Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 5, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:20:31

УДК 517.5

В. В. Волчков

Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II

Получено решение локальной проблемы Помпейю для функций с нулевыми интегралами по параллелепипедам, содержащимся в данном шаре.

Библиография: 18 названий.

Введение

Классическая проблема Помпейю о функциях с нулевыми интегралами по множествам, конгруэнтным данному, изучалась во многих работах (см. обзоры [1], [2] с обширной библиографией, а также [3]–[5]). Большой интерес представляют локальные варианты проблемы Помпейю, когда функция с указанными интегральными средними задана на ограниченной области (см., например, [6]–[8]).

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\text{ISO}(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$,

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}.$$

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством Помпейю* на шаре B_r , если всякая локально суммируемая в B_r функция $f: B_r \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех } \lambda \in \text{ISO}(n) : \lambda A \subset B_r, \quad (1)$$

равна нулю почти всюду в B_r . Для многих компактов A это имеет место, если размеры B_r достаточно велики по сравнению с A , см. [6], [7]. В связи с этим в [9] поставлена проблема о нахождении величины

$$r(A) = \inf\{r > 0 : A \in \mathcal{P}(B_r)\},$$

где $\mathcal{P}(B_r)$ – совокупность множеств Помпейю на шаре B_r .

Ряд утверждений об оценках сверху для $r(A)$ получен К. А. Беренштейном и Р. Гэем, см. [6], [7]. Первые результаты о точных значениях $r(A)$ содержатся в работах [10], [11], где рассмотрены случаи, когда $A = [0, 1]^n$ – куб в $\mathbb{R}^n$ ($r(A) = \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$), $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1, x_n \geq 0\}$ – полушар в $\mathbb{R}^n$ ($r(A) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$), A – равносторонний треугольник со стороной длины 1 в $\mathbb{R}^2$ ($r(A) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$). В перечисленных примерах значение $r(A)$ достигается, т.е. $A \in \mathcal{P}(B_r)$ при $r = r(A)$.

Работа выполнена при частичной поддержке ISF (грант № U9D200), ISSEP (грант № APU071013) и МНОП (грант № YSU081012).

В работе [9] найдено значение $r(A)$ в случае, когда $A = [-a_1, a_1] \times \cdots \times [-a_n, a_n]$ – параллелепипед в $\mathbb{R}^n$. При этом обнаружены принципиально новые эффекты: величина $r(A)$ зависит от некоторых арифметических свойств чисел $a_1, \dots, a_n$ и при $n \geq 3$ может не достигаться.

Вопрос об описании множества параллелепипедов $A \notin \mathcal{P}(B_r)$ при $r = r(A)$ оставался открытым. Настоящая работа является продолжением [9] и содержит, в частности, полное решение этой задачи.

§1. Формулировка основного результата

Всюду в дальнейшем $a_1, \dots, a_n$ – фиксированные положительные числа, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $r > |a|$ и

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : -a_\nu \leq x_\nu \leq a_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n. \quad (2)$$

Пусть $[t]$ – целая часть числа $t \geq 0$, $\{t\} = t - [t]$, $R(a, t) = (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + |a|^2)^{1/2}$, $r_\nu(t) = 2a_\nu - (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2)^{1/2}$, $\nu = 2, \dots, n$.

Обозначим $\zeta = \zeta(a_1, \dots, a_n) = \inf E$, где

$$E = \left\{ t \geq 1 : 2[t] + [2\{t\}] \geq 1 + \frac{1}{a_1} r_2(t), \right. \\ \left. r_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \nu = 2, \dots, n \right\}.$$

Пусть также $\overline{U}$ – замыкание области $U \subset \mathbb{R}^n$ и $L_{\text{loc}}(U)$ – класс функций, локально суммируемых в U .

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и выполнено условие (1). Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) если $r > R(a, \zeta)$, то $f = 0$;
- 2) если $n = 2$ и $r = R(a, \zeta)$, то $f = 0$;
- 3) если $n \geq 3$, $r = R(a, \zeta)$ и

$$r_n(\zeta) = (4a_1^2 \zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2},$$

то $f = 0$;

- 4) если $n \geq 3$, $r = R(a, \zeta)$ и

$$r_n(\zeta) \geq (4a_1^2 \zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2},$$

то f имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{если } |x| \geq r_n(\zeta), \\ c - \frac{2}{\pi} c a_n (r_n^2(\zeta) - |x|^2)^{-1/2}, & \text{если } |x| < r_n(\zeta), \end{cases}$$

где c – комплексная постоянная; обратно, всякая функция такого вида при данных условиях удовлетворяет (1);

- 5) при $r < R(a, \zeta)$ существуют ненулевые функции класса $C^\infty(\overline{B_r})$, удовлетворяющие условию (1).

Утверждения 1), 2) и 5) теоремы 1 были получены автором в работе [9]. Утверждения 3), 4) являются новыми и доказываются в § 5. Нетрудно видеть, что ситуации, описанные в утверждениях 3), 4), реализуются при подходящих $a_1, \dots, a_n$. Таким образом, в теореме 1 содержится, в частности, описание множества параллелепипедов $A \subset \mathbb{R}^n$, которые являются множествами Помпейю на B_r . По поводу аналогичных результатов для шаровых и сферических средних см. [12], [13; §5], [14] и библиографию к этим работам.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат об аппроксимации функций в $L^p(B_r)$ линейными комбинациями индикаторов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть χ_A – характеристическая функция (индикатор) параллелепипеда $A \subset \mathbb{R}^n$ и выполнены условия одного из утверждений 1)–3) теоремы 1. Тогда система функций

$$\{\chi_A(\lambda^{-1}x)\}_{\lambda \in \text{ISO}(n): \lambda A \subset B_r} \quad (3)$$

замкнута в пространстве $L^p(B_r)$ при любом $p \in [1, +\infty)$. При условиях утверждения 4) теоремы 1 система (3) замкнута в $L^p(B_r)$ тогда и только тогда, когда $p \in [1, 2]$. В остальных случаях система (3) не является замкнутой в $L^p(B_r)$ ни при каком $p \in [1, +\infty)$.

