Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Неклассический релаксационный цикл одной трехмерной системы дифференциальных уравнений Лотки–Вольтерра, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 4, 91–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 08:25:49

УДК 517.9+541.128.7

Ю. С. Колесов

Неклассический релаксационный цикл одной трехмерной системы дифференциальных уравнений Лотки–Вольтерра

Объект исследования – математическая модель известной реакции Белоусова. Имеет содержательный смысл допущение, что один из коэффициентов соответствующей системы дифференциальных уравнений велик, а остальные параметры конечны. Нестандартные приемы, учитывающие специфику задачи, приводят к теореме о существовании релаксационного цикла, позволяя одновременно выявить его характерные особенности.

Библиография: 5 названий.

Современная теория классических релаксационных колебаний изложена в суммирующей монографии [1]. Там же приведены отдельные результаты о неклассических релаксационных колебаниях в некоторых классах систем дифференциальных уравнений на плоскости. Более подробная и глубокая теория неклассических релаксационных колебаний в системах Лотки–Вольтерра с временным запаздыванием содержится в [2]. Однако развитая в упомянутых публикациях техника не позволяет изучить вопрос о существовании и устойчивости неклассического релаксационного цикла в математической модели реакции Белоусова, предложенной автором около пятнадцати лет назад, которая в полном объеме объясняет [2] всю совокупность известных экспериментальных фактов [3].

Выполненный ниже анализ свойств этой достаточно конкретной трехмерной системы Лотки–Вольтерра позволяет, в частности, много глубже понять специфические особенности неклассических релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результата

Как уже сказано выше, будем интересоваться вопросом о существовании и свойствах релаксационного цикла математической модели реакции Белоусова, открытой им в 1951 г., хотя его подробная статья появилась много позднее [4]. В последующем было обнаружено много окислительно-восстановительных химических реакций с однотипным механизмом. Кратко скажем о нем, следуя изложенному в [3], где в качестве основных веществ выделены бромат, церий и бромид. В этом случае возникновение автоколебаний связано со следующими причинами: церий, выполняющий роль катализатора, способствует образованию бромида, который служит сильным ингибитором бромата, а последний повышает концентрацию церия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00549).

Если пытаться строить математическую модель в классе уравнений Лотки–Вольterra, из сказанного выше следует, что в качестве таковой имеет смысл рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_1 = r_1[1 + a(1 - N_3) - N_1]N_1, \quad (1.1)$$

$$\dot{N}_2 = r_2(N_1 - N_2)N_2, \quad (1.2)$$

$$\dot{N}_3 = r_3(N_2 - N_3)N_3, \quad (1.3)$$

где N_1 – плотность бромата, N_2 – перия, N_3 – бромид. В системе (1.1)–(1.3) все коэффициенты положительны, и по смыслу должны рассматриваться решения с положительными начальными условиями. Кроме того, в соответствии с описанным выше механизмом данной окислительно-восстановительной реакции естественно допустить, что параметр a велик, а остальные коэффициенты рассматриваемой системы – некоторые фиксированные положительные числа.

Мы пришли к хорошо поставленной задаче о существовании и свойствах релаксационного цикла системы (1.1)–(1.3) с большим параметром a , решению которой и посвящена данная статья.

Чтобы описать полученные результаты, сначала скажем о выборе начальных условий.

В дальнейшем считаем, что

$$N_1(0) = 1, \quad N_2(0) = \frac{\alpha}{\ln a}, \quad N_3(0) = \frac{\beta}{\ln a}, \quad (1.4)$$

где

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \alpha_1 < 1 < \alpha_2, \quad (1.5)$$

$$0 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \quad \beta_1 < 1 + \frac{1}{\gamma} < \beta_2. \quad (1.6)$$

В (1.6) использовано обозначение

$$\gamma = \frac{r_3}{r_2}. \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что числа α_1 , α_2 и β_1 , β_2 , фигурирующие в (1.5) и (1.6), считаются фиксированными.

На качественном уровне скажем о характере поведения решений системы (1.1)–(1.3) с начальными условиями (1.4).

За подходящее время порядка $a^{-1} \ln a$ первые две координаты решений становятся асимптотически близкими к a и $\alpha a / \ln a$ соответственно. Однако при этом не меняется асимптотика последней координаты $N_3(t)$. При последующем увеличении этого временного промежутка на некоторую величину порядка $a^{-1} \ln(\ln a)$ координата $N_3(t)$ становится равной единице, $N_2(t)$ проходит через максимальное значение, которое асимптотически близко к a , становясь по порядку равной $k_2 a$, где $k_2 < 1$, координата $N_1(t)$ по порядку становится равной $k_1 a$, где $k_1 < k_2$. При дальнейшем увеличении времени координата $N_1(t)$ за асимптотически малое время становится асимптотически малой, вторая координата $N_2(t)$ начинает достаточно плавно убывать, координата $N_3(t)$ резко возрастает, достигая при возрастании времени на величину порядка $1/a^{\gamma/(1+\gamma)}$ максимального значения, по порядку равного $a^{\gamma/(1+\gamma)}$, а затем также начинает достаточно плавно убывать.

