Общероссийский математический портал

П. Е. Марков, Е. В. Шкрыль, О жесткости кусочно выпуклых поверхностей типа тора, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 4, 107–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:20:48

УДК 513.7

П. Е. Марков, Е. В. Шкрыль

О жесткости кусочно выпуклых поверхностей типа тора

Рассматриваются замкнутые поверхности рода 1, склеенные из конечного числа кусков выпуклых поверхностей класса C^2 . Допускается наличие вершин и конических точек. Дается алгоритм построения таких поверхностей. Доказывается их жесткость вне плоских областей относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с непрерывными изгибающими полями, принадлежащими классу C^2 на каждом C^2 -гладком куске.

Библиография: 22 названия.

Введение

А. Д. Александровым [1] выделен класс замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ трехмерного евклидова пространства, названных поверхностями T (поверхностями типа тора), и доказана их однозначная определенность метрикой в этом классе, а также жесткость относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка. Доказательство жесткости и однозначной определенности проводилось при условии кусочной аналитичности поверхности. Н. В. Ефимовым [2] требование аналитичности в теореме А. Д. Александрова об однозначной определенности было ослаблено до трехкратной непрерывной дифференцируемости. Возникает задача распространения результатов А. Д. Александрова и Н. В. Ефимова на поверхности с тем же топологическим строением, но с ослабленными требованиями к гладкости. На этом пути И. Х. Сабитовым [3] доказана жесткость торообразной кусочно выпуклой поверхности вращения, меридиан которой склеен из двух выпуклых кусочно гладких в классе C^2 кривых.

В данной работе рассматриваются бесконечно малые изгибания замкнутых поверхностей рода 1, склеенных из кусков выпуклых поверхностей класса C^2 , и устанавливается достаточный признак жесткости таких поверхностей (куском поверхности мы называем замкнутую область на этой поверхности). Строгое описание класса рассматриваемых поверхностей (в частности, способ их построения) приводятся в п. 1.1. При этом мы ограничиваемся поверхностями рода 1 из соображений наглядности. Применяемые методы доказательств позволяют выделять классы жестких поверхностей произвольного рода $p \geq 0$.

Первая общая теорема о жесткости склеенных поверхностей была получена в работе Б. В. Боярского и И. Н. Векуа [4], где доказана жесткость овалоида, склеенного из конечного числа кусков поверхностей класса C^3 . Позднее Б. В. Боярский [5] распространил это доказательство на случай внутренне склеенной замкнутой поверхности, звездной относительно некоторой внутренней точки. Такая поверхность может быть получена из овалоида отсечением от него шапочек с после-

дующим заклеиванием образовавшихся дыр кусками плоскостей и незначительным “вдавливанием” их внутрь исходной поверхности. В теореме Б. В. Боярского наряду с требованием звездности содержится условие, резко ограничивающее класс допустимых поверхностей. Геометрический смысл этого условия заключается в достаточной малости описанных вдавливаниях. Проблеме ослабления условий в теореме Б. В. Боярского посвящены работы [6]–[9]. Из доказываемой ниже теоремы следует, что при некоторых, довольно общих предположениях на исходный оваллоид и на расположение на нем “прогибов” вдавливание может производиться вплоть до изменения топологического строения исходной поверхности (см. рис. 2 (а)).

Мы не исключаем наличия конических точек на склеиваемых кусках. Бесконечно малые изгибания склеенной поверхности с конической точкой рассматривались в [4] и [10] в предположении, что в окрестности этой точки поверхность является конусом класса C^3 . В этом случае без особого труда явно находятся все изгибающие поля окрестности конической точки, и задача существенно упрощается. Поведение изгибающего поля в окрестности конического полюса на поверхности вращения и бесконечно малые изгибания таких поверхностей с краем при различных краевых условиях рассмотрены в работах [11], [12].

Одним из основных результатов настоящей работы является отказ от столь жесткого условия на форму окрестности конической точки. Требуется только, чтобы в окрестности этой точки поверхность была выпуклой поверхностью класса C^2 , а в самой точке обладала касательным конусом класса C^3 .

§ 1. Формулировка результата

Пусть F – ограниченная выпуклая поверхность с краем, лежащим в плоскости Π , взаимно однозначно проектирующаяся на плоскость Π . Будем предполагать, что она удовлетворяет следующим условиям.

1. *Поверхность F состоит из конечного числа кусков поверхностей класса C^2 , каждая из которых может содержать лишь конечное число особых точек.* Эти куски мы будем называть *гранями*, а особые точки – *коническими точками*¹.

2. *Каждая грань ограничена конечным числом регулярных дуг класса C^2 .* Эти дуги будем называть *ребрами*, а точки пересечения ребер – *вершинами*.

3. *Конические точки не лежат на ребрах*².

4. *В каждой конической точке касательный конус к содержащей эту точку грани*³ *является конической поверхностью класса C^3 .*

5. *Граница каждой плоской максимальной компоненты связности на поверхности F является жордановой кривой, состоящей из конечного числа*

¹Определение поверхности класса C^2 с особыми точками приведено в п. 2.2.

²Это условие можно ослабить, потребовав, чтобы каждая такая точка обладала окрестностью, допускающей гомеоморфное ортогональное проектирование на касательный конус к поверхности в этой точке (см. п. 3.2).

³Определение касательного конуса и описание гладкого конуса приводится в п. 2.2. Условие на порядок гладкости касательного конуса возникает по чисто техническим причинам и, по-видимому, может быть ослаблено.

регулярных дуг класса C^2 .

Пусть h — расстояние от плоскости Π до опорной плоскости к поверхности F , параллельной плоскости Π . Обозначим через π_0 плоскость, параллельную плоскости Π , не проходящую через вершины и конические точки, расположенную между Π и опорной плоскостью и отстоящую от Π на расстоянии $h_0 < h/2$. Эта плоскость отсекает от поверхности F шапочку. Допустим, что расстояние от каждой конической точки этой шапочки до плоскости π_0 отлично от h_0 . Заменим эту шапочку зеркальным отражением относительно плоскости π_0 (рис. 1 (а)) и удалим ту часть возникшей поверхности, которая оказалась по разные стороны с плоскостью π_0 от плоскости Π . Получим поверхность F_1 с несвязным краем, лежащим в плоскости Π (рис. 1 (b)).

Рис. 1

Отразим теперь поверхность F_1 зеркально относительно плоскости Π . Полученную поверхность обозначим через F_2 . Поверхность $\Phi = F_1 \cup F_2$ (см. рис. 2 (а)) является первым представителем класса поверхностей, рассматриваемого в данной работе. На рис. 2 (b) изображено сечение ее плоскостью, перпендикулярной плоскости Π .

Рассмотрим теперь плоскость π_1 , не проходящую через вершины и конические точки поверхности Φ , параллельную плоскости Π и отстоящую от нее на расстоянии h_1 , удовлетворяющем неравенству $h_0/2 < h_1 < h_0$. Заменим часть поверхности Φ , лежащую с плоскостью Π по разные стороны от плоскости π_1 , ее зеркальным отражением относительно плоскости π_1 (рис. 3 (а)). В книге [13] эта операция называется *зеркальным выпучиванием* относительно плоскости π_1 . Возникшую в результате описанного зеркального выпучивания поверхность обозначим через Φ^1 . Ее можно снова подвергнуть зеркальному выпучиванию относительно плоскости π_2 , проходящей между Π и π_1 мимо вершин и конических точек, параллельно этим плоскостям на расстоянии h_2 от плоскости Π , удовлетворяющем неравенству $h_1/2 < h_2 < h_1$. Повторим эту операцию выпучивания k раз. Полученную поверхность обозначим через Φ^k . Поверхность Φ подвергнем l -кратному

Рис. 2

зеркальному выпучиванию относительно плоскостей π'_i , проходящих мимо вершин и конических точек параллельно плоскости Π по другую сторону от нее на расстояниях h'_i , удовлетворяющих неравенствам $h'_i/2 < h'_{i+1} < h'_i$, $i = 0, \dots, l-1$. В результате получим поверхность Φ_l^k с “зубчатым” сечением, изображенным на рис. 3 (b).

Рис. 3

Поскольку плоскости π_i , π'_i могут пересекать и содержать ребра, описанной конструкцией может быть получен довольно широкий класс кусочно выпуклых поверхностей рода 1.

ТЕОРЕМА 1. *Поверхность Φ_l^k обладает жесткостью вне плоских областей⁴ относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающими полями, непрерывными на Φ_l^k и принадлежащими классу C^2 на каждой грани.*

Заметим, что эта теорема не содержит утверждений о жесткости многогранника. Следующая теорема не исключает случая, когда поверхность Φ_l^k является многогранником.

ТЕОРЕМА 2. *Поверхность Φ_l^k обладает жесткостью относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающими полями, непрерывными на Φ_l^k , принадлежащими классу C^2 на каждой грани и тривиальными на каждой плоской области.*

Условия на изгибающие поля в этих теоремах вполне естественны, так как требуется, чтобы изгибающие поля обладали гладкостью поверхности. С другой стороны, они не слишком стеснительны. В п. 2.5 мы построим семейство (нетривиальных) изгибающих полей класса C^∞ на конусе класса C^∞ .

§ 2. Предварительные результаты

2.1. Пусть X — двумерное связное хаусдорфово ориентируемое компактное C^∞ -многообразие. Для целого числа $r \geq 0$ через $C^r(X, \mathbb{R})$ будем обозначать пространство действительных функций класса C^r на X , через $C_0^r(X, \mathbb{R})$ — пространство финитных функций класса C^r , через $\mathcal{E}^r(X, T^*(X))$ — пространство линейных дифференциальных форм класса C^r на X , через $\mathcal{E}^r(X, \wedge^2 T^*(X))$ — пространство внешних 2-форм класса C^r на X .

Пусть U — координатная окрестность с компактным замыканием на многообразии X . Непрерывная 2-форма $\Omega \in \mathcal{E}^0(U, \wedge^2 T^*(U))$ называется *обобщенным внешним дифференциалом* непрерывной формы $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ на U , если для каждой функции $\varphi \in C_0^1(U, \mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\iint_U \varphi \Omega = \iint_U \omega \wedge d\varphi$$

(см. [14]–[16]). Если $\omega \in \mathcal{E}^1(X, T^*(X))$, то ее обобщенный внешний дифференциал совпадает с обычным внешним дифференциалом. Поэтому обобщенный внешний дифференциал формы ω мы будем обозначать символом $d\omega$. Непрерывный обобщенный внешний дифференциал $d\omega$ (если он существует) определяется формой ω однозначно и имеет локальный характер в том смысле, что для всякой окрестности $U_1 \subset U$ обобщенный внешний дифференциал, определенный по окрестности U , совпадает на U_1 с обобщенным внешним дифференциалом, определенным по U_1 . В

⁴Определения жесткости, жесткости вне плоских областей, а также тривиальности изгибающего поля приведены в п. 2.4.

связи с этим мы будем говорить об обобщенном внешнем дифференциале без указания определяющей его окрестности. Отметим также, что второй обобщенный внешний дифференциал $dd\omega = 0$. В дальнейшем нам понадобятся два простых свойства обобщенного внешнего дифференциала.

ЛЕММА 1. *Если форма $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ обладает непрерывным обобщенным внешним дифференциалом, то для всякой функции $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ форма $\psi\omega$ обладает непрерывным обобщенным внешним дифференциалом и справедливо равенство*

$$d(\psi\omega) = d\psi \wedge \omega + \psi d\omega.$$

Доказательство имеется в [17] и здесь опускается.

В формулировке следующего свойства (в несколько иной форме оно приведено в [15]) регулярной областью на X мы называем связное множество с непустой внутренностью, граница которого либо пуста, либо состоит из конечного числа простых регулярных кривых класса C^∞ .

ЛЕММА 2. *Если форма $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ обладает непрерывным обобщенным внешним дифференциалом на X , то для всякой регулярной области D с компактным замыканием и с границей ∂D на X справедлива формула Стокса*

$$\iint_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ имеется топология, относительно которой пространство $\mathcal{E}^1(X, T^*(X))$ всюду плотно в $\mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ (см. [14; § 9]). Рассмотрим последовательность форм (ω_n) из $\mathcal{E}^1(X, T^*(X))$, сходящуюся к формам $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$. Для всякой функции $\varphi \in C_0^1(D, \mathbb{R})$ имеем тождество

$$\iint_D \varphi d\omega_n = \iint_D \omega_n \wedge d\varphi.$$

Учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D \omega_n \wedge d\varphi = \iint_D \omega \wedge d\varphi = \iint_D \varphi d\omega,$$

в силу произвольности φ заключаем, что $d\omega_n \rightarrow d\omega$ при $n \rightarrow \infty$. Записав теперь формулу Стокса для формы ω_n и перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим требуемое равенство. Лемма доказана.

2.2. Пусть D – регулярная область на многообразии X , $\mathbf{r}: X \rightarrow E^3$ – C^2 -отображение многообразия X в трехмерное евклидово пространство E^3 , ограничение которого на внутренность D^0 области D является погружением. В этом случае образ $S = \mathbf{r}(D)$ мы называем *поверхностью*, и *регулярной поверхностью*, если $\mathbf{r}$ – погружение на всей области D . Фиксируя в пространстве E^3 прямоугольную декартову систему координат $Ox^1x^2x^3$ с ортами осей $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, для каждой точки $x \in D$ образ $\mathbf{r}(x)$ можем рассматривать как радиус-вектор соответствующей точки поверхности S .

Заметим, что по данному определению поверхность может содержать особые точки – образы точек, в которых отображение $\mathbf{r}$ не является погружением. Каждый прообраз особой точки лежит на границе ∂D области $D \subset X$. На поверхности в индуцированной из E^3 топологии особая точка может оказаться внутренней. Следующий пример иллюстрирует простейшую из особых точек – вершину конуса.

