до сопряженности $(q+1, n)$ -система $\mathcal{E}$ с 2-транзитивной группой автоморфизмов $\Gamma = PSL(2, q)$, q нечетно. При этом $n = \frac{q+1}{2}$ и $\mathcal{E}$ допускает приведенную матрицу произведений $i^\varepsilon C_{q+1}$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \chi(-1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 и пп. 1) и 2) леммы 5.4 матрица C_{q+1} при $q \equiv 1 \pmod{4}$ и матрица iC_{q+1} при $q \equiv -1 \pmod{4}$ являются ПМП некоторой $\left(q+1, \frac{q+1}{2}\right)$ -системы $\mathcal{E}$. Из п. 3) леммы 5.4 следует, что $\text{Aut } \mathcal{E}$ содержит 2-транзитивную подгруппу Γ . Таким образом, с учетом приведенного выше вывода получаем, что каждая $(q+1, *)$ -система с параметрами $(\Gamma, *, *)$ сопряжена либо $\mathcal{E}$, либо двойственной системе $\overline{\mathcal{E}}$. Но $\overline{\mathcal{E}}$ допускает ПМП, противоположную по знаку ПМП системы $\mathcal{E}$, т.е. $-i^\varepsilon C_{q+1}$. Значит, в силу п. 4) леммы 5.4 системы $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ сопряжены. Теорема доказана.

§ 6. $(2n, n)$ - и $\left(m^2, \frac{m^2 \pm m}{2}\right)$ -системы

6.1. Конференс-матрицы и $(2n, n)$ -системы. Напомним, матрица C порядка v с нулевой диагональю и $+1$ или -1 в других позициях называется *конференс-матрицей*, или *C -матрицей*, если C удовлетворяет условию

$$CC^t = (v - 1)E_v.$$

C -матрицы встречаются в различных разделах математики (см. [9], [10]). Их систематическое изучение было начато около 50 лет назад Белевичем [11], который ввел термин “конференс-матрица”. Известны следующие необходимые условия существования C -матриц:

- 1) $v \equiv 0 \pmod{2}$;
- 2) для симметрических C -матриц $v \equiv 2 \pmod{4}$ и $v - 1 = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$ [11], [12];
- 3) для кососимметрических C -матриц $v = 2$ или $v \equiv 0 \pmod{4}$.

Очевидно, C -матрицы выдерживают умножение строки или столбца на -1 и сопряжение подстановочной матрицей.

Фактически, кроме симметрических и кососимметрических, других C -матриц не существует.

ЛЕММА 6.1 [10]. *Путем умножения строк и столбцов на -1 C -матрица порядка v может быть приведена*

- 1) *к симметрическому виду, если $v \equiv 2 \pmod{4}$;*
- 2) *к кососимметрическому виду, если $v \equiv 0 \pmod{4}$.*

ТЕОРЕМА 16. 1) *Если C – симметрическая (соответственно кососимметрическая) C -матрица порядка $2n > 2$, то C (соответственно iC) суть ПМП некоторой $(2n, n)$ -системы.*

2) *Если существует C -матрица порядка $2n > 2$, то существует $(2n, n)$ -система.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $C^t = C$, то $C^2 = (2n - 1)E_{2n}$. Если $C^t = -C$, то $(iC)^2 = -C^2 = CC^t = (2n - 1)E_{2n}$. Применяя теорему 3, получаем требуемое.

2) вытекает из 1) и леммы 6.1. Теорема доказана.

Примером C -матрицы является матрица Пэли C_{q+1} . Симметрические C -матрицы построены для порядков

$$v = p^h + 1 \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \text{ простое (Пэли);}$$

кососимметрические C -матрицы – для порядков

$$v = 2^t \prod_{i=1}^s (p_i^{h_i} + 1), \quad p_i^{h_i} + 1 \equiv 0 \pmod{4},$$

где p_i нечетные простые, t, h_i, s неотрицательные целые (Вильямсон). Кроме того, C -матрицы построены для некоторых других порядков [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Инверсно транспонированной* к матрице $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $A^{it} = (a'_{ij})_{n \times m}$, $a'_{ij} = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq 0$; $a'_{ij} = 0$, если $a_{ji} = 0$. Матрица A порядка v с нулевой диагональю и ненулевыми остальными коэффициентами называется

- 1) *GC-матрицей* (generalized conference), если $AA^{it} = (v-1)E_v$;
- 2) *IGC-матрицей*, если A — GC-матрица и $A = A^{it}$.