Дальнейшее поведение координат решений системы (1.1)–(1.3) при начальных условиях (1.4) много проще. Через время порядка $\ln a$ для координат решений снова становятся справедливыми равенства (1.4), в которых

$$\alpha = 1 + o(1), \quad \beta = 1 + \frac{1}{\gamma} + o(1). \quad (1.8)$$

Здесь и в дальнейшем $o(1)$ – это зависящая от a величина, которая стремится к нулю при $a \rightarrow \infty$.

Строгая реализация этой бегло изложенной схемы приводит к следующему предложению.

Обозначим через S множество таких упорядоченных чисел α и β , которые подчинены ограничениям (1.5) и (1.6). Через $\Pi = \Pi(\alpha, \beta)$ обозначим оператор последования Пуанкаре по траекториям системы (1.1)–(1.3), считая, что секущая плоскость задается первым равенством (1.4), а второе и третье равенства (1.4) задают нормировку двух оставшихся координат начальных условий.

ТЕОРЕМА. *При произвольно фиксированных $r_1, r_2, r_3 > 0$ найдется такое достаточно большое положительное число a_0 , что при каждом $a \geq a_0$ оператор Π преобразует множество S в себя.*

Из данного утверждения вытекает, естественно, существование цикла у системы (1.1)–(1.3), релаксационные свойства которого уточним при проведении обобщения в следующем параграфе. В заключительной части статьи обсудим нерешенные задачи, связанные с выявлением более глубоких свойств этого цикла.

§ 2. Доказательство теоремы о существовании релаксационного цикла

Как известно, доказательство утверждений рассматриваемого типа в основном связано с анализом поведения решений на характерных временных отрезках, на которых оно может быть существенно различным.

Перед началом доказательства напомним простой факт: решение задачи Коши для уравнения Бернулли

$$\dot{\nu} = r[f(t) - \nu]\nu, \quad \nu(0) = \nu_0, \quad (2.1)$$

дается формулой

$$\nu(t) = \frac{\nu_0 \exp[r \int_0^t f(s) ds]}{1 + r\nu_0 \int_0^t \exp[r \int_0^s f(\tau) d\tau] ds}. \quad (2.2)$$

Введем в рассмотрение отрезок $0 \leq t \leq t_1$, где

$$t_1 = \frac{\ln(a \ln a)}{r_1 a}. \quad (2.3)$$

ЛЕММА 1. *Для первой координаты решений системы (1.1)–(1.3) при начальных условиях (1.4) справедливо равенство*

$$N_1(t_1) = a \left(1 - \frac{c_1(a)}{\ln a} \right), \quad (2.4)$$

где положительная функция $c_1(a)$ ограничена при $a \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\overline{N}_1(t)$ обозначим решение задачи Коши

$$\dot{N}_1 = r_1(a - N_1)N_1, \quad N_1(0) = 1. \quad (2.5)$$

Из (2.5) и (2.2) следует, что

$$\overline{N}_1(t) = \frac{\exp(r_1 at)}{1 + \frac{1}{a}(\exp(r_1 at) - 1)}. \quad (2.6)$$

Функцию (2.6) учтем в уравнении (1.2), которое дополним вторым равенством (1.4). В соответствии с (2.2) получаем

$$\overline{N}_2(t) = \frac{\frac{\alpha}{\ln a} \left[1 + \frac{1}{a}(\exp(r_1 at) - 1) \right]^{r_2/r_1}}{1 + \frac{r_2 \alpha}{\ln a} \int_0^t \left[1 + \frac{1}{a}(\exp(r_1 as) - 1) \right]^{r_2/r_1} ds}, \quad (2.7)$$

где черта сверху имеет простую смысловую нагрузку (на наглядном уровне это ясно): данная функция оценивает сверху вторую координату интересующих нас решений.

Покажем, что

$$\int_0^{t_1} \left[1 + \frac{1}{a}(\exp(r_1 as) - 1) \right]^{r_2/r_1} ds \leq c_0 \frac{(\ln a)^{\delta_0}}{a}, \quad (2.8)$$

где (здесь и в дальнейшем) c_0 – некоторая универсальная положительная постоянная, а $\delta_0 = \max(1; r_2/r_1)$.

Для доказательства выполним в интеграле из левой части неравенства (2.8) замену

$$\tau = 1 + \frac{1}{a}(\exp(r_1 as) - 1). \quad (2.9)$$

Согласно (2.9) имеем

$$s = \frac{\ln(1 + a(\tau - 1))}{r_1 a}, \quad ds = \frac{d\tau}{r_1(1 + a(\tau - 1))}.$$

Отсюда и из (2.3) вытекает, что интересующий нас интеграл, который обозначим через J , преобразуется к виду

$$J = \frac{1}{r_1} \int_1^{1-1/a+\ln a} \frac{\tau^{r_2/r_1}}{1 + a(\tau - 1)} d\tau. \quad (2.10)$$

Представим J в виде суммы $J_1 + J_2$, где первый интеграл берется по промежутку от 1 до 2, а второй – по дополнительному промежутку.

