Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Дубров, Б. П. Комраков, Проблема конструктивной эквивалентности в дифференциальной геометрии, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 5, 39–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:07:21

УДК 514.76

Б. М. Дубров, Б. П. Комраков

Проблема конструктивной эквивалентности в дифференциальной геометрии

Работа посвящена конструктивному построению диффеоморфизмов, устанавливающих эквивалентность геометрических структур. Для структур конечно-го типа проблема сводится к интегрированию вполне интегрируемых распределений с известной алгеброй симметрий и, далее, к интегрированию форм Маурера–Картана. Разработаны алгоритмы, позволяющие свести эту задачу к интегрированию замкнутых 1-форм и уравнений типа Ли, которые характеризуются тем, что допускают нелинейный принцип суперпозиции. В качестве приложений рассмотрена конструктивная проблема эквивалентности для структур абсолютного параллелизма и транзитивных алгебр Ли векторных полей на многообразиях.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

Проблема эквивалентности геометрических структур играет ключевую роль в современной дифференциальной геометрии и ее приложениях. Достаточно упомянуть ставшие уже классическими проблему эквивалентности G -структур и их обобщений, проблему эквивалентности подмногообразий в однородных пространствах, задачу классификации действий групп и алгебр Ли на многообразиях, а также их многочисленные приложения к геометрии дифференциальных уравнений.

При этом задача эквивалентности условно может быть разбита на следующие подзадачи:

- построение полной системы инвариантов, позволяющей установить, когда два объекта эквивалентны с точностью до заданного класса преобразований;
- построение преобразования, устанавливающего эквивалентность двух объектов с совпадающими инвариантами.

Последнюю подзадачу мы называем *проблемой конструктивной эквивалентности*. Она особенно актуальна в приложениях дифференциальной геометрии к проблеме эквивалентности дифференциальных уравнений, так как решение данного дифференциального уравнения по сути равносильно нахождению такой замены переменных, которая бы привела это уравнение к одному из уже известных. А это, в свою очередь, равносильно построению преобразования, осуществляющего эквивалентность двух заданных уравнений.

При решении проблемы конструктивной эквивалентности следует установить, какой набор операций считается конструктивно выполнимым. Мы придерживаемся классической точки зрения, предполагая выполнимыми следующие операции:

- решение систем уравнений общего вида (т.е., по сути, вычисление неявно заданных функций);

– интегрирование замкнутых 1-форм на многообразиях (так называемые квадратуры).

Поэтому одной из целей настоящей работы является разработка алгоритмов построения диффеоморфизма, осуществляющего эквивалентность структур, которые включают в себя только эти две операции. Мы убеждаемся, что при наличии достаточно большой разрешимой алгебры симметрий такие алгоритмы действительно существуют, и даем их детальное описание. Более того, мы показываем, как расширить набор операций, чтобы эти алгоритмы были применимы и к случаю неразрешимой алгебры симметрий.

На протяжении работы мы используем фразы типа “объект X может быть найден при помощи множества операций Y ”, понимая под этим, что существует алгоритм (как правило, тут же и описываемый) построения объекта X , который включает в себя только операции из множества Y .

Отметим, что конструктивное вычисление диффеоморфизма проводится в большинстве случаев в локальной системе координат, и потому в нашей статье мы ограничиваемся задачей локальной эквивалентности и построением локальных диффеоморфизмов.

В случае геометрических структур конечного типа, т.е. таких структур, группа автоморфизмов которых конечномерна (см. [1]), построение преобразования, осуществляющего эквивалентность, сводится к интегрированию вполне интегрируемого распределения с известной алгеброй симметрий. Эта же задача возникает при решении дифференциальных уравнений конечного типа с заданной алгеброй симметрий.

Первым, кто рассмотрел эту проблему, был Софус Ли. Он развил мощную технику интегрирования дифференциальных уравнений при помощи симметрий, которая представлена в его работах [2], [3]. Современное изложение большей части его результатов может быть найдено в ряде работ, из которых мы выделим монографии [4], [5], содержащие обширную библиографию по этим вопросам.

В настоящей работе мы предпринимаем попытку унифицировать методики интегрирования распределений (дифференциальных уравнений) при помощи симметрий, а также показываем, как предложенная в работе точка зрения применяется для решения конструктивной проблемы эквивалентности в следующих двух важных случаях:

- 1) конструктивная эквивалентность транзитивных действий алгебр Ли на многообразиях, к которой, в частности, сводится задача приведения к каноническому виду дифференциальных уравнений с известной алгеброй симметрий;
- 2) конструктивная эквивалентность структур абсолютного параллелизма, к которой сводится проблема конструктивной эквивалентности для большинства структур конечного типа.

Центральную роль в излагаемой ниже методике играет понятие *форм Маурера–Картана*. Это дифференциальные 1-формы со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющие классическому уравнению Маурера–Картана: $d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$. Такие дифференциальные формы широко распространены в современной дифференциальной геометрии (см., например, [6], где такие формы называются $\mathfrak{g}$ -структурами).

Оказывается, что все перечисленные выше проблемы сводятся к задаче интег-

рирования форм Маурера–Картана. Последняя задача может рассматриваться как обобщение интегрирования замкнутых 1-форм на гладких многообразиях. Более того, если алгебра Ли, в которой принимает значения данная форма Маурера–Картана, разрешима, то интегрирование этой формы сводится к интегрированию замкнутых 1-форм. В общем случае интегрирование форм Маурера–Картана равносильно решению обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида, которые характеризуются тем, что допускают нелинейный принцип суперпозиции.

В §§ 2, 3 мы исследуем свойства форм Маурера–Картана и разрабатываем ряд алгоритмов их интегрирования. В § 4 мы показываем, что интегрирование вполне интегрируемых распределений с достаточно большой алгеброй симметрий сводится к интегрированию форм Маурера–Картана. Параграфы 5 и 6 посвящены проблеме конструктивной эквивалентности для транзитивных алгебр Ли векторных полей и структур абсолютного параллелизма.

Наконец, подчеркнем, что концептуально наша работа тесно связана с работами Софуса Ли [2], [3], [7]. Чтобы проиллюстрировать это, мы приводим в статье ряд примеров, взятых из указанных работ, и трактуем их с новой точки зрения.

§ 2. Интегрирование форм Маурера–Картана

2.1. Формы Маурера–Картана. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная вещественная алгебра Ли, M – гладкое многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольную $\mathfrak{g}$ -значную 1-форму ω на M , удовлетворяющую условию

$$d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0, \quad (1)$$

будем называть *$\mathfrak{g}$ -значной формой Маурера–Картана на многообразии M* .

Отметим, что это условие равносильно тому, что $d\omega(X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$ для любых векторных полей X, Y на M .

Формы Маурера–Картана являются хорошо известным объектом современной дифференциальной геометрии. Приведем несколько важных примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть G – группа Ли, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{g}$, а $f: M \rightarrow G$ – произвольное гладкое отображение. отождествим $\mathfrak{g}$ с касательным пространством $T_e G$ и определим $\mathfrak{g}$ -значную 1-форму ω следующим образом:

$$\omega_p = d_{f(p)}(R_{f(p)}^{-1}) \circ d_p f, \quad (2)$$

где через R_g мы обозначаем правый сдвиг на группе Ли G , определенный элементом $g \in G$. Тогда, как нетрудно проверить, ω удовлетворяет условию (1) и, тем самым, является $\mathfrak{g}$ -значной формой Маурера–Картана на M . Для упрощения записи мы будем обозначать такую форму через $\delta(f)$. Так, например, для $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ и отображения $f: M \rightarrow G$ имеем $\delta(f) = df \cdot f^{-1}$.

Как мы увидим в дальнейшем, любая $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана локально может быть представлена в таком виде. В частном случае, когда $M = G$ и $f = \mathrm{id}_G$, построенная таким образом форма ω есть в точности классическая правоинвариантная форма Маурера–Картана на группе Ли G .

ПРИМЕР 2. Пусть $\pi: M \times G \rightarrow M$ – тривиальное главное G -расслоение. Тогда любая $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана ω на M определяет плоскую связность H на этом главном расслоении:

$$H_{(p,g)} = \{X + (R_g)_*\omega(X) : X \in T_p M\} \text{ для всех } (p, g) \in M \times G. \quad (3)$$

Обратно, любая связность H на тривиальном главном расслоении π однозначно определяет некоторую $\mathfrak{g}$ -значную 1-форму на M , и эта форма удовлетворяет условию (1) тогда и только тогда, когда связность H является плоской.

ПРИМЕР 3. Пусть $M = G/H$ – однородное пространство группы Ли G , $\pi: G \rightarrow M$ – каноническая проекция и L – некоторое подмногообразие в M . Положим $E = \pi^{-1}L$, $\omega = \theta|_E$, где θ – правоинвариантная форма Маурера–Картана на группе Ли G . Тогда ω является $\mathfrak{g}$ -значной формой Маурера–Картана на E и играет ключевую роль в методе подвижного репера Картана (см. [8]–[10]).

ПРИМЕР 4. Если на многообразии M задано оснащенное слоение коразмерности n , то, как показано в [11], [12], [6], на M однозначно определяется W_n -значная форма Маурера–Картана ω , где W_n – бесконечномерная алгебра Ли всех формальных векторных полей от n переменных. Такая форма Маурера–Картана играет ключевую роль при построении характеристических классов слоений.

Формы Маурера–Картана обладают рядом функториальных свойств. Обозначим через $\Omega(M, \mathfrak{g})$ множество всех $\mathfrak{g}$ -значных форм Маурера–Картана на M . Тогда любое гладкое отображение $\varphi: M \rightarrow N$ гладких многообразий определяет отображение

$$\Omega(N, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega(M, \mathfrak{g}), \quad \omega \mapsto f^*\omega,$$

а любой гомоморфизм алгебр Ли $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ задает отображение

$$\Omega(M, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega(M, \mathfrak{h}), \quad \omega \mapsto \alpha \circ \omega.$$

2.2. Понятие интеграла. Пусть ω есть некоторая $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана на M и G – группа Ли, алгебра Ли которой равна $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: M \rightarrow G$ называется *интегралом формы* ω , если $\omega = \delta(f)$.

Будем говорить, что форма Маурера–Картана ω *локально интегрируема*, если для любой точки $p \in M$ существует функция $f: U \rightarrow G$, определенная в некоторой окрестности U точки p , такая, что $\omega|_U = \delta(f)$. Если при этом в качестве U может быть взято все многообразие M , то будем называть форму ω *глобально интегрируемой*.

