Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, Бирациональные свойства пучков поверхностей Дель Пеццо степеней 1 и 2, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 5, 17–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:56:58

УДК 512.6

М. М. Гриненко

Бирациональные свойства пучков поверхностей Дель Пеццо степеней 1 и 2

Исследуется проблема бирациональной жесткости гладких расслоений Мори, представимых в виде пучка поверхностей Дель Пеццо степени 1 или 2.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Определения и результаты

В последнее десятилетие прогресс в программе минимальных моделей привел к тому, что для многообразий отрицательной кодаировой размерности проблема бирациональной классификации ставится сегодня следующим образом: в данном классе бирациональной эквивалентности описать все Мори-расслоения и бирациональные отображения между ними.

Напомним, что нормальное многообразие V , имеющее не более чем $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности и снабженное морфизмом $\varphi: V \rightarrow S$, называется *Мори-расслоением*, если φ — экстремальное стягивание расслоенного типа, т. е.

- 1) φ есть морфизм со связными слоями на нормальное многообразие S и $\dim S < \dim V$;
- 2) $-K_V$ φ -обилен и ранг относительной группы Пикара равен 1:

$$\rho(V/S) = \rho(V) - \rho(S) = 1.$$

Отметим, что в большинстве практически важных случаев достаточно описать не все модели Мори-расслоения, а лишь различные Мори-структуры (грубо говоря, Мори-расслоения по модулю бирациональных отображений над базой). В этом смысле следующий класс многообразий особенно важен (и прост для описания).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем называть Мори-расслоение V/S *бirationально жестким*, если любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ на Мори-расслоение V'/S' бирационально над базой, т. е. существует бирациональное отображение $\psi: S \dashrightarrow S'$, замыкающее следующую диаграмму до коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\psi} & S' \end{array}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01132), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96146), а также INTAS-OPEN (грант № 97/2072).

В дальнейшем по отношению к бирациональному отображению χ между Мори-расслоениями мы будем употреблять термин “бирационально над базой” всегда в том смысле, что χ индуцирует бирациональный изоморфизм баз.

Пусть $\rho: V \rightarrow S$ – Мори-расслоение, тогда любая непустая линейная система представляется как подсистема в $|a(-K_V) + \rho^*(A)|$, где $a = \mu(V, \mathcal{D}) \geq 0$ – так называемый *квазиэффективный порог* и A – некоторый дивизор на S . Поведение линейных систем при бирациональных отображениях между Мори-расслоениями описывается следующим утверждением [1; теорема 4.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $\rho: V \rightarrow S$ и $\rho': V' \rightarrow S'$ – Мори-расслоения, $\chi: V \dashrightarrow V'$ – бирациональное отображение. Рассмотрим очень обильную линейную систему $\mathcal{D}' = |n'(-K_{V'}) + \rho'^*(A')|$ на V' , где A' – обильный дивизор на S' , и положим $\mathcal{D} = \chi^{-1}\mathcal{D}' \subset |n(-K_V) + \rho^*(A)|$. Тогда

- (i) $n \geq n'$, и если $n = n'$, то χ бирационально над базой;
- (ii) если пара $K_V + \frac{1}{n}\mathcal{D}$ канонична и численно эффективна, то χ – изоморфизм, индуцирующий также изоморфизм баз.

Утверждение (i) этого предложения важно как раз для описания различных Мори-структур, а (ii) – для более тонкой классификации, скажем, перечисления различных Мори-моделей.

Есть, однако, еще один принципиальный параметр, пришедший из метода максимальных особенностей [2], играющего ключевую роль в задачах бирациональной классификации. Это так называемый *порог присоединения*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Неотрицательное число $\alpha(V, \mathcal{D})$ называется *порогом присоединения* пары $(V, \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ – непустая линейная система без неподвижных компонент на неособом в коразмерности 1 проективном многообразии V , если $\alpha(V, \mathcal{D})$ – наименьшее число, обладающее свойством: для любых целых m и n таких, что $m/n > \alpha(V, \mathcal{D})$, и $D \in \mathcal{D}$ линейная система $|nD + mK_V|$ пуста.

Следующее утверждение проясняет роль порога присоединения [2; теорема 2.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть $\chi: V \dashrightarrow V'$ – бирациональное отображение между многообразиями с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $\mathcal{D}'$ – непустая линейная система без неподвижных компонент на V' и $\mathcal{D} = \chi^{-1}\mathcal{D}'$ – ее собственный прообраз. Тогда если $\alpha(V, \mathcal{D}) > \alpha(V', \mathcal{D}')$, то пара $K_V + \frac{1}{\alpha(V, \mathcal{D})}\mathcal{D}$ неканонична (другими словами, $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность).

Условие неканоничности довольно сильное, и часто удается либо доказать отсутствие максимальных особенностей линейной системы, либо, применяя “открывающий” бирациональный автоморфизм или переход на другую модель Мори-расслоения, понизить порог присоединения. Связь квазиэффективного порога и порога присоединения дает очевидная лемма.

ЛЕММА 1.5. Пусть $\mathcal{D} \subset |-nK_V + \rho^*(A)|$ – непустая линейная система без неподвижных компонент на Мори-расслоении $\rho: V \rightarrow S$. Тогда $n = \mu(V, \mathcal{D}) \geq \alpha(V, \mathcal{D})$, причем имеет место равенство, если A – эффективный

дивизор; если же для общей кривой C , накрывающей базу, $C \circ \rho^*(A) < 0$, то $\mu(V, \mathcal{D}) > \alpha(V, \mathcal{D})$.

Основное предположение заключается в том, что соотношение между порогом присоединения и квазиэффективным порогом определяет, попадает ли данное многообразие в класс жестких. Для Мори-расслоений, представимых в виде пучка поверхностей Дель Пеццо, это выглядит следующим образом.

ГИПОТЕЗА 1.6. Пусть $V/\mathbb{P}^1$ – пучок поверхностей Дель Пеццо степени 1, 2 или 3. Расслоение $V/\mathbb{P}^1$ бирационально жестко тогда и только тогда, когда для любой непустой линейной системы $\mathcal{D}$ без неподвижных компонент оба порога совпадают, т.е. $\alpha(V, \mathcal{D}) = \mu(V, \mathcal{D})$ (или, другими словами, $\mathcal{D}$ является подсистемой в $|n(-K_V) + mF|$ при $m \geq 0$, где F – класс слоя).

Отметим, что “почти все” (гладкие) пучки поверхностей Дель Пеццо степеней 1, 2 и 3 оказываются, и это будет видно из дальнейшего, достаточно сильно “закрученными” по базе (в терминах работы [3]), и в той же работе доказываются их жесткость. В настоящей статье мы доказываем гипотезу 1.6 для всех гладких случаев при степени общего слоя равной 1, а также по модулю нескольких случаев для степени 2.

Технической основой работы является метод максимальных особенностей (см. [4], [5]) в его усиленном виде [2].

Характеристика основного поля всюду предполагается равной нулю.

§ 2. Гладкие многообразия с пучком поверхностей Дель Пеццо степени 1

2.1. Основная конструкция. Мы следуем идее, предложенной в работе [6].

Пусть $\rho: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ – гладкое Мори-расслоение на поверхности Дель Пеццо степени 1, $\text{Pic } V \simeq \mathbb{Z}[-K_V] \oplus \mathbb{Z}[F]$, F – класс слоя ρ . По теореме Грауэрта $\rho_*\mathcal{O}(-2K_V + kF)$ есть локально свободный пучок ранга 4 на $\mathbb{P}^1$. Выберем m таким образом, чтобы

$$\mathcal{E} = \rho_*\mathcal{O}(-2K_V + mF) \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2) \oplus \mathcal{O}(n_3),$$

где $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$ – некоторые целые числа; положим $b = n_1 + n_2 + n_3$.

Заметим, что на $V/\mathbb{P}^1$ существует специальное сечение s_1 :

$$s_1 = \text{Bas } |-K_V + kF|$$

при $k \gg 0$. Очевидно, любой слой $S \in |F|$ неособ в точке $s_1 \cap S$, которая является базисной точкой пучка $|-K_S|$.

Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – естественная проекция для $X = \mathbf{Proj} \mathcal{E}$, $\varphi: V \rightarrow X$ – морфизм, задаваемый линейной системой $|-2K_V + mF|$ (которая, очевидно, не имеет базисных точек); тогда $\rho = \pi \circ \varphi$. Легко видеть, что если $Q \subset X$ – образ морфизма φ , то $\varphi: V \rightarrow Q$ – конечный морфизм степени 2, дивизор ветвления которого $R_Q = R \cap Q$ неособ, причем $t_1 \cap R_Q = \emptyset$, где $t_1 = \varphi(s_1)$ и $R \subset X$ – некоторый дивизор.