Интеграл J_1 оценивается тривиально:

$$J_1 \leq \frac{2^{r_2/r_1}}{r_1} \int_1^2 \frac{d\tau}{1 + a(\tau - 1)} \leq c_0 \frac{\ln a}{a}. \quad (2.11)$$

Для оценки интеграла J_2 заметим, что при $\tau \geq 2$ и больших a

$$1 - \frac{1}{\tau} + \frac{1}{a\tau} \geq \frac{1}{3}. \quad (2.12)$$

Опираясь на (2.12), убеждаемся, что

$$J_2 \leq \frac{3}{r_1 a} \int_2^{1-1/a+\ln a} \tau^{r_2/r_1-1} d\tau \leq c_0 \frac{(\ln a)^{r_2/r_1}}{a}. \quad (2.13)$$

Оценки (2.11) и (2.13) приводят к неравенству (2.8).

Из (2.7) и (2.8) вытекает неравенство

$$\int_0^{t_1} \bar{N}_2(s) ds \leq c_0 \alpha \frac{(\ln a)^{\delta_0-1}}{a}, \quad (2.14)$$

позволяющее просто завершить обоснование леммы.

Предварительно отметим, что согласно (1.3) третья координата рассматриваемых решений только возрастает. Поэтому формулой (2.6) задается функция, которая сверху оценивает первую координату. Отсюда и из (1.2) заключаем, что формула (2.7) доставляет функцию, которая сверху оценивает вторую координату данных решений.

Учтем неравенство (2.14) при интегрировании уравнения (1.3), дополненного третьим равенством (1.4). Приходим к выводу, что на всем рассматриваемом временном промежутке

$$N_3(t) = \frac{\beta + o(1)}{\ln a}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) вытекает, что для вычисления $N_1(t_1)$ можно воспользоваться формулой (2.6). Очевидно, приходим к (2.4), что завершает доказательство.

Причина, по которой нами отдельно выделен момент времени t_1 , состоит главным образом в том, что в рамках принятой выше точности первая координата рассматриваемых решений именно в этот момент достигает максимального значения, мало меняясь некоторое время. Проследим за ростом второй координаты решений. С этой целью выделим временной отрезок $t_1 \leq t \leq t_2$, где

$$t_2 = \frac{\ln(a^{1+r_2/r_1})}{r_2 a}. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$\int_0^{t_2} \left[1 + \frac{1}{a} (\exp(r_1 a s) - 1) \right]^{r_2/r_1} ds \leq c_0. \quad (2.17)$$

Для доказательства достаточно повторить построения, использованные при обосновании оценки (2.8).

Из (2.17) и (2.7) следует важное неравенство

$$\int_0^{t_2} \bar{N}_2(s) ds \leq c_0 \frac{\alpha}{\ln a}. \quad (2.18)$$

В самом деле, из (2.18) вытекает, например, что асимптотическое равенство (2.15) сохраняется и при $t_1 \leq t \leq t_2$. В свою очередь, отсюда выводим, что с точностью до $1/\ln a$ функция (2.6) аппроксимирует $N_1(t)$ при всех $0 \leq t \leq t_2$, а значит, согласно формуле (2.7)

$$N_2(t_2) = \frac{\alpha a}{\ln a} \left(1 - \frac{c_2(a)}{\ln a} \right), \quad (2.19)$$

где свойства $c_2(a)$ те же, что и функции $c_1(a)$ из (2.4).

Итак, к моменту времени t_2 вторая координата также существенно вырастает. Покажем, что ее рост продолжается до момента времени $t_3 = t_2 + t_0$, где

$$t_0 = \frac{\ln(p(\ln a)^{1+\varepsilon})}{r_2 a}. \quad (2.20)$$

В (2.20)

$$p = \frac{1 + o(1)}{\alpha \beta^{1/\gamma}}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\gamma}, \quad (2.21)$$

где γ — число (1.7).

При проведении промежуточных вычислений момент времени t_2 удобно считать начальным. С учетом данного замечания вместо (2.7) введем в рассмотрение функцию

$$\overline{N}_2(t) = \frac{\frac{\alpha a}{\ln a} \exp(r_2 a t)}{1 + \frac{\alpha}{\ln a} (\exp(r_2 a t) - 1)}. \quad (2.22)$$

Выражение (2.22) подставим в уравнение (1.3). Приходим к выводу, что

$$\overline{N}_3(t_3) = \frac{1 + o(1)}{(\ln a)^\delta}, \quad (2.23)$$

где

$$\delta = 1 - \varepsilon \gamma. \quad (2.24)$$

Так как координата $N_3(t)$ заведомо возрастает при $0 \leq t \leq t_3$, то из (2.23) следует асимптотическое равенство

$$N_1(t_3) = a \left(1 - \frac{c_1(a)}{(\ln a)^\delta} \right), \quad (2.25)$$

где общие свойства $c_1(a)$ те же, что и в (2.4). На самом деле формула (2.25) справедлива при всех $t_2 \leq t \leq t_3$. Поэтому для вычисления $N_2(t_3)$ можно воспользоваться равенством (2.22). Приходим к асимптотическому представлению

$$N_2(t_3) = a \left(1 - \frac{c_2(a)}{(\ln a)^\varepsilon} \right), \quad (2.26)$$

где свойства $c_2(a)$ те же, что и в (2.19).