Очевидно, GC-матрицы обобщают C-матрицы и совпадают с ними, если внедиагональные элементы равны ± 1 .

Из теоремы 3 следует, что IGC-матрицы имеют четный порядок v , и при $v \geq 4$ класс IGC-матриц совпадает с классом приведенных матриц полупроизведений $\left(v, \frac{1}{2}v\right)$ -систем.

Пример GC-матриц (обобщенных матриц Пэли). Пусть χ — произвольный неединичный мультипликативный характер конечного поля $\mathbb{F}_q = \{a_1, \dots, a_q\}$ (q может быть четным). Положим $Q = (q_{ij})_{q \times q}$, $q_{ij} = \chi(a_i - a_j)$, и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & & & \\ \vdots & & Q & \\ b & & & \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 \neq a, b \in \mathbb{C}.$$

Тогда несложно показать, что $AA^{it} = qE_{q+1}$. В случае $q = 2^t$ порядок A четен.

Отметим, что GC-матрицы выдерживают умножение на невырожденную диагональную матрицу справа и слева и сопряжение подстановочной матрицей, а IGC-матрицы выдерживают $M(v)$ -сопряжение. При этом каждая GC- или IGC-матрица может быть приведена соответствующим преобразованием к *нормализованному* виду

$$B_{v \times v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & S & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \text{где } SS^{it} = (v-1)E_{v-1} - J, \quad SJ = JS = 0$$

и J — матрица порядка $v-1$ из одних единиц. В случае IGC-матрицы B добавляется условие $S = S^{it}$.

ТЕОРЕМА 17. 1) *Каждая IGC-матрица порядка 4 $M(4)$ -сопряжена матрице B_4 .*

2) *Каждая IGC-матрица порядка 6 $M(6)$ -сопряжена матрице $B_6(t)$, где*

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & i & -i \\ 1 & -i & 0 & i \\ 1 & i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad B_6(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & t & -t \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -t & t \\ 1 & -1 & t^{-1} & -t^{-1} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -t^{-1} & t^{-1} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $t \neq 0$. При этом $B_6(t_1)$ и $B_6(t_2)$ $M(6)$ -сопряжены тогда и только тогда, когда $t_1 = \pm t_2$. Кроме того, если $\mathcal{E}(t)$ — $(6, 3)$ -система, допускающая ПМП $B_6(t)$, то $\text{Aut } \mathcal{E}(\pm 1) \cong A_5$ и $\text{Aut } \mathcal{E}(t) \cong A_4$ при $t \neq \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $X = (x_{ij})$ – нормализованная IGC -матрица порядка 4. Тогда имеем

$$\begin{aligned} X_2 X^{(1)} = 0 &\Rightarrow x_{23} = a, x_{24} = -a \Rightarrow (\text{так как } X = X^{it}) x_{32} = a^{-1}, x_{42} = -a^{-1} \\ &\Rightarrow (\text{так как } X_3 X^{(1)} = X_4 X^{(1)} = 0) x_{34} = -a^{-1}, x_{43} = a^{-1} \\ &\Rightarrow 1 = x_{34} x_{43} = -a^{-2} \Rightarrow a = \pm i. \end{aligned}$$

Значит, либо $X = B_4$, либо $X = P B_4 P^{-1}$, где $P = E_{11} + E_{22} + E_{34} + E_{43}$ – подстановочная матрица, т.е. в любом случае X $M(4)$ -сопряжена B_4 .

2) Доказательство в этом случае основывается на следующем наблюдении:

$$(\star) x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1} = 0, x_1 + x_2 \neq 0 \Rightarrow \{x_1, x_2\} = \{-x_3, -x_4\} \text{ (неупорядоченные пары).}$$

Пусть $X = (x_{ij})$ – нормализованная IGC -матрица порядка 6. Тогда

$$X_i X^{(1)} = X_1 X^{(i)} = 0, i > 1 \Rightarrow \sum_{j \neq 1, i} x_{ij} = \sum_{j \neq 1, i} x_{ij}^{-1} = 0.$$

Значит, в силу $(\star)$

$(\star\star)$ в i -й строке при $i > 1$ коэффициенты x_{ij} , $j \neq 1, i$, разбиваются на пары противоположных друг другу чисел (то же для столбцов).