Отметим также, что система (3) не является замкнутой в $L^\infty(B_r)$ ни при каком $r > |a|$ (см. [9; §9]). Теорема 2 является уточнением одного из результатов работы [9] и выводится из теоремы 1 стандартными рассуждениями (см., например, [9; §9]). Другие утверждения об аппроксимации функций линейными комбинациями индикаторов содержатся в [3] и [15].

Автор благодарит Л. Зальцмана и К. А. Беренштейна за полезные обсуждения и предоставленную литературу.

§ 2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Как обычно, символами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$ обозначаются соответственно множества натуральных и неотрицательных целых чисел, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$). Пусть $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [16; гл. 4, п. 2]), d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}_{1 \leq l \leq d_k}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$.

Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, r), \quad (4)$$

где $f_{kl}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma$. Следуя [16; гл. 4, п. 2], обозначим через $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0(B_r)$ множество радиальных (т.е. зависящих только от $|x|$) функций $f: B_r \rightarrow \mathbb{C}$.

Пусть $\text{SO}(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара $d\tau$, T_k – сужение квазирегулярного представления группы $\text{SO}(n)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ (см. [17;

гл. 9, § 2, п. 7]), $\{t_{lp}^k(\tau)\} (k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq l, p \leq d_k, \tau \in \text{SO}(n))$ – матрица представления T_k , т.е.

$$Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{d_k} t_{lp}^k(\tau) Y_p^{(k)}(\sigma), \quad \tau \in \text{SO}(n), \quad \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Рассмотрим совокупность функций $\rho_\nu(t)$, $\nu = 2, \dots, n$, заданных на интервале $(1/2, +\infty)$ следующим образом: $\rho_\nu(t) = r_\nu(t)$, если $r_\nu(t) \leq 0$; $\rho_\nu(t) = ((2\sqrt{2}a_\nu - \sqrt{4a_1^2t^2 - a_1^2 + 2a_\nu^2})^2 - a_\nu^2)^{1/2}$, если $r_\nu(t) > 0$ и $(7 - 4\sqrt{2})a_\nu^2 > a_1^2(4t^2 - 1)$; $\rho_\nu(t) = 0$ при $r_\nu(t) > 0$ и $(7 - 4\sqrt{2})a_\nu^2 \leq a_1^2(4t^2 - 1)$.

Отметим следующие свойства функций ρ_ν , вытекающие непосредственно из их определения:

- а) ρ_ν является непрерывной и невозрастающей функцией на $(1/2, +\infty)$;
- б) при любом $t \in (1/2, +\infty)$

$$\rho_\nu(t) \leq r_\nu(t) < a_\nu \quad (5)$$

и $\rho_\nu(t) = r_\nu(t)$ тогда и только тогда, когда $r_\nu(t) \leq 0$.

Далее, при $k = 2, \dots, n$ рассмотрим множества $E^{(k)} = E_1^{(k)} \cap (E_2 \cup E_3)$, где

$$\begin{aligned} E_1^{(k)} &= \left\{ t \geq 1 : r_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \nu = 2, \dots, k \right\}, \\ E_2 &= \left\{ t \geq 1 : \{t\} \geq \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq r_2(t) \right\}, \\ E_3 &= \left\{ t \geq 1 : \{t\} < \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq a_1 + r_2(t) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\zeta_k = \zeta_k(a_1, \dots, a_n) = \inf E^{(k)}$, тогда $\zeta_n = \zeta$ (см. § 1). Аналогично, положим $\Lambda^{(k)} = \Lambda_1^{(k)} \cap (\Lambda_2 \cup \Lambda_3)$ и $\Omega^{(k)} = \Lambda_1^{(k)} \cap \Omega_k$, где

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(k)} &= \left\{ t \geq 1 : \rho_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \nu = 2, \dots, k \right\}, \\ \Lambda_2 &= \left\{ t \geq 1 : \{t\} \geq \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq \rho_2(t) \right\}, \\ \Lambda_3 &= \left\{ t \geq 1 : \{t\} < \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq a_1 + \rho_2(t) \right\}, \\ \Omega_k &= \left\{ t > \sqrt{2 - \sqrt{2}} : \rho_2(t) < 2a_1\zeta_k - a_1, \right. \\ &\quad \left. (2\sqrt{1 + (2\zeta_k - 1)^2} - \sqrt{4t^2 + 1})^2 < 1 + 4(t - 1)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Пусть также

$$\eta_k = \eta_k(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \inf \Lambda^{(k)}, & \text{если } 2\zeta_k \notin \mathbb{N}, \\ \inf \Omega^{(k)}, & \text{если } 2\zeta_k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и $\omega_k = \max_{2 \leq m \leq k} \eta_m$.

Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ через $\pi_\nu M$ обозначим ортогональную проекцию M на гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n : x_\nu = 0\}$. Символами c, c_m ($m \in \mathbb{N}$) обозначаются комплексные постоянные, которые в разных местах, вообще говоря, разные.

Далее нам потребуются некоторые простые утверждения о свойствах множеств $\Lambda^{(k)}$ и $\Omega^{(k)}$.