Учитывая проделанную работу, вернемся к равенству (2.23). Выше нами фактически была найдена точность, с которой при $t_2 \leq t \leq t_3$ первая координата $N_1(t)$ отличается от функции $\overline{N}_1(t)$, а вторая координата $N_2(t)$ — от значений функции (2.22). Отсюда и из уравнения (1.3) следует, что при подходящем выборе

малой величины, фигурирующей в числителе формулы (2.21), с помощью которой было введено p , можно добиться выполнения равенства

$$N_3(t_3) = \frac{1}{(\ln a)^\delta}. \quad (2.27)$$

До момента времени t_3 выявление асимптотических свойств координат решений системы (1.1)–(1.3) при начальных условиях (1.4) проведено с использованием элементарных средств. Объяснение этому простое: только начиная с момента времени t_3 переменные в системе (1.1)–(1.3) начинают сильно взаимодействовать. Собственно, всегда специфический анализ данного явления – суть теории релаксационных колебаний. Однако в нем есть и общее место: обычно он связан с рассмотрением некоторой эталонной нелинейной системы дифференциальных уравнений без малого или большого параметра. Но нами поставлена минимальная задача: доказать существование релаксационного цикла и описать его характерные особенности. При таком сужении проблемы можно ограничиться выявлением относительно простых свойств эталонной системы, формально содержащей малый параметр.

Примем t_3 за начало отсчета времени и перейдем в системе (1.1)–(1.3) к быстрому времени

$$\tau = a(t - t_3). \quad (2.28)$$

Затем выполним в ней замены

$$u = \frac{N_1}{a}, \quad v = \frac{N_2}{a}, \quad w = N_3. \quad (2.29)$$

В результате после отбрасывания малых слагаемых, не влияющих на формулируемые ниже выводы, приходим к системе

$$\dot{u} = r_1(1 - w - u)u, \quad (2.30)$$

$$\dot{v} = r_2(u - v)v, \quad (2.31)$$

$$\dot{w} = r_3vw, \quad (2.32)$$

где теперь точка – дифференцирование по τ . В соответствии с (2.25)–(2.27) и (2.29) она дополняется начальными условиями

$$u(0) = v(0) = 1, \quad w(0) = \mu, \quad (2.33)$$

где μ – правая часть в (2.27), а в первых двух равенствах отброшены малые слагаемые.

Исследуем начальную задачу Коши (2.30)–(2.33) на таком временном промежутке $0 \leq \tau \leq \tau_0$, что

$$w(\tau_0) = 1. \quad (2.34)$$

В дальнейшем убедимся, что τ_0 имеет порядок $\ln(1/\mu)$.

В силу структуры уравнения (2.32) переменная w строго возрастает. Возьмем ее за новую независимую переменную. В итоге от трехмерной системы (2.30)–(2.32) перейдем к системе на плоскости

$$\frac{du}{dw} = \frac{r_1(1-w-u)u}{r_3vw}, \quad \frac{dv}{dw} = \frac{r_2(u-v)}{r_3w}. \quad (2.35)$$

В свою очередь, в системе (2.35) перейдем к такой независимой переменной x , что

$$\frac{1}{r_3} \frac{dw}{w} = dx. \quad (2.36)$$

Из (2.36) и последнего равенства (2.33) выводим, что

$$w(x) = \mu \exp(r_3 x). \quad (2.37)$$

Поэтому система (2.35) преобразуется к виду

$$u' = r_1[1 - \mu \exp(r_3 x) - u] \frac{u}{v}, \quad (2.38)$$

$$v' = r_2(u - v), \quad (2.39)$$

где штрих – дифференцирование по x . Отметим еще, что в силу (2.34) и (2.37) в системе (2.38), (2.39)

$$0 \leq x \leq \frac{1}{r_3} \ln \frac{1}{\mu}. \quad (2.40)$$

Обозначим через $u(x)$ и $v(x)$ решения системы (2.38), (2.39) при начальных условиях, задаваемых первыми двумя равенствами (2.33).