ПРИМЕР 1. Пусть $\rho: [0, L] \rightarrow E^3$ – C^2 -погружение сегмента $[0, L]$ в виде простой замкнутой кривой ($\rho(0) = \rho(L)$), не проходящей через начало координат в E^3 , $D = [0, L] \times [0, \infty)$, $\tilde{\rho}: \mathbb{R} \rightarrow E^3$ – произвольное C^2 -продолжение отображения ρ . Тогда при отображении $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$, определенном формулой $\mathbf{r}(x, y) = y\tilde{\rho}(x)$, поверхность $S = \mathbf{r}(D)$ является конусом класса C^2 , вершина которого $\mathbf{r}([0, L] \times \{0\})$ представляет собою особую точку, а образ $\mathbf{r}([0, L] \times (0, \infty))$ является регулярной поверхностью (конусом без вершины).

Мы будем рассматривать только внутренние изолированные особые точки на поверхности S и, принимая за модель особой точки вершину конуса, называть их коническими. Будем предполагать, что каждая коническая точка M_0 является образом регулярной дуги $\gamma \subset \partial D$.

В каждой точке из E^3 касательное к E^3 пространство будем отождествлять с пространством E^3 . Тогда в каждой точке $x \in X$ определено касательное к $\mathbf{r}$ отображение $T_x \mathbf{r}: T_x(X) \rightarrow E^3$, где $T_x(X)$ – касательное к X пространство в точке x . Будем считать, что если ненулевой вектор $\xi(x) \in T_x(X)$ не является касательным вектором к γ , то $T_x \mathbf{r}(\xi(x)) \neq 0$. Для фиксированного векторного поля ξ класса C^∞ на γ такого, что $\xi(x) \notin T_x(\gamma)$ в каждой точке $x \in \gamma$, будем предполагать, что отображение $\rho: \gamma \rightarrow E^3$, определяемое формулой $\rho(x) = T_x \mathbf{r}(\xi)$, является погружением. Конус с вершиной в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\gamma)$ и направляющей $\rho(\gamma)$ называется *касательным конусом* к поверхности S в точке M_0 .

В частности, если на X введены координаты (u, v) , в которых γ задается уравнением $v = 0$, и $v > 0$ для точек, близких к γ и лежащих внутри области D , то полагая $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$, получаем уравнение касательного конуса к S в M_0 в виде

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 + v \mathbf{r}_v(u, 0). \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что касательный конус к S в точке M_0 представляет собою множество всех полукасательных к кривым на S , выходящим из M_0 .

2.3. В этом и следующих пунктах предполагается, что поверхность S задается C^2 -погружением $\mathbf{r}: D \rightarrow E^3$, где D – регулярная область. В частности, на S отсутствуют особые точки.

Обозначим через ds^2 метрику на D , индуцированную погружением $\mathbf{r}$. В некоторой окрестности каждой точки на D существует локальный C^1 -коррепер $\tau = (\tau^1, \tau^2)$, $\tau^1, \tau^2 \in \mathcal{E}^1(X, T^*(X))$, в котором метрика ds^2 имеет нормальный вид: $ds^2 = \tau^1 \otimes \tau^1 + \tau^2 \otimes \tau^2$. Через $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ будем обозначать локальный репер, дуальный к корреперу τ . Полагая $\mathbf{e}_1 = \xi_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}_2 = \xi_2(\mathbf{r})$, получаем ортонормированный C^1 -репер $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в касательном расслоении поверхности S . При этом справедливо равенство

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 \tau^1 + \mathbf{e}_2 \tau^2. \quad (2)$$

Пусть $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ – поле нормалей поверхности S (здесь и далее знаком $\times$ обозначается векторное произведение в E^3). Разложение дифференциалов $d\mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_2$ по базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ приводит к формулам Гаусса:

$$d\mathbf{e}_1 = \phi_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1 \mathbf{n}, \quad d\mathbf{e}_2 = \phi_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{n}, \quad (3)$$

где $\phi_1^2 = -\phi_2^1$ – формы связности корепера τ , ω_1, ω_2 – формы погружения. Формы погружения удовлетворяют уравнению Гаусса:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = K \tau^1 \wedge \tau^2, \quad (4)$$

где K – гауссова кривизна поверхности S . Внешнее дифференцирование равенства (2) с использованием (3) дает

$$\omega_1 \wedge \tau^1 + \omega_2 \wedge \tau^2 = 0. \quad (5)$$

Разложение форм погружения по кореперу τ имеет вид $\omega_i = b_{i1}\tau^1 + b_{i2}\tau^2, i = 1, 2$. Из (5) следует, что $b_{12} = b_{21}$. Симметрическая билинейная форма $\Pi = b_{ij}\tau^i \otimes \tau^j, i, j = 1, 2$, называется второй основной формой поверхности S . Для гауссовой кривизны получаем $K = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$.

2.4. Рассмотрим произвольное бесконечно малое изгибание первого порядка погружения $\mathbf{r}: D \rightarrow E^3$. Для всякой величины A на S через δA будем обозначать ее вариацию. Вариация $\delta \mathbf{r}$ называется *изгибающим полем* поверхности S . Поля $\mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{r}$ связаны равенством

$$d\mathbf{r} \cdot d\delta \mathbf{r} = 0, \quad (6)$$

где точкой обозначено скалярное произведение в E^3 . Изгибающее поле вида $\delta \mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – постоянные векторы из E^3 , а также соответствующее бесконечно малое изгибание поверхности S называются *тривиальными*. Поверхность называется *жесткой*, если всякое ее изгибающее поле тривиально, и *жесткой вне плоских областей*, если всякое ее изгибающее поле тривиально на каждом связном куске, не содержащем плоских областей.

Из теоремы 3 работы [18] следует, что для данного изгибающего поля $\delta \mathbf{r}$ поверхности S существует и притом единственное поле бивекторов $\bar{V}$ класса C^1 такое, что $d\delta \mathbf{r} = \bar{V} \cdot d\mathbf{r}$, где справа – внутреннее произведение бивектора на вектор [19]. Для дифференциала поля $\bar{V}$ имеет место формула $d\bar{V} = \delta\omega_1[\mathbf{e}_1, \mathbf{n}] + \delta\omega_2[\mathbf{e}_2, \mathbf{n}]$ (см. [18; лемма 6]). Здесь знаком $[\cdot, \cdot]$ обозначено внешнее умножение в пространстве E^3 .

Пусть $\bar{V} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 V^{\alpha\beta}[\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta]$. Дополнительное к $\bar{V}$ векторное поле $\mathbf{V} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 V^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta$ будем называть *полем вращений* поверхности S при заданном бесконечно малом изгибании. Это поле однозначно определяется равенством

$$d\delta \mathbf{r} = \mathbf{V} \times d\mathbf{r}. \quad (7)$$

Для дифференциала поля $\mathbf{V}$ получаем

$$d\mathbf{V} = \delta\omega_2 \mathbf{e}_1 - \delta\omega_1 \mathbf{e}_2. \quad (8)$$

Отсюда для производной поля вращений по длине дуги s произвольной кривой γ класса C^2 на S выводится формула (см. [20]):

$$\frac{d\mathbf{V}}{ds} = \delta k_n \mathbf{l} + \delta \tau_g \mathbf{t}, \quad (9)$$

где $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ — единичный вектор касательной к γ , $\mathbf{l} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ — единичный вектор тангенциальной нормали этой кривой, k_n и τ_g — соответственно нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности S вдоль γ .

Варьируя равенство (5), получаем $\delta\omega_1 \wedge \tau^1 + \delta\omega_2 \wedge \tau^2 = 0$. Отсюда и из (2), (8) следует, что

$$d\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{V} \times d\mathbf{V} = 2\Delta \mathbf{n} \tau^1 \wedge \tau^2, \quad (10)$$

где обозначено $\Delta \equiv \delta b_{11} \delta b_{22} - \delta b_{12}^2$. Здесь и далее векторное произведение дифференциалов векторных полей вычисляется по правилу: $d\mathbf{V} \times d\mathbf{V} = -\delta\omega_2 \wedge \delta\omega_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \delta\omega_1 \wedge \delta\omega_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1$.

Варьируя равенство (4), будем иметь $\delta\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \delta\omega_2 = 0$. Отсюда следует, что

$$b_{11} \delta b_{22} - 2b_{12} \delta b_{12} + b_{22} \delta b_{11} = 0. \quad (11)$$

Из результатов книги [20; гл. 5, §§ 7, 9] вытекает

ЛЕММА 3. *Если поверхность S неотрицательной гауссовой кривизны не содержит плоских областей, то $\Delta \leq 0$ на S . Если при этом множество ее асимптотических, в каждой точке которых вариация нормальной кривизны по каждому неасимптотическому направлению отлична от нуля, не заполняет области на S , то равенство $\Delta \equiv 0$ влечет тривиальность соответствующего бесконечно малого изгибания поверхности S .*

2.5. В заключение этого параграфа, чтобы показать, что на гладкой поверхности с конической точкой существуют нетривиальные гладкие изгибающие поля, мы построим изгибающее поле класса C^∞ на конусе класса C^∞ . Рассмотрим конус класса C^∞ с вершиной в начале координат, не содержащий плоских кусков.

ПРИМЕР 2. Пусть γ — линия пересечения этого конуса со сферой единичного радиуса с центром в начале координат, $\rho = \rho(x)$ — параметризация кривой γ длиной дуги x , $x \in [0, L]$. Тогда конус может быть задан уравнением $\mathbf{r} = y\rho(x)$, где $y \in [0, \infty)$, функция $\rho(x)$ принадлежит классу C^∞ на $[0, L]$ и удовлетворяет условиям $\rho(0) = \rho(L)$, $|\rho(x)| = |\rho'(x)| = 1$, $(\rho(x), \rho'(x), \rho''(x)) \neq 0$ для всякого $x \in [0, L]$. Здесь (ρ, ρ', ρ'') — смешанное произведение.

Пусть $c(x)$ — произвольная периодическая функция класса C^∞ с периодом L . Прямая проверка показывает, что поле $\delta\mathbf{r}$, определенное равенством

$$\delta\mathbf{r} = y \left(c(x) \rho'(x) + \frac{c'(x)}{(\rho(x), \rho'(x), \rho''(x))} \rho(x) \times \rho'(x) \right),$$

удовлетворяет уравнению (6), а значит, является изгибающим полем класса C^∞ рассматриваемого конуса.

§3. Вспомогательные предложения

В данном параграфе рассматриваются бесконечно малые изгибания плоских кусков, окрестностей конических точек, а также поведение поля вращений на регулярных участках ребер и в вершинах.

3.1. В этом пункте мы рассмотрим бесконечно малые изгибания плоских граней.

ЛЕММА 4. Пусть G – кусок плоскости с границей ∂G , состоящей из конечного числа дуг класса C^2 , звездный относительно некоторой точки $M_0 \in \partial G$. Для всякого непрерывного кусочно гладкого в классе C^2 изгибающего поля $\delta \mathbf{r}$ куска G существует непрерывное кусочно гладкое в классе C^2 изгибающее поле $\tilde{\delta} \mathbf{r}$ этого куска такое, что $\tilde{\delta} b_{11} \tilde{\delta} b_{22} - \tilde{\delta} b_{12}^2 = 0$ и $\tilde{\delta} \mathbf{r}|_{\partial G} = \delta \mathbf{r}|_{\partial G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in [0, u_0]$, – уравнение границы ∂G , где u – длина дуги, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(u_0) \equiv \mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0 . Зададим кусок G уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + v(\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0), \quad (12)$$

где $v \in (0, 1]$. В работе [21] показано, что всякое изгибающее поле куска G имеет вид $\delta \mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b} + \zeta \mathbf{n}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \text{const}$, ζ – функция на G , кусочно регулярная в классе C^2 . Положим

$$\tilde{\zeta}(u, v) = \zeta_0 + v(\zeta(u, 1) - \zeta_0), \quad (13)$$

где ζ_0 – значение функции ζ в точке M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Припишем значения функции $\tilde{\zeta}$ точкам куска G . Продолжим функцию $\tilde{\zeta}$ вместе с ее производными второго порядка в точку M_0 по непрерывности. Получим функцию $\tilde{\zeta}$ на G , принадлежащую классу C^2 в окрестности каждой точки, не лежащей на прямых, соединяющих M_0 с точками нарушения гладкости границы ∂G . Так как таких прямых конечное число, то функция $\tilde{\zeta}$ кусочно гладкая в классе C^2 .

Положим теперь

$$\tilde{\delta} \mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b} + \tilde{\zeta} \mathbf{n}. \quad (14)$$

Поле $\tilde{\delta} \mathbf{r}$ принадлежит классу C^2 на каждом куске, заключенном между прямыми, соединяющими две соседние точки нарушения гладкости границы ∂G . На каждом таком куске поле $\tilde{\delta} \mathbf{r}$ удовлетворяет уравнению (6), а значит, является изгибающим полем поверхности G . Так как $\tilde{\delta} \mathbf{r}(u, 1) = \delta \mathbf{r}(u, 1)$, то $\tilde{\delta} \mathbf{r}|_{\partial G} = \delta \mathbf{r}|_{\partial G}$.

Покажем, что $\tilde{\delta} b_{11} \tilde{\delta} b_{22} - \tilde{\delta} b_{12}^2 = 0$. Из равенства (7) с учетом (12), (13) и (14) находим

$$(\mathbf{V} - \mathbf{a}) \times \mathbf{r}'_u(u) = \zeta'_u(u, 1) \mathbf{n}, \quad (\mathbf{V} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0) = (\zeta(u, 1) - \zeta_0) \mathbf{n}.$$

Дифференцируя второе из этих равенств по u и учитывая первое, находим $\mathbf{V}_u \times (\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$. Дифференцируя второе равенство по v , получаем $\mathbf{V}_v \times (\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$. Значит, дифференциал $d\mathbf{V}$ имеет вид $d\mathbf{V} = \lambda(\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0)$, где λ – некоторая линейная дифференциальная форма. Отсюда следует, что $d\mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \mathbf{0}$, и из (10) получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Заметим, что плоские куски на поверхности Φ_l^k из §1 удовлетворяют условиям этой леммы.

3.2. При исследовании поверхности в окрестности обыкновенной точки часто бывает удобно использовать явное задание поверхности, проектируя ее на касательную плоскость в этой точке. В конической точке касательная плоскость не определена, однако имеется касательный конус. Используя его, в двух ближайших леммах мы распространим указанное задание поверхности на случай конической точки.