На каждый слой $X/\mathbb{P}^1$ Q ограничивается как невырожденный квадратичный конус с вершиной в точке пересечения слоя и t_1 , а R — как кубическая поверхность. Таким образом, если M — класс тавтологического расслоения на X , а L — класс слоя, то

$$Q = 2M + aL, \quad R = 3M + cL.$$

Пусть t_0 — сечение $X/\mathbb{P}^1$, соответствующее сюръекции $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$, l — класс прямой в слое $L \cong \mathbb{P}^3$; положим $t_1 \sim t_0 + \varepsilon l$, $\varepsilon \geq 0$.

Пусть H — очень обильный дивизор вида $M + \beta L$, $\beta > 0$, и $D = H \cap Q$ — расслоение на коники с $N = t_1 \circ H$ вырождениями. Можно считать, что H достаточно общий, так чтобы все слои D были приведены и все особые точки на D были класса $\mathbf{A}_1$.

Легко подсчитать, что $K_D^2 = 8 - 2b - 2\beta - 3a$. Пусть D' — раздутие всех особых точек и последующее стягивание всех (-1) -кривых (а их будет $2N$ штук). Тогда D' — линейчатая поверхность и мы имеем

$$K_D^2 + 2N = K_{D'}^2 = 8,$$

откуда

$$N = b + \beta + \frac{3}{2}a.$$

Заметим, что a обязано быть четным; положим $a = 2a'$. Далее,

$$N = t_1 \circ H = (t_0 + \varepsilon l) \circ (M + \beta L) = \beta + \varepsilon$$

и мы получаем $\varepsilon = b + 3a'$. Наконец, так как $R_Q \cap t_1 = \emptyset$, находим, что $0 = (t_0 + \varepsilon l) \circ (3M + cL) = 3\varepsilon + c$. Итак, доказана

ЛЕММА 2.1. *Для Q , t_1 и R выполнены следующие соотношения:*

$$Q = 2M - \frac{2}{3}(b - \varepsilon)L, \quad t_1 = t_0 + \varepsilon l, \quad R = 3M - 3\varepsilon L,$$

где $\varepsilon \geq 0$ — некоторое целое число.

В дальнейшем мы всегда полагаем, что $b > 0$. При $b = 0$, как это нетрудно видеть, всегда $Q = 2M$ и $\varepsilon = 0$, а значит, $V \cong \mathbb{P}^1 \times S$, где S — поверхность Дель Пеццо степени 1, т.е. V рационально и даже не является Мори-расслоением ввиду того, что $\text{rk Pic } V = 10 > 2$.

ЛЕММА 2.2. *Реализуются только два случая:*

1) $\varepsilon = 0$, $2n_2 = n_1 + n_3$, n_1 и n_3 — четные; таким образом,

$$Q = 2M - 2n_2L, \quad t_1 = t_0, \quad R = 3M;$$

2) $\varepsilon = n_1 > 0$, $n_3 = 2n_2$, n_1 — четное и $n_2 \geq 3n_1$; откуда

$$Q = 2M - 2n_2L, \quad t_1 = t_0 + n_1l, \quad R = 3M - 3n_1L.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\varepsilon > 0$. Тогда $\varepsilon \geq n_1$ ввиду неприводимости t_1 . Далее, так как R неприводим на X , а кривые класса $t_0 + n_2 l$ заматают любой эффективный дивизор класса $M - n_3 L$, то обязательно $(t_0 + n_2 l) \circ R = 3n_2 - 3\varepsilon \geq 0$, т.е. $\varepsilon \leq n_2$.

Предположим, что $n_1 = n_2 = n_3$. Так как $t_1 \circ (M - n_1 L) = 0$, линейная система $|M - n_1 L|$ имеет размерность 2 и каждый ее элемент неприводим, то в ней существует как минимум одномерное подсемейство, содержащее t_1 . Пусть $C \in |M - n_1 L - t_1|$ — общий элемент, тогда

$$Q \circ C = S + S' \sim 2M^2 - 2 \left(\frac{1}{3}(b - \varepsilon) + n_1 \right) ML,$$

где S и S' — неприводимые линейчатые поверхности, накрывающие базу. Заметим, что кривая класса t_0 одна на X и $t_1 \cap t_0 = \emptyset$. Хотя бы одна из указанных поверхностей, скажем S , содержит t_0 , и t_1 . Легко видеть, что класс S есть $M^2 - 2n_1 ML$, откуда $S' \sim M^2 - \frac{4}{3}n_1 ML$. Поскольку $S \neq S'$, то $t_0 \not\subset S'$, и так как $\text{Bas } |M - n_1 L| = t_0$, то для пересечения P двух общих элементов из $|M - n_1 L|$ мы имеем $\dim S' \cap P = 0$. Таким образом, получаем противоречие:

$$0 \leq S' \circ P = \left(M^2 - \frac{4}{3}n_1 ML \right) \circ (M^2 - 2n_1 ML) = -\frac{n_1}{3} < 0.$$

Итак, если $\varepsilon \geq n_1$, то $n_1 < n_3$; кроме того, тогда $n_1 > 0$, иначе R содержал бы любую кривую класса t_0 , а таких как минимум одномерное семейство, если $n_1 = 0$.

Пусть G — неприводимая линейчатая поверхность, являющаяся пересечением общих элементов из $|M - n_2 L|$ и $|M - n_3 L|$. Покажем, что $t_1 \subset G$. Легко видеть, что G есть поверхность класса $\mathbf{F}_{n_1}$ и t_0 — ее исключительное сечение. Если $t_1 \not\subset G$, то для общего слоя $S \in |L|$ прямая $G|_S$ не лежит на $Q|_S$. Таким образом, $G \not\subset Q$ и мы можем считать, что $G \circ Q = t_0 + C$, где C — некоторая кривая, никакая компонента которой не содержит t_0 . Нетрудно подсчитать, что

$$C \sim t_0 + 2 \left(b - n_2 - n_3 - \frac{b - \varepsilon}{3} \right) l,$$

откуда

$$2 \left(b - n_2 - n_3 - \frac{b - \varepsilon}{3} \right) \geq n_1,$$

что, учитывая неравенство $\varepsilon \leq n_2$, приводит к противоречию: $n_1 > \frac{4}{3}n_1$.

Итак, $t_1 \subset G$. Отсюда, кстати, следует, что $n_2 < n_3$, так как в противном случае $\dim |M - n_3 L| = 1$, следовательно, $\text{Bas } |M - n_3 L| = t_0$, и мы всегда бы нашли такую G , что $t_1 \not\subset G$.

Обозначим единственный эффективный элемент $|M - n_3 L|$ через T и покажем, что $T|_Q = 2G$. Пусть это не так и $T|_Q = G + G'$, $G' \neq G$. Поскольку $t_1 \subset G \cap G'$ и $t_0 \subset G$, то $t_0 \not\subset G'$. Тогда

$$G'|_G = t_0 + \{\text{слои в количестве } t_0 \cap t_1 = \varepsilon - n_1\}.$$

Выберем общий элемент $S \in |M - n_1 L|$; ясно, что $S|_T$ — поверхность класса $\mathbf{F}_{n_2}$ с исключительным сечением t_0 , причем $G \cap S|_T = t_0$. Пусть $C = G' \cap S|_T$ — неприводимая кривая, $C \circ t_0 = \varepsilon - n_1$. Имеем $Q \circ T \circ S = t_0 + C$, откуда

$$C \sim t_0 + 2 \left(n_2 - \frac{b - \varepsilon}{3} \right) l$$

и тогда $C \circ t_0 = n_2 - \frac{2}{3}(b - \varepsilon) = \varepsilon - n_1$. Получили противоречие:

$$\varepsilon = n_1 + n_2 - 2n_3 < 0.$$

Таким образом,

$$T \circ Q = 2M^2 - 2 \left(n_3 + \frac{b - \varepsilon}{3} \right) ML = 2G = 2(M^2 - (n_2 + n_3)ML),$$

поэтому $2n_2 = n_1 + n_3 - \varepsilon$. Если $\varepsilon > n_1$, то $R_Q = R|_Q$ будет содержать G , так как G замечается кривыми класса $t_0 + n_1 l$. Значит, $\varepsilon = n_1$ и $2n_2 = n_3$. Чтобы доказать неравенство $n_2 \geq 3n_1$, заметим, что поверхность $S_Q = S \cap Q$ есть расслоение на коники без вырождений, т.е. линейчатая поверхность, и ее класс $\mathbf{F}_{n_2}$. Тогда R высекает на S_Q эффективную кривую, не содержащую t_0 , и саму t_0 ; получаем неравенство $3n_3 - 3n_1 \geq 5n_2$, откуда $n_2 \geq 3n_1$.