Сопрягая в случае необходимости подстановочной матрицей, без ограничения общности можем считать, что матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b & -a & -b \\ 1 & a^{-1} & 0 & c & * & * \\ 1 & b^{-1} & c^{-1} & 0 & * & * \\ 1 & -a^{-1} & * & * & 0 & * \\ 1 & -b^{-1} & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad a + b \neq 0.$$

Далее с учетом $(\star\star)$ осуществляем перебор возможных случаев: 1) $a^{-1} + c \neq 0$, $b + c \neq 0$; 2) $a^{-1} + c = 0$, $b + c \neq 0$; 3) $a^{-1} + c \neq 0$, $b + c = 0$; 4) $a^{-1} + c = 0$, $b + c = 0$. В результате, полагая один из матричных коэффициентов равным параметру $t \neq 0$, получаем матрицы, подстановочно сопряженные либо $B_6(t)$, либо $B_6(t^{-1})$. Для краткости рассмотрим только случай 4).

В силу $(\star\star)$ имеем $a^{-1} + c = 0 \Rightarrow x_{35} = x$, $x_{36} = -x$; $b + c = 0 \Rightarrow b^{-1} + c^{-1} = 0 \Rightarrow x_{45} = y$, $x_{46} = -y$.

Далее, $X_2 X^{(3)} = 0 \Rightarrow (b/c) - (a/x) + (b/x) = -1 \Rightarrow (\text{так как } b/c = -1) a = b \Rightarrow (\text{так как } a^{-1} = b = -c) a = b = -c = \pm 1$; $X_3 X^{(4)} = 0 \Rightarrow (b/a) + 2(x/y) = -1 \Rightarrow x = -y$.

Положим $x_{35} = x = t$. Тогда в случае $a = b = -c = 1$, определяя оставшиеся матричные коэффициенты с учетом $x_{ij} x_{ji} = 1$ и $(\star\star)$, получаем в итоге матрицу $B_6(t)$. Делая проверку, убеждаемся, что $B_6(t)$ есть IGC -матрица. В случае $a = b = -c = -1$ получаем матрицу, подстановочно сопряженную $B_6(t^{-1})$.

Теперь перейдем к исследованию мономиальной сопряженности матриц $B_6(t)$. Положим $P_\pi = \sum E_{\pi(i),i}$, где подстановка $\pi \in S_6$. Имеем

$$B_6(-t) = P_{(34)}B_6(t)P_{(34)} = P_{(56)}B_6(t)P_{(56)}. \quad (6.1)$$

Значит, $B_6(-t)$ и $B_6(t)$ подстановочно сопряжены. Кроме того, легко видеть, что $P_{(34)(56)} \in C_{M(6)}(B_6(t))$.

Пусть $B_6(t^{-1})$ и $B_6(t)$ $M(6)$ -сопряжены. Тогда

$$DB_6(t)D^{-1} = P_\pi B_6(t^{-1})P_\pi^{-1} \quad (6.2)$$

для некоторой диагональной матрицы $D = \text{diag}(1, d_2, \dots, d_6)$ и подстановочной матрицы P_π . Из (6.2) следует, что множество $\{d_2, \dots, d_6\}$ совпадает с множеством ненулевых чисел некоторого столбца матрицы $B_6(t)$. Если $t \neq \pm 1$, то, как несложно убедиться, D может быть только одной из следующих матриц: E_6 , $D_1 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1)$, $D_{\pm 2} = \text{diag}(1, -1, \pm t^{-1}, \mp t^{-1}, 1, 1)$, $D_{\pm 3} = \text{diag}(1, -1, 1, 1, \pm t, \mp t)$.

Если P_π сопрягает $B_6(t^{-1})$ и $B_6(t)$, то при $t \neq \pm 1, \pm i$ есть лишь две возможности: $\pi = (35)(46)$ или $(36)(45)$. Но ни та, ни другая подстановка, как легко проверить, не подходит. Значит,

а) $B_6(t)$ и $B_6(t^{-1})$ не являются подстановочно сопряженными при $t \neq \pm 1, \pm i$.