ЛЕММА 5. *Внутренняя изолированная коническая точка M_0 на выпуклой поверхности S класса C^1 обладает окрестностью, допускающей инъективное ортогональное проектирование на касательный конус $\hat{S}$ к поверхности S в точке M_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что S является выпуклой поверхностью класса C^1 , следует, что касательный конус $\hat{S}$ к поверхности S в точке M_0 совпадает с опорным конусом, т.е. представляет собою границу пересечения всех полупространств, содержащих S и ограниченных опорными плоскостями к S в точке M_0 . Поэтому каждая точка M на поверхности S , достаточно близкая к M_0 , находится либо внутри конуса $\hat{S}$, либо на самом конусе. Если точка M находится на $\hat{S}$, то ее ортогональной проекцией на $\hat{S}$ считается сама точка M .

а. Покажем, что из каждой точки M , расположенной внутри конуса $\hat{S}$, можно опустить перпендикуляр на $\hat{S}$, т.е. провести кратчайший отрезок $M\hat{M}$ с концом $\hat{M}$ на конусе, перпендикулярный опорной плоскости к конусу в точке $\hat{M}$. В рассуждениях этой части доказательства конус может быть заменен на произвольную общую выпуклую поверхность. Для произвольной точки $\hat{P}$ на $\hat{S}$ обозначим через $f(\hat{P})$ расстояние от M до $\hat{P}$. Функция $f(\hat{P})$ непрерывна на $\hat{S}$ и ограничена снизу нулем. Следовательно, она достигает наименьшего значения. Пусть $\hat{M}$ — одна из точек, в которой эта функция принимает наименьшее значение. Покажем, что отрезок $M\hat{M}$ перпендикулярен каждой опорной плоскости к $\hat{S}$ в точке $\hat{M}$. Предположим от противного, что найдется опорная плоскость, которой этот отрезок не перпендикулярен. Опустим на нее перпендикуляр $M\hat{M}'$. В силу выпуклости $\hat{S}$ отрезок $M\hat{M}'$ пересечет поверхность $\hat{S}$ в некоторой точке $\hat{M}''$. Тогда $f(\hat{M}'') \leq |M\hat{M}'| < f(\hat{M})$, что противоречит тому, что значение $f(\hat{M})$ наименьшее. В частности, отсюда следует, что в точке $\hat{M}$ не может быть двух различных опорных плоскостей к $\hat{S}$.

б. Покажем, что в каждой точке из достаточно малой окрестности точки M_0 нормаль к конусу $\hat{S}$ пересекает поверхность S . Пусть $\hat{M}$ — произвольная точка на конусе $\hat{S}$. Рассмотрим касательную плоскость к конусу $\hat{S}$ в точке $\hat{M}$. Эта плоскость имеет общую прямолинейную образующую $\hat{l}$ с $\hat{S}$. Ортогональной проекцией конуса $\hat{S}$ на касательную плоскость является угол, стороны которого касаются в вершине ортогональной проекции поверхности S (рис. 4).

Луч $\hat{l}$ находится внутри этого угла, а в силу выпуклости проекции поверхности S пересекает внутренность этой проекции. Если теперь точка $\hat{M}$ находится на $\hat{l}$ достаточно близко к M_0 , то она окажется внутри проекции поверхности S . Это означает, что нормаль к $\hat{S}$ в $\hat{M}$ пересекает S .

в. Сопоставим каждой точке M на поверхности S ближайшую к ней точку $\hat{M}$ конуса $\hat{S}$. Покажем, что если точка M достаточно близка к M_0 , то это соответствие однозначно. Рассмотрим плоскость π , проходящую через точки M_0 , M и $\hat{M}$.

Рис. 4

В силу п. а отрезок $M\hat{M}$ лежит на нормали к конусу $\hat{S}$ в точке $\hat{M}$. Значит, можем считать, что плоскость π перпендикулярна касательной плоскости к конусу $\hat{S}$ вдоль прямолинейной образующей $M_0\hat{M}$. Обозначим через γ отрезок линии пересечения этой плоскости с поверхностью S , заключенный между точками M_0 и M ; γ представляет собою плоскую выпуклую дугу, для которой прямая M_0M является касательной в точке M_0 . Покажем, что каждой внутренней точке дуги γ соответствует единственная точка на конусе $\hat{S}$.

Если γ — отрезок прямой, то он совпадает с отрезком $M_0\hat{M}$ и каждой точке на γ будет соответствовать единственная точка (она сама) на конусе $\hat{S}$. Поэтому будем считать, что γ не содержит отрезка прямой с концом M_0 . В этом случае γ располагается внутри треугольника $M_0M\hat{M}$ и не имеет общих внутренних точек с прямыми $M_0\hat{M}$ и M_0M . Следовательно, если через произвольную внутреннюю точку N дуги γ в плоскости π провести прямую перпендикулярно образующей $M_0\hat{M}$, то точка N будет располагаться между точками N_1 пересечения ее с прямой M_0M и $\hat{N}$ пересечения с образующей $M_0\hat{M}$ (рис. 5). Отсюда для длин соответствующих отрезков имеем неравенство $|N\hat{N}| < |N_1\hat{N}|$.

Рис. 5

Обозначим теперь через $S_r(M)$ сферу радиуса $r = |M\hat{M}|$ с центром в точке M . Так как r — наименьшее из расстояний от точки M до конуса, сфера $S_r(M)$ расположена внутри конуса $\hat{S}$ и касается его в точке $\hat{M}$. Не исключено, что имеются и другие точки касания. Для каждой такой точки $\hat{M}'$ прямоугольные треугольники $M_0M\hat{M}'$ и $M_0M\hat{M}$ равны и имеют общую гипотенузу. Для рассмотренной выше

произвольной внутренней точки N дуги γ положим $k = |M_0\hat{N}|/|M_0\hat{M}|$ и рассмотрим сферу $S_{kr}(N_1)$. Эта сфера гомотетична сфере $S_r(M)$ относительно точки M_0 , а значит, располагается внутри конуса $\hat{S}$ и касается тех же прямолинейных образующих, что и сфера $S_r(M)$. Обозначим через $S(N)$ сферу с центром в точке $N \in \gamma$ радиуса $|N\hat{N}|$. Она касается сферы $S_{kr}(N_1)$ в единственной точке $\hat{N}$ и располагается внутри нее. Следовательно, сфера $S(N)$ касается конуса $\hat{S}$ в единственной точке $\hat{N}$. Таким образом, всякой внутренней точке дуги γ на конусе $\hat{S}$ соответствует единственная точка. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть M_0 – внутренняя изолированная точка на выпуклой поверхности S класса C^2 , в которой касательный конус к S является конической поверхностью класса C^3 , регулярной всюду, кроме, может быть, точки M_0 . Тогда в некоторой окрестности точки M_0 поверхность S может быть задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + y\rho(x) + f(x, y)\rho \times \rho', \quad (15)$$

где $x \in [0, L]$, $y \in [0, \varepsilon_0)$, $L > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0 , $\rho = \rho(x)$ – вектор-функция класса C^3 на $[0, L]$, удовлетворяющая условиям

$$|\rho| = |\rho'| = 1, \quad (16)$$

$\rho' = \frac{d\rho}{dx}$, $f(x, y)$ – неотрицательная функция класса C^2 на множестве $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$, удовлетворяющая условиям

$$f(x, 0) = f_y(x, 0) = f_{xy}(x, 0) = 0. \quad (17)$$

При этом карта на многообразии X с координатными функциями x, y C^3 -согласована с каждой картой из C^∞ -структуры на этом многообразии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – регулярная область на многообразии X , образом которой при C^2 -отображении $\mathbf{r}: X \rightarrow E^3$ является окрестность конической точки M_0 на поверхности S . В окрестности произвольного прообраза точки M_0 введем на X локальные координаты (u, v) так, чтобы попавшая в эту окрестность часть границы ∂D задавалась уравнением $v = 0$ (см. п. 2.2). В этом случае уравнение касательного конуса $\hat{S}$ локально может быть записано в виде (1). Так как по условию касательный конус является конической поверхностью класса C^3 , то вектор-функция $\mathbf{r}_v(u, 0)$ из (1) задает C^3 -регулярную дугу направляющей касательного конуса $\hat{S}$ к поверхности S в точке M_0 .

Рассмотрим линию пересечения касательного конуса $\hat{S}$ с единичной сферой с центром в точке M_0 . Как трансверсальное пересечение аналитической поверхности с поверхностью класса C^3 она является регулярной кривой класса C^3 . Пусть L – ее длина. Параметризуем эту линию длиной дуги x . Тогда ее уравнение может быть записано в виде $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 + \rho(x)$, где ρ – радиус-вектор точки на линии относительно точки M_0 . Вектор-функция ρ принадлежит классу C^3 и удовлетворяет условиям (16).

Уравнение касательного конуса $\hat{S}$ можно записать в виде $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 + y\rho(x)$, где параметр y изменяется на полусегменте $[0, \infty)$. При этом переход от координат u, v к координатам x, y осуществляется отображением класса C^3 с ненулевым якобианом. Следовательно, карта на X с координатными функциями x, y C^3 -согласована с каждой картой из имеющейся C^∞ -структуры.

По лемме 5 при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ на часть конуса $\hat{S}$, определяемую неравенствами $0 \leq y < \varepsilon_0$, взаимно однозначно ортогонально проектируется некоторая окрестность точки M_0 на поверхности S . Дальнейшие рассуждения относятся к этой окрестности.

Пусть M – произвольная точка из рассматриваемой окрестности, отличная от M_0 , $\widehat{M}$ – ее ортогональная проекция на $\hat{S}$, x, y – внутренние координаты $\widehat{M}$ на $\hat{S}$, $f(x, y)$ – длина отрезка $M\widehat{M}$. Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M может быть представлен равенством (15) (рис. 6 (a)).

Рис. 6

Из этого равенства следует, что $f(x, y) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \rho, \rho')$, где справа смешанное произведение. Так как по определению поверхности класса C^2 $\mathbf{r}: X \rightarrow E^3 - C^2$ -отображение, то функция f является функцией класса C^2 на множестве $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$.

При произвольно фиксированном $x \in [0, L]$ рассматривая график функции $f(x, y)$ в осях координат с осями ρ и $\rho \times \rho'$, учитывая, что он касается ося ρ (рис. 6 (b)), заключаем, что $f(x, 0) = f_y(x, 0) = 0$, а значит, и $f_{yx}(x, 0) = 0$. Лемма доказана.

3.3. Известно, что на регулярной поверхности класса C^2 поле вращений, соответствующее изгибающему полю класса C^2 , определено однозначно и принадлежит классу C^1 . В конической точке поле вращений, вообще говоря, не определено. Здесь мы рассмотрим поведение поля вращений в окрестности конической точки и покажем, что оно может быть непрерывно продолжено (не однозначно) в коническую точку. Все рассуждения этого пункта относятся к окрестности конической точки M_0 на выпуклой поверхности, заданной уравнением (15).

ЛЕММА 7. Если касательный конус к выпуклой поверхности S класса C^2 в конической точке M_0 является поверхностью класса C^3 , то для всякого

изгибающего поля класса C^2 поверхности S соответствующее поле вращений $\mathbf{V}(x, y)$ может быть непрерывно продолжено с множества $[0, L] \times (0, \varepsilon_0)$ на множество $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$. Его частная производная $\mathbf{V}_x$ на множестве $[0, L] \times (0, \varepsilon_0)$ имеет вид

$$\mathbf{V}_x = \frac{p(x, y)}{y} \rho + \mathbf{R}(x, y), \quad (18)$$

где $p(x, y)$ – непрерывная функция на множестве $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$, $\mathbf{R}(x, y)$ – непрерывная на этом множестве вектор-функция. При этом $p(x, 0) = 0$, $\mathbf{R}(x, 0) = \mathbf{0}$ для всякого $x \in [0, L]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вектор-функции $\rho = \rho(x)$, определенной леммой 6, обозначим $\beta = (\rho, \rho', \rho'')$. Из равенств (16) выводятся соотношения

$$\rho'' = -\rho + \beta \rho \times \rho', \quad \rho \times \rho'' = -\beta \rho'. \quad (19)$$

Используя эти соотношения, для производных радиус-вектора $\mathbf{r}$ из (15) находим

$$\mathbf{r}_x = (y - \beta f) \rho' + f_x \rho \times \rho', \quad \mathbf{r}_y = \rho + f_y \rho \times \rho'. \quad (20)$$

Представим изгибающее поле $\delta \mathbf{r}$ в виде $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_0 + \eta \rho + \xi \rho' + \zeta \rho \times \rho'$, где $\delta \mathbf{r}_0$ – его значение в точке M_0 , ξ , η и ζ – некоторые функции класса C^2 на $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$. Так как $\delta \mathbf{r}(x, 0) = \delta \mathbf{r}_0 = \text{const}$, то

$$\xi(x, 0) = \eta(x, 0) = \zeta(x, 0) = 0. \quad (21)$$

Используя (19), для производных поля $\delta \mathbf{r}$ получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_x &= (\eta_x - \xi) \rho + (\eta + \xi_x - \beta \zeta) \rho' + (\zeta_x + \beta \xi) \rho \times \rho', \\ \delta \mathbf{r}_y &= \eta_y \rho + \xi_y \rho' + \zeta_y \rho \times \rho'. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (6) в рассматриваемой параметризации преобразуется в систему уравнений

$$\begin{cases} (y - \beta f)(\eta + \xi_x - \beta \zeta) + f_x(\zeta_x + \beta \xi) = 0, \\ \eta_x - \xi + f_y(\zeta_x + \beta \xi) + (y - \beta f)\xi_y + f_x \zeta_y = 0, \\ \eta_y + f_y \zeta_y = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Равенство (7) эквивалентно системе

$$\delta \mathbf{r}_x = \mathbf{V} \times \mathbf{r}_x, \quad \delta \mathbf{r}_y = \mathbf{V} \times \mathbf{r}_y. \quad (24)$$

Представим поле $\mathbf{V}$ в виде

$$\mathbf{V} = u \rho + v \rho' + w \rho \times \rho', \quad (25)$$

где u , v и w – функции класса C^1 на множестве $[0, L] \times (0, \varepsilon_0)$. Подставляя в (24) выражения (20) и (22), получаем систему уравнений для u , v и w :

$$\begin{cases} v f_x - w(y - \beta f) = \eta_x - \xi, \\ -u f_x = \eta + \xi_x - \beta \zeta, \\ u(y - \beta f) = \zeta_x + \beta \xi, \\ v f_y = \eta_y, \\ w - u f_y = \xi_y, \\ v = -\zeta_y, \end{cases} \quad (26)$$

откуда находим

$$u = \frac{\zeta_x + \beta \xi}{y - \beta f}, \quad v = -\zeta_y, \quad w = \xi_y + \frac{f_y}{y - \beta f}(\zeta_x + \beta \xi), \quad y > 0. \quad (27)$$

Из второго равенства следует, что функция v , а также ее производные первого порядка непрерывно продолжаемы на множество $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$.