Осталось показать, что n_1 четно. Пусть $C \sim t_0 + n_1 l$ — общая неприводимая кривая на G и C_V — ее прообраз на V . Тогда C_V дважды накрывает C с ветвлением в дивизоре степени $t_1 \circ C = n_1$, которая должна быть четной.

Итак, случай $\varepsilon > 0$ полностью разобран. Пусть теперь $\varepsilon = 0$. Мы можем считать, что $n_1 < n_3$ (случай $n_1 = n_3$ был разобран выше).

Пусть $T \in |M - n_3 L|$. Заметим, что $T = \mathbf{Proj} \mathcal{E}_T$, где

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2).$$

Так как T замечается кривыми класса $t_0 + n_2 l$, то из неприводимости $Q \sim 2M - \frac{2}{3}bL$ следует, что $n_2 \geq \frac{1}{3}b$, т.е. $2n_2 \geq n_1 + n_3$, и раз $n_3 > n_1$, то $n_2 > n_1$.

Далее, пусть $C \sim t_0 + n_1 l$ неприводима; $C \circ Q = 2(n_1 - \frac{1}{3}b) < 0$, так как $b = n_1 + n_2 + n_3 > 3n_1$. Значит, $C \subset Q$. Линейчатая поверхность $G \sim (M - n_2 L) \circ (M - n_3 L) = M^2 - (n_2 + n_3)ML$ имеет класс $\mathbf{F}_{n_1}$ и замечается кривыми того же класса, что и C , поэтому $G \subset Q$. Таким образом, $T|_Q = G + G'$.

Пусть $M_T = M|_T$ — тавтологический дивизор на T , $L_T = L|_T$. Тогда в T класс G есть $M_T - n_2 L_T$, $Q|_T \sim 2M_T - \frac{2}{3}b L_T$, откуда $G' \sim M_T - (\frac{2}{3}b - n_2)L_T$. Заметим, что $\frac{2}{3}b - n_2 > n_1$, поскольку $n_1 < n_2$.

Однако в T только один неприводимый дивизор класса $M_T - x L_T$ при $x > n_1$: это $M_T - n_2 L_T$. Значит, $\frac{2}{3}b - n_2 = n_2$, откуда $n_1 + n_3 = 2n_2$.

Осталось показать, что n_1 и n_3 четные. Пусть $C \subset Q$ — общая неприводимая кривая класса $t_0 + n_1 l$, C_V — ее прообраз на V . Тогда C_V есть двойное накрытие C с ветвлением в дивизоре степени $R \circ C = 3n_1$, откуда n_1 (а значит, и n_3) четно. Лемма 2.2 доказана.

Конструкция V как двойного накрытия Q позволяет полностью вычислить пересечения циклов на V . Обозначим через G_V прообраз поверхности $G \sim (M - n_2 L) \circ (M - n_3 L)$ на V , через F и H — то же для $L_Q = L|_Q$ и $M_Q = M|_Q$ соответственно. Пусть также $2s_0$ — прообраз t_0 , а $2f$ — прообраз прямой в слое L_Q .

ЛЕММА 2.3. $\overline{\mathbf{NE}}(V) = \mathbf{NE}(V) = \mathbb{R}_+[s_0] \oplus \mathbb{R}_+[f]$, при этом:

- 1) если $\varepsilon = 0$, то $K_V = -G_V + (\frac{1}{2}n_1 - 2)F$, $H = 2G_V + n_3F$, $K_V^2 = s_0 + (4 - n_2)f$, $s_0 \circ F = f \circ G_V = 1$, $s_0 \circ G_V = -\frac{1}{2}n_3$, $f \circ F = 0$;
- 2) если $\varepsilon = n_1 > 0$, то $K_V = -G_V - (\frac{1}{2}n_1 + 2)F$, $H = 2(G_V + n_2F)$, $s_1 = s_0 + \frac{1}{2}n_1f$, $K_V^2 = s_0 + (4 + \frac{3}{2}n_1 - n_2)f$, $s_0 \circ F = f \circ G_V = 1$, $s_0 \circ G_V = -\frac{1}{2}n_3 = -n_2$, $f \circ F = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма проверяется элементарными вычислениями, которые удобнее всего проделать по следующей схеме: вначале раздуть t_1 на Q , при этом вклеится исключительный дивизор S ; затем взять двойное накрытие с ветвлением в гладком дивизоре, составленном из собственного прообраза R_Q и S , после чего стянуть прообраз S на кривую s_1 . Возможность всех этих действий также проверяется элементарно.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\varepsilon = 0$, т.е. $s_1 = s_0$. Если $|n(-K_V) - mF|$, $m > 0$, не имеет неподвижных компонент, то $n_3 = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \in |n(-K_V) - mF|$. Так как

$$D|_{G_V} \sim ns_0 - \left(m + n\left(\frac{n_1}{2} + n_3 - n_2 - 2\right)\right)f$$

— эффективная кривая, то

$$0 < \frac{m}{n} \leq 2 + n_2 - n_3 - \frac{n_1}{2} = 2 - \frac{n_3}{2}.$$

Остается учесть, что n_3 положительно и четно. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\varepsilon = n_1 > 0$, т.е. $s_1 \neq s_0$. Если $|n(-K_V) + mF|$ не имеет неподвижных компонент, то обязательно $m > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \in |n(-K_V) + mF|$. Так как

$$D|_{G_V} \sim ns_0 + [m + n(n_1 - n_2 + 2)]f$$

— эффективная кривая, то $2 + n_1 - n_2 + m/n \geq 0$. Используя $n_2 \geq 3n_1$, видим, что $2 + n_1 - n_2 \leq 2 - 2n_1 < -2$, откуда $m > 0$. Лемма доказана.

2.2. Результаты о жесткости.

ТЕОРЕМА 2.6. Гипотеза 1.6 верна для гладких расслоений Мори на поверхности Дель Пеццо степени 1.

Доказательство этой теоремы опирается на следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $V/\mathbb{P}^1$ — гладкое Мори-расслоение с пучком поверхностей Дель Пеццо степени 1, V'/S' — некоторое Мори-расслоение, $\chi: V \dashrightarrow V'$ — бирациональное отображение. Пусть

$$\mathcal{D}' = |n'(-K_{V'}) + \text{поднятый с базы обильный дивизор}|$$

— очень обильная линейная система. Предположим, что

$$\mathcal{D} = \chi^{-1}\mathcal{D}' \subset |n(-K_V) + mF|$$

для некоторого $m \geq 0$. Тогда $n = n'$ (и, стало быть, χ бирационально над базой), кроме, возможно, случая $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$ при $\varepsilon = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\mu(V', \mathcal{D}') = n' = \alpha(V', \mathcal{D}')$. Так как $m \geq 0$, то также $\mu(V, \mathcal{D}) = n = \alpha(V, \mathcal{D})$. Если $n = n'$, то все доказано (см. предложение 1.2).

Пусть $n > n'$. Тогда пара $K_V + \frac{1}{n}\mathcal{D}$ неканонична или, что то же самое, линейная система $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность, причем центр этой максимальной особенности – точка. Однако, следуя [3], можно сказать большее.