Между тем для каждой матрицы D_i существует подстановочная матрица P_i такая, что $D_i B_6(t) D_i^{-1} = P_i B_6(t) P_i^{-1}$. Отсюда в силу а) следует, что

- (i) $B_6(t)$ и $B_6(t^{-1})$ не являются мономиально сопряженными при $t \neq \pm 1, \pm i$;
- (ii) при $t \neq \pm 1$ группа $\pi_6(C_{M(6)}(B_6(t))) \cong \text{Aut } \mathcal{E}(t)$ состоит из элементов $\pi_6(P_{(34)(56)}^a)$, $\pi_6(P_i^{-1} D_i P_i^a)$, где $i = 1, \pm 2, \pm 3$, $a = 0$ или 1 , и изоморфна A_4 .

Для квадратной матрицы $X = (x_{ij})$ порядка v положим $\xi(X) = \{x_{ij}x_{jk}x_{ki} : i, j, k = 1, \dots, v, i \neq j \neq k \neq i\}$. Очевидно, множество $\xi(X)$ является инвариантом относительно $M(v)$ -сопряжения. Так как $\xi(B_6(t)) = \{\pm 1, \pm t, \pm t^{-1}\}$, то $B_6(t_1)$ и $B_6(t_2)$ не $M(6)$ -сопряжены при $t_1 \neq \pm t_2, \pm t_2^{-1}$. Таким образом, мы доказали, что $B_6(t_1)$ и $B_6(t_2)$ $M(6)$ -сопряжены тогда и только тогда, когда $t_1 = \pm t_2$.

Осталось доказать $\text{Aut } \mathcal{E}(\pm 1) \cong A_5$. Матрица Пэли C_6 есть IGC -матрица и, следовательно, $M(6)$ -сопряжена одной из матриц $B_6(t)$. Так как $\xi(C_6) = \{\pm 1\}$, то C_6 $M(6)$ -сопряжена $B_6(\pm 1)$. Но как следует из леммы 5.4, C_6 есть ПМП некоторой $(6, 3)$ -системы $\mathcal{E} = \{e_i\}$ и $\text{Aut } \mathcal{E}$ содержит подгруппу, изоморфную $PSL(2, 5) \cong A_5$. Так как $\{\text{tr } e_i e_j e_k : i \neq j \neq k \neq i\} = \xi(C_6) = \{\pm 1\}$, то $\text{Aut } \mathcal{E}$ не может действовать 3-транзитивно на $\mathcal{E}$. Поэтому $\text{Aut } \mathcal{E}$ изоморфна A_5 или S_5 . Но универсальная накрывающая группы S_5 не имеет неприводимых представлений степени 3. Остается $\text{Aut } \mathcal{E}(\pm 1) \cong \text{Aut } \mathcal{E} \cong A_5$. Теорема доказана.

6.2. Подходящие матрицы и $\left(m^2, \frac{m^2 \pm m}{2}\right)$ -системы. Напомним, матрицей Адамара или H -матрицей называется матрица H порядка v , состоящая из ± 1 и удовлетворяющая равенству

$$HH^t = vE_v.$$

В [4] было введено понятие подходящих матриц, которые затем в [5] были переименованы в GH -матрицы (generalized Hadamard). Удобно переформулировать определение GH -матриц, используя операцию инверсного транспонирования. Матрица A порядка v с ненулевыми коэффициентами называется GH -матрицей, если

$$AA^{it} = vE_v.$$

GH -матрицу A будем называть IGH -матрицей, если $A = A^{it}$.

Очевидно, GH -матрицы выдерживают $M(v)$ -умножение справа и слева, а IGH -матрицы выдерживают $M(v)$ -сопряжение. Следующие свойства GH -матриц хорошо известны.

ЛЕММА 6.2 [5]. 1) *Таблица характеров абелевой группы есть GH -матрица.*
 2) *Тензорное произведение GH -матриц (соответственно IGH -матриц) есть GH -матрица (соответственно IGH -матрица).*

Нас будут интересовать IGH -матрицы $A = (a_{ij})$ с постоянной диагональю. Так как $a_{ii} = a_{ii}^{-1}$, то это могут быть либо $(+1)$ -диагональные, либо (-1) -диагональные матрицы. Из теоремы 4 немедленно следует, что порядок v (± 1) -диагональной IGH -матрицы A должен быть квадратом и при $v > 4$ A является ПМП некоторой нетривиальной $\left(m^2, \frac{m^2 \pm 1}{2}\right)$ -системы.