ЛЕММА 1. Пусть $k \in \{2, \dots, n\}$ и $t > \eta_k$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) если $2\zeta_k \notin \mathbb{N}$, то $t \in \Lambda^{(k)}$;
- 2) если $2\zeta_k \in \mathbb{N}$, то $t \in \Omega^{(k)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства а) функций ρ_ν (см. выше) и определения множеств $\Lambda_1^{(k)}$ и $\Omega^{(k)}$ следует, что

$$\Lambda_1^{(k)} = (\xi_k, +\infty), \quad \Omega^{(k)} = (\theta_k, +\infty) \quad (6)$$

при некоторых $\xi_k \geq 1$, $\theta_k \geq \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Пусть $\xi = \inf(\Lambda_2 \cup \Lambda_3)$ и $b > \xi$. Тогда если $\{\xi\} \geq 1/2$, то $2a_1[\xi] \geq \rho_2(\xi)$ и при $\{b\} \geq 1/2$ имеем $[b] \geq [\xi] \geq \rho_2(b)/(2a_1)$. Если же $\{b\} < 1/2$, то $[b] \geq 1 + [\xi] \geq 1 + \rho_2(b)/(2a_1)$. В случае $\{\xi\} < 1/2$ аналогично получаем $[b] \geq 1/2 + \rho_2(b)/(2a_1)$. Таким образом, $b \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3$ и тогда $\Lambda_2 \cup \Lambda_3 = [\xi, +\infty)$. Отсюда и из (6) следуют оба утверждения леммы 1.

ЛЕММА 2. При любом $k \in \{2, \dots, n\}$ имеют место неравенства

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \leq \eta_k \leq \omega_k < \zeta_k. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения ζ_k следует, что $\zeta_k \geq 1$, $r_2(\zeta_k) \leq 2a_1\zeta_k - a_1$ и

$$r_\nu(\zeta_k) \leq \left(R^2(a, \zeta_k) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2},$$

$\nu = 2, \dots, k$. Из этих неравенств и свойства б) функций ρ_ν (см. выше) получаем, что $\zeta_k \in \Omega^{(k)}$. Отсюда и из (6) имеем $\eta_k < \zeta_k$ при $2\zeta_k \in \mathbb{N}$. Далее, $\zeta_k \in E_2 \cup E_3$ (см. [9; лемма 11]). Если $2\zeta_k \notin \mathbb{N}$, отсюда и из свойства б) функций ρ_ν получаем, что $\zeta_k - \varepsilon \in \Lambda^{(k)}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. В этом случае также имеем $\eta_k < \zeta_k$. Таким образом, $\eta_m < \zeta_m$ при любых $m = 2, \dots, k$. Следовательно, $\omega_k < \max_{2 \leq m \leq k} \zeta_m \leq \zeta_k$ и правое неравенство в (7) доказано. Остальные неравенства в (7) тривиальны.

§ 3. Свойства функций класса $\mathcal{K}_r$

Обозначим через $\mathcal{K}_r$ множество функций $f \in C^\infty(B_r)$, удовлетворяющих условию (1). Некоторые сведения о свойствах таких функций содержатся в [9; §§ 6, 7]. Здесь мы продолжим изучение функций класса $\mathcal{K}_r$.

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 3$, $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$, $0 < \delta < \sqrt{a_n^2 + a_\nu^2}$, $t > 1/2$ и $r = R(a, t)$. Предположим, что $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$ и $f(x) = 0$ при $|x| \geq \delta$. Тогда $f(x) = 0$ при

$$|x| \geq 2\sqrt{a_n^2 + a_\nu^2} - \sqrt{4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2 + a_n^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1 = a_n(a_n^2 + a_\nu^2)^{-1/2}$, $c_2 = a_\nu(a_n^2 + a_\nu^2)^{-1/2}$, $c_3 = 2\sqrt{a_n^2 + a_\nu^2} - \sqrt{4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2 + a_n^2}$. Обозначим

$$\gamma = \inf\{\xi \geq 0 : f(x) = 0 \text{ при } |x| \geq \xi\} \quad (8)$$

и предположим, что $\gamma > \max\{c_3, 0\}$. Тогда при $0 < \varepsilon < \gamma - \max\{c_3, 0\}$ параллелепипед

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : (\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n \leq x_n \leq (\gamma - \varepsilon)c_1, \\ (\gamma - \varepsilon)c_2 - 2a_\nu \leq x_\nu \leq (\gamma - \varepsilon)c_2, -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq \nu, n\}$$

содержится в B_r . Действительно, если $x \in P$, то

$$|x|^2 + a_\nu^2 + a_n^2 - |a|^2 \leq \max\left\{((\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n)^2 + ((\gamma - \varepsilon)c_2 - 2a_\nu)^2, \right. \\ \left. ((\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n)^2 + (\gamma - \varepsilon)^2 c_2^2, (\gamma - \varepsilon)^2 c_1^2 + ((\gamma - \varepsilon)c_2 - 2a_\nu)^2, (\gamma - \varepsilon)^2\right\}.$$

Поскольку $\max\{c_3, 0\} + \varepsilon < \gamma \leq \delta < \sqrt{a_n^2 + a_\nu^2}$, правая часть последнего неравенства не превосходит $r^2 + a_\nu^2 + a_n^2 - |a|^2$. Следовательно, $x \in B_r$ и $P \subset B_r$.