Именно пусть D_1, D_2 – общие элементы $\mathcal{D}$. Заметим, что

$$D_1 \circ D_2 = \begin{cases} n^2 s_0 + ((4 - n_2)n^2 + 2mn)f, & \text{если } \varepsilon = 0, \\ n^2 s_0 + \left(\left(4 + \frac{3}{2}n_1 - n_2 \right) n^2 + 2mn \right) f, & \text{если } \varepsilon = n_1 > 0. \end{cases}$$

Положим $D_1 \circ D_2 = Z^h + Z^v$, где Z^h и Z^v – горизонтальный и вертикальный эффективные циклы. Тогда существует дискретное нормирование ν с центром над некоторой точкой $t \in \mathbb{P}^1$, положительное число $e = \nu(\mathcal{D}) - n\delta$, где δ – каноническая кратность относительно ν , такие, что для составляющей $Z_t^v \in F_t$ цикла Z^v в слое F_t над точкой t выполнено

$$\deg Z_t^v < \begin{cases} (4 - n_2)n^2 + 2n \frac{e}{\nu(F_t)}, & \text{если } \varepsilon = 0, \\ \left(4 + \frac{3}{2}n_1 - n_2 \right) n^2 + 2n \frac{e}{\nu(F_t)}, & \text{если } \varepsilon = n_1 > 0, \end{cases}$$

где $\deg Z_t^v \stackrel{\text{def}}{=} Z_t^v \circ (-K_V)$ (в терминах работы [3] это условия на *сверхмаксимальную особенность*). Кроме того, существуют положительные числа $\Sigma_0, \Sigma'_0 \leq \Sigma_0$ и Σ_1 такие, что кратности m^h и m^v циклов Z^h и Z_t^v в некоторой точке B_0 , являющейся центром ν , удовлетворяют неравенству

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)(m^h \Sigma_0 + m^v \Sigma'_0) > (2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2.$$

Заметим, что $m^h \leq \deg Z^h \stackrel{\text{def}}{=} Z^h \circ F = n^2$ и $m^v \leq 2 \deg Z_t^v$. Таким образом, в случае $\varepsilon = n_1 > 0$ имеем:

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)((9 + 3n_1 - 2n_2)n^2 \Sigma_0 + 4ne) > (2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2,$$

откуда

$$(2n_2 - 3n_1 - 5)\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1) + (n\Sigma_1 - e)^2 < 0,$$

т.е. $2n_2 < 5 + 3n_1$. Учитывая условие $n_2 \geq 3n_1$, получаем $n_1 \leq 1$, что невозможно ввиду четности и положительности n_1 .

Пусть теперь $\varepsilon = 0$, тогда

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)((8 - 2n_2)n^2 \Sigma_0 + 4ne) > (2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2,$$

откуда

$$(2n_2 - 5)\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1) + (n\Sigma_1 - e)^2 < 0.$$

Значит, $n_2 < \frac{5}{2}$, так что возможны три случая:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0, n_2 = 2, n_3 = 4; \\ n_1 &= 2, n_2 = 2, n_3 = 2; \\ n_1 &= 0, n_2 = 1, n_3 = 2. \end{aligned}$$

Мы покажем, что первые два не реализуются. Предположим сначала, что через B_0 не проходит сечений класса s_0 . Пусть Z_1^h обозначает сумму всех горизонтальных циклов, проходящих через точку B_0 , тогда $Z_1^h \sim As_0 + Bf$ при $B \geq A$. Учитывая, что $n_2 = 2$ в обоих случаях, имеем

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^1} \deg Z_p^v \leq 2n^2 + 2mn - B \leq 2n^2 + 2mn - A,$$

откуда следует неравенство на сверхмаксимальную особенность:

$$m^v \leq 2 \deg Z_t^v < 4n^2 + 4n \frac{e}{\nu(F_t)} - 2A.$$

Осталось учесть, что $m^h \leq A$, и тогда

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)(A\Sigma_0 + (4n^2 - 2A)\Sigma_0 + 4ne) > (2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2, \quad (2.1)$$

так что мы получаем противоречие:

$$A\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1) + (n\Sigma_1 - e)^2 < 0.$$

Нам осталось доказать, что максимальные особенности не могут лежать над точками, через которые проходят сечения класса s_0 .

Рассмотрим сначала случай $n_1 = n_2 = n_3 = 2$. Заметим, что $s_1 \sim s_0$, и это единственное сечение такого класса на V . Если $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность над некоторой точкой $B_0 \in s_1$, то для общего элемента $D \in \mathcal{D}$ выполнено $\nu_1 = \text{mult}_{B_0} D > n$, и тогда если $C \sim f$ — общая кривая в слое, содержащем B_0 , то $n = D \circ C \geq \nu_1 > n$ — противоречие.

Пусть теперь $n_1 = 0, n_2 = 2, n_3 = 4$. Доказательство для этого случая следует из двух лемм, приводимых ниже, и того, что любая кривая класса s_0 лежит на дивизоре G_V . Напомним, что нормирование ν реализуется последовательными раздутиями в неособых центрах $B_0, B_1, \dots$, где общий элемент D линейной системы $\mathcal{D}$ имеет кратности соответственно $\nu_1, \nu_2, \dots$.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\mathcal{D} \subset |n(-K_V) + mF|$, $m \geq 0$, имеет максимальную особенность над точкой $B_0 \in S$, где S — слой $V/\mathbb{P}^1$. Обозначим через $l \in |-K_S|$ кривую, проходящую через B_0 . Тогда

- а) S неособа в B_0 ;
- б) B_0 является двойной точкой l ;
- в) нормирование ν задает бесконечно близкую особенность, причем если $B_1 \cap S^1 \neq \emptyset$ (верхние индексы обозначают собственный прообраз на соответствующем этапе цепочки раздутий, реализующих ν), то $B_1 \cap l^1 \neq \emptyset$ и $\nu_1 + \nu_2 \leq 3n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если S имеет особенность в точке B_0 , то общая кривая $C \in |2(-K_S) - B_0|$ также будет иметь в ней особенность, и тогда получаем противоречие:

$$2n = D \circ C \geq 2\nu_1 > \nu_1.$$

Далее, пусть l неособа в B_0 . Положим

$$D|_S \sim kl + C,$$

где $l \not\subset \text{supp } C$. Таким образом,

$$n < \nu_1 \leq \text{mult}_{B_0} D|_S = k + \text{mult}_{B_0} C.$$

Но $\text{mult}_{B_0} C \leq C \circ l = (n(-K_S) - kl) \circ l = n - k$ и тогда

$$n < \nu_1 \leq k + n - k = n.$$

Итак, l имеет двойную точку в B_0 . Покажем теперь, что ν задает бесконечно близкую особенность. Пусть это не так, тогда $\nu_1 > 2n$. Опять, полагая $D|_S \sim kl + C$, находим, что

$$2 \text{mult}_{B_0} C \leq C \circ l = n - k,$$

откуда

$$2n < \nu_1 \leq 2k + \text{mult}_{B_0} C \leq \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}n,$$

т.е. $k > n$ — противоречие.

Пусть теперь $B_1 \cap S^1 \neq \emptyset$, но $B_1 \cap l^1 = \emptyset$. Обозначим через E_1 исключительный дивизор раздутия точки B_0 . Тогда

$$D^1|_{S^1} = (D \circ S)^1 + mE_1|_{S^1}$$

и для разложения $D|_S \sim kl + C$ мы получаем, что

$$\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 \leq 2k + \text{mult}_{B_0} C + \text{mult}_{\tilde{B}_1} C^1 + m,$$

где $\tilde{B}_1 = B_1 \cap S^1$, $\tilde{\nu}_1 = \text{mult}_{B_0} D|_S$, $\tilde{\nu}_2 = \text{mult}_{\tilde{B}_1} (D|_S)^1$. Далее,

$$\text{mult}_{\tilde{B}_1} C^1 \leq \text{mult}_{B_0} C \leq \frac{1}{2}(n(-K_S) - kl) \circ l = \frac{1}{2}(n - k),$$

так что

$$\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 \leq 2k + 2\frac{n-k}{2} + m = n + k + m.$$

Но $\tilde{\nu}_1 \geq \nu_1 + m$ и $\tilde{\nu}_2 \geq \nu_2$ и мы приходим к противоречию:

$$2n < \nu_1 + \nu_2 \leq n + k,$$

т.е. $k > n$.

Таким образом, $B_1 \cap l^1 \neq \emptyset$. Доказательство того, что $\nu_1 + \nu_2 \leq 3n$, проводится по той же схеме с одним только уточнением:

$$\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2 \leq 3k + \text{mult}_{B_0} C + \text{mult}_{\tilde{B}_1} C^1 + m.$$

Мы получаем, что $\nu_1 + \nu_2 \leq 2k + n \leq 3n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\varepsilon = 0$, $n_1 = 0$. Тогда $G_V \cong C \times \mathbb{P}^1$, где C – неособая эллиптическая кривая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем обозначения п. 2.1. То, что $G_V \cong C \times \mathbb{P}^1$ для некоторой кривой арифметического рода 1, очевидно. Докажем неособость C .