ЛЕММА 3. *Функция $u(x)$ убывающая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО начнем с замечания, что в силу структуры правой части уравнения (2.38) при небольших x функция $u(x)$ заведомо имеет отрицательную производную. Поэтому достаточно показать, что она не может иметь локальных минимумов. В предположении противного найдется такое $x_* > 0$, что

$$u'(x_*) = 0, \quad u''(x_*) \geq 0. \quad (2.41)$$

С другой стороны, с учетом первого условия (2.41) из (2.38) имеем

$$u''(x_*) = -\mu r_1 r_3 \frac{u(x_*)}{v(x_*)} \exp(r_3 x_*) < 0,$$

что противоречит второму условию (2.41). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Справедливо неравенство*

$$u(x) \leq v(x). \quad (2.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 3 и теоремы о дифференциальных неравенствах.

Пусть x_0 — величина, фигурирующая в правой части неравенств (2.40).

ЛЕММА 5. *Имеет место неравенство*

$$u(x_0) \geq \frac{r_3}{r_1 + r_3}. \quad (2.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО базируется на утверждениях, содержащихся в леммах 3 и 4, из которых вытекает, что

$$u' \geq r_1[1 - \mu \exp(r_3 x) - u].$$

Остается воспользоваться теоремой о дифференциальных неравенствах.

Из неравенств (2.42) и (2.43), в частности, вытекает, что по порядку τ_0 равно $\ln(\ln a)$, а значит, отброшенные в правых частях уравнений (2.30) и (2.32) слагаемые порядка $1/a$ действительно несущественны.

Для дальнейшего важно, что согласно (2.28), (2.29) и леммам 4, 5

$$N_1(t_4) = k_1 a, \quad N_2(t_4) = k_2 a, \quad N_3(t_4) = 1, \quad (2.44)$$

где $t_4 = t_3 + a^{-1}\tau_0$. Зависящие от a постоянные k_1 и k_2 в (2.44) таковы, что

$$0 < k_1 < k_2 < 1. \quad (2.45)$$

В следующем параграфе объясним, что функции k_1 и k_2 параметра a асимптотически близки к постоянным.

Итак, изучен ключевой временной участок, на котором переменные в системе (1.1)–(1.3) сильно взаимодействуют. Последующий анализ уже проще.

Рассмотрим временной отрезок $t_4 \leq t \leq t_5$, где $t_5 = t_4 + t_*$, а

$$t_* = c^{1/(1+\gamma)} \frac{(\ln a)^{1/(1+\gamma)}}{r_2 k_2 a}, \quad c = \frac{9k_2(r_2 + r_3)}{r_1}. \quad (2.46)$$

ЛЕММА 6. *Справедливо неравенство*

$$N_1(t_5) \leq \frac{k_1}{a^2}. \quad (2.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО начнем с упрощающего выкладки допущения, что начало отсчета времени совмещено с t_4 .

Из решения задачи Коши

$$\dot{N}_2 = -r_2 N_2^2, \quad N_2(0) = k_2 a,$$

находим функцию

$$\underline{N}_2(t) = \frac{k_2 a}{1 + r_2 k_2 a t}, \quad (2.48)$$

которая, очевидно, снизу оценивает $N_2(t)$. Миноранту третьей координаты решений системы (1.1)–(1.3) строим, исходя из задачи Коши

$$\dot{N}_3 = r_3 [\underline{N}_2(t) - N_3] N_3, \quad N_3(0) = 1,$$

т. е.

$$\underline{N}_3(t) = \frac{(1 + r_2 k_2 a t)^\gamma}{1 + \frac{\gamma}{k_2 a (1 + \gamma)} [(1 + r_2 k_2 a t)^{1 + \gamma} - 1]}. \quad (2.49)$$

Ясно, что при $0 \leq t \leq t_*$ мало второе слагаемое, стоящее в знаменателе правой части формулы (2.49). Поэтому при указанных t

$$\underline{N}_3(t) \geq \frac{3}{4} (1 + r_2 k_2 a t)^\gamma. \quad (2.50)$$

Из уравнения (1.1), первого равенства (2.44) и неравенства (2.50) вытекает, что

$$N_1(t) \leq k_1 a \exp \left[r_1 a \left(t - \frac{(1 + r_2 k_2 a t)^{1 + \gamma} - 1}{2(1 + \gamma) r_2 k_2 a} \right) \right]. \quad (2.51)$$

Из неравенства (2.51) получаем оценку

$$N_1(t_*) \leq k_1 a \exp \left(-\frac{c r_1}{3(1 + \gamma) r_2 k_2} \ln a \right),$$

которая в силу второго равенства (2.46) эквивалентна (2.47). Доказательство закончено.

ЛЕММА 7. *Имеет место оценка*

$$\int_0^{t_*} N_1(t) dt \leq c_0. \quad (2.52)$$

Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство (2.51).