ЛЕММА 1. *Любая форма Маурера–Картана ω локально интегрируема. Более того, для любых $p_0 \in M$, $g_0 \in G$ найдется такая окрестность U точки p_0 , в которой интеграл f формы $\omega|_U$ с “начальным” условием $f(p_0) = g_0$ существует и единственен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоскую связность H из примера 2 на тривиальном главном расслоении $\pi: M \times G \rightarrow M$, соответствующую форме ω :

$$H_{(p,g)} = \{X + (R_g)_* \omega_p(X) : X \in T_p M\}, \quad (p, g) \in M \times G.$$

Из теоремы Фробениуса следует, что существует единственное интегральное многообразие L распределения H , проходящее через точку (p_0, g_0) . При этом $\pi|_L$ является локальным диффеоморфизмом L и M в точке (p_0, g_0) . Следовательно, для некоторой окрестности U точки p_0 однозначно определено отображение $f: U \rightarrow M$ такое, что его график совпадает с $L \cap (U \times G)$. Отсюда немедленно вытекает, что f является интегралом формы $\omega|_U$.

Так как связность H в примере 2 и доказательстве леммы 1 является плоской, то естественным образом определен гомоморфизм $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow \Phi$ фундаментальной группы многообразия M в группу голономии связности H .

При этом глобальная интегрируемость формы Маурера–Картана ω равносильна тому, что группа Φ тривиальна. В общем случае гомоморфизм φ сюръективен, и любое интегральное многообразие распределения H является накрытием многообразия M относительно проекции π , слой которого равен Φ . Отсюда, в частности, следует, что на односвязном многообразии любая форма Маурера–Картана глобально интегрируема.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим тривиальный случай, когда $\mathfrak{g}$ — одномерная коммутативная алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана ω есть обычная замкнутая 1-форма на M , а ее интегралы — это обычные интегралы замкнутой формы, т.е. функции $f: M \rightarrow G = \mathbb{R}$ такие, что $df = \omega$.

Таким образом, интегрирование $\mathfrak{g}$ -значных форм Маурера–Картана с произвольной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ может рассматриваться как обобщение интегрирования замкнутых 1-форм.

ПРИМЕР 6. Пусть теперь алгебра Ли $\mathfrak{g}$ произвольна, а $M = \mathbb{R}$. Обозначим через t стандартную координату на $\mathbb{R}$. Тогда любая $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма ω на $\mathbb{R}$ записывается в виде $\omega = X(t) dt$, где $X(t)$ — некоторая кривая в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. При этом условие (1) автоматически выполняется, так как любая 2-форма на $\mathbb{R}$ равна нулю.

В этом случае интеграл формы ω — это отображение $g: \mathbb{R} \rightarrow G$ (т.е. кривая в группе Ли G) такое, что

$$g'(t) = (R_{g(t)})_* X(t) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}.$$

Хорошо известно (см., например, [13], [14]), что такое уравнение при задании начальных условий однозначно разрешимо, причем решение определено на всей вещественной прямой.

Предположим, что форма Маурера–Картана ω глобально интегрируема и f — некоторый ее интеграл. Тогда отображение $f: M \rightarrow G, p \mapsto f(p)g$, также, очевидно, является интегралом ω . Таким образом, мы получаем правое действие группы G на множестве всех интегралов формы ω . Причем если многообразие M связно, то из леммы 1 следует, что это действие просто транзитивно. В тривиальном случае $G = \mathbb{R}$ мы приходим к хорошо известному факту: интеграл точной 1-формы определен однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

2.3. Редукция. Пусть G_1 – нормальная подгруппа Ли группы Ли G и $\mathfrak{g}_1$ – соответствующий идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим факторгруппу $G_2 = G/G_1$, алгебра Ли которой $\mathfrak{g}_2$ равна $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$. Пусть $\pi: G \rightarrow G_2$ – каноническая сюръекция и $d\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_2$ – соответствующая сюръекция алгебр Ли. На многообразии M естественным образом может быть определена $\mathfrak{g}_2$ -значная форма Маурера–Картана ω_2 :

$$(\omega_2)_p = d\pi \circ \omega_p \quad \text{для всех } p \in M.$$

Пусть f – некоторый интеграл формы ω . Тогда отображение $\pi \circ f$, очевидно, является интегралом формы ω_2 .

Пусть f_2 – некоторый интеграл формы ω_2 и $L_g = f_2^{-1}(g)$ – прообраз произвольной точки $g \in G_2$. Рассмотрим ограничение $\omega_g = \omega|_{L_g}$. Тогда $(\omega_g)_p(T_p L_g) \subset \ker d\pi = \mathfrak{g}_1$ для всех $p \in L_g$. Таким образом, ω_g может быть рассмотрена как $\mathfrak{g}_1$ -значная форма Маурера–Картана на L_g . Интегрируя форму ω_g , где g рассматривается как параметр, мы получаем интеграл исходной $\mathfrak{g}$ -значной формы Маурера–Картана ω .

Таким образом, задача интегрирования $\mathfrak{g}$ -значной формы Маурера–Картана ω может быть разбита на две части:

- 1) построение интеграла f_2 для $\mathfrak{g}_2$ -значной формы Маурера–Картана ω_2 ;
- 2) интегрирование $\mathfrak{g}_1$ -значной формы Маурера–Картана $\omega_g = \omega|_{f_2^{-1}(g)}$, где $g \in G_2$ выступает в роли параметра.

ЛЕММА 2. 1. *Интеграл $\mathfrak{g}$ -значной формы Маурера–Картана с разрешимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ может быть найден при помощи интегрирования конечного числа замкнутых 1-форм.*

2. *Интеграл произвольной $\mathfrak{g}$ -значной формы Маурера–Картана может быть найден при помощи интегрирования конечного числа $\mathfrak{g}_i$ -значных форм с простыми алгебрами Ли $\mathfrak{g}_i$ и замкнутых 1-форм, где $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{r}$ – разложение Леви алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Без ограничения общности мы можем считать, что группа Ли G связна и односвязна. Тогда она диффеоморфна $\mathbb{R}^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, причем любая ее нормальная связная подгруппа Ли замкнута и также односвязна.

Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима, то в ней найдется такая цепочка подалгебр

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \supset \mathfrak{g}_{k-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_0 = \{0\},$$

что подалгебра $\mathfrak{g}_{i-1}$ является идеалом коразмерности 1 в $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, \dots, k$). Для соответствующих подгрупп Ли $G_i \subset G$ все факторгруппы G_i/G_{i-1} изоморфны $\mathbb{R}$, и задача построения интеграла формы ω сводится при помощи описанной выше редукции к последовательному интегрированию k дифференциальных 1-форм.

2. Второе утверждение вытекает из теоремы Леви о разложении любой группы Ли в полупрямое произведение полупростой подгруппы Леви и радикала, а также из разложения односвязной полупростой группы Ли в прямое произведение простых групп Ли.

2.4. Интегрирование по путям. В заключение параграфа опишем процедуру построения интеграла f форм Маурера–Картана, обобщающую процедуру интегрирования по путям замкнутых 1-форм (и совпадающую с ней в случае $G = \mathbb{R}$). Напомним, что $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана ω определяет плоскую связность H на тривиальном главном G -расслоении $\pi: M \times G \rightarrow M$.

Пусть (p_0, g_0) – некоторая точка многообразия $M \times G$, и нашей задачей является построение такого интеграла f формы ω , что $f(p_0) = g_0$. Рассмотрим произвольную кривую $\Gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$ такую, что $\Gamma(t_0) = p_0$. Тогда существует единственная кривая $\tilde{\Gamma}: [t_0, t_1] \rightarrow M \times G$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\pi \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$;
- 2) $\tilde{\Gamma}'(t) \in H_{\tilde{\Gamma}(t)}$ для всех $t \in (t_0, t_1)$.

Эта кривая есть в точности горизонтальный лифт кривой Γ .

Кривая $\tilde{\Gamma}$ может быть также описана следующим эквивалентным способом. Используя функториальные свойства форм Маурера–Картана, построим $\mathfrak{g}$ -значную форму ω_1 на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$\omega_1 = \Gamma^* \omega = X(t) dt,$$

где $X(t)$ – кривая в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ вида

$$X(t) = \omega_{\Gamma(t)}(\Gamma'(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Тогда искомым интеграл формы ω_1 есть кривая $g: [t_0, t_1] \rightarrow G$ в группе Ли G , удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$g'(t) = (R_{g(t)})_* X(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad g(t_0) = g_0. \quad (4)$$

При этом кривая $\tilde{\Gamma}$ на многообразии $M \times G$ имеет вид $\tilde{\Gamma}(t) = (\Gamma(t), g(t))$.

Пусть L – максимальное интегральное многообразие распределения H на $M \times G$, содержащее точку (p_0, g_0) . Искомый интеграл f формы ω есть такое отображение $M \rightarrow G$, график которого совпадает с L . Так как кривая $\tilde{\Gamma}$ касается H , то она целиком лежит в L . Следовательно,

$$f(\Gamma(t)) = g(t) \quad \text{для всех } t \in [t_0, t_1].$$

Таким образом, может быть найдено значение интеграла f формы ω в произвольной точке $p \in M$: строится произвольная кривая $\Gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$, соединяющая точки p_0 и p , и решается уравнение (4), тогда $f(p)$ есть в точности $g(t_1)$.

Эта процедура позволяет строить интеграл формы ω вдоль произвольной кривой Γ на многообразии M . Она полностью совпадает с обычной процедурой интегрирования 1-форм для $G = \mathbb{R}$. Стандартные результаты теории связностей (см., например, [14]) показывают, что точка $f(\Gamma(t_1))$ зависит лишь от гомотопического класса кривой $\Gamma(t)$. Таким образом, полученная процедура позволяет однозначно определить интеграл f в любой односвязной окрестности точки p_0 .