Пример IGH -матрицы порядка m^2 с постоянной диагональю. Пусть $T = (t_{ij})$, $t_{ij} = \varepsilon^{ij}$; $i, j = 0, \dots, m-1$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$, т.е. T – таблица характеров циклической группы порядка $m > 1$. Будем обращаться с индексами как с элементами кольца вычетов $\mathbb{Z}_m$. В силу леммы 6.2 матрица $T \otimes T = \sum \varepsilon^{i_1 j_1 + i_2 j_2} E_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)}$ есть GH -матрица. Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} A_{m^2} &= (T \otimes T) \cdot \left(\sum E_{(j_1, j_2), (j_2, -j_1)} \right) = \sum \varepsilon^{i_1 j_1 + i_2 j_2} E_{(i_1, i_2), (j_2, -j_1)} \\ &= |k_1 = j_2, k_2 = -j_1| = \sum \varepsilon^{-i_1 k_2 + i_2 k_1} E_{(i_1, i_2), (k_1, k_2)}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\pm A_{m^2}$ есть (± 1) -диагональная IGH -матрица.

ТЕОРЕМА 18. 1) *При любом $m > 2$ существуют $\left(m^2, \frac{m^2 \pm m}{2}\right)$ -системы.*
 2) *Алгебра матриц M_n , где $n = 2, 3$, допускает базис из сбалансированной системы идемпотентов, т.е. является сбалансированной алгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) вытекает из рассмотренного выше примера.

2) Матрица $-A_9$ есть ПМП некоторой $(9, 3)$ -системы, которая, очевидно, является базисом алгебры M_3 . Существование (и единственность) $(4, 2)$ -системы было доказано в теореме 17, т.е. алгебра M_2 также сбалансированная. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Пусть примитивные идемпотенты e_i , $i = 1, \dots, 9$, образуют сбалансированный базис в M_3 , тогда инволюции $\sigma_i = 1 - 2e_i$ образуют ортогональный базис. Как доказано в [1], алгебра M_3 не является адамаровой. Таким образом, M_3 есть контрпример к утверждению

б) алгебра, обладающая ортогональным базисом из инволюций, является адамаровой.

Утверждение б) справедливо для коммутативных алгебр.

2) Интересен вопрос: существуют ли IGH -матрицы с ненулевым следом и непостоянной диагональю?

3) GH -матрицы 6-го порядка, являющиеся проективными инволюциями (с точностью до скалярного множителя это IGH -матрицы), были классифицированы В. А. Уфнаровским [13]. Каждая такая матрица $M(6)$ -сопряжением и умножением на скаляр может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -a & -c & c & 1 \\ 1/a & 1 & x & -cx/a & -c & 1 \\ -1/a & 1/x & -1 & 1/a & -1/x & 1 \\ -1/c & -a/(cx) & a & 1 & 1/x & 1 \\ 1/c & -1/c & -x & x & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a, c, x \in \mathbb{C}$, $x(a - c) = ac - 2a - 1$, $x^{-1}(a - c) = ac + 2c - 1$.

Список литературы

1. Иванов Д. Н. Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов // Матем. сб. 1998. Т. 189. №12. С. 83–102.
2. Камерон П., ван Линт Дж. Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М.: Наука, 1980.
3. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.
4. Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А. Ортогональные разложения простых алгебр Ли (тип A_n) // Труды МИАН. 1981. Т. 158. С. 105–120.
5. Kostrikin A. I., Pham Huu Tiep. Orthogonal decompositions and integral lattices. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
6. Isaacs I. M. Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976.
7. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
8. Наймарк М. А. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
9. Goethals J. M., Seidel J. J. Orthogonal matrices with zero diagonal // Canad. J. Math. 1967. V. 19. P. 1001–1010.
10. Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. Orthogonal matrices with zero diagonal II // Canad. J. Math. 1971. V. 23. №5. P. 816–832.
11. Belevitch V. Theory of $2n$ -dimensional networks with application to conference telephony // Electron Comm. Japan Part III Fund. Electron Sci. 1950. V. 27. P. 231–244.
12. Belevitch V. Conference networks and Hadamard matrices // Ann. Soc. Sci. Bruxelles Ser. 1. 1968. V. 82. P. 13–32.
13. Уфнаровский В. А. О подходящих матрицах второго порядка // Матем. исследования. Вып. 90. Кишинев: Штиинца, 1986. С. 113–136.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: Dmitry.Ivanov@tversu.ru

Поступила в редакцию
12.05.1999