В силу (17) для предела функции u при $y \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\zeta_x/y + \beta \xi/y}{1 - \beta f/y} = \frac{\zeta_{xy}(x, 0) + \beta \xi_y(x, 0)}{1 - \beta f_y(x, 0)} = \zeta_{xy}(x, 0) + \beta \xi_y(x, 0).$$

В силу непрерывности правой части отсюда следует непрерывная продолжаемость функции $u(x, y)$ на множество $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$. Наконец, для функции w с учетом (21) находим

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} w(x, y) &= \xi_y(x, 0), & \lim_{y \rightarrow 0} w_x(x, y) &= \xi_{xy}(x, 0), \\ \lim_{y \rightarrow 0} w_y(x, y) &= \xi_{yy}(x, 0) + f_{yy}(x, 0)(\zeta_{xy}(x, 0) + \beta \xi_y(x, 0)). \end{aligned}$$

Значит, функция w и ее производные первого порядка непрерывно продолжаемы на множество $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$.

Полагая

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \zeta_{xy}(x, 0) + \beta \xi_y(x, 0), & v(x, 0) &= -\zeta_y(x, 0), \\ w(x, 0) &= \xi_y(x, 0), & v_x(x, 0) &= -\zeta_{xy}(x, 0), \\ v_y(x, 0) &= -\zeta_{yy}(x, 0), & w_x(x, 0) &= \xi_{xy}(x, 0), \\ w_y(x, 0) &= \xi_{yy}(x, 0) + f_{yy}(x, 0)(\zeta_{xy}(x, 0) + \beta \xi_y(x, 0)), \end{aligned} \quad (28)$$

будем иметь непрерывные на множестве $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и $w(x, y)$, причем функции v и w принадлежат классу C^1 на этом множестве. Отсюда и из четвертого уравнения системы (26) следует, что $\eta_y(x, 0) = 0$ для всякого $x \in [0, L]$. Тем самым доказано, что поле $\mathbf{V}$ может быть непрерывно продолжено на множество $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$.

Из (25) для производной $\mathbf{V}_x$ находим

$$\mathbf{V}_x = (u_x - v)\rho + (u + v_x - \beta w)\rho' + (\beta v + w_x)\rho \times \rho'. \quad (29)$$

Положив

$$\mathbf{R} = (u + v_x - \beta w)\rho' + (\beta v + w_x)\rho \times \rho', \quad p = y(u_x - v), \quad (30)$$

получим равенство (18). Ясно, что вектор-функция $\mathbf{R}$ непрерывна на $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$. Покажем, что $\mathbf{R}(x, 0) = \mathbf{0}$. Из (28) следует, что $u(x, 0) + v_x(x, 0) - \beta w(x, 0) = 0$. Из первого уравнения системы (23) имеем

$$\eta + \xi_x - \beta \zeta = -\frac{f_x(\zeta_x + \beta \xi)}{y(1 - \beta f/y)}.$$

Разделим на y и перейдем к пределу при $y \rightarrow 0$. Учитывая, что $f_{xy}(x, 0) = \eta_y(x, 0) = 0$, получим $\xi_{xy}(x, 0) - \beta \zeta_y(x, 0) = 0$. Отсюда и из (28) следует, что $\beta v(x, 0) + w_x(x, 0) = 0$. Следовательно, $\mathbf{R}(x, 0) = \mathbf{0}$.

Из (27) для функции $p(x, y)$ на множестве $[0, L] \times (0, \varepsilon_0)$ находим

$$p = \frac{(\zeta_{xx} + \beta' \xi + \beta \xi_x)(1 - \beta f/y) + (\zeta_x + \beta \xi)(\beta' f/y + \beta f_x/y)}{(1 - \beta f/y)^2} + y \zeta_y.$$

Отсюда и из (21) вытекает, что $p(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} p(x, y) = 0$. Лемма доказана.

3.4. Сохраняя обозначения предыдущего пункта, для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ обозначим через $\widehat{l}_\varepsilon$ линию пересечения касательного конуса $\widehat{S}$ к поверхности S в точке M_0 со сферой радиуса ε с центром в точке M_0 , через l_ε — ее прообраз на поверхности S при ортогональном проектировании на $\widehat{S}$. Будем считать, что при движении нормали к поверхности вдоль l_ε точка M_0 находится справа. Кривая l_ε в рассматриваемых координатах x, y задается уравнением $y = \varepsilon, 0 \leq x \leq L$. Будем обозначать через $\mathfrak{r}$ разбиение отрезка $[0, L]$ на n частей точками $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = L$. Положим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \nu = \max_i \Delta x_i, \quad \lambda_i = \frac{p(x_i, \varepsilon) \Delta x_i}{\varepsilon}, \quad \rho_i = \rho(x_i), \\ i = 1, \dots, n.$$

Введем в рассмотрение зависящий от разбиения и ε вектор $\overline{\Omega}_{M_0}$, полагая

$$\overline{\Omega}_{M_0} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \rho_i \times \rho_j \lambda_i \lambda_j.$$

ЛЕММА 8. Если поверхность S класса C^2 обладает в точке M_0 касательным конусом класса C^3 , то справедливо равенство

$$\int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \bar{\Omega}_{M_0} + \varphi(\varepsilon) + \psi(\mathbf{r}, \varepsilon), \quad (31)$$

где $\psi(\mathbf{r}, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\nu \rightarrow 0$ для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varphi(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как кривая l_ε замкнута, то

$$\int_{l_\varepsilon} d\mathbf{V} = \mathbf{0}.$$

Поэтому, переходя к интегрированию по сегменту $[0, L]$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} &= \int_0^L (\mathbf{V}(x, \varepsilon) - \mathbf{V}(0, \varepsilon)) \times \mathbf{V}_x(x, \varepsilon) dx + \mathbf{V}(0, \varepsilon) \times \int_{l_\varepsilon} d\mathbf{V} \\ &= \int_0^L (\mathbf{V}(x, \varepsilon) - \mathbf{V}(0, \varepsilon)) \times \mathbf{V}_x(x, \varepsilon) dx. \end{aligned}$$

Представляя $\mathbf{V}_x$ по лемме 7, находим

$$\int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \int_0^L (\mathbf{V}(x, \varepsilon) - \mathbf{V}(0, \varepsilon)) \times \left(\frac{p(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) + \mathbf{R}(x, \varepsilon) \right) dx.$$

Из леммы 7 следует, что $\mathbf{V}(x, y) - \mathbf{V}(0, y)$ ограничено на $[0, L] \times [0, \varepsilon_0)$. А так как $\mathbf{R}(x, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то полагая

$$\varphi_1(\varepsilon) = \int_0^L (\mathbf{V}(x, \varepsilon) - \mathbf{V}(0, \varepsilon)) \times \mathbf{R}(x, \varepsilon) dx,$$

получаем

$$\int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \int_0^L (\mathbf{V}(x, \varepsilon) - \mathbf{V}(0, \varepsilon)) \times \frac{p(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) dx + \varphi_1(\varepsilon)$$

и $\varphi_1(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из (18) следует, что

$$\mathbf{V}(x, \varepsilon) - \mathbf{V}(0, \varepsilon) = \int_0^x \left(\frac{p(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(t) + \mathbf{R}(t, \varepsilon) \right) dt.$$

Подставляя в предыдущее равенство, будем иметь

$$\int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \int_0^L \int_0^x \left(\frac{p(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(t) + \mathbf{R}(t, \varepsilon) \right) dt \times \frac{p(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) dx + \varphi_1(\varepsilon). \quad (32)$$

Обозначим

$$\varphi_2(\varepsilon) = \int_0^L \int_0^x \mathbf{R}(t, \varepsilon) dt \times \frac{p(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) dx.$$

В силу (18) можем записать

$$\varphi_2(\varepsilon) = \int_0^L \int_0^x \mathbf{R}(t, \varepsilon) dt \times \mathbf{V}_x(x, \varepsilon) dx - \int_0^L \int_0^x \mathbf{R}(t, \varepsilon) dt \times \mathbf{R}(x, \varepsilon) dx.$$

После интегрирования по частям в первом слагаемом справа приходим к равенству

$$\begin{aligned} \varphi_2(\varepsilon) &= \int_0^L \mathbf{R}(x, \varepsilon) dx \times \mathbf{V}(L, \varepsilon) - \int_0^L \mathbf{R}(x, \varepsilon) \times \mathbf{V}(x, \varepsilon) dx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^x \mathbf{R}(t, \varepsilon) dt \times \mathbf{R}(x, \varepsilon) dx. \end{aligned}$$

По лемме 7 отсюда следует, что $\varphi_2(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому если положить $\varphi(\varepsilon) = \varphi_1(\varepsilon) + \varphi_2(\varepsilon)$, то равенство (32) можно записать в виде

$$\int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \int_0^L \int_0^x \frac{p(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(t) dt \times \frac{p(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) dx + \varphi(\varepsilon),$$

где $\varphi(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Представляя интеграл справа в виде интегральной суммы по разбиению $\mathbf{r}$, будем иметь

$$\int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \frac{p(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(t) dt \times \lambda_i \rho_i + \varphi(\varepsilon) + \psi_1(\mathbf{r}, \varepsilon), \quad (33)$$

где $\psi_1(\mathbf{r}, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\nu \rightarrow 0$. Положим

$$\theta_i(\mathbf{r}, \varepsilon) = \int_0^{x_i} \frac{p(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(t) dt - \sum_{j=1}^i \lambda_j \rho_j. \quad (34)$$

Покажем, что

$$\psi_2(\mathbf{r}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \theta_i(\mathbf{r}, \varepsilon) \times \lambda_i \rho_i \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } \nu \rightarrow 0. \quad (35)$$

Обозначая $M(\varepsilon) = \max_{[0, L]} |p(x, \varepsilon)|$, имеем

$$\begin{aligned} |\psi_2(\mathbf{r}, \varepsilon)| &= \left| \sum_{i=1}^n \theta_i(\mathbf{r}, \varepsilon) \times \lambda_i \rho_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\theta_i(\mathbf{r}, \varepsilon)| |\lambda_i| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{x_i} \frac{p(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(t) dt - \sum_{j=1}^i \frac{p(x_j, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x_j) \Delta x_j \right| \left| \frac{p(x_i, \varepsilon)}{\varepsilon} \right| \Delta x_i \\ &\leq \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^i \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} p(t, \varepsilon) \rho(t) dt - p(x_j, \varepsilon) \rho(x_j) \Delta x_j \right|. \end{aligned}$$

Применяя к интегралу под знаком суммы теорему о среднем, можем записать

$$|\psi_2(\mathbf{r}, \varepsilon)| \leq \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^i |p(t_j, \varepsilon)\rho(t_j) - p(x_j, \varepsilon)\rho(x_j)| \Delta x_j,$$

где $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

Зафиксируем теперь произвольно число $\varepsilon_1 > 0$. Из непрерывности функций $p(x, \varepsilon)$ и $\rho(x)$ на $[0, L]$ следует, что найдется такое число $\delta(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, что, как только выполнится неравенство $\nu < \delta(\varepsilon, \varepsilon_1)$, так выполнятся неравенства

$$|p(t_j) - p(x_j)| < \varepsilon_1, \quad |\rho(t_j) - \rho(x_j)| < \varepsilon_1.$$

Поэтому при $\nu < \delta(\varepsilon, \varepsilon_1)$ имеем

$$\begin{aligned} |\psi(\mathbf{r}, \varepsilon)| &\leq \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^i |(p(t_j) - p(x_j))\rho(t_j) + p(x_j)(\rho(t_j) - \rho(x_j))| \Delta x_j \\ &\leq \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^i (|p(t_j) - p(x_j)| |\rho(t_j)| + |p(x_j)| |\rho(t_j) - \rho(x_j)|) \Delta x_j \\ &< \varepsilon_1 \frac{M(\varepsilon)(1 + M(\varepsilon))}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^i \Delta x_j < \varepsilon_1 \frac{M(\varepsilon)(1 + M(\varepsilon))}{\varepsilon^2} L^2. \end{aligned}$$

Тем самым требуемое утверждение доказано.

Полагая $\psi(\mathbf{r}, \varepsilon) = \psi_1(\mathbf{r}, \varepsilon) + \psi_2(\mathbf{r}, \varepsilon)$, из равенств (33)–(35) будем иметь

$$\int_{l_\varepsilon} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \rho_j \times \lambda_i \rho_i + \varphi(\varepsilon) + \psi(\mathbf{r}, \varepsilon).$$

Равенство (31) получается отсюда перегруппировкой слагаемых в сумме справа. Лемма доказана.

3.5. В данном пункте мы рассмотрим поведение поля вращений на регулярных участках ребер. Пусть γ – ребро класса C^2 , образованное кусками S^+ и S^- регулярных поверхностей класса C^2 . Будем считать, что γ задано уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s – длина дуги. При движении вдоль γ с возрастанием параметра s поверхность S^+ лежит слева. Через $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{m}$ будем обозначать единичные векторные поля касательной, главной нормали и бинормали соответственно, через $k = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{m}$ – кривизну ребра.