При указанных ε рассмотрим следующие множества:

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1, x_\nu = (\gamma - \varepsilon)c_2, -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq \nu, n\}, \\ P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n, x_\nu = (\gamma - \varepsilon)c_2 - 2a_\nu, \\ -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq \nu, n\}, \\ P_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1, x_\nu = (\gamma - \varepsilon)c_2 - 2a_\nu, -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq \nu, n\}, \\ P_4 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n, x_\nu = (\gamma - \varepsilon)c_2, -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq \nu, n\}.$$

Учитывая, что $\gamma \leq \delta$, нетрудно видеть, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ расстояния от точки $x = 0$ до множеств P_2, P_3, P_4 больше чем γ . Поэтому при таких ε

$$f(x) = 0 \text{ при } x \in P_2 \cup P_3 \cup P_4. \quad (9)$$

Далее, вместе с f функция $g = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_n}$ принадлежит $\mathcal{H}_r$, откуда $\int_P g(x) dx = 0$. Это означает, что

$$\int_{P_1} f(x) d\mu + \int_{P_2} f(x) d\mu = \int_{P_3} f(x) d\mu + \int_{P_4} f(x) d\mu,$$

где $d\mu$ равно произведению $dx_1 \cdots dx_{n-1}$ без множителя dx_ν . Полагая $f(x) = 0$ при $|x| \geq r$, из последнего равенства и (9) имеем

$$0 = \int_{P_1} f(x) d\mu = \int_M f(x) d\mu,$$

где $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1, x_\nu = (\gamma - \varepsilon)c_2\}$. Используя радиальность f и теорему о носителе (см. [18; гл. 1, §2, теорема 2.6]), откуда получаем $f(x) = 0$ при $|x| \geq \gamma - \varepsilon$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$. Последнее равенство противоречит определению γ (см. (8)). Таким образом, $\gamma \leq \max\{c_3, 0\}$, откуда следует утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $n \geq 3$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < \sqrt{a_n^2 + m^2 a_1^2}$, $t > m/2$ и $r = R(a, t)$. Предположим, что $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$ и $f(x) = 0$ при $|x| \geq \delta$. Тогда $f(x) = 0$ при $|x| \geq 2\sqrt{a_n^2 + m^2 a_1^2} - \sqrt{4a_1^2 t^2 + a_n^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1 = a_n(a_n^2 + m^2 a_1^2)^{-1/2}$, $c_2 = m a_1(a_n^2 + m^2 a_1^2)^{-1/2}$, $c_3 = 2\sqrt{a_n^2 + m^2 a_1^2} - \sqrt{4a_1^2 t^2 + a_n^2}$ и γ определено равенством (8). Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3 для параллелепипеда

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : (\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n \leq x_n \leq (\gamma - \varepsilon)c_1, \\ (\gamma - \varepsilon)c_2 - 2ma_1 \leq x_1 \leq (\gamma - \varepsilon)c_2, -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq 1, n\}$$

и его граней

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1, x_1 = (\gamma - \varepsilon)c_2, -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq 1, n\},$$

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n, x_1 = (\gamma - \varepsilon)c_2 - 2ma_1, \\ -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq 1, n\},$$

$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1, x_1 = (\gamma - \varepsilon)c_2 - 2ma_1, \\ -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq 1, n\},$$

$$P_4 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = (\gamma - \varepsilon)c_1 - 2a_n, x_1 = (\gamma - \varepsilon)c_2, -a_k \leq x_k \leq a_k, k \neq 1, n\}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$, получаем утверждение леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть $n \geq 3$, $\nu \in \{2, \dots, n-1\}$, $t > 1/2$ и $r = R(a, t)$. Предположим, что $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$ и $f(x) = 0$ при $|x| \geq (a_n^2 + (\max\{r_\nu(t), 0\})^2)^{1/2}$. Тогда $f(x) = 0$ при $|x| \geq (a_n^2 + (\max\{\rho_\nu(t), 0\})^2)^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $r_\nu(t) \leq 0$, утверждение леммы 5 тривиально. Пусть $r_\nu(t) > 0$, тогда $r_\nu^2(t) < a_\nu^2$ (см. (5)) и по лемме 3 $f(x) = 0$ при $|x| \geq 2\sqrt{a_n^2 + a_\nu^2} - (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2 + a_n^2)^{1/2}$. Если выражение в правой части последнего неравенства не превосходит a_n , получаем утверждение леммы 5. В противном случае имеем $f(x) = 0$, если

$$|x|^2 - a_n^2 \geq (2\sqrt{a_n^2 + a_\nu^2} - (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2 + a_n^2)^{1/2})^2 - a_n^2. \quad (10)$$

Далее, пусть $c_1, c_2 \geq 0$ и $c_1 \neq c_2$. Тогда функция

$$\varphi(y) = (2\sqrt{c_1 + y} - \sqrt{c_2 + y})^2 - y \quad (11)$$

убывает на $(0, +\infty)$. Полагая $c_1 = a_\nu^2$, $c_2 = 4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2$, из (2) и неравенства $\varphi(a_n^2) \leq \varphi(a_\nu^2)$ получаем, что правая часть (10) не превосходит $\rho_\nu^2(t)$. В этом случае также имеем утверждение леммы 5.

ЛЕММА 6. Пусть $\alpha > \beta > 0$, $n \geq 3$, $f \in L(\mathbb{R}^n)$ и $f = 0$ в области $|x| > \alpha$. Предположим, что для любого $\tau \in \text{SO}(n)$ и почти всех $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\int_{\mathbb{R}^1} f(\tau x) dx_n = \begin{cases} c_1, & \text{если } \beta < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < \alpha, \\ c_1 + c_2(\beta^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{-1/2}, & \\ c_1, & \text{если } \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < \beta, \end{cases} \quad (12)$$

где константы c_1, c_2 не зависят от τ .