Из уравнения (1.2) и второго равенства (2.44) вытекает, что

$$N_2(t) = \frac{k_2 a \exp \left[r_2 \int_0^t N_1(s) ds \right]}{1 + r_2 k_2 a \int_0^t \exp \left[r_2 \int_0^s N_1(\sigma) d\sigma \right] ds}. \quad (2.53)$$

Подчеркнем, что по-прежнему считаем t_4 началом отсчета времени. Формулу (2.53) используем для вычисления $N_2(t_*)$. Заменяя t на t_* , найдем интеграл, стоящий в ее знаменателе, опираясь на теорему о среднем. Приходим к заключению, что

$$N_2(t_*) = \frac{k_2 a \exp\left[r_2 \int_0^{t_*} N_1(s) ds\right]}{1 + (c \ln a)^{1/(1+\gamma)} \exp\left[r_2 \int_0^{s_*} N_1(\sigma) d\sigma\right]},$$

а значит,

$$N_2(t_*) = n_2 \frac{a}{(\ln a)^{1/(1+\gamma)}}, \quad (2.54)$$

где

$$n_2 = (1 + o(1)) \frac{k_2}{c^{1/(1+\gamma)}} \exp\left[r_2 \int_{s_*}^{t_*} N_1(s) ds\right]. \quad (2.55)$$

Отметим, что в силу леммы 7 функция $n_2 = n_2(a)$ ограничена при $a \rightarrow \infty$.

Из последнего равенства (2.44), формулы (2.53) и уравнения (1.3) следует, что

$$N_3(t) = \frac{\left[1 + r_2 k_2 a \int_0^t \exp\left(r_2 \int_0^s N_1(\sigma) d\sigma\right) ds\right]^\gamma}{1 + r_3 \int_0^t \left[1 + r_2 k_2 a \int_0^s \exp\left(r_2 \int_0^\sigma N_1(\tau) d\tau\right) d\sigma\right]^\gamma ds}.$$

Рассуждая как и при выводе равенств (2.54), (2.55), отсюда получаем

$$N_3(t_*) = n_3 (\ln a)^{\gamma/(1+\gamma)}, \quad (2.56)$$

где

$$n_3 = (1 + o(1)) c^{\gamma/(1+\gamma)} \exp\left[r_3 \int_0^{s_*} N_1(s) ds\right]. \quad (2.57)$$

Приступим к завершающему этапу доказательства теоремы. Он связан с исследованием поведения решений системы (1.1)–(1.3) на промежутке $t_5 \leq t \leq T$, где T – такой первый момент времени, что

$$N_1(T) = 1. \quad (2.58)$$

На большей части этого временного промежутка функция $N_1(t)$ мала, а в его конце интеграл от нее, например, по отрезку единичной длины по порядку равен $1/a$. Данные факты становятся очевидными, если воспользоваться приближенной формулой

$$N_1(t) = \frac{k_1}{a^2} \exp\left[r_1 a \left(t - \int_0^t N_3(s) ds\right)\right], \quad (2.59)$$

точности которой для дальнейшего достаточно. Здесь и ниже при составлении аналогичных формул считаем, что начало отсчета времени совмещено с t_5 .

Из малости $N_1(t)$, уравнения (1.2) и равенства (2.54) вытекает, что справедлива приближенная формула

$$N_2(t) = \frac{n_2(a)/(\ln a)^{1/(1+\gamma)}}{1 + r_2 n_2 a t / (\ln a)^{1/(1+\gamma)}}, \quad (2.60)$$

где n_2 – величина (2.55). В свою очередь, формула (2.60), уравнение (1.3) и равенство (2.56) приводят к приближенной формуле

$$N_3(t) = \frac{n_3(\ln a)^{\gamma/(1+\gamma)}(1 + r_2 n_2 a t / (\ln a)^{1/(1+\gamma)})^\gamma}{1 + (\gamma n_3 \ln a / ((1 + \gamma) n_2 a))[(1 + r_2 n_2 a t / (\ln a)^{1/(1+\gamma)})^{1+\gamma} - 1]}. \quad (2.61)$$

Формулы (2.60) и (2.61) позволяют получить ряд важных равенств. Во-первых,

$$N_2\left(\frac{\ln a}{r_2}\right) = \frac{1 + o(1)}{\ln a}, \quad N_3\left(\frac{\ln a}{r_2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{\gamma} + o(1)}{\ln a}. \quad (2.62)$$

Во-вторых,

$$\int_0^{\ln a / r_2} N_3(t) dt = (1 + o(1)) \frac{1}{r_2} \ln a. \quad (2.63)$$

В-третьих, из (2.59) и (2.63) следует, что

$$N_1\left(\frac{\ln a}{r_2}\right) = \exp[o(1)a \ln a]. \quad (2.64)$$

В-четвертых, из структуры уравнения (1.1) и (2.64) вытекает, что в равенстве (2.58)

$$T = (1 + o(1)) \frac{1}{r_2} \ln a. \quad (2.65)$$

Равенства (2.62) и (2.65) означают, что на множестве S , введенном перед формулировкой теоремы, определен оператор последования Пуанкаре, сжимающий это множество таким образом, что справедливы асимптотические равенства (1.8). Доказательство теоремы завершено.

Отметим полезные формулы, дающие дополнительную информацию об асимптотических особенностях построенного релаксационного цикла системы (1.1)–(1.3).