Заметим, что $R|_G \sim 3t_0$. Пусть B – неприводимая компонента $\text{supp } R|_G$, тогда $B \sim t_0$. Пусть $\psi: \tilde{V} \rightarrow V$ раздутие B , E – исключительный дивизор. E является линейчатой поверхностью класса $\mathbf{F}_{n_2}$. Обозначим через t_E и l_E соответственно классы исключительного сечения и слоя E . Тогда для собственных прообразов дивизоров G и R на $\tilde{V}$ имеем (учитывая их неособость вдоль B):

$$\tilde{G}|_E \sim t_E, \quad \tilde{R}|_E \sim t_E + n_2 l_E,$$

откуда $\tilde{G}|_E \cap \tilde{R}|_E = \emptyset$. Таким образом, любой слой линейчатой поверхности $G \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ пересекает дивизор ветвления R без касаний, т.е. в трех различных точках, откуда вытекает неособость C . Лемма доказана, а вместе с ней и предложение 2.7.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, случай $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$ также подпадает под предложение 2.7, но доказательство будет несколько сложнее. Мы его опускаем по причинам, которые объясним чуть позже.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. При $\varepsilon = n_1 > 0$ все пучки поверхностей Дель Пеццо степени 1 бирационально жестки над базой; это также верно при $\varepsilon = 0$, кроме случаев:

- а) $n_1 = n_2 = n_3 = 2$;
- б) $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Жесткость следует из предложения 2.7 при помощи леммы 2.4 в случае $\varepsilon = 0$ и леммы 2.5 для $\varepsilon = n_1 > 0$. Нежесткие случаи разобраны ниже после следующего замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [3] была доказана жесткость пучков поверхностей Дель Пеццо при выполнении так называемого $\mathbf{K}^2$ -условия: цикл $aK^2 - bf$ не эффективен ни при каких $a, b > 0$. Легко видеть, что это соответствует требованию $n_2 \geq 4$ при $\varepsilon = 0$ и $n_2 \geq 4 + \frac{3}{2}n_1$ при $\varepsilon = n_1 > 0$, причем во втором случае это условие всегда выполнено, кроме ситуации $n_1 = 2$, $n_2 = 6$ (надо учесть четность n_1 и то, что $n_2 \geq 3n_1$).

Другое условие было предложено в [6; гипотеза 1.2]. Там для жесткости требовалось, чтобы $(-K_V)^3 + m_0 + 1 \leq 2$, где

$$m_0 = \min\{r \in \mathbb{Q} : \text{дивизор } (-K_V) + rF \text{ численно эффективен}\}.$$

Опять нетрудно подсчитать, что это соответствует требованию $n_2 \geq 3$ при $\varepsilon = 0$ либо $n_2 \geq 2 + \frac{3}{2}n_1$ при $\varepsilon = n_1 > 0$ (последнее всегда выполнено, так как $n_2 \geq 3n_1 \geq 2 + 2n_1 > 2 + \frac{3}{2}n_1$).

Таким образом, второе условие более точно, но и оно не покрывает всех возможных жестких случаев (именно $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$ при $\varepsilon = 0$).

В оставшейся части параграфа мы разберем нежесткие случаи. Начнем с ситуации, когда $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$. Фактически она уже описана в некоторых работах (см. [5; гл. 2, § 2] и [7]). Нетрудно видеть, что единственный эффективный дивизор класса G_V является прямым произведением $\mathbb{P}^1$ и эллиптической кривой, линейная система $\mathcal{H} = |2G_V + 2F| = |2(-K_V) - 2F|$ не имеет базисных точек и определяет морфизм, стягивающий G_V вдоль $\mathbb{P}^1$ на кривую l , лежащую на многообразии Фано U основной серии индекса 2 и рода 5 (это так называемый двойной конус над поверхностью Веронезе). В этом можно убедиться, заметив, что линейная система $|M_Q|$ отображает Q на конус $\tilde{Q}$ над поверхностью Веронезе, вложенный в $\mathbb{P}^6$, и U получается взятием двойного накрытия с ветвлением в дивизоре, высекаемом кубикой, не проходящей через вершину конуса. При этом кривая l накрывает одну из образующих $\tilde{Q}$. Пусть

$$\mu_l: V = V_l \rightarrow U$$

– такое стягивание. Заметим, что $-K_V \sim G_V + 2F$ и V само является многообразием Фано. Таким образом, $V/\mathbb{P}^1$ не является жестким, при этом $1 = \alpha(V, \mathcal{H}) < \mu(V, \mathcal{H}) = 2$. Отметим, что U имеет континуум различных Мори-структур, поскольку кривых, подобных l , двумерное семейство. К сожалению, существующей техники немного не хватает, чтобы разобрать некоторые специальные случаи Мори-структур на U . Именно речь идет о ситуациях, когда l имеет двойную точку. При раздутии такой кривой мы получаем многообразие $V_l/\mathbb{P}^1$, расслоенное на поверхности Дель Пеццо степени 1, имеющее, очевидно, те же структурные константы $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$, но обладающее одной квадратичной особой точкой. Если при этом смотреть на V как на двойное накрытие Q , то можно заметить, что R высекает на G либо двойную прямую ($\sim 2t_0$) плюс еще прямую класса t_0 (это случай нодальной особенности l), либо тройную прямую класса t_0 (случай каспидальной особой точки l). Дивизор G_V , очевидно, имеет особенность вдоль кривой класса s_0 . Именно над точками такой кривой пока не удастся исключить максимальные особенности и получить аналог предложения 2.7 (по этой причине доказательство для гладкого случая при таких структурных константах не было включено в статью). Можно, однако, сформулировать весьма правдоподобную гипотезу относительно U .

ГИПОТЕЗА 2.11. *В классе бирациональной эквивалентности многообразия U любое Мори-расслоение бирегулярно изоморфно либо самому U , либо его раздутию V_l в кривой указанного вида.*

Оставшийся случай $-\varepsilon = 0$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$. Пусть и $V/\mathbb{P}^1$ – соответствующий пучок поверхностей Дель Пеццо степени 1. Заметим, что

$$\mathcal{N}_{s_0|V} \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$$

и линейная система $|mH|$ при $m \gg 0$ дает стягивание s_0 . Таким образом, существует флоп

$$\mu: V \dashrightarrow U$$

с центром в этой кривой (μ реализуется так: надо раздуть s_0 , при этом вклеится исключительный дивизор, изоморфный $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, который затем можно стянуть на другую образующую). Заметим, что $\dim |G_V| = 1$. Действительно,

$$2 \dim |G_V| = 2 \dim |G| \leq \dim |2G| = \dim |(M - 2L)|_Q = 2.$$

Далее, пусть $G_U = \overline{\mu(F)}$, а F_U — класс слоя $U/\mathbb{P}^1$. Тогда, очевидно, $\mu^{-1}|G_U| = |F|$ и $\mu^{-1}|F_U| = |G_V|$. Кроме того, $U/\mathbb{P}^1$ есть пучок поверхностей Дель Пеццо степени 1 с теми же параметрами $n_1 = n_2 = n_3 = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Пусть $\chi: V \dashrightarrow W$ бирациональное отображение на какое-то Мори-расслоение $\gamma: W \rightarrow S$. Тогда либо χ , либо $\chi \circ \mu^{-1}: U \dashrightarrow W$ бирационально над базой. Более того, U и V — единственные гладкие модели Мори-расслоения в своем классе бирациональной эквивалентности; $\text{Bir } V = \text{Aut } V$ и в общем случае $\text{Bir } V = \langle \sigma \rangle_2$, где σ — автоморфизм двойного накрытия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D}_W = |n'(-K_W) + \gamma^*(A)|$ — очень обильная линейная система, где A — обильный дивизор на S , и $\mathcal{D}_V \subset |n(-K_V) + mF|$.

Предположим, что $m \geq 0$. Тогда из предложения 2.7 вытекает, что $n = n'$ и χ бирационально над базой. Пусть теперь $m = -l < 0$ и $\mathcal{D}_U = \mu^{-1}\mathcal{D}_V$. Тогда, поскольку $-K_U = G_U + F_U$, имеем

$$\mathcal{D}_U \subset |(n-l)(-K_U) + lF_U|,$$

и предложение 2.7 дает бирациональность $\chi \circ \mu^{-1}$ над базой.

Далее, пусть теперь $\chi: V \dashrightarrow W$ — бирациональное отображение на какое-то Мори-расслоение $W/\mathbb{P}^1$ с численно эффективным $-K_W$. Можно считать, что χ бирационально над базой. Пусть $\mathcal{Y} = |n(-K_W) + m'F_W|$ — очень обильная линейная система, $m' > 0$, и $\mathcal{D} = \chi^{-1}\mathcal{Y} \subset |n(-K_V) + mF|$ — ее прообраз, $m \geq 0$. Если пара $K_V + \frac{1}{n}\mathcal{D}$ канонична, т.е. $\mathcal{D}$ не имеет максимальных особенностей, то χ — изоморфизм по предложению 1.2.