Тогда $c_2 = 0$ и $f(x) = c_1 \pi^{-1}(\alpha^2 - |x|^2)^{-1/2}$ в B_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что интеграл в (12) равен нулю при почти всех $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} > \alpha.$$

Умножим равенство (12) на $\overline{t_{lp}^k (r^{-1})}$ и проинтегрируем на $\text{SO}(n)$ по мере $d\tau$. При $k \geq 1$ и почти всех $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^1} F_{k,l,p}(x) dx_n = 0, \quad \text{где} \quad F_{k,l,p}(x) = f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma)$$

(см. (4), а также [3; формула (6)]). В силу произвольности $p \in \{1, \dots, d_k\}$ такое же равенство верно для любой функции вида $f_{kl}(\rho) Y(\sigma)$, где $Y \in \mathcal{H}_k$. В частности, полагая $Y(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, имеем $\int_{\mathbb{R}^1} f_{kl}(|x|) dx_n = 0$. Отсюда следует, что $f_{kl} = 0$ при всех $k \geq 1$, $1 \leq l \leq d_k$ (см. [18; гл. 1, § 2, теорема 2.20]), и тогда $f \in \mathfrak{H}_0(\mathbb{R}^n)$ (см. (4)).

Далее, пусть $u(x) = c_1 \pi^{-1} (\alpha^2 - |x|^2)^{-1/2}$ при $|x| < \alpha$, $u(x) = 0$ при $|x| \geq \alpha$ и $v(|x|) = f(x) - u(x)$. Тогда из (12) получаем

$$\int_{\mathbb{R}^1} v(|x|) dx_n = c_2 (\beta^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{-1/2}$$

для почти всех $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ с условием $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < \beta$ (см., например, [9; лемма 7]). Отсюда

$$\int_0^{\sqrt{\beta^2 - t^2}} v(\sqrt{t^2 + x_n^2}) dx_n = \int_t^\beta \frac{v(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} = \frac{c_2}{\sqrt{\beta^2 - t^2}}$$

для почти всех $t \in (0, \beta)$. Из последнего уравнения находим $c_2 = \int_t^\beta v(\xi) \xi d\xi$ (см. [18; гл. 1, § 2, доказательство теоремы 2.6]). При $t \rightarrow \beta$ имеем $c_2 = 0$ и тогда $f = u$.

§ 4. Доказательство основной леммы

Основным утверждением, необходимым для доказательства теоремы 1, является

ЛЕММА 7. Пусть $t > \omega_n$, $r = R(a, t)$, $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и выполнено условие (1). Тогда $f = c$ в области $r_n(t) < |x| < r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что лемму 7 достаточно доказать для $f \in \mathcal{K}_r$ (общий случай получается отсюда стандартным приемом сглаживания, см. [9; доказательство леммы 26]). Кроме того, не ограничивая общности, можно считать, что $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$ (см. (7), а также [9; лемма 23]). Для таких функций будем доказывать лемму 7 индукцией по $n = 2, 3, \dots$.

При $n = 2$ требуемое утверждение следует из (7) и [9; лемма 24]. Предположим, что утверждение леммы 7 имеет место для любой размерности, не превосходящей $n - 1$, и докажем его для размерности $n \geq 3$. Пусть $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$ и $f(x) = f_0(\rho)$ при всех $x \in B_r$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_n} = x_n \frac{f'_0(\rho)}{\rho} \in \mathcal{K}_r$, функция

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{f'_0(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + a_n^2})}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + a_n^2}} \quad (13)$$

определена в шаре $B = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x|^2 < R^2(a, t) - a_n^2\}$ и имеет нулевые интегралы по всем параллелепипедам вида $\lambda(\pi_n A) \subset B$, $\lambda \in \text{ISO}(n-1)$. Поскольку $t > \omega_n \geq \omega_{n-1}$, для функции F выполнены все условия леммы 7 для размерности $n - 1$. Из индуктивного предположения и (13) получаем $f_0(\rho) = c_1 \rho^2 + c$ при

$$\rho \geq (a_n^2 + (\max\{r_{n-1}(t), 0\})^2)^{1/2}.$$

Положим $g = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r$ и $g = \Delta^2 f$ в B_r (здесь, как обычно, Δ — оператор Лапласа), тогда $g \in \mathfrak{H}_0(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $g(x) = g_0(\rho)$, тогда $\frac{\partial g}{\partial x_n} = x_n \frac{g'_0(\rho)}{\rho} \in \mathcal{K}_r$ и функция

$$G(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{g'_0(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + a_n^2})}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + a_n^2}} \quad (14)$$

имеет нулевые интегралы по всем параллелепипедам вида $\lambda(\pi_n A) \subset B$, $\lambda \in \text{ISO}(n-1)$. Кроме того, $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ и

$$G = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \geq r_{n-1}(t). \quad (15)$$

Докажем индукцией по $s = 1, \dots, n - 2$, что

$$G = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \geq \rho_{n-s}(t). \quad (16)$$

При $s = 1$ это утверждение следует из (15) и леммы 5, поэтому достаточно рассмотреть случай $n > 3$. Предположим, что (16) выполнено для некоторого $s \leq n - 3$, и докажем, что

$$G = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \geq \rho_{n-s-1}(t). \quad (17)$$

Рассмотрим функцию

$$h(x_1, \dots, x_{n-s-1}) = \int_{-a_{n-1}}^{a_{n-1}} dx_{n-1} \int_{-a_{n-2}}^{a_{n-2}} dx_{n-2} \cdots \int_{-a_{n-s}}^{a_{n-s}} G(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_{n-s}. \quad (18)$$