Отметим, что в случае, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, описанная процедура интегрирования по путям является по сути единственной методикой конструктивного интегрирования $\mathfrak{g}$ -значных форм Маурера–Картана с простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

§ 3. Принцип суперпозиции

3.1. Уравнения типа Ли. Рассмотрим группу $\mathcal{G}(M, G)$ всех гладких отображений из M в G и определим ее действие на множестве $\Omega(M, \mathfrak{g})$ всех $\mathfrak{g}$ -значных форм Маурера–Картана на M :

$$\rho(h)\omega = \text{Ad } h \circ \omega + \delta(h) \quad (5)$$

для всех $h \in \mathcal{G}(M, G)$, $\omega \in \Omega(M, G)$. Нетрудно проверить, что действие (5) корректно определено и при этом для любых двух функций $h_1, h_2 \in \mathcal{G}(M, G)$ имеем

$$\delta(h_1 h_2) = \delta(h_1) + \text{Ad } h_1 \circ \delta(h_2) = \rho(h_1)\delta(h_2). \quad (6)$$

Преобразования (5) называются *калибровочными преобразованиями* форм Маурера–Картана. Аналогичные построения проводятся в работе [15], где исследуются глобальные аспекты форм Маурера–Картана.

Рассмотрим подробнее задачу интегрирования $\mathfrak{g}$ -значных форм Маурера–Картана на прямой, которая, как следует из п. 2.4, играет ключевую роль в интегрировании форм Маурера–Картана, принимающих значения в простой алгебре Ли.

Пусть $\omega = X(t) dt$ – $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана на прямой, G – некоторая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Предположим также, что задано эффективное действие группы Ли G на некотором многообразии N . Тогда естественным образом определено вложение $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли векторных полей на N . На протяжении § 3 мы будем отождествлять алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с ее образом в алгебре Ли векторных полей на N .

Целью настоящего параграфа является построение алгоритма интегрирования формы ω , основанного на использовании заданного вложения группы G в группу диффеоморфизмов многообразия N . Зафиксируем точку $t_0 \in \mathbb{R}$ и будем строить интеграл $g(t)$ формы ω на $\mathbb{R}$ с начальным условием $g(t_0) = e$.

ЛЕММА 3. Пусть $g(t)$ – искомый интеграл формы $\omega = X(t) dt$ и q_0 – некоторая точка на N . Тогда кривая s на N вида $s(t) = g(t).q_0$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$s'(t) = X(t)_{s(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что вектор $X(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ есть в точности касательный вектор к кривой $\varepsilon \mapsto g(\varepsilon)g(t)^{-1}$ в группе Ли G при $\varepsilon = t$. Таким образом, для любых $t \in \mathbb{R}$, $q \in N$ имеем

$$X(t)_q = (dg \cdot g^{-1})_q \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{d}{d\varepsilon} (g(\varepsilon)g(t)^{-1}q) \Big|_{\varepsilon=t}.$$

Следовательно,

$$s'(t) = \frac{d}{d\varepsilon} (g(\varepsilon)q_0) \Big|_{\varepsilon=t} = \frac{d}{d\varepsilon} (g(\varepsilon)g(t)^{-1}s(t)) \Big|_{\varepsilon=t} = X(t)_{s(t)}.$$

Будем называть уравнение вида (7), определяемое кривой $X(t)$ в конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей, *уравнением типа Ли*. Такие уравнения впервые появились в работах Софуса Ли и назывались уравнениями с фундаментальными решениями. Как было показано им же [7; гл. 24], эти уравнения характеризуются тем, что допускают (*нелинейный*) *принцип суперпозиции*. А именно существуют k частных решений $s_1(t), \dots, s_k(t)$ уравнения (7) и функция

$$F: \underbrace{M \times \dots \times M}_{k+1} \rightarrow M$$

(так называемая *функция суперпозиции*) такие, что решение $s(t)$ этого уравнения с начальным условием $s(t_0) = q_0$ имеет вид:

$$s(t) = F(s_1(t), \dots, s_k(t), q_0). \quad (8)$$

Таким образом, формула (8) по сути определяет общее решение уравнения (7).

В п. 3.2 мы покажем, что уравнения вида (7) допускают принцип суперпозиции. Доказательство обратного утверждения, а именно того, что любое уравнение первого порядка на многообразии, допускающее принцип суперпозиции, является уравнением типа Ли, может быть найдено в оригинальной работе Софуса Ли [7].

ПРИМЕР 7. Пусть $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, действующая транзитивно на проективной прямой с аффинной координатой x . Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, вложение $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли векторных полей на $\mathbb{RP}^1$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\partial}{\partial x}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto 2x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto x^2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Следовательно, произвольной $\mathfrak{g}$ -значной форме Маурера–Картана $\omega = X(t) dt$, где $X(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & -a(t) \end{pmatrix}$, соответствует уравнение Риккати:

$$x' = a(t) + 2b(t)x - c(t)x^2. \quad (9)$$

Хорошо известно, что общее решение уравнения Риккати может быть выражено через любые три его частных решения (см., например, [16]).

ПРИМЕР 8. Рассмотрим стандартное действие группы $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$. Соответствующее уравнение (7) – это линейное однородное уравнение вида $x' = A(t)x$, где $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Классический линейный принцип суперпозиции позволяет представить общее решение как линейную комбинацию его n линейно независимых частных решений.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим группу $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ аффинных преобразований $\mathbb{R}^n$. В этом случае соответствующее уравнение является линейным неоднородным уравнением вида $x' = A(t)x + b(t)$, где $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. При наличии одного частного решения это уравнение может быть сведено к линейному однородному и, таким образом, его общее решение может быть выражено через $n + 1$ частных решений.

Многочисленные примеры уравнений, допускающих принцип суперпозиции, и вычисление функции суперпозиции могут быть найдены также в [17], [18].

3.2. Редукция при помощи частных решений. Покажем, как решение уравнения типа Ли может быть упрощено, если известно несколько частных решений этого уравнения.

Отметим, что построение общего решения уравнения (7) равносильно построению интеграла $g(t)$ формы $\omega = X(t) dt$ такого, что $g(t_0) = e$. Действительно, так как кривая $X(t)$ является гладкой, то из теоремы об однозначной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что любое решение уравнения (7) имеет вид $s(t) = g(t).q_0$, где $q_0 = s(t_0)$. В частности, это решение определено на всей вещественной прямой. Таким образом, интеграл $g(t)$ формы ω определяет общее решение уравнения (7). Обратно, если известно общее решение этого уравнения, то кривая $g(t)$ однозначно определяется из равенства $g(t).q = s_q(t)$, где s_q — частное решение уравнения (7) с начальным условием $s_q(t_0) = q$.

Предположим, что нам известны k частных решений $s_1, \dots, s_k$ уравнения (7), начальные условия которых имеют вид $s_i(t_0) = q_i$, $i = 1, \dots, k$. Таким образом, $s_i(t) = g(t).q_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Пусть H — подгруппа в G , являющаяся общим стабилизатором точек $q_1, \dots, q_k$:

$$H = G_{q_1} \cap \dots \cap G_{q_k},$$

где через G_q мы обозначаем стабилизатор точки $q \in M$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая H . Покажем, что построение интеграла $g(t)$ формы ω может быть при помощи допустимых операций сведено к интегрированию некоторой $\mathfrak{h}$ -значной формы Маурера–Картана на прямой.

Рассмотрим систему уравнений $h(t).q_i = s_i(t)$, $i = 1, \dots, k$, относительно кривой $h \in \mathcal{G}(\mathbb{R}, G)$. Система имеет решения (например искомая кривая $g(t)$ является решением этого уравнения), и мы можем построить одно из ее решений $h(t)$ при помощи допустимых операций.

ЛЕММА 4. 1. Форма $\omega_1 = \rho(h^{-1})\omega$ принимает значения в подалгебре $\mathfrak{h}$.

2. Если $g_1: \mathbb{R} \rightarrow H$ — интеграл формы ω_1 , то hg_1 является интегралом исходной формы ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega = \delta(g)$. Тогда из (6) имеем

$$\omega_1 = \rho(h^{-1})\delta(g) = \delta(g_1),$$

где $g_1 = h^{-1}g$. Далее, по определению кривой $h(t)$ имеем

$$g_1(t).q_i = h(t)^{-1}.(g(t).q_i) = h(t)^{-1}.s_i(t) = q_i$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$. Таким образом, $g_1(t) \in H$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как $\omega_1 = \delta(g_1)$, то форма ω_1 принимает значения в подалгебре $\mathfrak{h}$.

Если подалгебра $\mathfrak{h}$ разрешима, то интегрирование $\mathfrak{h}$ -значной формы ω_1 , как следует из леммы 2, может быть проведено в квадратурах. В случае $\mathfrak{h} = \{0\}$ мы получаем следующий результат, который можно рассматривать как современную формулировку нелинейного принципа суперпозиции.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют натуральное число k , гладкая функция*

$$F: U \times N \rightarrow N, \quad U \subset \underbrace{N \times \cdots \times N}_k$$

(которая не зависит от ω), и k частных решений $s_1, \dots, s_k$ уравнения (7) такие, что любое решение $s(t)$ уравнения (7) с начальным условием $s(t_0) = q_0$ в некоторой окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$ имеет вид:

$$s(t) = F(s_1(p), \dots, s_k(p), q_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q_1, \dots, q_k$ — точки на многообразии N такие, что их общий стабилизатор $\bigcap_{i=1}^k G_{q_i}$ дискретен. Существование такого набора точек следует из эффективности действия G на N . Пусть $s_1, \dots, s_k$ — решения уравнения (7), удовлетворяющие начальным условиям $s_i(t_0) = q_i$, $i = 1, \dots, k$.

Рассмотрим орбиту $\mathcal{O}$ покомпонентного действия группы G на многообразии $\underbrace{N \times \cdots \times N}_k$, проходящую через точку $(q_1, \dots, q_k)$, и накрытие

$$\pi: G \rightarrow \mathcal{O}, \quad g \mapsto g \cdot (q_1, \dots, q_k).$$

Пусть $\sigma: U \rightarrow G$ — локальное сечение проекции π , определенное в некоторой односвязной окрестности U точки $(q_1, \dots, q_k)$ в $\mathcal{O}$ и удовлетворяющее условию $\sigma(q_1, \dots, q_k) = e$. Положим

$$F(p_1, \dots, p_k, q_0) = \sigma(p_1, p_k) \cdot q_0.$$

Покажем, что функция F действительно удовлетворяет требуемому условию. Пусть g — такой интеграл формы ω , что $g(t_0) = e$. Тогда кривые s_i имеют вид $s_i(t) = g(t) \cdot q_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Но отсюда вытекает, что

$$g(t) = \sigma(s_1(t), \dots, s_k(t))$$

для всех таких $t \in \mathbb{R}$, что $(s_1(t), \dots, s_k(t)) \in U$. Таким образом, любое решение $s(t)$ уравнения (7) с начальным условием $s(t_0) = q_0$ в некоторой окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$s(t) = g(t) \cdot q_0 = \sigma(s_1(t), \dots, s_k(t)) \cdot q_0 = F(s_1(t), \dots, s_k(t), q_0).$$

ПРИМЕР 10. Рассмотрим еще раз проективное действие группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ на $\mathbb{RP}^1$ и соответствующее уравнение Риккати (9) (см. пример 7).