Предельные значения величин на поверхностях S^+ и S^- в точках ребра будем снабжать верхними индексами $+$ и $-$ соответственно. Через $\theta^\pm$ будем обозначать угол между вектором главной нормали $\mathbf{m}$ и вектором нормали $\mathbf{n}^\pm$, отсчитываемый против движения часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{t}$. Угол $\vartheta =$

$\theta^- - \theta^+$ называется *углом склеивания* кусков S^+ и S^- . При $\vartheta \neq 0, \pi$ определен вектор

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sin \vartheta} (k_n^+ \mathbf{n}^- + k_n^- \mathbf{n}^+). \quad (36)$$

Рассмотрим бесконечно малое изгибание поверхности $S^+ \cup S^-$ с непрерывным изгибающим полем, принадлежащим классу C^2 на каждом из кусков S^+ и S^- . Из условия непрерывности следует, что $\delta \mathbf{r}^+ = \delta \mathbf{r}^-$ вдоль γ . Отсюда для поля вращений $\mathbf{V}$ находим (см. [20]):

$$\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^- = -\mu \mathbf{t}, \quad (37)$$

где $\mu(s)$ — некоторая функция класса C^1 на γ .

ЛЕММА 9. Пусть γ — регулярное ребро класса C^2 , образованное регулярными кусками S^+ и S^- класса C^2 . Если угол склеивания $\vartheta \neq 0, \pi$ вдоль γ , то вдоль γ выполняется равенство

$$(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) \times \left(\frac{d\mathbf{V}^+}{ds} + \frac{d\mathbf{V}^-}{ds} \right) = -\mu^2 \mathbf{h}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (9) вдоль γ имеем

$$\frac{d\mathbf{V}^\pm}{ds} = \delta k_n^\pm \mathbf{l}^\pm + \delta \tau_g^\pm \mathbf{t}, \quad (38)$$

где $\mathbf{l}^\pm = \mathbf{t} \times \mathbf{n}^\pm$. С учетом этой формулы дифференцирование равенства (37) приводит к условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} \delta k_n^+ \cos \theta^+ - \delta k_n^- \cos \theta^- &= 0, \\ \delta k_n^+ \sin \theta^+ - \delta k_n^- \sin \theta^- &= -k\mu, \\ \delta \tau_g^+ - \delta \tau_g^- &= -\frac{d\mu}{ds}. \end{aligned} \quad (39)$$

Из этих равенств находим $\delta k_n^\pm = -k_n^\mp \mu / \sin \vartheta$. Для доказательства леммы остается подставить (37), (38) в левую часть доказываемого равенства и воспользоваться определением (36).

3.6. Рассмотрим внутреннюю вершину Q на поверхности S , склеенной из кусков $S_1, \dots, S_m$ выпуклых поверхностей класса C^2 вдоль ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, выходящих из Q . Будем считать, что ребра $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_1$ следуют в указанном порядке при движении нормали к поверхности вокруг вершины против движения часовой стрелки, ребро γ_i образовано кусками S_i и S_{i+1} , $i = 1, \dots, m$ (ребро γ_m — кусками S_m и S_1), причем при движении вдоль γ_i от вершины кусок S_i расположен справа. В дальнейшем будем отождествлять S_{m+1} с S_1 , γ_{m+1} с γ_1 . Через $\mathbf{t}_i$ обозначим единичный вектор касательной к γ_i в точке Q , через $\mathbf{V}_i$ — предельное положение поля вращений куска S_i на γ_i в точке Q . Из (37) имеем

$$\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i = -\mu_i \mathbf{t}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (40)$$

где μ_i — некоторые числа. Положим

$$\Omega_Q = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_j) \mu_i \mu_j.$$

ЛЕММА 10. Если вершина Q не является конической точкой ни одного из кусков $S_1, \dots, S_m$, то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_{i+1} = \Omega_Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рекуррентного соотношения (40) имеем

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_1 - \sum_{j=1}^i \mu_j \mathbf{t}_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (41)$$

Полагая $i = m$, получаем

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0}. \quad (42)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_{i+1} &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i+1}) \times \mathbf{V}_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^m (\mu_i \mathbf{t}_i) \times \left(\mathbf{V}_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \mathbf{t}_j \right) \\ &= - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} \mu_i \mu_j \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_j. \end{aligned}$$

После перегруппировки слагаемых в правой части получаем требуемое равенство.

ЛЕММА 11. Если вершина Q с радиус-вектором $\mathbf{r}$ не является конической точкой ни одного из кусков $S_1, \dots, S_m$, то для всякого вектора $\mathbf{k}$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) (\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) = \mathbf{r}(\mathbf{k} \cdot \Omega_Q) - \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \Omega_Q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим левую часть равенства через $\mathbf{T}$. Подставляя вместо $\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i$, $\mathbf{V}_{i+1}$ и $\mathbf{V}_i$ их выражения из (40) и (41), учитывая (42), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= - \sum_{i=1}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_i \mathbf{t}_i) \left(\mathbf{V}_1 - \sum_{j=1}^i \mu_j \mathbf{t}_j + \mathbf{V}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_i \mathbf{t}_i) \sum_{j=1}^i \mu_j \mathbf{t}_j - (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_1 \mathbf{t}_1) \mathbf{V}_1 - \sum_{i=2}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_i \mathbf{t}_i) \left(\mathbf{V}_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \mathbf{t}_j \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{t}_i) \mu_i^2 \mathbf{t}_i + 2 \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{t}_i) \mathbf{t}_j \mu_i \mu_j. \quad (43)$$

Перегруппировав здесь слагаемые справа, можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & 2 \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{t}_i \sum_{j=1}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_j \mathbf{t}_j) \\ & - \left(\sum_{i=1}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_i \mathbf{t}_i) \mu_i \mathbf{t}_i + 2 \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_j \mathbf{t}_j) \mu_i \mathbf{t}_i \right). \end{aligned}$$

С учетом (42) получаем

$$\mathbf{T} = - \sum_{i=1}^m (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu_i \mathbf{t}_i) \mu_i \mathbf{t}_i - 2 \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{t}_j) \mathbf{t}_i \mu_i \mu_j.$$

Сложив с (43) и разделив результат на 2, приходим к формуле

$$\mathbf{T} = - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^i (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_j) \mu_i \mu_j.$$

Перегруппировкой слагаемых справа это равенство приводится к виду

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_j) \mu_i \mu_j.$$

По определению вектора Ω_Q отсюда получаем требуемое равенство.

§ 4. Интегральные формулы

Доказательство сформулированных в §1 теорем опирается на одну интегральную формулу для склеенных поверхностей. Выводу этой формулы посвящен настоящий параграф.

4.1. Здесь мы рассмотрим случай регулярной поверхности класса C^2 с кусочно регулярным в классе C^2 краем.

ЛЕММА 12. Пусть S – регулярная поверхность класса C^2 , граница которой ∂S состоит из конечного числа регулярных дуг класса C^2 , $\mathbf{r}$ – ее радиус-вектор, $\mathbf{n}$ – поле единичных нормалей, $\mathbf{k}$ – произвольный постоянный вектор в E^3 . Для всякого бесконечно малого изгибания с изгибающим полем $\delta \mathbf{r}$ класса C^2 и полем вращений $\mathbf{V}$ положим $\mathbf{P} = \mathbf{k} \times \mathbf{V}$, $\mathbf{W} = \delta \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{V}$. Справедливо равенство

$$\iint_S [\mathbf{r}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})] \Delta d\sigma = \int_{\partial S} \mathbf{P} \times d\mathbf{W},$$

где $d\sigma$ – элемент площади поверхности S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7) следует, что $d\mathbf{W} = \mathbf{r} \times d\mathbf{V}$. Обозначая $\mathbf{w} = \mathbf{P} \times d\mathbf{W}$, в силу леммы 1 будем иметь $d\mathbf{w} = [\mathbf{k} \times d\mathbf{V}] \times [\mathbf{r} \times d\mathbf{V}]$. Используя (8), находим

$$\begin{aligned} d\mathbf{w} &= [\mathbf{k} \times (\delta\omega_2 \mathbf{e}_1 - \delta\omega_1 \mathbf{e}_2)] \times [\mathbf{r} \times (\delta\omega_2 \mathbf{e}_1 - \delta\omega_1 \mathbf{e}_2)] \\ &= ([\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1] \times [\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2] - [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2] \times [\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1]) \delta\omega_1 \wedge \delta\omega_2 \\ &= [\mathbf{r}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})] \Delta \tau^1 \wedge \tau^2. \end{aligned}$$

Полагая в формуле Стокса (лемма 2) $\omega = \mathbf{w}$, учитывая, что $d\sigma = \tau^1 \wedge \tau^2$, получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Формула, устанавливаемая следующей леммой, для регулярных поверхностей класса C^3 хорошо известна как формула В. Бляшке (см. [22], [4], [20]). Мы приводим ее, чтобы подчеркнуть ее справедливость для поверхностей класса C^2 .

ЛЕММА 13. Пусть S – регулярная поверхность класса C^2 , граница которой состоит из конечного числа регулярных дуг класса C^2 . Для всякого ее бесконечно малого изгибания с изгибающим полем класса C^2 и полем вращений $\mathbf{V}$ справедливо равенство

$$2 \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \Delta d\sigma = \int_{\partial S} (\mathbf{r}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}).$$

Для доказательства достаточно положить $\omega = (\mathbf{r}, \mathbf{V}, d\mathbf{V})$ и повторить предыдущие рассуждения.

4.2. Рассмотрим поверхность Φ_l^k из § 1. Зафиксируем достаточно малое число $\varepsilon > 0$. Для каждой конической точки M на этой поверхности будем обозначать через $l_\varepsilon(M)$ кривую, описанную в п. 3.4, через $\Phi_l^k(\varepsilon)$ – часть поверхности Φ_l^k , ограниченную кривыми $l_\varepsilon(M)$ и не содержащую конических точек. Применяя к каждому регулярному куску поверхности $\Phi_l^k(\varepsilon)$ интегральную формулу из леммы 12, будем иметь

$$\begin{aligned} &\iint_{\Phi_l^k(\varepsilon)} [\mathbf{r}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})] \Delta d\sigma \\ &= \sum_M \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{P} \times d\mathbf{W} + \int_\Gamma (\mathbf{P}^+ \times d\mathbf{W}^+ - \mathbf{P}^- \times d\mathbf{W}^-), \end{aligned} \quad (44)$$

где через Γ обозначена совокупность всех ребер поверхности Φ_l^k , суммирование в правой части проводится по всем коническим точкам этой поверхности. Интеграл под знаком суммы справа преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{P} \times d\mathbf{W} &= \int_{l_\varepsilon(M)} (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{V}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{l_\varepsilon(M)} [\mathbf{r}(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) - (\mathbf{k}, \mathbf{V}, \mathbf{r}) d\mathbf{V}] \right. \\ &\quad \left. + \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, d\mathbf{V}) \right). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части, получаем

$$\int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{P} \times d\mathbf{W} = \frac{1}{2} \int_{l_\varepsilon(M)} [\mathbf{r}(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, d\mathbf{V})] + \frac{1}{2} \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{r}).$$

Обозначая

$$\mathbf{I}_\varepsilon(M) = \int_{l_\varepsilon(M)} [\mathbf{r}(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, d\mathbf{V})], \quad \mathbf{J}_\varepsilon(M) = \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{r}),$$

можем записать

$$2 \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{P} \times d\mathbf{W} = \mathbf{I}_\varepsilon(M) + \mathbf{J}_\varepsilon(M). \quad (45)$$

Рассмотрим последний интеграл в правой части равенства (44). Запишем его в виде

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{P}^+ \times d\mathbf{W}^+ - \mathbf{P}^- \times d\mathbf{W}^-) = \int_{\Gamma} (\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-) \times d\mathbf{W}^+ + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^- \times d(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-).$$

Интегрируя по частям второй интеграл справа, пользуясь непрерывностью изгибающего поля на Φ_l^k , можем преобразовать этот интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{P}^+ \times d\mathbf{W}^+ - \mathbf{P}^- \times d\mathbf{W}^-) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{k}, \mathbf{r}, d\mathbf{V}^+) (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\mathbf{r}(\mathbf{k}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^+) - (\mathbf{k}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, \mathbf{r}) d\mathbf{V}^+ - \mathbf{k}(\mathbf{r}, d\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^-) - (\mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, \mathbf{k}) d\mathbf{V}^-] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [(\mathbf{r}, \mathbf{k}, d\mathbf{V}^-) (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) - \mathbf{r}(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, \mathbf{k}, d\mathbf{V}^-)] \\ &+ \int_{\Gamma} d[\mathbf{P}^- \times (\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)]. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_{\Gamma} [\mathbf{r}(\mathbf{k}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^+ + d\mathbf{V}^-) + \mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^+ + d\mathbf{V}^-)], \\ \mathbf{J} &= \int_{\Gamma} [(\mathbf{k}, \mathbf{r}, d\mathbf{V}^+ - d\mathbf{V}^-) (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) + (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) d(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)] \\ &+ 2 \int_{\Gamma} d\{[\mathbf{k} \times \mathbf{V}^-] \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)]\}, \end{aligned}$$

то можем записать

$$2 \int_{\Gamma} (\mathbf{P}^+ \times d\mathbf{W}^+ - \mathbf{P}^- \times d\mathbf{W}^-) = \mathbf{I} + \mathbf{J}. \quad (46)$$

Интеграл $\mathbf{J}$ с учетом (37) приводится к виду

$$\mathbf{J} = \int_{\Gamma} d[(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)(\mathbf{V}^+ + \mathbf{V}^-) + \mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{V}^+ + \mathbf{V}^-, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)].$$

Положим

$$\tau = (\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)(\mathbf{V}^+ + \mathbf{V}^-) + \mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{V}^+ + \mathbf{V}^-, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-).$$

Пусть γ — произвольное ребро с началом в точке P_1 и концом в точке P_2 . Тогда

$$\int_{\gamma} d\tau = \tau(P_2) - \tau(P_1).$$

Если γ замкнуто, то $P_1 = P_2$ и $\int_{\gamma} d\tau = \tau(P_2) - \tau(P_1) = \mathbf{0}$. Если γ не замкнуто и точка P_k , $k = 1, 2$, не является вершиной, то $\mathbf{V}^+(P_k) = \mathbf{V}^-(P_k)$ и, значит, $\tau(P_k) = \mathbf{0}$.

