Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Матричные аналоги В-функции и формула Планшереля для ядер-
представлений Березина, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 5, 67–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-
гласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:13:22

УДК 519.46

Ю. А. Неретин

Матричные аналоги В-функции и формула Планшереля для kern-представлений Березина

В статье строится 10 серий матричных интегралов (по некомпактным римановым симметрическим пространствам), имитирующих обычную бета-функцию. Конструкция существенно обобщает интегралы Хуа Ло Кена 1958 г. и бета-интегралы Гиндикина 1964 г.

Как следствие мы получаем явную формулу Планшереля для kern-представлений Березина классических групп.

Обсуждаются также матричные модели римановых некомпактных симметрических пространств.

Библиография: 20 названий.

Настоящая статья имеет две цели. Первая – вычисление набора матричных интегралов, имитирующих В-функцию

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^\rho} = B(\alpha, \rho - \alpha),$$

вторая – получение формулы Планшереля для kern-представлений Березина.

Мы строим 10 серий В-интегралов (0.1)–(0.18) по различным пространствам матриц, из этих 10 серий 7 являются новыми.

Первые частные случаи матричных В-интегралов рассматривались в 1935 году Зигелем [1] и в 1958 году Хуа Ло Кеном [2]. В 1964 году Гиндикин [3] построил 3 серии В-интегралов, связанных с матричными конусами (см. ниже (0.1)–(0.3)). Остальные серии более сложны, и никаких их частных случаев, за исключением интегралов Хуа Ло Кена, долгое время в литературе не появлялось. Возможно, что некоторые частные случаи В-интегралов были вычислены в 1978 году Березиным, во всяком случае анонсированные в [4] результаты легко к В-интегралам сводятся (и в свою очередь влекут формулы (0.5), (0.8), (0.10), (0.15) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \tau_1 = \tau_2 = \dots$). Березин вскоре погиб, и продолжения упомянутой работы не последовало. Доказательства результатов Березина были опубликованы лишь в 1994 году Упмайером и Унтерберже [5].

Основное содержание настоящей статьи (§§0, 4–8) состоит в вычислении В-интегралов (и оно по существу не зависит от §§1–3). Вычисления вполне элементарны, хотя и не совсем просты. В п. 4.1 мы рассматриваем простейший случай (матричные конусы). Основное вычисление, необходимое для понимания работы,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00303) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96-01-96249).

содержится в п. 5.1. Для ряда серий есть еще одна серьезная техническая трудность, которая преодолевается в п. 6.1. То, что находится за пределами пп. 4.1, 5.1, 6.1, есть вариация вычислений, содержащихся в этих пунктах, хотя неочевидная.

Областью интегрирования в матричных В-интегралах являются некоторые пространства матриц, которые отождествляются с римановыми некомпактными симметрическими пространствами¹

$$\begin{aligned} G/K &= \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{O}(n), \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{U}(n), \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) / \mathrm{Sp}(n), \\ &\mathrm{U}(p, q) / \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q), \mathrm{O}(p, q) / \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q), \mathrm{Sp}(p, q) / \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q), \\ &\mathrm{O}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{O}(n), \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) / \mathrm{Sp}(n), \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) / \mathrm{U}(n), \mathrm{SO}^*(2n) / \mathrm{U}(n). \end{aligned}$$

Модели римановых некомпактных симметрических пространств (матричные шары, матричные клинья, сечения клина) обсуждаются в §§ 1–3 нашей работы.

Керн-представление (см. недавние работы на эту тему [5]–[11]) есть некоторая естественная деформация пространства L^2 на римановом некомпактном симметрическом пространстве. Формальное определение (с которым мы и работаем) дается в п. 1.4. Керн-представление можно также определить как ограничение представления со старшим весом на симметрическую подгруппу, удовлетворяющую некоторым условиям; например, керн-представления $\mathrm{O}(p, q)$ получаются ограничением голоморфных представлений $\mathrm{O}(p, q)$. Более подробное обсуждение см. в [10]–[12].

Формулу Планшереля (9.2) для керн-представлений (в случае достаточно большого параметра представления) мы получаем в § 9. Явную формулу Планшереля мы приводим лишь в случае групп $\mathrm{O}(p, q)$, для остальных серий она уже получается автоматически комбинацией интегралов (0.1)–(0.11), (0.14), (0.15), (0.17), (0.18) с классической формулой Гиндикина–Карпелевича.