Из (2.59) и (2.61) имеем

$$\min_{0 \leq t \leq T} N_1(t) = \exp\left[-(1 + o(1)) \frac{r_1}{r_2} a \ln a\right]. \quad (2.66)$$

Та же формула (2.61) приводит к заключению, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} N_3(t) = (1 + o(1)) \frac{a^{\gamma/(1+\gamma)}}{(1 + \gamma)^{1/(1+\gamma)}} n_2^{\gamma/(1+\gamma)} n_3^{1/(1+\gamma)}, \quad (2.67)$$

где в соответствии с (2.55) и (2.57)

$$n_2^{\gamma/(1+\gamma)} n_3^{1/(1+\gamma)} = (1 + o(1)) k_2^{\gamma/(1+\gamma)} \exp\left[\frac{r_3}{1 + \gamma} \int_{t_4}^{t_5} N_1(s) ds\right]. \quad (2.68)$$

Хотя это и не играет роли, отметим, что в равенствах (2.66), (2.67) рассматривается весь временной отрезок длины периода.

§3. Нерешенные задачи

С прикладной точки зрения вопрос об устойчивости релаксационного цикла системы (1.1)–(1.3) представляется второстепенным: построенный при доказательстве теоремы оператор последования Π сильно сжимает множество S (см. асимптотические равенства (1.8)). Однако аккуратное исследование данной проблемы существенно для более глубокого понимания природы неклассических релаксационных колебаний. Сформулируем причину, которая, как нам кажется, обуславливает трудность этого вопроса.

Обозначим через l_1 прямую, натянутую на собственный вектор матрицы монодромии V системы в вариациях, отвечающий ее единичному собственному значению. Через l_2 обозначим корневое подпространство матрицы V , отвечающее ее остальным двум собственным значениям $\mu_1(a)$ и $\mu_2(a)$.

ГИПОТЕЗА. *Стремятся к нулю при $a \rightarrow \infty$ мультипликаторы $\mu_1(a)$ и $\mu_2(a)$, а также угол между l_1 и l_2 .*

Приведем соображения, по которым мы считаем справедливым данное предположение.

Во-первых, релаксационная система (1.1)–(1.3) не является гладким возмущением подходящей релейной системы. Поэтому ее предельным объектом следует считать релаксационный цикл, а значит, $\mu_1(a)$ и $\mu_2(a)$ должны стремиться к нулю при $a \rightarrow \infty$.

Во-вторых, сталкиваемся с большими аналитическими трудностями при попытке построения асимптотики матрицы V . С другой же стороны, в силу сказанного выше данная задача должна была бы быть простой. По нашему мнению ее делает сложной последнее из содержащихся в гипотезе утверждений.

Отметим также важную задачу о более детальной асимптотике релаксационного цикла, которая естественным образом расщепляется на ряд более мелких. Приведем некоторые из них.

В системе (2.38), (2.39) выполним сдвиг независимой переменной

$$x \rightarrow x + x_0, \quad (3.1)$$

где x_0 введено перед формулировкой леммы 5. Приходим к системе

$$u' = r_1[1 - \exp(r_3 x) - u] \frac{u}{v}, \quad (3.2)$$

$$v' = r_2(u - v). \quad (3.3)$$

На всей числовой прямой $-\infty < x < \infty$ для нее поставим краевую задачу, которая заключается в нахождении таких положительных решений $u(x)$ и $v(x)$, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 8. *Краевая задача (3.2)–(3.4) однозначно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факт разрешимости задачи следует из лемм 3–6. Поэтому в доказательстве нуждается лишь утверждение о единственности.

Предварительно установим один вспомогательный факт. Обратимся к системе (2.38), (2.39), рассматриваемой на отрезке, выделяемом неравенствами (2.40). Линеаризуя ее на решениях, начальные условия которых задаются первыми двумя равенствами (2.33), приходим к системе в вариациях

$$h'_1 = \left(r_1 \frac{u}{v} - \frac{u'}{u} \right) h_1 - \frac{u'}{v} h_2, \quad (3.5)$$

$$h'_2 = r_2 h_1 - r_2 h_2. \quad (3.6)$$

Продифференцируем уравнение (3.6), а затем включим h'_1 в соответствии с (3.5). В получившемся выражении исключим h_1 с помощью (3.6), что приведет нас к дифференциальному уравнению второго порядка

$$h'' + p(x)h' + q(x)h = 0, \quad (3.7)$$

в котором $h = h_2$, а

$$p(x) = r_1 \frac{u}{v} - \frac{u'}{u} + r_2, \quad (3.8)$$

$$q(x) = r_2 \left(r_1 \frac{u}{v} - \frac{u'}{u} + \frac{u'}{v} \right). \quad (3.9)$$

Формальный характеристический многочлен

$$P(\lambda, x) = \lambda^2 + p(x)\lambda + q(x) \quad (3.10)$$

уравнения (3.7) обладает важной особенностью. Именно, из (3.8), (3.9) и лемм 3–5 следует, что на отрезке (2.40)

$$P(-r_2, x) < 0, \quad P(-\alpha_0, x) \geq 0, \quad (3.11)$$

где α_0 – подходящее положительное число, причем $\alpha_0 < r_2$. В соответствии с теоремой из статьи [5] неравенства (3.11) означают, что для решений уравнения (3.7) имеет место оценка

$$|h(x)| + |h'(x)| \leq c_0[|h(0)| + |h'(0)|] \exp(-\alpha_0 x) \quad (3.12)$$

с универсальной постоянной $c_0 > 0$.