Стабилизатор одной точки в $\mathbb{RP}^1$ является двумерной разрешимой подгруппой в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, и, следовательно, при наличии одного частного решения $x_1(t)$ уравнения Риккати общее решение может быть найдено при помощи двух квадратур: $x(t) = x_1(t) + 1/y(t)$, где

$$y(t) = e^{z(t)} \int_{t_0}^t c(\tau) e^{-z(\tau)} d\tau, \quad z(t) = 2 \int_{t_0}^t (c(\tau)x_1(\tau) - b(\tau)) d\tau.$$

Общий стабилизатор двух точек в $\mathbb{RP}^1$ одномерен, и, следовательно, при наличии двух частных решений $x_1(t), x_2(t)$ общее решение уравнения Риккати находится при помощи одной квадратуры:

$$x(t) = \frac{x_1(t)y(t) - x_2(t)}{y(t) - 1}, \quad \text{где } y(t) = e^{\int_{t_0}^t c(\tau)(x_1(\tau) - x_2(\tau)) d\tau}.$$

Наконец, стабилизатор трех точек общего положения тривиален, и, следовательно, наличие трех частных решений $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ позволяет построить общее решение уравнения Риккати без квадратур, исходя из равенства:

$$\frac{(x(t) - x_1(t))(x_2(t) - x_3(t))}{(x(t) - x_2(t))(x_1(t) - x_3(t))} = \text{const}.$$

§ 4. Интегрирование распределений с транзитивной алгеброй симметрий

4.1. Симметрии вполне интегрируемых распределений. Пусть M — гладкое многообразие размерности $n + m$, E — вполне интегрируемое m -мерное распределение на M . Обозначим через $\mathcal{D}(M)$ алгебру Ли векторных полей на M , через $\Lambda^k(M) - C^\infty(M)$ -модуль всех дифференциальных k -форм на M , а через $\mathcal{D}(E) - C^\infty(M)$ -модуль всех векторных полей, принадлежащих распределению E :

$$\mathcal{D}(E) = \{X \in \mathcal{D}(M) : X_p \in E_p \forall p \in M\}.$$

Так как распределение E вполне интегрируемо, то $\mathcal{D}(E)$ замкнуто относительно коммутирования векторных полей. Пусть $I(E)$ — алгебра первых интегралов распределения E , т.е. таких гладких функций на M , которые постоянны на любом интегральном подмногообразии распределения E .

Обозначим через $\Lambda^1(E)$ множество всех дифференциальных 1-форм на M , ограничение которых на E равно нулю. Это множество также является подмодулем $C^\infty(M)$ -модуля $\Lambda^1(M)$. Нетрудно проверить, что $f \in I(E)$ тогда и только тогда, когда $df \in \Lambda^1(E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное поле $X \in \mathcal{D}(M)$ называется (*инфинитезимальной*) *симметрией* распределения E , если $[X, Y] \in \mathcal{D}(E)$ для всех $Y \in \mathcal{D}(E)$.

Заметим, что множество всех симметрий распределения E есть не что иное, как нормализатор подалгебры $\mathcal{D}(E)$ в алгебре Ли $\mathcal{D}(M)$. Следовательно, оно образует подалгебру алгебры Ли $\mathcal{D}(E)$, которая называется *алгеброй симметрий распределения E* и обозначается через $\text{sym } E$. Отметим, что $\mathcal{D}(E)$ по определению является идеалом алгебры Ли $\text{sym } E$. Элементы $\mathcal{D}(E)$ называются *характеристическими симметриями* распределения E .

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $X \in \text{sym } E$ равносильно тому, что локальные сдвиги вдоль векторного поля X оставляют распределение E на месте. Данное выше определение может быть также перенесено и на случай не вполне интегрируемого распределения. Множество $\text{sym } E$ по-прежнему будет подалгеброй алгебры Ли $\mathcal{D}(M)$, однако уже не будет содержать модуль $\mathcal{D}(E)$.

Непосредственно из определений следует, что

- 1) $\text{sym } E (I(E)) \subset I(E)$;
- 2) $I(E) \cdot \text{sym } E \subset \text{sym } E$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – некоторая подалгебра алгебры Ли $\text{sym } E$, p – некоторая точка многообразия M . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(p) &= \{X_p \in T_p M : X \in \mathfrak{g}\}; \\ \mathfrak{g}_p &= \{X \in \mathfrak{g} : X_p \in E_p\}.\end{aligned}$$

Подчеркнем, что $\mathfrak{g}(p)$ есть подпространство в $T_p(M)$, тогда как $\mathfrak{g}_p$ есть подпространство (более того, подалгебра) в $\mathfrak{g}$.

Положим $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \cap \mathcal{D}(E)$. Так как $\mathcal{D}(E)$ – идеал в $\text{sym } E$, то $\mathfrak{a}$ – идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что $\mathfrak{a}$ может быть определен так же как $\mathfrak{a} = \bigcap_{p \in M} \mathfrak{g}_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \text{sym } E$ называется *транзитивной алгеброй симметрий* распределения E , если $\mathfrak{g}(p) + E_p = T_p M$ для всех $p \in M$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \text{sym } E$ называется *просто транзитивной алгеброй симметрий*, если $\mathfrak{g}$ – транзитивная алгебра симметрий и $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{a}$ для всех $p \in M$.

Пусть G – локальная группа Ли преобразований, порожденная алгеброй симметрий $\mathfrak{g}$. Тогда G сохраняет множество $\mathcal{M}$ всех максимальных интегральных многообразий распределения E и

- 1) идеал $\mathfrak{a}$ равен $\{0\}$ тогда и только тогда, когда действие G на $\mathcal{M}$ локально эффективно;
- 2) подалгебра $\mathfrak{g}_p$ является алгеброй Ли подгруппы $G_p = \{g \in G : g.L_p \subset L_p\}$;
- 3) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ транзитивна тогда и только тогда, когда G действует локально транзитивно на $\mathcal{M}$;
- 4) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ просто транзитивна тогда и только тогда, когда подгруппа G_q не зависит от точки $q \in \mathcal{M}$, т.е. совпадает с ядром неэффективности действия G на $\mathcal{M}$.

4.2. Теорема о нормализаторе. Пусть $\mathfrak{g}$ – транзитивная алгебра симметрий распределения E . Зафиксируем некоторую точку a многообразия M . Рассмотрим подмножество точек в M вида

$$\{p \in M : \mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_a\}$$

и обозначим через L_a связную компоненту точки a .

Так как $\mathfrak{g}$ является транзитивной алгеброй симметрий, то найдутся такие векторные поля $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$, что векторы

$$(X_1)_a, \dots, (X_n)_a \in T_a M$$

образуют базис подпространства в $T_a M$, дополнительно к E_a . Следовательно, это будет также верно и в некоторой окрестности U точки a :

$$\langle (X_1)_p, \dots, (X_n)_p \rangle \oplus E_p = T_p M \quad \text{для всех } p \in U,$$

где для любого набора векторов $v_1, \dots, v_k$ через $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ мы обозначаем векторное подпространство, порожденное этими векторами над полем вещественных чисел.

Любое векторное поле $Y \in \mathcal{D}(M)$ однозначно представимо в виде

$$Y = f_1 X_1 + \dots + f_n X_n \pmod{\mathcal{D}(E)} \quad (10)$$

в окрестности U . Заметим, что для $Y \in \mathfrak{g}$ условие $Y \in \mathfrak{g}_p$ ($p \in U$) равносильно тому, что $f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$.

Пусть $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ – семейство всех функций, встречающихся в разложении (10) для всех $Y \in \mathfrak{g}_a$. Заметим, что подалгебры $\mathfrak{g}_p$ для всех $p \in M$ имеют одинаковую размерность в $\mathfrak{g}$, равную $\text{codim } E$. Следовательно, равенство $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_a$ равносильно включению $\mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_a$, а последнее, в свою очередь, для $p \in U$ может быть записано как

$$f(p) = 0 \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}. \quad (11)$$

Таким образом, локально в окрестности точки a подмножество L_a задается системой уравнений (11). Более того, нетрудно показать, что L_a является подмногообразием многообразия M .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{g}$ – транзитивная алгебра симметрий вполне интегрируемого распределения E на M , $a \in M$ и L – подмногообразие в M вида $L = \{p \in M : \mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_a\}$. Тогда для всех $p \in L$

1. $T_p L \supset E_p$;
2. подпространство $\{X \in \mathfrak{g} : X_p \in T_p L\} \subset \mathfrak{g}$ совпадает с $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_p) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что так как $\mathfrak{g}_p$ для $p \in L$ не зависит от p , то все утверждения теоремы достаточно доказать лишь для одной произвольной точки $p \in L$, например для $p = a$. Более того, все утверждения носят локальный характер. Следовательно, мы можем ограничиться окрестностью $U \subset M$, в которой подмногообразие L задается уравнениями (11).

1. Достаточно проверить, что все функции $f \in \mathcal{F}$ являются в области U первыми интегралами распределения E . Действительно, рассмотрим равенство (10) для $Y \in \mathfrak{g}_a$. Тогда для любого $Z \in \mathcal{D}(E)$ имеем:

$$\begin{aligned} & [Z, Y - f_1 X_1 - \dots - f_n X_n] \\ &= [Z, Y] - f_1 [Z, X_1] - \dots - f_n [Z, X_n] - Z(f_1) X_1 - \dots - Z(f_n) X_n \in \mathcal{D}(E). \end{aligned}$$

Так как $Y, X_1, \dots, X_n \in \text{sym } E$, то $[Z, Y], [Z, X_1], \dots, [Z, X_n] \in \mathcal{D}(E)$ и, следовательно,

$$Z(f_1) X_1 + \dots + Z(f_n) X_n \in \mathcal{D}(E).$$

Но это возможно лишь в случае $Z(f_1) = \dots = Z(f_n) = 0$, т.е. $f_1, \dots, f_n$ – первые интегралы распределения E .