Рассмотрим произвольную вершину Q , из которой выходят ребра $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Если Q является началом ребра γ_i , то в обозначениях п. 3.6

$$-\tau(Q) = -(\mathbf{k}, \mathbf{r}_Q, \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i)(\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) - \mathbf{k}(\mathbf{r}_Q, \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i),$$

где $\mathbf{r}_Q$ — радиус-вектор вершины Q . Если Q является концом ребра γ_i , то

$$\tau(Q) = (\mathbf{k}, \mathbf{r}_Q, \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i+1})(\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1}) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_Q, \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i+1}).$$

Так как правые части двух последних равенств совпадают, то интеграл $\mathbf{J}$ представляется в виде суммы по всем вершинам и всем выходящим из них ребрам:

$$\mathbf{J} = - \sum_Q \sum_{i=1}^m [(\mathbf{k}, \mathbf{r}_Q, \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i)(\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_Q, \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i)].$$

Используя леммы 10 и 11, можем записать

$$\mathbf{J} = - \sum_Q [\mathbf{r}_Q(\mathbf{k} \cdot \Omega_Q) - \mathbf{k}(\mathbf{r}_Q \cdot \Omega_Q) + 2\mathbf{k}(\mathbf{r}_Q \cdot \Omega_Q)].$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{J} = - \sum_Q [\mathbf{r}_Q(\mathbf{k} \cdot \Omega_Q) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_Q \cdot \Omega_Q)]. \quad (47)$$

Поскольку исходная поверхность F взаимно однозначно регулярно проектировалась на плоскость Π , то равенство $\sin \vartheta = 0$ возможно только в случае, когда $\vartheta = 0$. В этом случае $\theta^+ = \theta^-$ и из формул (37), (38) и (39) следует, что вдоль таких участков ребер подынтегральное выражение в интеграле $\mathbf{I}$ обращается в $\mathbf{0}$,

а значит, можем считать, что интегралы по этим участкам в выражении $\mathbf{I}$ отсутствуют. Поэтому в силу леммы 9 интеграл $\mathbf{I}$ можно представить в виде

$$\mathbf{I} = - \int_{\Gamma^0} \mu^2 [\mathbf{r}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{h})] ds, \quad (48)$$

где ds – элемент длины дуги ребра, Γ^0 – объединение участков ребер, вдоль которых $\sin \vartheta \neq 0$.

Вернемся к интегралу $\mathbf{I}_\varepsilon(M)$. Представим его в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\varepsilon(M) &= \int_{l_\varepsilon(M)} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M, \mathbf{V}, d\mathbf{V})] \\ &\quad + \int_{l_\varepsilon(M)} [\mathbf{r}_M(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_M, \mathbf{V}, d\mathbf{V})], \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_M$ – радиус-вектор точки M . Положим

$$\varphi_3(\varepsilon) = \int_{l_\varepsilon(M)} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)(\mathbf{k}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M, \mathbf{V}, d\mathbf{V})]$$

и покажем, что $\varphi_3(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, записав интеграл $\varphi_3(\varepsilon)$ в координатах x, y из п. 3.2 и представив вектор $\mathbf{r}$ по лемме 6, а производную $\mathbf{V}_x$ по лемме 7, будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_3(\varepsilon) &= \int_0^L \left(\rho(x) + \frac{f(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) \times \rho'(x) \right) (\mathbf{k}, \mathbf{V}(x, \varepsilon), p(x, \varepsilon) \rho) dx \\ &\quad + \int_0^L (\mathbf{r}(x, \varepsilon) - \mathbf{r}_M)(\mathbf{k}, \mathbf{V}(x, \varepsilon), \mathbf{R}(x, \varepsilon)) dx \\ &\quad + \int_0^L \mathbf{k} \left(\rho(x) + \frac{f(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) \times \rho'(x), \mathbf{V}(x, \varepsilon), p(x, \varepsilon) \rho(x) \right) dx \\ &\quad + \int_0^L \mathbf{k}(\mathbf{r}(x, \varepsilon) - \mathbf{r}_M, \mathbf{V}(x, \varepsilon), \mathbf{R}(x, \varepsilon)) dx. \end{aligned}$$

Так как $\frac{f(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow f_y(x, 0) = 0$, $p(x, \varepsilon) \rightarrow 0$, $\mathbf{R}(x, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{r}_M$ и $\mathbf{V}(x, y)$ ограничены на множестве $[0, L] \times [0, \varepsilon_0]$, то $\varphi_3(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Интеграл $\mathbf{I}_\varepsilon(M)$ теперь можем представить в виде

$$\mathbf{I}_\varepsilon(M) = \mathbf{r}_M \left(\mathbf{k} \cdot \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} \right) + \mathbf{k} \left(\mathbf{r}_M \cdot \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{V} \times d\mathbf{V} \right) + \varphi_3(\varepsilon).$$

Применяя лемму 8, будем иметь

$$\mathbf{I}_\varepsilon(M) = \mathbf{r}_M(\mathbf{k} \cdot \overline{\Omega}_M) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_M \cdot \overline{\Omega}_M) + \varphi_M^0(\varepsilon) + \varphi_3(\varepsilon) + \psi_M(\mathbf{r}, \varepsilon), \quad (49)$$

где $\psi_M(\mathbf{r}, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\nu \rightarrow 0$, $\varphi_M^0(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим интеграл $\mathbf{J}_\varepsilon(M)$. Покажем, что $\mathbf{J}_\varepsilon(M) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Записав этот интеграл в координатах x, y из п. 3.2, будем иметь

$$\mathbf{J}_\varepsilon(M) = \int_0^L \mathbf{V}(x, \varepsilon)(\mathbf{k}, \mathbf{V}(x, \varepsilon), (\varepsilon - \beta(x)f(x, \varepsilon))\rho'(x) + f_x(x, \varepsilon)\rho(x) \times \rho'(x)) dx.$$

Из ограниченности $\mathbf{V}(x, y)$ на $[0, L] \times [0, \varepsilon_0]$ и из того, что $f(x, \varepsilon), f_x(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем требуемое утверждение.

С учетом (49) равенство (45) теперь принимает вид

$$2 \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{P} \times d\mathbf{W} = \mathbf{r}_M(\mathbf{k} \cdot \bar{\Omega}_M) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_M \cdot \bar{\Omega}_M) + \varphi_M(\varepsilon) + \psi_M(\mathbf{r}, \varepsilon), \quad (50)$$

где $\psi_M(\mathbf{r}, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\nu \rightarrow 0$, $\varphi_M(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) + \varphi_3(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Разбиение $\mathbf{r}$ и число ν зависят от конической точки M . Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность разбиений по всем коническим точкам, через ν_0 – максимальное из чисел ν в этой совокупности и положим

$$\psi^{(1)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) = \sum_M \psi_M(\mathbf{r}, \varepsilon), \quad \varphi^{(1)}(\varepsilon) = \sum_M \varphi_M(\varepsilon),$$

где суммирование проводится по всем коническим точкам. Из (44), (46), (47), (48) и (50) получаем формулу

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\Phi_l^k(\varepsilon)} [\mathbf{r}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})] \Delta d\sigma &= - \int_{\Gamma^0} \mu^2 [\mathbf{r}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}) + \mathbf{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{h})] ds \\ &- \sum_Q [\mathbf{r}_Q(\mathbf{k} \cdot \Omega_Q) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_Q \cdot \Omega_Q)] + \sum_M [\mathbf{r}_M(\mathbf{k} \cdot \bar{\Omega}_M) + \mathbf{k}(\mathbf{r}_M \cdot \bar{\Omega}_M)] \\ &+ \psi^{(1)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) + \varphi^{(1)}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (51)$$

где $\psi^{(1)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\nu_0 \rightarrow 0$, $\varphi^{(1)}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.3. Применяя к каждому регулярному куску поверхности $\Phi_l^k(\varepsilon)$ формулу В. Бляшке из леммы 13, будем иметь

$$2 \iint_{\Phi_l^k(\varepsilon)} \mathbf{r} n \Delta d\sigma = \sum_M \int_{l_\varepsilon(M)} (\mathbf{r}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \int_\Gamma [(\mathbf{r}, \mathbf{V}^+, d\mathbf{V}^+) - (\mathbf{r}, \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^-)]. \quad (52)$$

Интеграл под знаком суммы справа преобразуется следующим образом

$$\int_{l_\varepsilon(M)} (\mathbf{r}, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) = \int_{l_\varepsilon(M)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M, \mathbf{V}, d\mathbf{V}) + \mathbf{r}_M \cdot \int_{l_\varepsilon(M)} \mathbf{V} \times d\mathbf{V}.$$

Обозначая

$$\varphi_M^4(\varepsilon) = \int_{l_\varepsilon(M)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M, \mathbf{V}, d\mathbf{V}),$$

покажем, что $\varphi_M^4(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого перейдем к координатам x, y . Представляя радиус-вектор $\mathbf{r}$ по лемме 6, а производную $\mathbf{V}_x$ — по лемме 7, получим

$$\varphi_M^4(\varepsilon) = \int_0^L \left(\rho(x) + \frac{f(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rho(x) \times \rho'(x), \mathbf{V}(x, \varepsilon), p(x, \varepsilon) \rho + \varepsilon \mathbf{R}(x, \varepsilon) \right) dx.$$

Так как по лемме 7 $p(x, \varepsilon) \rightarrow 0$, $\mathbf{R}(x, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а по лемме 6 $\frac{f(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow f_y(x, 0) = 0$, то $\varphi_M^4(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Применяя лемму 8, формулу (52) можем записать в виде

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\Phi_l^k(\varepsilon)} \mathbf{r} n \Delta d\sigma &= \sum_M \mathbf{r}_M \cdot \bar{\Omega}_M + \int_{\Gamma} [(\mathbf{r}, \mathbf{V}^+, d\mathbf{V}^+) - (\mathbf{r}, \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^-)] \\ &\quad + \varphi^{(2)}(\varepsilon) + \psi^{(2)}(\mathfrak{R}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (53)$$

где $\varphi^{(2)}(\varepsilon) = \sum_M \varphi_M^4(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\psi^{(2)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\nu_0 \rightarrow 0$.

Обозначим интеграл справа через I . Интегрируя по частям, преобразуем его следующим образом⁵:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} [(\mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^+) + (\mathbf{r}, \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^+ - d\mathbf{V}^-)] \\ &= \int_{\Gamma} (\mathbf{r}, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, d\mathbf{V}^+ + d\mathbf{V}^-) + \int_{\Gamma} d(\mathbf{r}, \mathbf{V}^-, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-). \end{aligned}$$

По аналогии с интегралом $\mathbf{J}$ из п. 4.2 для интеграла от полного дифференциала получаем равенство

$$\int_{\Gamma} d(\mathbf{r}, \mathbf{V}^-, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) = - \sum_Q \sum_{i=1}^m (\mathbf{r}_Q, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}).$$

Применяя лемму 10, будем иметь

$$\int_{\Gamma} d(\mathbf{r}, \mathbf{V}^-, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) = - \sum_Q \mathbf{r}_Q \cdot \Omega_Q.$$

Используя лемму 9, по аналогии с интегралом $\mathbf{I}$ из п. 4.2 интеграл I теперь можем записать в виде

$$I = - \int_{\Gamma^0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} \mu^2 ds - \sum_Q \mathbf{r}_Q \cdot \Omega_Q.$$

Формула (53) принимает вид

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\Phi_l^k(\varepsilon)} \mathbf{r} n \Delta d\sigma &= \sum_M \mathbf{r}_M \cdot \bar{\Omega}_M - \sum_Q \mathbf{r}_Q \cdot \Omega_Q \\ &\quad - \int_{\Gamma^0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} \mu^2 ds + \varphi^{(2)}(\varepsilon) + \psi^{(2)}(\mathfrak{R}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (54)$$

⁵Преобразования этого интеграла заимствованы из статьи [4]. Мы приводим их для полноты доказательства.

Умножая формулу (51) скалярно на вектор $\mathbf{k}$ и вычитая из результата последнее интегральное равенство, приходим к интегральной формуле

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\Phi_l^k(\varepsilon)} (\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{n}) \Delta d\sigma &= \sum_M (\mathbf{k}\mathbf{r}_M)(\mathbf{k}\bar{\mathbf{n}}_M) - \sum_Q (\mathbf{k}\mathbf{r}_Q)(\mathbf{k}\mathbf{n}_Q) \\ &\quad - \int_{\Gamma^0} (\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{h}) \mu^2 ds + \varphi_0(\varepsilon) + \psi_0(\mathfrak{R}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (55)$$

где $\varphi_0(\varepsilon) = \mathbf{k}\varphi^{(1)}(\varepsilon) - \varphi^{(2)}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\psi_0(\mathfrak{R}, \varepsilon) = \mathbf{k}\psi^{(1)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) - \psi^{(2)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\nu_0 \rightarrow 0$ для всякого $\varepsilon > 0$.

§ 5. Доказательство теорем

5.1. Будем считать, что начало системы координат в E^3 находится в плоскости Π , $\mathbf{k}$ — единичный вектор, ортогональный плоскости Π и направленный в полупространство E_+ с границей Π , содержащее исходную поверхность F . Будем считать для определенности, что $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль поверхности Φ_l^k . Тогда на каждой грани поверхности Φ_l^k , лежащей в полупространстве E_+ , выполняется неравенство $\mathbf{k}\mathbf{n} > 0$, а на каждой грани, лежащей в дополнительном полупространстве E_- , выполняется неравенство $\mathbf{k}\mathbf{n} < 0$. Следовательно, на каждой грани поверхности Φ_l^k выполняется неравенство $(\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{n}) \geq 0$, причем равенство нулю возможно только в точках, лежащих в плоскости Π .