Пусть $\mathcal{D}$ имеет максимальные особенности. Можно считать, что все они бесконечно близкие (других быть не может). Обозначим через Y и D общие элементы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Выберем разрешение особенностей отображения χ :

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ V & \xrightarrow{-\chi} & W \end{array}.$$

Заметим, что

$$nK_Z + \psi^{-1}Y = m'\psi^*(F_W) + \sum a_i E'_i$$

и

$$nK_Z + \varphi^{-1}D = m\varphi^*(F) + \sum b_i E_i,$$

где E'_i, E_i — исключительные дивизоры, все числа a_i положительны. Так как $\mathcal{D}$ имеет максимальные особенности, то множество

$$\mathcal{M} = \{i : b_i < 0\}$$

непусто. Для любой точки $t \in \mathbb{P}^1$ положим $\mathcal{M}_t = \{i : \varphi(E_i) \in F_t\}$.

Очевидно, что $\dim |nK_Z + \psi^{-1}Y| = m'$, так что

$$\dim \left| m\varphi^*(F) + \sum b_i E_i \right| = \dim \left| (m' + m - m')\varphi^*(F) + \sum b_i E_i \right| = m'.$$

Пусть $I = \{t \in \mathbb{P}^1 : \mathcal{M}_t \neq \emptyset\}$. Тогда для некоторого разбиения

$$m - m' = \sum_{t \in I} k_t$$

на сумму положительных чисел мы имеем

$$\dim \left| \sum_{t \in I} k_t \varphi^{-1}(F_t) + \sum_{t \in I} \sum_{i \in \mathcal{M}_t} (k_t c_i - b_i) E_i \right| = 0,$$

где для $t \in I$ положительные числа c_i определены равенством

$$\varphi^*(F_t) = \varphi_*^{-1}(F_t) + \sum_{i \in \mathcal{M}_t} c_i E_i.$$

Таким образом, для любых $t \in I$ и $i \in \mathcal{M}_t$ мы имеем $k_t c_i - b_i \geq 0$, причем k_t минимальны среди всех положительных чисел с таким свойством. Значит,

$$k_t = \max_{i \in \mathcal{M}_t} \lceil b_i c_i^{-1} \rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ означает верхнюю целую часть.

Пусть $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ — общие элементы; можно записать, что

$$D_1 \circ D_2 = Z^h + Z^v \sim n^2 s + (2n^2 + 2mn)f,$$

где Z^h и Z^v — горизонтальный и вертикальный циклы. Так как центры максимальных особенностей не могут принадлежать единственной кривой класса s_0 на V , то сумма горизонтальных циклов, “задевающих” эти центры, может быть представлена как $As_0 + Bf$ для некоторых $B \geq A$. Далее, учитывая, что

$$m \leq m' + \sum_{t \in I} k_t,$$

мы получаем оценку:

$$\deg Z^v = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v \leq 2n^2 + 2mn - A \leq 2n^2 + 2m'n + 2n \sum_{t \in I} k_t - A$$

(степень вертикальных циклов оценивается пересечением с $-K_V$). Таким образом, для некоторого $p \in I$ и $j \in \mathcal{M}_p$

$$\deg Z_p^v \leq 2n^2 + 2m'n + 2n \lceil b_j c_j^{-1} \rceil - A.$$

Как и в [3; § 4], существуют положительные числа Σ_0 , Σ_1 и Σ'_0 , где $\Sigma_0 \geq \Sigma'_0$ и $c_j \geq \Sigma'_0$, такие, что для кратностей $m^h = \text{mult}_{B_0} Z^h$ и $m^v = \text{mult}_{B_0} Z_j^v$ горизонтального и вертикального циклов в точке $B_0 = \varphi(E_j)$ выполнено неравенство

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)(\Sigma_0 m^h + \Sigma'_0 m^v) \geq (2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + b_j)^2. \quad (2.2)$$

Заметим, что $\Gamma b_j c_j^{-1} \Uparrow \Sigma_0 \leq b_j + \Sigma_0$. Из леммы 2.8 мы знаем, что $\mathcal{D}$ имеет бесконечно близкую особенность над точкой $B_0 \in F_p$. Рассмотрим два случая.

1) $B_1 \cap F_p^1 = \emptyset$, т.е. центр второго раздутья в цепочке разрешения максимального нормирования не задевает прообраз слоя. В этом случае, поскольку B_1 — обязательно точка, мы имеем $\Sigma'_0 \leq \frac{1}{2}\Sigma_0$. Тогда

$$\Sigma'_0 m^v \leq 2 \deg Z_p^v \frac{\Sigma_0}{2} \leq (2n^2 + 2m'n + 2n - A)\Sigma_0 + 2nb_j$$

и из (2.2) и оценки $m^h \leq A$ мы получаем

$$n^2 - 2m'n - 2n < 0,$$

т.е.

$$\frac{m'}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}. \quad (2.3)$$

2) Пусть теперь $B_1 \cap S^1 \neq \emptyset$. Здесь мы уже не можем утверждать, что $\Sigma'_0 \leq \frac{1}{2}\Sigma_0$, но зато лемма 2.8 дает нам оценку $\nu_1 + \nu_2 \leq 3n$. Итак, мы имеем, что $m^h \leq A$ и

$$\Sigma'_0 m^v \leq 2 \deg Z_p^v \Sigma_0 \leq (4n^2 + 4m'n + 4n - 2A)\Sigma_0 + 4nb_j.$$

Подставляя это в (2.2), получим

$$(A - 4m'n - 4n)\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1) + (n\Sigma_1 - b_j)^2 < 0.$$

Теперь заметим, что условие $b_j > 0$ есть не что иное, как неравенство Нётера–Фано [2]: для некоторого набора невозрастающих чисел r_i , где $\sum r_i = \Sigma_0 + \Sigma_1$, выполнено

$$b_j = \sum r_i \nu_i - 2n\Sigma_0 - n\Sigma_1 > 0.$$

Применяя неравенство $\nu_1 + \nu_2 \leq 3n$, получаем, что

$$(n\Sigma_1 - b_j)^2 \geq \frac{1}{2}n^2\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}n^2 + A - 4m'n - 4n < 0,$$

а так как $A \geq 0$, то

$$\frac{m'}{n} > \frac{1}{8} - \frac{1}{n}. \quad (2.4)$$

Итак, учитывая, что (2.3) сильнее, можно считать, что всегда выполнено неравенство (2.4). Осталось воспользоваться тем, что $-K_W$ численно эффективен, так что мы можем подобрать очень обильную линейную систему $\mathcal{Y}$ на W так, чтобы n было достаточно большим, а m'/n сколь угодно малым, и получить противоречие с (2.4).

Теперь, выбрав U в качестве W , мы получаем утверждение о группе бирациональных автоморфизмов. Единственность гладких моделей V и U следует из описания всех гладких моделей пучков поверхностей Дель Пеццо степени 1 и уже доказанного результата для жестких случаев.

Предложение 2.12 доказано. Заметим, что следствие 2.10 и теорема 2.6 тем самым также доказаны полностью.

§3. Гладкие многообразия с пучком поверхностей Дель Пеццо степени 2

3.1. Основная конструкция. В этом параграфе мы изучаем гладкие расслоения Мори на поверхности Дель Пеццо степени 2. Пусть $\rho: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ — многообразие указанного типа. Обозначая через F класс слоя ρ , имеем

$$\mathrm{Pic} V = \mathbb{Z}[-K_V] \oplus \mathbb{Z}[F]$$

и $(-K_V)^2 \circ F = 2$. Следующая конструкция аналогична уже рассмотренной для пучков поверхностей Дель Пеццо степени 1 и также впервые предложена в [6].

Поскольку морфизм ρ плоский и $-K_V$ ρ -обилён, для некоторого целого m по теореме Грауэрта мы получим

$$\rho_* \mathcal{O}(-K_V + mF) = \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2)$ — локально свободный пучок ранга 3 на базе $\mathbb{P}^1$, $0 \leq n_1 \leq n_2$. Положим

$$X = \mathbf{Proj} \mathcal{E},$$

$\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — естественная проекция. Обозначим класс тавтологического пучка на X через M , класс слоя — через L , тогда

$$\mathrm{Pic} X = \mathbb{Z}[M] \oplus \mathbb{Z}[L].$$

Легко видеть, что существует двойное накрытие $\varphi: V \rightarrow X$ с ветвлением в некотором гладком дивизоре $R \sim 4M + 2aL$ такое, что ρ пропускается через φ , т.е.

$$\rho = \pi \circ \varphi.$$

Далее, пусть t_0 — класс сечения на X , соответствующего сюръекции $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$, l — класс прямой в слое π , $s_0 = \frac{1}{2}\varphi^*(t_0)$ и $f = \frac{1}{2}\varphi^*(l)$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{NE}}(X) &= \mathbf{NE}(X) = \mathbb{R}_+[t_0] \oplus \mathbb{R}_+[l], \\ \overline{\mathbf{NE}}(V) &= \mathbf{NE}(V) = \mathbb{R}_+[s_0] \oplus \mathbb{R}_+[f]. \end{aligned}$$

Обозначим $b = n_1 + n_2$, $H = \varphi^*(M)$; ясно, что $F = \varphi^*(L)$. Имеем $M^3 = b$, $M^2 = t_0 + bl$, $K_X = -3M + (b - 2)L$, $M \circ t_0 = L \circ l = 0$, $M \circ l = L \circ t_0 = 1$, и на V : $K_V = -H + (a + b - 2)F$, $H^2 = 2s_0 + 2bf$, $H \circ F = 2f$, $H \circ s_0 = F \circ f = 0$, $H \circ f = F \circ s_0 = 1$, $(-K_V)^2 = 2s_0 + (8 - 4a - 2b)f$, $H^3 = 2b$, $(-K_V)^3 = 12 - 6a - 4b$.