Из свойств G следует, что h радиальна, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-s-1})$ и имеет нулевые интегралы по всем параллелепипедам вида $\lambda(\pi_{n-s}\pi_{n-s+1}\cdots\pi_n A)$, $\lambda \in \text{ISO}(n-s-1)$, содержащимся в шаре $\{x \in \mathbb{R}^{n-s-1} : \sum_{k=1}^{n-s-1} x_k^2 < R^2(a, t) - \sum_{k=n-s}^n a_k^2\}$. Поскольку $t > \omega_n \geq \omega_{n-s-1}$, для функции h выполнено первое индуктивное предположение из доказательства леммы 7. Это означает, что

$$h = c_2 \quad \text{при} \quad r_{n-s-1}(t) \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-s-1}^2} < \left(R^2(a, t) - \sum_{k=n-s}^n a_k^2\right)^{1/2}. \quad (19)$$

Кроме того, если $x_k > a_k$ при некотором $k \in \{n-s, \dots, n-1\}$, то $G(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ (см. (16) и (5)). Поэтому

$$h(x_1, \dots, x_{n-s-1}) = \int_{\mathbb{R}^1} dx_{n-1} \int_{\mathbb{R}^1} dx_{n-2} \cdots \int_{\mathbb{R}^1} G(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_{n-s}. \quad (20)$$

Далее, поскольку $t > \omega_{n-s} \geq \eta_{n-s}$, из леммы 1 получаем, что $t \in \Lambda^{(n-s)} \cup \Omega^{(n-s)}$. Отсюда вытекает, что $\rho_{n-s}(t) < (R^2(a, t) - \sum_{k=n-s}^n a_k^2)^{1/2}$. Учитывая (16), из (18) имеем $h = 0$ при $\rho_{n-s}(t) \leq (x_1^2 + \cdots + x_{n-s-1}^2)^{1/2} < (R^2(a, t) - \sum_{k=n-s}^n a_k^2)^{1/2}$. Отсюда и из (19) находим $c_2 = 0$. Поскольку $G \in \mathfrak{H}_0(\mathbb{R}^n)$, из (20), (19) и теоремы о носителе [18; гл. 1, §2, теорема 2.6] следует, что $G = 0$ при $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \geq r_{n-s-1}(t)$. Отсюда и из леммы 5 получаем (17).

Таким образом, утверждение (16) доказано при всех $s = 1, \dots, n-2$, и тогда

$$G = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \geq \rho_2(t). \quad (21)$$

Предположим теперь, что $2\zeta_n \notin \mathbb{N}$. В этом случае $t \in \Lambda^{(n)}$ (см. лемму 1). Из определения g и (14) вытекает, что функция

$$H(x_1) = \int_{-a_{n-1}}^{a_{n-1}} dx_{n-1} \int_{-a_{n-2}}^{a_{n-2}} dx_{n-2} \cdots \int_{-a_2}^{a_2} G(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_2$$

является четной и имеет нулевые интегралы по всем отрезкам длины $2a_1$, содержащимся в интервале $(-2a_1t, 2a_1t)$. Из определения H , оценки (5) и (21) следует, что

$$H(x_1) = \int_{\mathbb{R}^1} dx_{n-1} \int_{\mathbb{R}^1} dx_{n-2} \cdots \int_{\mathbb{R}^1} G(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_2 \quad (22)$$

и $H(x_1) = 0$ при $|x_1| \geq \rho_2(t)$. Из условия $t \in \Lambda^{(n)}$ имеем $t \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, откуда $H = 0$ на $(-2a_1t, 2a_1t)$ (см. [9; лемма 8, утверждения 1, 2]). Кроме того, $t \in \Lambda_1^{(n)}$ и тогда $\rho_2(t) < 2a_1t$. Таким образом, $H(x_1) = 0$ при всех $x_1 \in \mathbb{R}^1$. Тогда из

радиальности G и (22) получаем $G = 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ (см. [18; гл. 1, §2, теорема 2.6]). Следовательно, $g(x) = 0$ при $|x| \geq a_n$ (см. (14)) и $\Delta^2 f = 0$ при $|x| \geq r_n(t)$ (см. [9; лемма 22]). Это означает, что $f(x) = c_1|x|^2 + c$ и $\frac{\partial f}{\partial x_n} = 2c_1x_n$ при $|x| \geq r_n(t)$. Поскольку $\frac{\partial f}{\partial x_n} \in \mathcal{H}_r$, отсюда следует, что $c_1 = 0$ (см. [9; лемма 20] и (5)). Тогда $f = c$ при $|x| \geq r_n(t)$ и утверждение леммы 7 доказано при $2\zeta_n \notin \mathbb{N}$.