По лемме 4, не нарушая общности, можем считать, что $\Delta \equiv 0$ на каждом плоском куске поверхности Φ_l^k . В силу леммы 3 отсюда следует, что $\Delta \leq 0$ на каждой грани этой поверхности. Следовательно, интеграл в левой части формулы (55) неположителен.

5.2. Рассмотрим контурный интеграл в правой части формулы (55). Классифицируем ребра поверхности Φ_l^k следующим образом. Ребро γ , образованное кусками регулярных поверхностей S^+ и S^- , назовем *ребром выпуклого склеивания*, если поверхность $S^+ \cup S^-$ выпукла, и *ребром невыпуклого склеивания* в противном случае. Вдоль каждого ребра выпуклого склеивания нормальные кривизны k_n^+ и k_n^- имеют одинаковые знаки. При этом если $k_n^\pm \leq 0$, то $\sin \vartheta \geq 0$. Если же $k_n^\pm \geq 0$, то $\sin \vartheta \leq 0$. Во всех случаях имеем $(\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{h}) \leq 0$.

Пусть γ — ребро невыпуклого склеивания. Так как на исходной поверхности F такие ребра отсутствовали, то γ может возникнуть лишь либо в результате зеркального выпучивания, либо в результате склеивания поверхностей, симметричных относительно плоскости Π . Следовательно, γ лежит в плоскости Π либо в плоскости, параллельной плоскости Π . В первом случае $\mathbf{r}\mathbf{k} = 0$ вдоль γ и, значит,

$$\int_{\gamma} (\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{h}) \mu^2 ds = 0.$$

Рассмотрим случай, когда ребро невыпуклого склеивания γ не лежит в плоскости Π . Тогда оно расположено в некоторой плоскости зеркального выпучивания π . Так как зеркальное выпучивание является изометрическим преобразованием, оно не изменяет абсолютной величины геодезической кривизны $|k_g|$ каждой кривой, лежащей в плоскости выпучивания. А так как на самой кривой это преобразование

тождественно, оно не изменяет и абсолютной величины $|k|$ кривизны этой кривой. Из тождества $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ следует, что оно сохраняет абсолютную величину нормальной кривизны поверхности вдоль γ . Поскольку вектор $\mathbf{k}$ является вектором бинормали кривой γ , то $|k_g| = |k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})|$. Следовательно, зеркальное выпучивание не изменяет и модуля скалярного произведения $|\mathbf{k}\mathbf{n}|$ вдоль γ . Если теперь до зеркального выпучивания кривая γ не являлась ребром, то после зеркального выпучивания вдоль γ будем иметь $k_n^+ = -k_n^-$, $\mathbf{k}\mathbf{n}^+ = \mathbf{k}\mathbf{n}^-$. Следовательно, $\mathbf{k}\mathbf{h} = 0$, а значит, и $\int_{\gamma} (\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{h})\mu^2 ds = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда до зеркального выпучивания ребро γ , лежащее в плоскости выпучивания π , являлось ребром выпуклого склеивания кусков S^+ и $\tilde{S}^-$. Так как исходная поверхность F взаимно однозначно проектировалась на плоскость Π , то для нормальных кривизн k_n^+ и $\tilde{k}_n^-$ поверхностей S^+ и $\tilde{S}^-$ соответственно имеет место неравенство $|k_n^+| \geq |\tilde{k}_n^-|$. Для нормалей $\mathbf{n}^+$ и $\tilde{\mathbf{n}}^-$ этих поверхностей справедливо неравенство $|\mathbf{k}\mathbf{n}^+| \leq |\mathbf{k}\tilde{\mathbf{n}}^-|$. После зеркального выпучивания будем иметь неравенства $|k_n^+| \geq |k_n^-|$ и $|\mathbf{k}\mathbf{n}^+| \leq |\mathbf{k}\mathbf{n}^-|$. Отсюда следует, что $(\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{h}) \leq 0$.

Тем самым доказано, что

$$\int_{\Gamma^0} (\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{h})\mu^2 ds \leq 0. \quad (56)$$

5.3. Рассмотрим произвольную вершину Q на поверхности Φ_l^k . Если она находится в плоскости Π , то $\mathbf{k}\mathbf{r}_Q = 0$ и, значит, $(\mathbf{k}\mathbf{r}_Q)(\mathbf{k}\Omega_Q) = 0$. Поэтому будем считать, что Q не лежит в плоскости Π .

А. Предположим сначала, что из Q выходят ровно два ребра с касательными векторами $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$. Если векторы $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ не коллинеарны, то из (42) следует, что $\mu_1 = \mu_2 = 0$ и, значит, $\Omega_Q = 0$. Если векторы $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ коллинеарны, то из определения вектора Ω_Q снова следует, что $\Omega_Q = 0$.

Б. Допустим, что из вершины Q выходят ровно три ребра $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ с касательными векторами $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ соответственно. Если эти векторы не компланарны, то из (42) следует, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ и, значит, $\Omega_Q = 0$.

Предположим, что векторы $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ компланарны. Тогда содержащая их плоскость является касательной плоскостью к поверхности в точке Q . В этом случае для каждого из ребер $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в точке Q имеем $\mathbf{n}^- = \mathbf{n}^+$, $\sin \vartheta = 0$. Допустим сначала, что Q не является точкой уплощения хотя бы для одного из кусков S_1, S_2, S_3 , образующих ребра $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Пусть, например, таким куском будет S_2 . Обозначая через $k_n^{(1)}$ и $k_n^{(2)}$ нормальные кривизны этого куска в точке Q по направлениям $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ соответственно, из (39) получаем $k_n^{(1)}\mu_1 = k_n^{(2)}\mu_2 = 0$, где либо $k_n^{(1)} \neq 0$ и, значит, $\mu_1 = 0$, либо $k_n^{(2)} \neq 0$ и, значит, $\mu_2 = 0$. Из (42) получаем, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Если теперь точка Q является точкой уплощения каждого из кусков S_1, S_2 и S_3 , то ребро γ_i можно рассматривать как выходящее из неособой точки поверхности S_{i+1} , $i = 1, 2, 3$. Значит, $\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i$, а потому $\mu_i = 0$.

В. Поскольку при построении поверхности Φ_l^k допускалось пересечение ребер плоскостями зеркального выпучивания, то на Φ_l^k могут присутствовать вершины,

в окрестности которых поверхность не является выпуклой. Если плоскость выпучивания касалась ребра, то в соответствующей вершине Q на поверхности Φ_l^k касательные векторы к ребрам коллинеарны и, значит, $\Omega_Q = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость зеркального выпучивания пересекла ребро, не касаясь его. Так как эта плоскость не проходила через вершины, то из соответствующей вершины Q на поверхности Φ_l^k выходит ровно четыре ребра. При этом два ребра (пусть это будут γ_1, γ_3) лежат в плоскости зеркального выпучивания, а значит, касательные к ним ортогональны вектору $\mathbf{k}$, а остальные два ребра (γ_2 и γ_4) расположены по одну сторону от плоскости выпучивания, касательные к ним расположены в одной плоскости с вектором $\mathbf{k}$ и составляют с этим вектором равные углы. Умножая равенство (42) при $m = 4$ скалярно на вектор $\mathbf{k}$, будем иметь $\mathbf{k}t_2(\mu_2 + \mu_4) = 0$ и, значит, $\mu_4 = -\mu_2$. Подставляя в (42), получим

$$\mu_2(t_4 + t_2) = \mu_1 t_1 + \mu_3 t_3 + 2\mu_2 t_2. \quad (57)$$

Для вектора Ω_Q находим

$$\begin{aligned} \Omega_Q &= \mu_1 \mu_2 t_1 \times t_2 + \mu_1 \mu_3 t_1 \times t_3 + \mu_2 \mu_3 t_2 \times t_3 \\ &\quad + (\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3 + \mu_4 t_4) \times \mu_4 t_4 \\ &= \mu_1 \mu_2 t_1 \times t_2 + \mu_1 \mu_3 t_1 \times t_3 + \mu_2 \mu_3 t_2 \times t_3. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Omega_Q \cdot t_1 &= \mu_2 \mu_3 (t_1, t_2, t_3), \quad \Omega_Q \cdot t_3 = \mu_1 \mu_2 (t_1, t_2, t_3), \\ \Omega_Q \cdot t_2 &= -\mu_1 \mu_3 (t_1, t_2, t_3). \end{aligned} \quad (58)$$

Так как векторы t_2, t_4 и $\mathbf{k}$ расположены в одной плоскости и векторы t_2, t_4 составляют с $\mathbf{k}$ одинаковые углы, то вектор $t_2 + t_4$ коллинеарен вектору $\mathbf{k}$. Из (57) в силу (58) получаем $\mu_2(t_2 + t_4) \cdot \Omega_Q = 0$. Так как исходная поверхность F взаимно однозначно проектировалась на плоскость Π , то $t_2 + t_4 \neq 0$. Следовательно, либо $\mathbf{k} \cdot \Omega_Q = 0$, либо $\mu_2 = 0$. Во втором случае в силу линейной независимости векторов t_1, t_3 и t_4 из (42) следует, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. В обоих случаях имеем $\mathbf{k} \cdot \Omega_Q = 0$.

Г. Рассмотрим теперь вершину Q , не лежащую в плоскости Π , из которой выходят m ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, $m \geq 4$. Окрестность Q на Φ_l^k является выпуклой поверхностью. Покажем, что

$$(\mathbf{k}r_Q)(\mathbf{k}\Omega_Q) \leq 0. \quad (59)$$

Касательным конусом к поверхности Φ_l^k в точке Q является выпуклый m -гранный угол, который мы обозначим через $\hat{\Phi}_Q$. Векторы $t_1, \dots, t_m$, касательные к ребрам, выходящим из Q , направлены по ребрам этого угла. Угол $\hat{\Phi}_Q$ взаимно однозначно проектируется на плоскость Π . Следовательно, если для внешней нормали поверхности Φ_l^k построить сферическое изображение угла $\hat{\Phi}_Q$ на сфере с центром в начале координат, то радиус-вектор $\hat{\mathbf{n}}$ каждой его точки будет удовлетворять неравенству $(\mathbf{k}r_Q)(\mathbf{k}\hat{\mathbf{n}}) \geq 0$. Поэтому для доказательства неравенства (59)

достаточно показать, что вектор $-\Omega_Q$ направлен внутрь сферического изображения угла $\widehat{\Phi}_Q$. Дальнейшие рассуждения этого пункта представляют собою приспособленную к нашему случаю незначительную модификацию соответствующих рассуждений из [4].

Предположим сначала, что никакая тройка векторов $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{t}_{i+1}$ и $\mathbf{t}_{i+2}$ не компланарна. Раскладывая каждый из векторов $\mathbf{t}_k$, $k \geq 4$, по базису $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$, будем иметь

$$\mathbf{t}_k = \sum_{i=1}^3 \beta_{ki} \mathbf{t}_i, \quad (60)$$

где

$$\beta_{k1} = \frac{(\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}, \quad \beta_{k2} = \frac{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}, \quad \beta_{k3} = \frac{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_k)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}.$$

Из (42) для μ_1 , μ_2 и μ_3 находим

$$\mu_i = - \sum_{k=4}^m \beta_{ki} \mu_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (61)$$

Рассмотрим произведение $-\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_3$. Используя (60) и (61), преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} -\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_3 &= -\mu_1 \mu_2 (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) - \mu_1 \sum_{k=4}^m \mu_k (\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_1) \\ &\quad - \mu_2 \sum_{k=4}^m \mu_k (\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_2) - \sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \mu_i \mu_k (\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3) \\ &= - \left(\sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \mu_i \mu_k (\beta_{i1} \beta_{k2} - \beta_{i2} \beta_{k1}) + \mu_1 \mu_2 \right) (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \\ &= - \left(\sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \mu_i \mu_k (\beta_{i1} \beta_{k2} - \beta_{i2} \beta_{k1}) + \sum_{i=4}^m \sum_{k=4}^m \beta_{k1} \beta_{i2} \mu_i \mu_k \right) (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \\ &= - \left(\sum_{i=4}^m \sum_{k=4}^i \beta_{i2} \beta_{k1} \mu_i \mu_k + \sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \beta_{i1} \beta_{k2} \mu_i \mu_k \right) (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3). \end{aligned}$$

Следовательно, $-\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_3$ представляет собою квадратичную форму вида

$$-\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_3 = - \sum_{i,k=1}^m A_{ik} (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) X_i X_k, \quad (62)$$

где

$$X_j = \mu_{3+j}, \quad A_{ik} = \begin{cases} \beta_{i+3,2} \beta_{k+3,1} & \text{при } k \leq i, \\ \beta_{i+3,1} \beta_{k+3,2} & \text{при } k > i. \end{cases}$$

Для главных миноров Δ_k матрицы (A_{ik}) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= A_{11} = \frac{(\mathbf{t}_4, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_4, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)^2}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \frac{(\mathbf{t}_4, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_5, \mathbf{t}_4, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_5, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)^3}, \\ \Delta_k &= \frac{(\mathbf{t}_4, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_5, \mathbf{t}_4, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_6, \mathbf{t}_5, \mathbf{t}_3) \cdots (\mathbf{t}_{k+3}, \mathbf{t}_{k+2}, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_{k+3}, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)^{k+1}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда нормаль к каждой грани угла $\widehat{\Phi}_Q$, не содержащей вектора $\mathbf{t}_3$, направлена в то же полупространство относительно этой грани, что и вектор $\mathbf{t}_3$. В этом случае $(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{t}_k) > 0$ при $i < j < k$. Следовательно, $\Delta_k > 0$ и форма $-\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_3$ положительно определена. В силу произвольности выбора вектора $\mathbf{t}_3$ получаем, что $-\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_i \geq 0$ для всякого $i = 1, \dots, m$. Это означает, что вектор $-\Omega_Q$ направлен внутрь сферического изображения угла $\widehat{\Phi}_Q$.

В случае, когда нормаль каждой грани, не содержащей $\mathbf{t}_3$, лежит по разные стороны с вектором $\mathbf{t}_3$ относительно этой грани, имеем $(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{t}_k) < 0$ при $i < j < k$. Значит, $(-1)^i \Delta_i > 0$ и форма $-\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_3$ отрицательно определена. Отсюда вытекает, что $-\Omega_Q \cdot \mathbf{t}_i \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, т.е. вектор $-\Omega_Q$ вновь лежит внутри сферического изображения угла $\widehat{\Phi}_Q$.