Заметим, что случай таких многообразий с $K_V^2 = 2s_0 + \beta f$ при $\beta \leq 0$ (это так называемое $\mathbf{K}^2$ -условие) впервые изучен в [3], и эта работа была настоящим прорывом в исследовании расслоений на поверхностях Дель Пеццо малых степеней.

3.2. Результаты о жесткости.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $V/\mathbb{P}^1$ – гладкое Мори-расслоение на поверхности Дель Пеццо степени 2 с $K_V^2 = 2s_0 + \beta f$, где $\beta \leq 2$ (т.е. $2a + b \geq 3$). Тогда $V/\mathbb{P}^1$ бирационально жестко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi: V \dashrightarrow V'$ – бирациональное отображение нашего расслоения на поверхности Дель Пеццо степени 2 $\rho: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ на Мори-расслоение $\rho': V' \rightarrow S'$, $\mathcal{D}' = |-n'K_{V'} + \rho'^*A'|$ – линейная система из предложения 1.2 и $\mathcal{D} = \chi^{-1}\mathcal{D}' \subset |-nK_V + mF|$. Общий элемент линейной системы $\mathcal{D}$ будем обозначать буквой D . Очевидно, $\mathcal{D}$ не имеет неподвижных компонент. Если $n = n'$, утверждение теоремы следует из предложения 1.2. Пусть $n > n'$.

ЛЕММА 3.2. $m \geq 0$, т.е. $\mu(\mathcal{D}) = \alpha(\mathcal{D})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\beta \leq 0$ на V доказан в [3] (это следствие $\mathbf{K}^2$ -условия). Пусть $\beta = 2$. Тогда, как легко видеть, $2a + b = 3$, b всегда нечетно, так что обязательно $n_1 < n_2$. Очевидно, $\mu(\mathcal{D}) = n$.

Предположим, что $m < 0$, и рассмотрим общую кривую $C \sim 2s_0 + 2n_1f$ на V (таких как минимум одномерное семейство). Тогда для общего $D \in \mathcal{D}$ всегда выполнено $D \circ C \geq 0$, так что

$$\left(nH - \left(\frac{n}{2}(b-1) - m\right)F\right) \circ (s_0 + n_1f) \geq 0,$$

откуда приходим к противоречию:

$$0 < \frac{-m}{n} \leq n_2 - \frac{b}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n_1 - n_2 + 1}{2} \leq 0.$$

Лемма доказана.

Таким образом, можно считать, что $m \geq 0$. Дальнейшие рассуждения, доказывающие теорему 3.1, почти дословно повторяют рассуждения в [3], и мы лишь вкратце воспроизведем основные моменты.

Очевидно, линейная система $\mathcal{D}$ неканонична, т.е. имеет максимальные особенности. Пусть центром максимальной особенности является кривая B . Тогда B – сечение морфизма ρ , не лежащее на дивизоре ветвления R двойного накрытия $\varphi: V \rightarrow X$, и такую максимальную особенность можно “открутить” при помощи специального бирационального автоморфизма $\tau_B \in \text{Bir } F_\eta$ (в слое над общей точкой F_η – это просто инволюция Бертини).

Итак, можно считать, что центр любой максимальной особенности – точка. Положим $D_1 \circ D_2 = Z^h + Z^v$, где Z^h и Z^v – горизонтальный и вертикальный эффективные циклы. Легко видеть, что

$$Z^h + Z^v = 2s_0 + (\beta n^2 + 4mn)f.$$

Положим $\deg Z^h \stackrel{\text{def}}{=} Z^h \circ F$ и $\deg Z^v \stackrel{\text{def}}{=} Z^v \circ (-K_V)$. Далее, существует дискретное нормирование ν с центром B_0 над некоторой точкой $t \in \mathbb{P}^1$, положительное число $e = \nu(\mathcal{O}) - n\delta$, где δ – каноническая кратность относительно ν , такие, что для составляющей $Z_t^v \in F_t$ цикла Z^v в слое F_t над точкой t выполнено

$$\deg Z_t^v < \begin{cases} \beta n^2 + 4n \frac{e}{\nu(F_t)}, & \text{если } \beta > 0; \\ 4n \frac{e}{\nu(F_t)}, & \text{если } \beta \leq 0. \end{cases}$$

Заметим, что $m^h \stackrel{\text{def}}{=} \text{mult}_{B_0} Z^h \leq \deg Z^h = 2n^2$ и $m^v \stackrel{\text{def}}{=} \text{mult}_{B_0} Z_t^v \leq \deg Z_t^v$. Далее, существуют положительные числа $\Sigma_0 \geq \Sigma'_0$ и Σ_1 такие, что выполнено неравенство для кратностей:

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)(m^h \Sigma_0 + m^v \Sigma'_0) > (2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2.$$

Осталось подставить оценки для m^h и m^v : случай $\beta \leq 0$ доказан в [3], а при $\beta \geq 0$

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)((2 + \beta n^2)\Sigma_0 + 4ne) > (2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + e)^2,$$

т.е.

$$(2 - \beta)n^2\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1) + (n\Sigma_1 - e)^2 < 0,$$

что невозможно, если $\beta \leq 2$. Теорема 3.1 доказана.

Теперь мы рассмотрим гладкие расслоения на поверхности Дель Пешо степени 2 при $2a + b \leq 2$. Пусть сначала $2a + b = 2$, т.е. $K_V^2 = 2s_0 + 4f$.

ЛЕММА 3.3. *При $2a + b = 2$ возможны только следующие случаи:*

- 1) $a = -1, n_1 = n_2 = 2$;
- 2) $a = 1, n_1 = n_2 = 0$;
- 3) $a = 0, n_1 = n_2 = 1$;
- 4) $a = 0, n_1 = 0, n_2 = 2$;
- 5) $a = -2, n_1 = 2, n_2 = 4$;
- 6) $a = -3, n_1 = 2, n_2 = 6$;
- 7) $a = -4, n_1 = 2, n_2 = 8$.

Первые три случая бирационально нежесткие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $b \geq 0$, то при $a \geq 0$ возможны лишь случаи 2), 3) и 4).

Пусть $a < 0$. Тогда $b > 0$, а так как $R \circ t_0 < 0$, то любая кривая класса t_0 лежит на R , поэтому $n_1 \geq 0$ (ввиду неприводимости R) и такая кривая единственна на X . Далее, пусть $\psi: \tilde{X} \rightarrow X$ раздутие t_0 , E — исключительный дивизор, являющийся линейчатой поверхностью класса $\mathbf{F}_{n_2-n_1}$, классы исключительного сечения и слоя которой обозначим через t_E и l_E соответственно. Пусть $\tilde{R}$ — собственный прообраз R , тогда

$$\tilde{R}|_E \sim t_E + (2a + n_2)l_E$$

есть неприводимая кривая на E ввиду гладкости R . Тогда либо $2a + n_2 = 0$, либо $2a + n_2 \geq n_2 - n_1$. Легко проверяется, что второй случай возможен только при $n_1 = n_2 = 2$ и $a = -1$. Если $2a + n_2 = 0$, то $n_1 = 2$. Кроме того, кривые класса $t_0 + n_1 l$ замечают единственный эффективный дивизор класса $M - n_2 L$, откуда условие $R \circ (t_0 + n_1 l) \geq 0$ дает $a \geq -4$.

Осталось показать нежесткость случаев 1)–3). Пусть $a = 1$, $n_1 = n_2 = 0$. Мы видим, что $X \cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, и относительно проекции на $\mathbb{P}^2$ многообразие V есть расслоение на коники, слои которого дважды накрывают на X кривые класса t_0 с ветвлением в $R \circ t_0 = 2$ точках. Очевидно, V нежестко. Заметим, что эта проекция дается линейной системой $|-K_V - F|$, не имеющей базисных точек.