2. Пусть $Z \in \mathfrak{g}$. Так как L в окрестности точки a задается уравнениями (11), то условие $Z_a \in T_a L$ равносильно тому, что $d_a f(Z_a) = Z(f)(a) = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

Из равенства (10) для $Y \in \mathfrak{g}_a$ вытекает

$$\begin{aligned} [Z, Y] &= [Z, f_1 X_1 + \cdots + f_n X_n] \\ &= Z(f_1) X_1 + \cdots + Z(f_n) X_n + f_1 [Z, X_1] + \cdots + f_n [Z, X_n] \pmod{\mathcal{D}(E)}. \end{aligned}$$

Рассматривая это равенство в точке a , получаем:

$$[Z, Y]_a = Z(f_1)(a)(X_1)_a + \cdots + Z(f_n)(a)(X_n)_a \pmod{E_a}.$$

Отсюда следует, что включение $[Z, Y] \in \mathfrak{g}_a$ равносильно условиям $Z(f_1)(a) = \cdots = Z(f_n)(a) = 0$. Таким образом, Z_a лежит в $T_a L$ тогда и только тогда, когда $[Z, Y] \in \mathfrak{g}_a$ для всех $Y \in \mathfrak{g}_a$, т.е. $Z \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_a)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если подалгебра $\mathfrak{g}_a$ совпадает со своим нормализатором, то L – максимальное интегральное многообразие распределения E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с одной стороны, $T_p L \supset E_p$ для всех $p \in L$. С другой стороны, $T_p L \cap \mathfrak{g}_p = E_p \cap \mathfrak{g}_p$ для всех $p \in L$, что возможно лишь в случае, когда $T_p L = E_p$, т.е. L – максимальное интегральное многообразие распределения E .

Рассмотрим ограничение $\tilde{E}$ распределения E на L , а также множество $\tilde{\mathfrak{g}} = N(\mathfrak{g}_a)$, ограниченное на подмногообразии L . Тогда, очевидно, $\tilde{\mathfrak{g}}$ является подалгеброй Ли $\mathcal{D}(L)$ (вообще говоря, неизоморфной $N(\mathfrak{g}_a)$), причем по-прежнему $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \text{sym } \tilde{E}$.

ЛЕММА 5. Пусть $\tilde{E}$ – ограничение распределения E на L , а $\tilde{\mathfrak{g}}$ – ограничение алгебры Ли $N(\mathfrak{g}_a)$ на подмногообразии L . Тогда алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ является просто транзитивной алгеброй симметрий распределения $\tilde{E}$, причем идеал $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathcal{D}(\tilde{E})$ равен в точности $\mathfrak{g}_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\tilde{\mathfrak{g}}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathcal{D}(L)$ (вообще говоря, неизоморфной $N(\mathfrak{g}_a)$), причем по-прежнему $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \text{sym } \tilde{E}$.

Транзитивность $\tilde{\mathfrak{g}}$ вытекает из следующего равенства:

$$\begin{aligned} T_p L &= T_p L \cap (E_p + \mathfrak{g}(p)) = E_p + T_p L \cap \mathfrak{g}(p) = E_p + N(\mathfrak{g}_p)(p) \\ &= E_p + N(\mathfrak{g}_a)(p) = E_p + \tilde{\mathfrak{g}}(p) \quad \text{для всех } p \in L. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее, $\tilde{\mathfrak{g}}_p = \mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_a$ для всех $p \in L$. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{a}} = \bigcap_{p \in L} \tilde{\mathfrak{g}}_p = \mathfrak{g}_a$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ – просто транзитивная алгебра симметрий.

Таким образом, из теоремы 2 и леммы 5 вытекает, что задача интегрирования распределения при помощи транзитивной алгебры симметрий естественным образом разбивается на две части:

- 1) построение многообразий L_a ;
- 2) интегрирование распределений $\tilde{E}$ при помощи просто транзитивных алгебр симметрий $\tilde{\mathfrak{g}}$ на каждом из подмногообразий L_a .

4.3. Просто транзитивные алгебры симметрий и формы Маурера–Картана. В этом пункте мы показываем, что вполне интегрируемые распределения на многообразии M с просто транзитивной алгеброй симметрий находятся во взаимно однозначном соответствии с невырожденными формами Маурера–Картана на M .

Пусть E – вполне интегрируемое распределение на M , $\mathfrak{h}$ – просто транзитивная алгебра симметрий распределения E , $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathcal{D}(E)$ – идеал характеристических симметрий в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, противоположная факторалгебре $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$. То есть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ как векторное пространство совпадает с $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$, а умножение в $\mathfrak{g}$ имеет вид:

$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}]_{\mathfrak{g}} = -[x, y]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{a} \quad \text{для всех } x, y \in \mathfrak{h},$$

где через $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ и $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}}$ мы обозначаем умножение в алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно.

Определим $\mathfrak{g}$ -значную 1-форму ω на M исходя из следующих условий:

- а) $\omega(Y) = 0$ для всех $Y \in \mathcal{D}(E)$;
- б) $\omega(X) = X + \mathfrak{a}$ для всех $X \in \mathfrak{h}$.

Как нетрудно проверить, эти условия корректно определяют ω .

ЛЕММА 6. *Форма ω обладает следующими свойствами:*

- 1. $d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$;
- 2. $\ker \omega_p = E_p$, $\text{im } \omega_p = \mathfrak{g}$ для всех $p \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$d\omega(Z_1, Z_2) = [\omega(Z_1), \omega(Z_2)] \quad \text{для всех } Z_1, Z_2 \in \mathcal{D}(M). \quad (13)$$

Так как любое векторное поле на M может быть (однозначно) представлено в виде

$$f_1 X_1 + \dots + f_n X_n + Y, \quad f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M), \quad Y \in \mathcal{D}(E),$$

и обе части равенства (13) $C^\infty(M)$ -билинейны, то его достаточно проверить лишь в следующих случаях:

- (i) $X_1, X_2 \in \mathcal{D}(E)$;
- (ii) $X_1 \in \mathcal{D}(E)$, $X_2 \in \mathfrak{h}$;
- (iii) $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$.

В случае (i) обе части равенства (13) тождественно равны нулю. Заметим, что $\omega(X) = \text{const}$ для всех $X \in \mathfrak{h}$. Имеем:

$$d\omega(X_1, X_2) = -\omega([X_1, X_2]) + X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1)$$

для всех $X_1, X_2 \in \mathcal{D}(M)$. Следовательно, в случае (ii) обе части равенства (13) также равны нулю, так как $[X_1, X_2] \in \mathcal{D}(E)$, $\omega(X_1) = 0$, $\omega(X_2) = \text{const}$.

В случае (iii) имеем $[X_1, X_2] \in \mathfrak{h}$. Следовательно,

$$d\omega(X_1, X_2) = -\omega([X_1, X_2]) = -[X_1, X_2]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{a} = [X_1 + \mathfrak{a}, X_2 + \mathfrak{a}]_{\mathfrak{g}} = [\omega(X_1), \omega(X_2)]_{\mathfrak{g}},$$

что и требовалось доказать.

Вторая часть леммы непосредственно следует из определения формы ω .

Таким образом, любая просто транзитивная алгебра симметрий распределения E определяет некоторую $\mathfrak{g}$ -значную форму Маурера–Картана на M . Заметим, что эта форма обладает следующим дополнительным свойством: отображение $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathfrak{g}$ сюръективно для любого $p \in M$. Будем называть такие формы Маурера–Картана *невырожденными*.

Любая невырожденная $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана ω определяет распределение E на M следующим образом: $E_p = \ker \omega_p$ для всех $p \in M$. Более того, для любого элемента $\bar{X} \in \mathfrak{g}$ равенство $\omega(X) = \bar{X}$ однозначно с точностью до $\mathcal{D}(E)$ определяет векторное поле X на M .

ЛЕММА 7. 1. *Распределение E , определенное формой ω , вполне интегрируемо.*

2. *Для любого $\bar{X} \in \mathfrak{g}$ векторное поле $X \in \mathcal{D}(E)$ является симметрией распределения E .*

3. *Множество векторных полей $\mathfrak{h} = \{X \in \mathcal{D}(E) : \omega(X) = \text{const}\}$ образует просто транзитивную алгебру симметрий распределения E , обладающую следующими свойствами:*

- (i) $\mathfrak{h} \supset \mathcal{D}(E)$ и $\mathfrak{h}/\mathcal{D}(E) \cong \mathfrak{g}$;
- (ii) *любая просто транзитивная алгебра симметрий распределения E , определяющая $\mathfrak{g}$ -значную форму ω условиями а) и б), лежит в $\mathfrak{h}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Действительно, для $Y_1, Y_2 \in \mathcal{D}(E)$ имеем:

$$\begin{aligned} \omega([Y_1, Y_2]) &= -d\omega([Y_1, Y_2]) + Y_1\omega(Y_2) - Y_2\omega(Y_1) \\ &= [\omega(Y_1), \omega(Y_2)] + Y_1\omega(Y_2) - Y_2\omega(Y_1) = 0, \end{aligned}$$

так как $\omega(Y_1) = \omega(Y_2) = 0$. Следовательно, $[Y_1, Y_2] \in \mathcal{D}(E)$ и распределение E вполне интегрируемо.

2. Для $\bar{X} \in \mathfrak{g}, Y \in \mathcal{D}(E)$ имеем:

$$\omega([X, Y]) = [\omega(X), \omega(Y)] + X\omega(Y) - Y\omega(X) = 0,$$

так как $\omega(Y) = 0$, а $\omega(X) = \bar{X} = \text{const}$. Следовательно, $X \in \text{sym } E$.

3. Включение $\mathfrak{h} \supset \mathcal{D}(E)$ очевидно. Непосредственно из определений следует, что отображение $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}, X \mapsto \omega(X)$, является сюръективным гомоморфизмом алгебр Ли, ядро которого равно в точности $\mathcal{D}(E)$. Следовательно, $\mathfrak{h}/\mathcal{D}(E) \cong \mathfrak{g}$. Если некоторая просто транзитивная алгебра симметрий $\mathfrak{h}'$ определяет эту же форму Маурера–Картана ω , то для любого $X \in \mathfrak{h}'$ имеем $\omega(X) = \text{const}$. Следовательно, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$.

Таким образом, леммы 6 и 7 устанавливают взаимно однозначное соответствие с невырожденными $\mathfrak{g}$ -значными формами Маурера–Картана.