Пусть теперь $2\zeta_n \in \mathbb{N}$. Из леммы 1 вытекает, что $t \in \Omega^{(n)}$. Нетрудно проверить, что $m/2 \notin \Omega^{(n)}$ при $m \in \mathbb{N}$. Полагая $m = 2\zeta_n - 1$, отсюда и из (6) получаем

$$t > \frac{1}{2}(2\zeta_n - 1). \quad (23)$$

Если $\rho_2(t) \leq 0$, то $G = 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ (см. (21)), откуда, как и выше, $f = c$ при $|x| \geq r_n(t)$. Пусть $\rho_2(t) > 0$, тогда $g = 0$ при $|x| \geq (a_n^2 + \rho_2^2(t))^{1/2}$ (см. (21) и (14)). Учитывая, что $\rho_2^2(t) < a_1^2(2\zeta_n - 1)^2 = a_1^2m^2$ (поскольку $t \in \Omega^{(n)}$), из леммы 4 имеем $g = 0$ при

$$|x| \geq 2\sqrt{a_n^2 + m^2a_1^2} - \sqrt{4a_1^2t^2 + a_n^2}.$$

Если выражение в правой части последнего неравенства не превосходит a_n , то $G = 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ и тогда, как и выше, $f = c$ при $|x| \geq r_n(t)$. В противном случае из неравенств $t > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ и $a_1 \leq a_n$ (см. (7) и (2)) вытекает, что $m \neq 1$, откуда $t > 1$ (см. (23)). Рассмотрим функцию φ , определенную равенством (11) при $c_1 = m^2a_1^2$, $c_2 = 4a_1^2t^2$. Поскольку $c_1 \neq c_2$ (см. (23)), φ убывает на $(0, +\infty)$ и $\varphi(a_n^2) \leq \varphi(a_1^2)$. Так как $t \in \Omega^{(n)}$, из последнего неравенства имеем

$$0 < \left(2\sqrt{a_n^2 + m^2a_1^2} - \sqrt{4a_1^2t^2 + a_n^2}\right)^2 - a_n^2 \leq a_1^2(2t - 2)^2.$$

Учитывая, что $t > 1$, отсюда получаем $G = 0$ при $(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^{1/2} \geq a_1(2t - 2)$. В этом случае $H(x_1) = 0$ при $|x_1| \geq a_1(2t - 2)$. Поскольку H имеет нулевой интеграл по любому отрезку длины $2a_1$, содержащемуся в интервале $(-2a_1t, 2a_1t)$, отсюда следует, что $H = 0$ в $\mathbb{R}^1$. Как и выше, это означает, что $G = 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $f = c$ при $|x| \geq r_n(t)$. Таким образом, лемма 7 полностью доказана.

§5. Доказательство теоремы 1

Как уже отмечалось, утверждения 1), 2) и 5) теоремы 1 были получены ранее в работе [9]. Поэтому далее будем считать, что $n \geq 3$ и $r = R(a, \zeta)$.

Докажем утверждения 3), 4) теоремы 1 одновременно индукцией по $n = 3, 4, \dots$

Пусть $n = 3$, $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и удовлетворяет (1). По лемме 7

$$f = c \text{ в области } r_n(\zeta) < |x| < r. \quad (24)$$

Кроме того, для любого $\tau \in \text{SO}(3)$ функция

$$\varphi_\tau(x_1, x_2) = \int_{-a_3}^{a_3} f(\tau x) dx_3 \quad (25)$$

локально суммируема в круге $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2)^{1/2}\}$ и имеет нулевые интегралы по всем прямоугольникам вида $\lambda(\pi_3 A)$, $\lambda \in \text{ISO}(2)$, содержащимся в этом круге.

Поскольку в данном случае $\zeta = \zeta_3 \geq \zeta_2$, из утверждения 2) теоремы 1 следует, что $\varphi_\tau = 0$.

Пусть $r_3(\zeta) < (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2)^{1/2}$. Тогда $\varphi_\tau = 2a_3c$ в области $r_3(\zeta) < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2)^{1/2}$ (см. (25), (24)), откуда $c = 0$. Это означает, что $f = 0$ при $r_3(\zeta) < |x| < r$. В частности, это выполнено, если $|x_3| > a_3$ (см. (5)). Полагая $f = 0$ при $|x| \geq r$, отсюда и из определения φ_τ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^1} f(\tau x) dx_3 = 0 \quad (26)$$

для почти всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Отсюда следует (см., например, лемму 6), что $f = 0$ в B_r .

Пусть теперь $r_3(\zeta) \geq (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2)^{1/2}$. В этом случае из определения ζ имеем $r_3(\zeta) = (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2)^{1/2}$. Тогда вместе с f функция

$$u(x) = \begin{cases} c, & \text{если } |x| \geq r_3(\zeta), \\ c - \frac{2}{\pi}ca_3(r_3^2(\zeta) - |x|^2)^{-1/2}, & \text{если } |x| < r_3(\zeta), \end{cases}$$

удовлетворяет (1) (см. [9; доказательство леммы 28]). Следовательно, $f - u$ также удовлетворяет (1) и $f - u = 0$ в области $r_3(\zeta) < |x| < r$ (см. (24)). Как и выше, отсюда получаем равенство (26) для функции $f - u$. Тогда $f = u$ в B_r (см., например, лемму 6) и утверждения 3), 4) теоремы 1 доказаны при $n = 3$.

Предположим, что эти утверждения имеют место для размерности $n - 1$, и докажем их для размерности $n \geq 4$. Обозначим $B = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| < (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}\}$. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и удовлетворяет (1). По лемме 7 $f = c$ при $r_n(\zeta) < |x| < r$. Продолжим f на $\mathbb{R}^n$, полагая

$$f = c \text{ в области } |x| > r_n(\zeta). \quad (27)$$

Тогда при любом $\tau \in \text{SO}(n)$ функция

$$\Phi_\tau(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-a_n}^{a_n} f(\tau x) dx_n \quad (28)$$

локально суммируема в $\mathbb{R}^{n-1}$ и имеет нулевые интегралы по всем параллелепипедам вида $\lambda(\pi_n A) \subset B$, $\lambda \in \text{ISO}(n - 1)$. Поскольку $\zeta = \zeta_n \geq \zeta_{n-1}$, по лемме 7 и предположению индукции имеет место равенство

$$\Phi_\tau = \begin{cases} c_1, & \text{если } r_{n-1}(\zeta) < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}, \\ c_1 - \frac{2}{\pi}c_1a_{n-1}(r_{n-1}^2(\zeta_{n-1}) - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{-1/2}, & \\ \text{если } \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < r_{n-1}(\zeta_{n-1}), & \end{cases} \quad (29)$$

в котором постоянная c_1 , вообще говоря, может зависеть от τ и в случае

$$r_{n-1}(\zeta_{n-1}) < (4a_1^2\zeta_{n-1}^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2)^{1/2}$$

равна нулю.