Из проведенных рассуждений следует, что направление вектора Ω_Q зависит только от формы угла $\widehat{\Phi}_Q$, причем эта зависимость непрерывна. Поэтому и в предельном случае, когда некоторые из векторов $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m$ (могут и все) оказываются в одной плоскости, вектор $-\Omega_Q$ оказывается внутри сферического изображения угла $\widehat{\Phi}_Q$.

Таким образом, для каждой вершины Q на поверхности Φ_l^k справедливо неравенство (59).

5.4. Рассмотрим произвольную коническую точку M на поверхности Φ_l^k . Обозначим через $\widehat{\Psi}_M$ n -гранный угол, ребра которого направлены по векторам $\rho_1, \dots, \rho_n$. Этот угол устроен точно так же, как рассмотренный в предыдущем пункте угол $\widehat{\Phi}_Q$. Исключение составляет порядок следования ребер. Так как при обходе нормали вокруг точки M эта точка оставалась справа, то порядок следования ребер угла $\widehat{\Psi}_M$ противоположен порядку следования ребер угла $\widehat{\Phi}_Q$. По построению вектора $\overline{\Omega}_M$ изменение порядка следования ребер угла $\widehat{\Psi}_M$ влечет изменение знака этого вектора. Поэтому, заменив порядок следования ребер угла $\widehat{\Psi}_M$ и дословно повторив рассуждения предыдущего пункта, получим неравенство

$$(\mathbf{k}\mathbf{r}_M)(\mathbf{k}\overline{\Omega}_M) \geq 0. \quad (63)$$

5.5. Так как в формуле (55) от разбиений $\mathfrak{R}$ зависят только $\sum_M (\mathbf{k}\mathbf{r}_M)(\mathbf{k}\overline{\Omega}_M)$ и $\psi_0(\mathfrak{R}, \varepsilon)$, причем $\psi_0(\mathfrak{R}, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\nu_0 \rightarrow 0$, то существует и конечен предел $\lim_{\nu_0 \rightarrow 0} \sum_M (\mathbf{k}\mathbf{r}_M)(\mathbf{k}\overline{\Omega}_M) \equiv K(\varepsilon)$. Из неравенства (63) следует, что $K(\varepsilon) \geq 0$. Поэтому, переходя в (55) к пределу при $\nu_0 \rightarrow 0$, получим

$$\varphi_0(\varepsilon) = 2 \iint_{\Phi_l^k(\varepsilon)} (\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{n}) \Delta d\sigma - K(\varepsilon) + \sum_Q (\mathbf{k}\mathbf{r}_Q)(\mathbf{k}\Omega_Q) + \int_{\Gamma^0} (\mathbf{k}\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{h}) \mu^2 ds.$$

В п.п. 5.1–5.4 доказано, что каждое слагаемое в правой части этого равенства не превосходит нуля. Так как $\varphi_0(\varepsilon) \rightarrow 0$, то и каждое слагаемое правой части стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначая через $\dot{\Phi}_l^k$ поверхность, получаемую из Φ_l^k удалением конических точек, приходим к равенствам

$$\iint_{\dot{\Phi}_l^k} (\mathbf{kr})(\mathbf{kn}) \Delta d\sigma = 0, \quad \int_{\Gamma^0} (\mathbf{kr})(\mathbf{kh}) \mu^2 ds = 0, \quad \sum_Q (\mathbf{kr}_Q)(\mathbf{k}\Omega_Q) = 0. \quad (64)$$

Из того, что подынтегральная функция в двойном интеграле не меняет знака на поверхности $\dot{\Phi}_l^k$, следует, что $\Delta \equiv 0$ на каждой регулярной части этой поверхности. По лемме 3 это влечет тривиальность изгибающего поля на каждой связной области, где гауссова кривизна $K > 0$ почти всюду.

Из второго равенства (64) следует, что $(\mathbf{kr})(\mathbf{kh})\mu^2 = 0$ вдоль каждого ребра γ , вдоль которого $\sin \vartheta \neq 0$. Из третьего равенства (64) следует, что

$$(\mathbf{kr}_Q)(\mathbf{k}\Omega_Q) = 0 \quad (65)$$

в каждой вершине на поверхности Φ_l^k . Так как исходная поверхность F взаимно однозначно и регулярно проектировалась на плоскость Π , то каждое ребро поверхности Φ_l^k не может пересекать Π во внутренней точке. Поэтому вдоль каждого ребра, не лежащего в плоскости Π , удовлетворяющего условию $\sin \vartheta \neq 0$, выполняется равенство $(\mathbf{kh})\mu^2 = 0$. В каждой вершине, не лежащей в плоскости Π , выполняется равенство $\mathbf{k}\Omega_Q = 0$. Так как левые части этих равенств не зависят от радиус-вектора $\mathbf{r}$, то сместив начало координат из плоскости Π и вновь применяя формулу (55), получим, что эти равенства имеют место и для ребер и вершин, лежащих в плоскости Π .

Вдоль каждого криволинейного ребра выпуклого склеивания с $\sin \vartheta \neq 0$, не лежащего в плоскости Π , выполняется неравенство $\mathbf{kh} \neq 0$. Из (39) и (37) следует, что вдоль каждого такого ребра

$$\mu = 0, \quad \delta k_n^+ = \delta k_n^- = 0, \quad \mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^-. \quad (66)$$

Таким же способом эти формулы доказываются и для каждого ребра с $\sin \vartheta = 0$ и $k(s) \neq 0$.

Таким образом, вдоль каждого криволинейного ребра выпуклого склеивания, не лежащего в плоскости Π , и вдоль каждого криволинейного ребра, вдоль которого $\sin \vartheta = 0$, имеют место формулы (66).

Рассмотрим криволинейное ребро невыпуклого склеивания γ , образованное регулярными кусками S^+ и S^- , не лежащее в плоскости Π . Возможны следующие случаи.

1-й случай. S^+ и S^- – поверхности с гауссовой кривизной $K > 0$ почти всюду. Тогда из леммы 3 следует, что $\mathbf{V}^+ = \text{const}$, $\mathbf{V}^- = \text{const}$. Из (38) получаем $\delta k_n^+ = \delta k_n^- = 0$, а из (39) выводим $\mu = 0$.

2-й случай. Гауссова кривизна одной из поверхностей S^+ , S^- (например, S^+) почти всюду отлична от нуля и $\sin \vartheta \neq 0$. Тогда $\delta k_n^+ = 0$, $\cos \theta^- \neq 0$ и снова из (39) получаем $\delta k_n^+ = \delta k_n^- = \mu = 0$.

3-й случай. S^+ , S^- – развертывающиеся поверхности. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ совокупность всех криволинейных ребер невыпуклого склеивания, образованных развертывающимися кусками. Так как на каждом регулярном куске $\Delta = 0$ вдоль криволинейных ребер остальных типов $\mu = 0$, а вдоль прямолинейных участков ребер $k_n^+ = k_n^- = 0$, то применяя к поверхности Φ_l^k формулу (54), приходим к равенству

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} \mu^2 ds = 0.$$

Поскольку $\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} < 0$ почти всюду на каждом ребре из совокупности $\tilde{\Gamma}$, то $\mu = 0$ вдоль каждого из таких ребер.

Так как конические точки поверхности Φ_l^k не лежат на ее ребрах, то всякая ломаная этой поверхности, состоящая из прямолинейных образующих развертывающихся кусков, пересекает либо ребро выпуклого склеивания, не лежащее в плоскости Π , либо ребро, вдоль которого один из склеиваемых кусков имеет положительную гауссову кривизну почти всюду, либо ребро из совокупности $\tilde{\Gamma}$, либо ребро с $\sin \vartheta = 0$. Если развертывающийся кусок (например, S^+) содержит ребро одного из указанных видов (оно может не совпадать с γ), то по лемме 3 изгибающее поле на этом куске тривиально. Значит, на ребре γ имеем $\delta k_n^+ = 0$. Отсюда и из (39) следует, что $\delta k_n^- = 0$ и, значит, $\mu = 0$. Двигаясь от ребра одного из указанных видов, мы последовательно установим тривиальность изгибающего поля на каждом из развертывающихся кусков, склеенных друг с другом по криволинейным ребрам.

Таким образом, доказана тривиальность изгибающего поля на каждом куске поверхности Φ_l^k , не содержащем прямолинейных ребер.

Пусть теперь γ – прямолинейное ребро, образованное регулярными кусками S^+ , S^- . Из тривиальности изгибающего поля на этих кусках следует, что $\delta \tau_g^+ = \delta \tau_g^-$ вдоль γ . Отсюда в силу третьего из условий сопряжения (39) получаем $\mu = \text{const}$ на γ .

Рассмотрим произвольную вершину Q , не лежащую в плоскости Π . В окрестности этой вершины поверхность Φ_l^k выпукла. Для каждого криволинейного ребра, выходящего из Q , имеем $\mu = 0$ в точке Q . Исключим эти ребра и заметим, что никакие три прямолинейных ребра, выходящие из Q , не лежат в одной плоскости. Если из Q выходит не более трех прямолинейных ребер, то применив рассуждения А, Б п. 5.3, получаем, что для этих ребер $\mu = 0$ в точке Q . Если из Q выходит m прямолинейных ребер, $m \geq 4$, то занумеровав эти ребра по порядку и применив к Q рассуждения Г п. 5.3, получим, что форма (62) определена. Следовательно, равенство (65) вновь возможно только в случае, когда в точке Q для каждого прямолинейного ребра $\mu = 0$. Так как $\mu = \text{const}$, то вдоль каждого прямолинейного ребра, выходящего из вершины, не лежащей в плоскости Π , получаем $\mu = 0$.

Пусть теперь Q – вершина поверхности Φ_l^k , лежащая в плоскости Π . Для каждого криволинейного ребра, выходящего из Q , в точке Q имеем $\mu = 0$. Каждое прямолинейное ребро, выходящее из Q , не лежащее в плоскости Π , заканчивается либо на регулярной области, либо в вершине, не лежащей в плоскости Π . В обоих случаях на таком ребре $\mu = 0$. После исключения этих ребер остается не более двух прямолинейных ребер, выходящих из Q и лежащих в плоскости Π .

Пусть $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ – векторы касательных к этим ребрам. Равенство (42) принимает вид $\mu_1 \mathbf{t}_1 + \mu_2 \mathbf{t}_2 = \mathbf{0}$. Если $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ линейно независимы, то $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Если же $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_2$, то $\mu_1 = \mu_2$. Двигаясь по ребрам, лежащим в плоскости Π , мы попадем либо на криволинейный участок, либо в вершину, где $\mathbf{t}_1 \neq -\mathbf{t}_2$. В обоих случаях приходим к равенствам $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Из (37) следует, что поле вращений постоянно на каждом связном куске поверхности Φ_l^k , не содержащем плоских областей. Следовательно, изгибающее поле поверхности Φ_l^k тривиально на каждом таком куске. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Из (37) также следует, что если поле вращений постоянно на плоских областях, то оно постоянно на всей поверхности Φ_l^k . Поэтому если изгибающее поле поверхности Φ_l^k тривиально на каждой плоской области, то оно тривиально на всей поверхности Φ_l^k , откуда следует теорема 2.

Список литературы

1. Александров А. Д. Об одном классе замкнутых поверхностей // Матем. сб. 1938. Т. 4 (46). №1. С. 69–76.
2. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей // УМН. 1948. Т. 3. №2. С. 47–158.
3. Сабитов И. Х. О жесткости некоторых поверхностей вращения // Матем. сб. 1963. Т. 60 (102). №4. С. 506–519.
4. Боярский Б. В., Векуа И. Н. Доказательство жесткости кусочно-регулярных замкнутых выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. №2. С. 165–176.
5. Боярский Б. В. О жесткости некоторых составных поверхностей // УМН. 1959. Т. 14. №3. С. 141–146.
6. Сабитов И. Х. Об одном условии жесткости составных поверхностей // Матем. заметки. 1967. Т. 2. №1. С. 105–113.
7. Фоменко В. Т., Марков П. Е. О жесткости зеркально выпученных поверхностей // Матем. заметки. 1976. Т. 19. №3. С. 469–479.
8. Фоменко В. Т., Марков П. Е. О жесткости одного класса внутренне склеенных поверхностей // Укр. геом. сб. 1977. №20. С. 141–146.
9. Марков П. Е. О жесткости звездных внутренне склеенных поверхностей // Матем. заметки. 1977. Т. 22. №3. С. 321–333.
10. Фоменко Л. П. О жесткости склеенных поверхностей, имеющих конические точки // Деформации поверхностей с заданными рекуррентными соотношениями. Таганрог, 1995. С. 57–62.
11. Михайлов Л. Г., Усманов З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения положительной кривизны с конической или параболической точкой в полюсе // Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. Душанбе, 1965. С. 21–53.
12. Михайлов Л. Г., Усманов З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения положительной кривизны с конической или параболической точкой в полюсе // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. №4. С. 791–794.
13. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967.
14. Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956.
15. Боровский Ю. Е. Вполне интегрируемые системы Пфаффа // Изв. вузов. Сер. матем. 1959. №3. С. 28–40.
16. Боровский Ю. Е. Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения // Сиб. матем. журнал. 1988. Т. 24. №2. С. 10–16.

17. *Марков П. Е.* О погружении метрик, близких к погружаемым // Укр. геом. сб. 1992. № 35. С. 49–67.
18. *Марков П. Е.* Общие аналитические и бесконечно малые деформации погружений 1 // Изв. вузов. Сер. матем. 1997. № 9. С. 21–34.
19. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
20. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
21. *Марков П. Е.* Об одном классе бесконечно малых изгибаний поверхностей // Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высшей школы. 1985. № 4. С. 22–25.
22. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.–Л.: ОНТИ, 1935.

Ростовский государственный университет

E-mail: markov@jeo.ru, echkryl@uic.rnd.runnet.ru

Поступила в редакцию

27.04.1999