4.4. Алгоритм интегрирования распределений. Предположим, что форма Маурера–Картана ω невырождена и E – определяемое ею вполне интегрируемое распределение. Тогда любой локальный интеграл $f: U \rightarrow G, U \subset M$, формы ω является субмерсией и, следовательно, на $f^{-1}(g)$ для любого $g \in G$ может быть введена структура подмногообразия.

ЛЕММА 8. Пусть f – интеграл формы ω . Тогда для любого $g \in G$ связные компоненты подмногообразия $f^{-1}(g)$ являются максимальными интегральными многообразиями распределения E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L есть связная компонента $f^{-1}(g)$. Тогда для любой точки $p \in L$

$$T_p L = \ker d_p f = \ker \omega_p = E_p,$$

т. е. L является интегральным многообразием распределения E . Пусть L' – некоторое интегральное многообразие распределения E , содержащее L . Так как L' связно и $d_p f(T_p L') = d_p f(E_p) = \{0\}$ для всех $p \in L'$, то отображение f постоянно на L' . Значит, $L' \subset L$, откуда следует, что $L = L'$.

Из леммы 8 вытекает, что задача интегрирования распределения E равносильна задаче интегрирования соответствующей формы Маурера–Картана. В частности, в качестве следствия из леммы 2 мы получаем следующий вариант классического результата Софуса Ли об интегрируемости уравнений в квадратурах при наличии разрешимой алгебры симметрий [2]:

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{g}$ – транзитивная алгебра симметрий распределения E и для некоторой точки $a \in M$ алгебра Ли $N(\mathfrak{g}_a)/\mathfrak{g}_a$ разрешима. Тогда распределение E может быть проинтегрировано в квадратурах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из лемм 6 и 8 вытекает, что алгебра симметрий $\mathfrak{g}$ однозначно определяет форму Маурера–Картана ω на M со значениями в алгебре, противоположной алгебре Ли $N(\mathfrak{g}_a)/\mathfrak{g}_a$, причем задача интегрирования распределения E равносильна задаче интегрирования формы ω . Так как алгебра Ли $N(\mathfrak{g}_a)/\mathfrak{g}_a$ разрешима, то и противоположная ей алгебра Ли также разрешима. По лемме 2 интеграл формы Маурера–Картана ω может быть найден при помощи интегрирования конечного числа замкнутых 1-форм.

В общем случае задача интегрирования вполне интегрируемого распределения с транзитивной алгеброй симметрий разбивается на следующие три части:

- 1) сведение задачи к интегрированию распределения с просто транзитивной алгеброй симметрий, изоморфной $N(\mathfrak{g}_a)/\mathfrak{g}_a$, – в координатной записи эквивалентно решению системы уравнений общего вида;
- 2) интегрирование $\mathfrak{g}_i$ -значных форм Маурера–Картана с простыми алгебрами Ли $\mathfrak{g}_i$, входящими в разложение подалгебры Леви алгебры $N(\mathfrak{g}_a)/\mathfrak{g}_a$, – сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений типа Ли;
- 3) интегрирование $\mathfrak{r}$ -значной формы Маурера–Картана с разрешимой алгеброй Ли $\mathfrak{r}$, равной радикалу алгебры Ли $N(\mathfrak{g}_a)/\mathfrak{g}_a$, – сводится к интегрированию конечного числа (равного $\dim \mathfrak{r}$) замкнутых 1-форм.

ПРИМЕР 11 (ср. [3; гл. 20, §3, пример 3]). Одномерное распределение на $\mathbb{R}^3$, порожденное векторным полем

$$A = 2(y - z)e^{y+z} \frac{\partial}{\partial x} + (1 + y - z) \frac{\partial}{\partial y} + (1 - y + z) \frac{\partial}{\partial z},$$

допускает двумерную алгебру симметрий $\mathfrak{g}$ с базисом

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad U_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Заметим, что на открытом подмножестве, задаваемом неравенством $y \neq z$, эта алгебра Ли является просто транзитивной алгеброй симметрий. При этом $[U_1, U_2] = 2U_1$. Соответствующая $\mathfrak{g}$ -значная форма Маурера–Картана $\omega = \omega_1 U_1 + \omega_2 U_2$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= dx - \left(x + e^{y+z} - \frac{x}{y-z} \right) dy + \left(-x + e^{y+z} - \frac{x}{y-z} \right) dz, \\ \omega_2 &= \left(1 - \frac{1}{y-z} \right) dy + \left(1 + \frac{1}{y-z} \right) dz.\end{aligned}$$

Проводя редукцию по идеалу $\mathfrak{g}_1$ в $\mathfrak{g}$, порожденному элементом U_1 , мы получаем $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ -значную форму Маурера–Картана, имеющую вид $\omega_2(U_2) + \mathfrak{g}_1$. Отсюда немедленно получаем, что форма ω_2 замкнута. Интегрирование дает:

$$\varphi = \int \omega_2 = y + z - \ln(y - z).$$

Положим $L_a = \{y + z - \ln(y - z) = a\}$ и рассмотрим ограничение $\omega|_{L_a} = (\omega_1|_{L_a})U_1$, являющееся $\mathfrak{g}_1$ -значной формой Маурера–Картана. В качестве координат на L_a возьмем x и $u = y + z$. Тогда на L_a имеем $y = (u + e^{u-a})/2$, $z = (u - e^{u-a})/2$ и

$$\psi = \int \omega_1|_{L_a} = \int dx - e^{2u-a} du = x - \frac{1}{2}e^{2u-a} = x - \frac{1}{2}(y - z)e^{y+z}.$$

Мы получаем, что интегральные многообразия исходного распределения задаются равенствами $\varphi = a$, $\psi = b$, где a, b – произвольные константы.

ПРИМЕР 12. Для произвольной гладкой функции $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выражение

$$I(y) = \frac{2y'y''' - 3(y'')^2}{(y')^2}$$

называется *производной Шварца* функции f ; она инвариантна относительно проективных преобразований функции f . А именно

$$I(y) = I\left(\frac{ay + b}{cy + d}\right) \quad \text{для всех} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}). \quad (14)$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$I(y) = F(x), \quad (15)$$

где $F(x)$ – произвольная гладкая функция. Тогда ввиду свойства (14) это уравнение обладает трехмерной простой алгеброй симметрий $\mathfrak{g} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, y \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, изоморфной $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (см. пример 7).

Рассмотрим пространство $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ вторых джетов отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Пусть (x, y, y_1, y_2) – система координат на $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, где переменные y_1 и y_2 играют роль

первой и второй производных зависимой переменной y по x (см., например, [4], [19]). Тогда решение уравнения (15) равносильно интегрированию одномерного распределения E на пространстве $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, которое в координатной записи порождается векторным полем

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\frac{3y_2^2}{2y_1} + \frac{1}{2} y_1 F(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, будучи продолженными в пространство вторых джетов, имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= y \frac{\partial}{\partial y} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ X_3 &= y^2 \frac{\partial}{\partial y} + 2y y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + 2(y_1^2 + y y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

и порождают трехмерную просто транзитивную алгебру симметрий распределения E . Следовательно, на $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ естественным образом определяется $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -значная форма Маурера–Картана ω такая, что ее интегрирование равносильно интегрированию распределения E . Так как алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ является простой, то интегрирование формы ω , вообще говоря, не может быть проведено в квадратурах. Согласно результатам п. 2.4 интегрирование формы ω может быть сведено к интегрированию уравнения типа Ли. Для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ в качестве такого уравнения типа Ли может быть взято уравнение Риккати (см. пример 7).

В этом нетрудно убедиться непосредственно. Найдем первый интеграл f распределения E такой, что $X_1 f = X_2 f = 0$. Тогда $f = f(x, y_2/y_1)$. После подстановки $z = y''/y'$ уравнение (15) переходит в уравнение Риккати

$$2z' = z^2 + F(x). \quad (16)$$

Пусть $g(x, z)$ – интеграл этого уравнения или, что равносильно, интеграл распределения

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(z^2 + F(x)) \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

на плоскости. Тогда $f(x, y, y_1, y_2) = g(x, y_2/y_1)$ является интегралом распределения E , инвариантным относительно X_1 и X_2 . Покажем, что функции

$$f_1 = f, \quad f_2 = X_3 f, \quad f_3 = X_3(X_3 f)$$

являются функционально независимыми интегралами распределения E . Действительно,

$$X_2 f_2 = X_2(X_3 f) = [X_2, X_3]f + X_3 X_2 f = X_3 f = f_2.$$

Следовательно, интегралы f_1 и f_2 функционально независимы (иначе мы имели бы $f_2 = S(f_1)$ для некоторой функции $S \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $X_2 f_2 = S'(f_1) \cdot X_2 f_1 = 0$). Аналогично, рассматривая действие векторного поля X_3 на f_2, f_3 , получаем

$$X_1 f_2 = 0 \quad \text{и} \quad X_1 f_3 = 2f_2.$$

Отсюда следует, что все интегралы f_1, f_2, f_3 функционально независимы и общее решение уравнения (15) может быть получено исключением из системы уравнений $f_i = C_i, i = 1, 2, 3$, переменных y_1 и y_2 .

Так, например, при $F(x) \equiv x$ решения уравнения Риккати (16) выражаются через функции Бесселя $J_{\pm 1/3}(x)$ первого рода (см. [16; уравнение 2.162(10)]) и общее решение исходного уравнения (15) имеет вид:

$$y(x) = \int \frac{dx}{x(C_1 J_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}}/3) + C_2 J_{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}}/3))^2} + C_3.$$

§ 5. Эквивалентность структур абсолютного параллелизма

В этом параграфе мы показываем, что проблема конструктивной эквивалентности структур абсолютного параллелизма сводится к интегрированию распределений с просто транзитивной алгеброй симметрий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [20]. *Структурой абсолютного параллелизма* на многообразии M назовем упорядоченный набор векторных полей (*репер*) $\mathcal{E} = \{X_1, \dots, X_m\}$ ($m = \dim M$), который в каждой точке $p \in M$ образует базис касательного пространства $T_p M$.

Два репера $\mathcal{E} = \{X_1, \dots, X_m\}$ и $\mathcal{E}' = \{X'_1, \dots, X'_m\}$ на многообразиях M и M' соответственно называются *эквивалентными*, если существует такой диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M'$, что $\varphi_*(X_i) = X'_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

С каждым репером $\{X_1, \dots, X_m\}$ можно связать набор дифференциальных 1-форм (*корепер*) $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, однозначно определенный условием $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, m$.