Предположим теперь, что краевая задача (3.2)–(3.4) имеет решение, отличное от доставляемого леммами 3–6. Координаты этого решения в соответствии с (3.4) асимптотически близки к единице при значении независимой переменной, равном $-x_0$. Поэтому удобно выполнить в системе (3.2), (3.3) замену, обратную к (3.1), а затем для оценки расстояния между двумя решениями воспользоваться линейным приближением (правомерность данного способа действий обосновывается стандартным образом). В силу неравенства (3.12) начальные условия соответствующих координат этих решений краевой задачи (3.2)–(3.4) при нулевом

значении x асимптотически сближаются при $a \rightarrow \infty$. Так как по отношению к рассматриваемой краевой задаче параметр a является вспомогательным, то начальные условия соответствующих координат этих решений совпадают. Пришли к противоречию, а значит, доказательство закончено.

Ясно, что выявление более глубоких асимптотических свойств релаксационного цикла системы (1.1)–(1.3) упирается, в частности, в анализ различных аналитических особенностей координат $u(x)$ и $v(x)$ решения краевой задачи (3.2)–(3.4).

Еще одна задача связана с равенством (2.68).

Обозначим через k_1 и k_2 соответственно значения $u(x)$ и $v(x)$ при $x = 0$. Достаточно очевидно, что к ним асимптотически близки введенные в равенствах (2.44) зависящие от a постоянные, обозначенные теми же буквами. Отметим также, что

$$\int_{t_4}^{t_5} N_1(t) dt = (1 + o(1)) \int_0^\infty \frac{u(x)}{v(x)} dx. \quad (3.13)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\Delta = k_2^{\gamma/(1+\gamma)} \exp \left[\frac{r_3}{1+\gamma} \int_0^\infty \frac{u(x)}{v(x)} dx \right], \quad (3.14)$$

где теперь $k_2 = v(0)$. Из (2.68) и (3.13), (3.14) следует, что

$$n_2^{\gamma/(1+\gamma)} n_3^{1/(1+\gamma)} = (1 + o(1)) \Delta. \quad (3.15)$$

Из равенства (3.15) вытекает, что выявление тонких асимптотических свойств релаксационного цикла системы (1.1)–(1.3) связано также с анализом зависимости Δ от r_1, r_2, r_3 . Представляет интерес как аналитическое, так и численное исследование данной задачи.

Очевидно, выше нами сформулированы не только нерешенные задачи, но также изложены достаточно содержательные факты. Например, с их помощью можно получить представление о структуре асимптотики периода релаксационного цикла.

ЛЕММА 9. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$T = \frac{1}{r_2} \ln \left[\frac{k_2 a (\ln a)^{1+1/\gamma}}{(1 + \frac{1}{\gamma})^{1/\gamma}} \right] + \int_0^\infty \frac{u(x)}{v(x)} dx + o(1), \quad (3.16)$$

где, напомним, k_2 – значение второй координаты решения краевой задачи (3.2)–(3.4) при $x = 0$.

Для доказательства заметим, что в силу приближенной формулы (2.59)

$$T = \int_0^T N_3(t) dt + o(1), \quad (3.17)$$

где функция $N_3(t)$ задается равенством (2.61). Остается приближенно решить относительно T уравнение (3.16) и учесть равенства (2.68) и (3.13)–(3.15).

Обозначим через T_0 всю главную часть в правой части формулы (3.16). Из (2.60) и (2.61) соответственно вытекают асимптотические равенства

$$\min_{0 \leq t \leq T} N_2(t) = \frac{1}{r_2 T_0} + o\left(\frac{1}{\ln a}\right),$$

$$\min_{0 \leq t \leq T} N_3(t) = \frac{1 + \frac{1}{\gamma}}{r_2 T_0} + o\left(\frac{1}{\ln a}\right),$$

дополняющие (2.66), (2.67).

В заключение отметим, что открыт вопрос об аттракторах системы (1.1)–(1.3) при умеренных значениях параметра a .

Список литературы

1. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
2. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Труды МИРАН. Т. 199. М.: Наука, 1993.
3. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
4. Белоусов Б. П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Ин-т прикл. физики АН СССР, 1981. С. 176–186.
5. Бережной В. Н., Колесов Ю. С. Об одном признаке устойчивости решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка // Прикл. матем. и мех. 1969. Т. 33. № 3. С. 578–579.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию
20.11.1998 и 29.06.1999