Пусть $r_n(\zeta) < (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}$. Тогда из (28) и (27) следует, что $\Phi_\tau = 2a_n c$ при $r_n(\zeta) < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$, откуда $c_1 = 2a_n c$ (см. (29)). Учитывая, что $f = c$ при $|x_n| > a_n$ (см. (27) и (5)), из (27)–(29) получаем

$$\int_{\mathbb{R}^1} (f(\tau x) - c) dx_n = \begin{cases} 0, & \text{если } \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} > r_{n-1}(\zeta), \\ -\frac{4}{\pi} c a_n a_{n-1} (r_{n-1}^2(\zeta_{n-1}) - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{-1/2}, & \text{если } \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < r_{n-1}(\zeta_{n-1}). \end{cases}$$

Если $\zeta > \zeta_{n-1}$, то $r_{n-1}(\zeta) < r_{n-1}(\zeta_{n-1})$, $c = 0$ и по лемме 6 $f = 0$. В противном случае $\zeta = \zeta_{n-1}$ и из леммы 6 также имеем $f = c = 0$. Таким образом, утверждение 3) доказано для размерности n .

Пусть теперь $r_n(\zeta) \geq (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}$. В этом случае из определения ζ имеем $r_n(\zeta) = (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}$. Тогда вместе с f функция

$$U(x) = \begin{cases} c, & \text{если } |x| \geq r_n(\zeta), \\ c - \frac{2}{\pi} c a_n (r_n^2(\zeta) - |x|^2)^{-1/2}, & \text{если } |x| < r_n(\zeta), \end{cases}$$

удовлетворяет (1) (см. [9; доказательство леммы 28]). Следовательно, функция

$$W_\tau(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-a_n}^{a_n} (f(\tau x) - U(x)) dx_n \quad (30)$$

локально суммируема в $\mathbb{R}^{n-1}$ и имеет нулевые интегралы по всем параллелепипедам вида $\lambda(\pi_n A) \subset B$, $\lambda \in \text{ISO}(n-1)$. Поскольку $f(\tau x) = U(x) = c$ при $|x| > a_n$ (см. (27) и (5)), из (30) имеем

$$W_\tau(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^1} (f(\tau x) - U(x)) dx_n. \quad (31)$$

Если $\zeta = \zeta_n > \zeta_{n-1}$, то $W_\tau = 0$ в B (см. [9; теорема 1]). В случае $\zeta_n = \zeta_{n-1}$, но $r_{n-1}(\zeta_{n-1}) < (4a_1^2\zeta_{n-1}^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2)^{1/2}$, по предположению индукции также $W_\tau = 0$ в B . Тогда $f = U$ в B_r (см. (31) и лемму 6) и в перечисленных случаях утверждение 4) доказано. Осталось рассмотреть случай, когда $\zeta = \zeta_n = \zeta_{n-1}$ и $r_{n-1}(\zeta_{n-1}) = (4a_1^2\zeta_{n-1}^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2)^{1/2}$ (см. определение ζ_{n-1} в §2). Из предположения индукции получаем

$$W_\tau = \begin{cases} c_2, & \text{если } r_{n-1}(\zeta_{n-1}) < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < r_n(\zeta_{n-1}), \\ c_2 - \frac{2}{\pi} c_2 a_{n-1} (r_{n-1}^2(\zeta_{n-1}) - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{-1/2}, & \text{если } \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < r_{n-1}(\zeta_{n-1}). \end{cases}$$

Кроме того, из (31), (27) и определения U следует, что $W_\tau = 0$ в области $r_n(\zeta_{n-1}) < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$. Тогда по лемме 6 $f = U$ в B_r и утверждение 4) полностью доказано.

Список литературы

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations. Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Hanstholm/Den., 1991 // NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 1992. V. 365. P. 185–194.
2. *Беренштейн К. А., Струнна Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
3. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
4. *Garofalo N., Segala F.* Univalent functions and the Pompeiu problem // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 346. № 1. P. 137–146.
5. *Ullrich D. C.* More on the Pompeiu problem // Amer. Math. Monthly. 1994. V. 101. P. 165–168.
6. *Berenstein C. A., Gay R.* Le problème de Pompeiu locale // J. Anal. Math. 1989. V. 52. P. 133–166.
7. *Berenstein C. A., Gay R.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
8. *Berenstein C. A., Yger A.* The three squares theorem, a local version // Analysis and Partial Differential Equations / ed. C. Sadosky. New York: Marcel Dekker, 1990. P. 35–50.
9. *Волчков В. В.* Экстремальные задачи множествах Помпейю // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 3–22.
10. *Волчков В. В.* Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 671–680.
11. *Волчков В. В.* Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 804–809.
12. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.
13. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30.
14. *Волчков В. В.* Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
15. *Волчков В. В.* Аппроксимация функций на ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$ линейными комбинациями сдвигов // Докл. АН. 1994. Т. 334. № 5. С. 560–561.
16. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
17. *Виленькин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
18. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию
15.09.1998