Пусть $\mathcal{E} = \{X_1, \dots, X_m\}$ — структура абсолютного параллелизма на M с дуальным корепером $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$. Функции c_{ij}^k на M , определенные равенством

$$[X_i, X_j] = - \sum_{k=1}^m c_{ij}^k X_k, \quad i, j, k = 1, \dots, m,$$

называются *структурными функциями* репера $\mathcal{E}$. Эти же функции могут быть найдены из условия

$$d\omega_k = \sum_{1 \leq i < j \leq m} c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j.$$

Очевидно, функции c_{ij}^k являются инвариантами репера $\mathcal{E}$. Новые инварианты могут быть получены при помощи операции *ковариантного дифференцирования*. Ковариантные производные функции f относительно репера $\mathcal{E}$ — это функции $X_i(f)$, $i = 1, \dots, m$. Эти же ковариантные производные могут быть получены из разложения

$$df = X_1(f)\omega_1 + \dots + X_m(f)\omega_m.$$

Очевидно, что если функция f является инвариантом репера $\mathcal{E}$, то таковыми будут и все ее ковариантные производные.

Будем называть структурные функции c_{ij}^k инвариантами первого порядка репера $\mathcal{E}$ и положим, что каждое применение операции ковариантного дифференцирования увеличивает порядок инварианта на 1. Таким образом, наиболее общий инвариант порядка $n + 1$ репера $\mathcal{E}$ имеет вид

$$X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_n} (c_{ij}^k), \quad 1 \leq i < j \leq m; \quad i_1, \dots, i_n, k = 1, \dots, m.$$

Обозначим этот инвариант через f_α , где $\alpha = (i_1 \dots i_n [ijk])$ является мультииндексом, и положим $|\alpha| = n + 1$.

Максимальное число функционально независимых инвариантов репера $\mathcal{E}$ называется его рангом и обозначается через $\text{rk } \mathcal{E}$. Обозначим через r_n максимальное число функционально независимых инвариантов порядка не выше n ; последовательность $r_1, r_2, \dots$ является неубывающей. Пусть N – наименьшее натуральное число, для которого $r_N = r_{N+1}$. Тогда $r_n = r_N$ для всех $n > N$ и ранг $\mathcal{E}$ равен в точности r_N . Такое число N называется порядком структуры абсолютного параллелизма.

Пусть $\{f_1, \dots, f_r\}$ – максимальный набор функционально независимых инвариантов порядка $\leq N$. Локально каждый инвариант f_α может быть однозначно представлен в виде

$$f_\alpha = F_\alpha(f_1, \dots, f_r),$$

где F_α – некоторая гладкая функция, определенная на открытом подмножестве в $\mathbb{R}^r$. В [20] доказано, что структура абсолютного параллелизма $\mathcal{E}$ однозначно с точностью до локальной эквивалентности определяется набором функций F_α , где $|\alpha| \leq N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Локальный диффеоморфизм φ многообразия M называется *симметрией* репера $\mathcal{E} = \{X_1, \dots, X_m\}$, если $\varphi_*(X_i) = X_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Инфинитезимальной симметрией репера $\mathcal{E}$ называется такое векторное поле Y на M , что $[X_i, Y] = 0$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Отметим, что множество всех инфинитезимальных симметрий репера $\mathcal{E} = \{X_1, \dots, X_m\}$ образуют конечномерную алгебру Ли размерности $m - \text{rk } \mathcal{E}$, обозначаемую $\text{sym } \mathcal{E}$. При этом все элементы алгебры $\text{sym } \mathcal{E}$ касаются всех подмногообразий L_c , причем $\text{sym } \mathcal{E}|_{L_c}$ действует просто транзитивно на L_c .

Доказательства этих фактов могут быть найдены в [20], [5].

ЛЕММА 9. Пусть f – инвариант репера $\mathcal{E} = \{X_1, \dots, X_m\}$ и $Y \in \text{sym } \mathcal{E}$. Тогда $Yf = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$[X_i, X_j] = - \sum_{k=1}^m c_{ij}^k X_k,$$

где c_{ij}^k – инварианты первого порядка репера $\mathcal{E}$. Тогда для любых $i, j = 1, \dots, m$ имеем

$$[Y, [X_i, X_j]] = [[Y, X_i], X_j] + [X_i, [Y, X_j]] = 0.$$

С другой стороны,

$$\left[Y, - \sum_{k=1}^m c_{ij}^k X_k \right] = - \sum_{k=1}^m (c_{ij}^k [Y, X_k] + Y(c_{ij}^k) X_k) = - \sum_{k=1}^m Y(c_{ij}^k) X_k.$$

Отсюда немедленно следует, что $Y(c_{ij}^k) = 0$ для всех $k = 1, \dots, m$. Далее, предположим, что $Yf = 0$ для некоторого инварианта f . Тогда $Y(X_i f) = X_i(Yf) + [Y, X_i]f = 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Рассмотрим две структуры абсолютного параллелизма $\mathcal{E} = \{X_1, \dots, X_m\}$ и $\mathcal{E}' = \{X'_1, \dots, X'_m\}$ на многообразиях M и M' соответственно. Следующие условия необходимы и достаточны для того, чтобы эти структуры были локально эквивалентны:

- а) реперы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ имеют одинаковый ранг r и одинаковый порядок s ;
- б) если $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r}$ — набор функционально независимых инвариантов порядка $\leq s$ репера $\mathcal{E}$, то соответствующие инварианты $f'_{\alpha_1}, \dots, f'_{\alpha_r}$ репера $\mathcal{E}'$ также функционально независимы;
- с) для любых двух соответствующих инвариантов f_β и f'_β реперов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ порядка $\leq s+1$ функции F_β и F'_β , определенные равенствами

$$\begin{aligned} f_\beta &= F_\beta(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r}), \\ f'_\beta &= F'_\beta(f'_{\alpha_1}, \dots, f'_{\alpha_r}), \end{aligned}$$

совпадают.

Предположим, что реперы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ удовлетворяют перечисленным выше условиям. Рассмотрим задачу построения локального диффеоморфизма $\varphi: M \rightarrow M'$, устанавливающего эту эквивалентность.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ — две локально эквивалентные структуры абсолютного параллелизма на многообразиях M и M' соответственно и $\{f_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq r}$, $\{f'_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq r}$ — соответствующие максимальные функционально независимые системы инвариантов. Положим

$$L = \{(p, p') \in M \times M' : f_{\alpha_i}(p) = f'_{\alpha_i}(p'), i = 1, \dots, r\}.$$

Тогда

- 1) L является подмногообразием в $M \times M'$;
- 2) векторные поля $X_i + X'_i$, $i = 1, \dots, m$, касаются L , причем их ограничения на L порождают вполне интегрируемое распределение E размерности m на $M \times M'$;
- 3) интегральные многообразия распределения E — это в точности графики локальных диффеоморфизмов $\varphi: M \rightarrow M'$, устанавливающих эквивалентность структур $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$;
- 4) алгебра Ли $\text{sum } \mathcal{E}$ касается L , и ее ограничение на L является просто транзитивной алгеброй симметрий распределения E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функции f_{α_i} и f'_{α_i} , $i = 1, \dots, r$, функционально независимы на многообразиях M и M' соответственно, то множество L является подмногообразием размерности $2m - r$ в $M \times M'$.

Для любого мультииндекса $\alpha = (i_1 \dots i_n [ijk])$ обозначим через F_α такую функцию на $M \times M'$, что $F_\alpha(p, p') = f_\alpha(p) - f'_\alpha(p')$ для всех $(p, p') \in M \times M'$. Так как структуры абсолютного параллелизма $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ эквивалентны, то $F_\alpha(p, p') = 0$ для всех $(p, p') \in L$. Далее, для любых $s = 1, \dots, m$ и $\alpha = (i_1 \dots i_n [ijk])$ имеем

$$(X_s + X'_s)F_\alpha = X_s f_\alpha - X'_s f'_\alpha = f_{s,\alpha} - f'_{s,\alpha} = F_{s,\alpha},$$

где через s, α мы обозначаем мультииндекс $(s, i_1 \dots i_n [ijk])$. Следовательно,

$$(X_s + X'_s)F_{\alpha_i}|_L = F_{s,\alpha_i}|_L = 0 \quad \text{для всех } s = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, r,$$

т.е. векторные поля $X_s + X'_s$ для $s = 1, \dots, m$ действительно касаются подмногообразия L . Далее, так как

$$[X_i + X'_i, X_j + X'_j] = - \sum_{k=1}^m (c_{ij}^k X_k + (c_{ij}^k)' X'_k),$$

причем $c_{ij}^k(p) = (c_{ij}^k)'(p')$ для всех $(p, p') \in L$, $i, j, k = 1, \dots, m$, то векторные поля $(X_i + X'_i)|_L$, $i = 1, \dots, m$, действительно порождают m -мерное вполне интегрируемое распределение.

Третье утверждение теоремы непосредственно следует из условия, что $\varphi_*(X_i) = X'_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Для $Y \in \text{sym } \mathcal{E}$ имеем

$$Y(F_\alpha) = Y(f_{\alpha_i} - f'_{\alpha_i}) = Y(f_{\alpha_i}) - Y(f'_{\alpha_i}) = 0,$$

т.е. Y касается L .

Далее, так как

$$[Y, X_i - X'_i] = [Y, X_i] - [Y, X'_i] = 0,$$

то ограничение векторного поля Y на L является симметрией распределения E .

Предположим, что в некоторой точке $(p, p') \in L$ мы имеем $Y_{(p,p')} \in E_{(p,p')}$. Тогда

$$Y_{(p,p')} = \sum_{i=1}^m \alpha_i ((X_i)_p - (X'_i)_{p'}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (X_i)_p - \sum_{i=1}^m \alpha_i (X'_i)_{p'},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ — некоторые константы. Проекция касательного вектора $Y_{(p,p')}$ на $T_{p'} M'$ равна нулю и, следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ и $Y_{(p,p')} = 0$. Далее, так как все ненулевые векторные поля $Y \in \text{sym } \mathcal{E}$ не имеют особых точек (т.е. $Y_p \neq 0$ для всех $p \in M$), то мы получаем $Y = 0$. Отсюда следует, в частности, что пересечение подпространств

$$\text{sym } \mathcal{E}(p, p') = \{Y_{(p,p')} \in T_{(p,p')} L : Y \in \text{sym } \mathcal{E}\}$$

и $E_{(p,p')}$ тривиально. Наконец, заметим, что $\dim E = m$, $\dim L = 2m - r$ и $\dim \text{sym } \mathcal{E} = m - r$. Отсюда немедленно следует, что алгебра Ли $\text{sym } \mathcal{E}|_L$ действительно является просто транзитивной алгеброй симметрий распределения E .