Пусть теперь $a = -1$, $n_1 = n_2 = 2$. В этом случае единственная кривая класса t_0 на X обязательно лежит на дивизоре ветвления R , поэтому кривая класса s_0 на V тоже одна. Заметим, что $\mathcal{N}_{s_0|V} = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$ и линейная система $|nH|$ при $n \geq 2$ дает бирациональный морфизм, стягивающий лишь s_0 . Далее, на X базисное множество пучка $|M - L|$ есть в точности s_0 , все элементы этого пучка гладкие и изоморфны поверхности $\mathbf{F}_2$. Если $S \in |M - 2L|$ — общий элемент, то $R|_S$ распадается на s_0 и некоторое три-сечение, не пересекающее s_0 , так что после двойного накрытия и последующего стягивания прообраза s_0 поверхность S станет поверхностью Дель Пеццо степени 1. Это значит, что антифлип $V/\mathbb{P}^1 \dashrightarrow V'/\mathbb{P}^1$ с центром в s_0 даст нам расслоение на поверхности Дель Пеццо степени 1 с одной терминальной точкой, принадлежащей исключительной кривой на V' . Таким образом, V нежестко. Заметим, что прообразы слоев расслоения $V'/\mathbb{P}^1$ образуют на V пучок $|-K_V - F|$ без неподвижных компонент.

Наконец, при $a = 0$, $n_1 = n_2 = 1$ линейная система $|-2K_V|$ дает малое стягивание на каноническую модель V , реализуемую как двойное накрытие невырожденного квадратичного конуса в $\mathbb{P}^4$ с ветвлением в сечении кватрикой, которая либо проходит, либо не проходит через вершину конуса в зависимости от того, лежит или нет единственная на X кривая класса t_0 на дивизоре ветвления. В первом случае кривая класса s_0 на V (а она одна) есть (-2) -кривая ширины 2 в терминах работы [8], во втором случае обе кривые класса s_0 дизъюнкты и являются (-2) -кривыми ширины 1. И там и там после соответствующего флопа мы получаем еще одну структуру расслоения на поверхности Дель Пеццо степени 2, причем собственные прообразы слоев этой второй структуры на V образуют пучок $|-K_V - F|$ без неподвижных компонент. Случай с двумя кривыми подробно исследован в работе [9].

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В высшей степени правдоподобно, что в предыдущей лемме случаи 4)–7) все жесткие. Автор, к сожалению, пока не располагает доказательством этого. Проблемы, как это обычно бывает в практике метода максимальных особенностей, связаны с исключением бесконечно близких особенностей над точками, через которые проходят рациональные кривые некоторого специального вида.

Рассмотрим теперь случай $b + 2a = 1$, т.е. $K_V^2 = 2s_0 + 6f$.

ЛЕММА 3.4. *При $2a + b = 1$ возможны только три случая:*

- 1) $a = 0, n_1 = 0, n_2 = 1$;
- 2) $a = -1, n_1 = 1, n_2 = 2$;
- 3) $a = -2, n_1 = 1, n_2 = 4$.

Первые два случая нежесткие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо лишь показать, что $a \geq -2$, это можно сделать теми же рассуждениями, что и в предыдущей лемме.

Нежесткость случая 1) следует из того, что V получается раздутием эллиптической кривой степени 2 на гладком многообразии Фано U основной серии рода 9 индекса 2 (это так называемое двойное пространство индекса 2, т.е. двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвленное в гладкой квартике). Заметим, что бирациональный морфизм $V \rightarrow U$ задается линейной системой $|-2K_V - 2F|$. Наиболее полное (но не до конца успешное) исследование бирациональных свойств U содержится в [10].

Рассмотрим случай $a = -1, n_1 = 1, n_2 = 2$. Заметим, что кривая класса s_0 одна на V и является (-2) -кривой ширины 1. Пусть $V \dashrightarrow V^+$ – флоп с центром в этой кривой. Далее, линейная система $|H - 2F|$ содержит единственный элемент, который обозначим через G_V . Его собственный образ G_V^+ на V^+ есть поверхность, изоморфная двойному накрытию $\mathbb{P}^2$ с ветвлением либо в неособой конике, либо в паре различных прямых, т.е. G_V^+ изоморфна либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, либо квадратичному конусу в $\mathbb{P}^3$. Несложно видеть, что существует экстремальное стягивание $V^+ \rightarrow U$ дивизора G_V^+ . Многообразие U есть многообразие Фано, имеет квадратичную особенность, и его явная геометрическая конструкция очень похожа на конструкцию многообразия Фано индекса 2 степени 1: U получается двойным накрытием конуса над поверхностью Веронезе, разветвленным в сечении кубикой, не проходящем через вершину конуса и имеющем одну двойную точку. Пусть P обозначает образующую группы Пикара на U , а p – прообраз образующей конуса (это неприводимая кривая арифметического рода 1). Тогда собственный образ линейной системы $|F|$ при отображении $V \dashrightarrow U$ есть $|P - p|$, причем в этом случае кривая p проходит через особую точку U . Заметим, что раздутие общей кривой класса p (т.е. не проходящей через особую точку U) дает нам расслоение на поверхности Дель Пеццо степени 1 (но с терминальной точкой; ср. с гипотезой 2.11). Отметим также, что собственный прообраз на V линейной системы $|P|$ есть линейная система $|-K_V - F|$.

Лемма доказана.

Относительно случая 3) можно сказать то же, что и про случаи 4)–7) леммы 3.3: он должен быть жестким, но доказательство пока отсутствует.

Наконец,

ЛЕММА 3.5. *Случаи $2a + b \leq 0$ не реализуются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится как и в предыдущих леммах с одним лишь отличием: если $a = 0$, то и $b = 0$, а тогда V изоморфно прямому произведению $\mathbb{P}^1$ и гладкой поверхности Дель Пеццо степени 2. Такое многообразие не является, очевидно, Мори-расслоением, поскольку ранг относительной группы Пикара равен 8.

§ 4. Комментарий

Весьма интересной представляется следующая проблема. Пусть $V/\mathbb{P}^1$ – бирационально жесткое расслоение на поверхности Дель Пеццо степени 1, 2 или 3, так что структура Мори-расслоения на V единственна. Но сколько существует различных моделей Мори-расслоения в данном классе бирациональной эквивалентности? Вопрос сводится к следующему. Пусть $V'/\mathbb{P}^1$ – другая модель, $\chi: V/\mathbb{P}^1 \dashrightarrow V'/\mathbb{P}^1$ – послойное бирациональное отображение. Несложный анализ предложения 1.2 приводит к выводу, что χ после, возможно, нескольких послойных автоморфизмов $V/\mathbb{P}^1$ становится бирегулярным изоморфизмом над некоторым открытым подмножеством $\mathbb{P}^1$, т.е. V' получается из V перестройкой одного или нескольких слоев. Но проблема существования таких перестроек для пучков поверхностей Дель Пеццо степеней 1 и 2 на сегодняшний день совершенно открыта, а единственный известный пример для степени 3 содержится в [11]. Во всяком случае, автору неизвестны какие-либо другие работы на эту тему.

Следующая гипотеза представляется весьма правдоподобной.

ГИПОТЕЗА 4.1. *В каждом классе бирациональной эквивалентности жесткого пучка поверхностей Дель Пеццо степени 1, 2 или 3 содержится не более одной неособой модели Мори-расслоения.*

(Учитывая результаты работы [11], можно сформулировать более сильные предположения о существовании и единственности “хороших” моделей с терминальными особыми точками.)

Список литературы

1. Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
2. Pukhlikov A. V. Essentials of the method of maximal singularities // Warwick Preprint 31/1996.
3. Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
4. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
5. Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–236.
6. Исковских В. А. О проблеме рациональности для трехмерных многообразий, расслоенных на поверхности Дель Пеццо // Труды МИРАН. 1995. Т. 208. С. 128–138.
7. Хашин С. И. Бирациональные автоморфизмы двойного конуса Веронезе размерности три // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 1. С. 13–16.
8. Reid M. Minimal models of canonical 3-folds // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 1. P. 131–180.
9. Гриненко М. М. Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.

10. *Хашин С. И.* Бирациональные автоморфизмы многообразия Фано индекса 2 степени 2. М.: МГУ, 1985.
11. *Corti A.* Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes // Ann. of Math. 1996. V. 144. P. 641–683.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `grin@mi.ras.ru`

Поступила в редакцию
27.05.1999