Таким образом, мы получаем, что если известна хотя бы одна из алгебр симметрий двух эквивалентных структур абсолютного параллелизма, то построение отображения, устанавливающего эквивалентность, сводится к интегрированию $\mathfrak{g}$ -значной формы Маурера–Картана на многообразии L , где $\mathfrak{g} = \text{sym } \mathcal{E} \cong \text{sym } \mathcal{E}'$.

§ 6. Эквивалентность транзитивных алгебр Ли векторных полей

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей на многообразии M называется *транзитивной*, если $\mathfrak{g}(p) = T_p M$ для всех точек $p \in M$. Две транзитивные алгебры Ли векторных полей $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ на многообразиях M, M' соответственно называются *локально подобными*, если существует локальный диффеоморфизм φ из M в M' , переводящий алгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$ (в той окрестности, в которой φ определен).

Зафиксируем точки $a \in M, a' \in M'$ и положим

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0 &= \{X \in \mathfrak{g} : X_a = 0\}, \\ \mathfrak{g}'_0 &= \{X \in \mathfrak{g}' : X_{a'} = 0\}.\end{aligned}$$

Пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ и $(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'_0)$ называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ алгебр Ли, что $\alpha(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}'_0$. В этом случае будем называть α изоморфизмом пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ и $(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'_0)$.

Хорошо известно (см., например, [21]), что локальный диффеоморфизм φ , устанавливающий подобие $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$, существует тогда и только тогда, когда пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ и $(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'_0)$ изоморфны. Более того, он однозначно определяется условиями:

- (i) $\varphi(a) = \varphi(a')$;
- (ii) $\varphi_*(X) = \alpha(X)$ для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Задача эквивалентности (локальных) транзитивных действий заключается в построении диффеоморфизма φ по заданному изоморфизму пар α .

Определим подмножество L многообразия $M \times M'$ следующим образом:

$$L = \{(p, p') \in M \times M' : \alpha(\mathfrak{g}_p) = \mathfrak{g}'_{p'}\}.$$

Тогда, очевидно, $(a, a') \in L$. Пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ ($n = \dim M = \dim M'$) – базис некоторого подпространства в $\mathfrak{g}$, дополнительного к $\mathfrak{g}_0$. Тогда в некоторой окрестности точки (a, a') любое векторное поле $X \in \mathcal{D}(M \times M')$ однозначно представимо в виде:

$$X = f_1 X_1 + \dots + f_n X_n + g_1 \alpha(X_1) + \dots + g_n \alpha(X_n), \quad (17)$$

где $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$, $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(M')$. В окрестности точки (a, a') множество L определяется системой уравнений $f_i = g_i$ для всех функций f_i, g_i , $i = 1, \dots, n$, встречающихся в разложении (17) для $X \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$.

Полностью аналогично теореме 4 устанавливается следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. 1. *Для любого $X \in \mathfrak{g}$ векторное поле $X + \alpha(X)$ касается подмногообразия L .*

2. *Распределение E на многообразии L вида*

$$E_{(p, p')} = \{X_p + \alpha(X)_{p'} : X \in \mathfrak{g}\} \quad \text{для всех } (p, p') \in L$$

вполне интегрируемо, и его максимальное интегральное многообразие, содержащее точку (a, a') , является графиком искомого диффеоморфизма φ .

3. *Алгебра Ли $\mathfrak{z} = Z_{\mathcal{D}(M)}(\mathfrak{g})$, рассматриваемая как алгебра Ли векторных полей на $M \times M'$, обладает следующими свойствами:*

- а) *любое векторное поле $X \in \mathfrak{h}$ касается подмногообразия L ;*
- б) *ограничение $\mathfrak{z}$ на L является просто транзитивной алгеброй симметрий распределения E .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь через $\mathfrak{z} = Z_{\mathcal{D}(M)}(\mathfrak{g})$ мы обозначаем централизатор алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебре Ли всех векторных полей на M . Алгебра $\mathfrak{z}$ называется *алгеброй симметрий* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Известно, что она изоморфна $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0)/\mathfrak{g}_0$ (см. [21], а также [22], где доказан соответствующий глобальный результат). Однако ее конструктивное вычисление в общем случае является непростой задачей. В частности, если M есть группа Ли, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей на M , то $\mathfrak{z}$ есть в точности алгебра Ли правоинвариантных (соответственно левоинвариантных) векторных полей и ее построение равносильно восстановлению операции умножения на M по алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Таким образом, конструктивное построение диффеоморфизма φ , устанавливающего подобие двух локальных транзитивных действий, сводится к интегрированию вполне интегрируемого распределения с просто транзитивной алгеброй симметрий.

ПРИМЕР 13 (ср. [3; гл. 23, §2, пример 2]). Рассмотрим две транзитивные алгебры Ли векторных полей на плоскости:

$$\mathfrak{g} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \sin x \frac{\partial}{\partial x} + \cos x \frac{\partial}{\partial y}, \cos x \frac{\partial}{\partial x} - \sin x \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \quad (18)$$

$$\mathfrak{g}' = \left\langle X'_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, X'_2 = 2\bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, X'_3 = \bar{x}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{x}\bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right\rangle. \quad (19)$$

Обе эти алгебры Ли изоморфны $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Положим $a = (0, 0)$, $a' = (0, 1)$. Тогда $\mathfrak{g}_0 = \left\langle (1 - \cos x) \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, $\mathfrak{g}'_0 = \langle X'_3 \rangle$. Выберем следующий базис $\{X_1, X_2, X_3\}$ в $\mathfrak{g}$:

$$X_1 = (1 + \cos x) \frac{\partial}{\partial x} - \sin x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = 2 \sin x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \cos x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_3 = (1 - \cos x) \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Нетрудно проверить, что отображение

$$\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}', \quad X_i \mapsto X'_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

устанавливает изоморфизм пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ и $(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'_0)$. Найдем соответствующий локальный диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M'$.

Заметим, что

$$X_3 = \frac{\cos x - 1}{1 + \cos x} X_1 + \frac{\sin x}{1 + \cos x} X_2,$$

$$X'_3 = -\bar{x}^2 X'_1 + \bar{x} X'_2.$$

Таким образом, подмногообразие $L \subset M \times M'$ задается равенством $\bar{x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. В качестве системы координат на L возьмем $x, y, \bar{y}$. Распределение E на L двумерно и порождается векторными полями

$$A_1 = (1 + \cos x) \frac{\partial}{\partial x} - \sin x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$A_2 = 2 \sin x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \cos x \frac{\partial}{\partial y} + \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

Положим $\mathfrak{z} = Z_{\mathcal{D}(M)}(\mathfrak{g})$. Очевидно, что векторное поле $U = \frac{\partial}{\partial y}$ лежит в $\mathfrak{z}$. Так как нормализатор $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0)$ двумерен, то $\dim \mathfrak{z} = \dim N(\mathfrak{g}_0)/\mathfrak{g}_0 = 1$ и, следовательно, $\mathfrak{z} = \langle U \rangle$. Ограничение $\mathfrak{z}$ на L образует просто транзитивную подалгебру симметрий распределения E . Соответствующая $\mathfrak{z}$ -значная форма Маурера–Картана $\omega = \omega_1 U$ имеет вид

$$\omega_1 = \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx + dy - \frac{2}{\bar{y}} d\bar{y}.$$

Она замкнута и ее интеграл равен

$$f = \int \omega_1 = -\ln(1 + \cos x) + y - 2 \ln \bar{y}.$$

Так как искомое интегральное многообразие должно проходить через точку (a, a') , то оно задается равенством $f = 0$. Выражая $\bar{y}$ через x, y , окончательно получаем, что искомый локальный диффеоморфизм имеет вид:

$$\varphi: (x, y) \mapsto \left(\bar{x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \bar{y} = \frac{e^{y/2}}{(1 + \cos x)^{1/2}} \right).$$

Список литературы

1. Бернштейн И. Н., Розенфельд И. Б. Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений // УМН. 1973. Т. 28. №5. С. 103–138.
2. Винберг Э. Б., Онищук А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
4. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.
5. Кобаяси Ш., Номидзу Т. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1969.
6. Лосик М. В. О характеристических классах структур на многообразиях // Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. №3. С. 38–52.
7. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
9. Онищук А. Л. Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 45–88.
10. Онищук А. Л. Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физматлит, 1995.
11. Стернберг Ш. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1989.
12. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.

13. *Duzhin S. V., Lychagin V. V.* Symmetries of distributions and quadrature of ordinary differential equations // *Acta Appl. Math.* 1991. V. 24. P. 25–37.
14. *Gardner R. B.* The method of equivalence and its applications. Philadelphia: SIAM, 1989.
15. *Griffiths P.* On Cartan method of Lie groups and moving frames as applied to existence and uniqueness questions in differential geometry // *Duke Math. J.* 1974. V. 41. P. 775–814.
16. *Hermann R.* Equivalence invariants for submanifolds of homogeneous spaces // *Math. Ann.* 1965. V. 158. P. 284–289.
17. *Hermann R.* Lie groups: History, frontiers and applications. Vol. I. Sophus Lie's 1880 transformation group paper. Brookline: Math. Sci. Press, 1975.
18. *Komrakov B. P., Lychagin V. V.* Symmetries and integrals // Preprint. Univ. Oslo. 1993. V. 15.
19. *Lie S.* Allgemeine Untersuchung über Differentialgleichungen, die eine kontinuierliche, endliche Gruppe gestatten // *Math. Ann.* 1885. V. 25 (1). P. 71–151.
20. *Lie S.* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig: Teubner, 1891.
21. *Lie S.* Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen. Leipzig: Teubner, 1893.
22. *Olver P.* Symmetry, invariants, and equivalence. New York: Springer-Verlag, 1995.
23. *Shnider S., Winternitz P.* Nonlinear equations with superposition principles and the theory of transitive primitive Lie algebras // *Lett. Math. Phys.* 1984. V. 8. P. 69–78.
24. *Sulanke R.* On E. Cartan's method of moving frame // *Colloq. Math. Soc. János Bolyai.* 1979. V. 31. P. 681–704.

Международный Центр “Софус Ли”

Поступила в редакцию
31.05.1999