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [11], [12]. При малых значениях параметра представления формула Планшереля (9.2) неверна, и она заменяется на более замысловатую формулу, включающую много слагаемых с длинными произведениями Γ -функций. Эта формула получена в [12]. Слагаемые в формуле Планшереля соответствуют каноническому разложению керн-представления в прямую сумму приводимых представлений. Это разложение обсуждается в [11] (там же строятся явно вычисляемые интегралы по компактным симметрическим пространствам, напоминающие наши В-интегралы, но зависящие от меньшего числа параметров).

Я благодарю В. Ф. Молчанова, объяснившего мне содержание работы [4].

§ 0. Формулы для интегралов

0.0. Обозначения. Через $\mathbb{K}$ будем обозначать $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$; через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – кватернионные мнимые единицы. Символ t обозначает транспонирование матрицы; A^* – это сопряженная матрица к матрице A , т.е. матрица, полученная транспонированием вместе с сопряжением (комплексным или кватернионным) матричных элементов. Для вещественных матриц $A^* := A^t$. Нестандартный символ $z^{[g]}$ вводится формулой (1.1).

¹Есть еще две довольно простые серии сходных интегралов, связанных с трубами будущего (мы их опускаем), и несколько экзотических интегралов, связанных с особыми группами.

Через $[g]_p$ мы будем обозначать *левый верхний блок размера $p \times p$ матрицы g* .

Символ $\det g$, как обычно, обозначает определитель. В случае, если g – оператор в $\mathbb{H}^n$, мы рассматриваем g как оператор $g_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ и полагаем $\det g = \sqrt[4]{\det g_{\mathbb{R}}}$.

Символ $T \gg 0$ будет обозначать, что матрица T эрмитова (т.е. $T = T^*$) и положительно определена (т.е. для любого ненулевого вектора-строки q выполнено $qTq^* > 0$). Напомним, что квадратная матрица R называется *диссипативной*, если $R + R^* \gg 0$. Для любой диссипативной матрицы R и для любого комплексного τ корректно определено число $\det R^\tau = \det(R^\tau)$. Действительно, пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы R . Тогда вещественные части чисел λ_j строго больше нуля. Теперь мы можем положить

$$\det R^\tau := \exp \left\{ \tau \sum \ln \lambda_j \right\},$$

а в кватернионном случае

$$\det R^\tau = \det R_{\mathbb{R}}^{\tau/4}.$$

Мы также вводим нестандартное обозначение

$$a^{\{\sigma \parallel \tau\}} := a^\sigma \bar{a}^\tau, \quad a, \lambda, \tau \in \mathbb{C},$$

и аналогичное обозначение для *комплексных диссипативных* матриц R :

$$\det R^{\{\sigma \parallel \tau\}} := \det R^\sigma \overline{\det R}^\tau.$$

Символ dT , где T – матрица, обозначает меру Лебега на пространстве матриц. При этом мы фиксируем нормировку, которая сейчас будет объяснена. Пусть, например, T пробегает пространство эрмитовых матриц размера $n \times n$, пусть t_{kk} – диагональные матричные элементы матрицы T , а $t_{km} = p_{km} + iq_{km}$ – элементы, лежащие вне диагонали. Тогда мы полагаем

$$dT = \prod_{k=1}^n dt_{kk} \prod_{1 \leq k < m \leq n} dp_{km} dq_{km}.$$

Точно так же мы поступаем в пространствах матриц других типов (симметричных, кососимметричных и т. д.).

Мы переходим к перечню вычисленных в статье (§§ 4–8) интегралов по симметрическим пространствам. Обсуждение моделей симметрических пространств содержится в §§ 1–3.

Во всех случаях $\lambda_j, \sigma_j, \tau_j \in \mathbb{C}$, при этом полагаем

$$\lambda_{n+1} = 0, \quad \sigma_{n+1} = 0, \quad \tau_{n+1} = 0.$$

Условия абсолютной сходимости интегралов мы явно не формулируем, потому что они видны из ответа.

0.1. Интегралы по пространствам $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{O}(n)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{U}(n)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) / \mathrm{Sp}(n)$. Обозначим через $C_n(\mathbb{K})$ пространство положительно определенных эрмитовых матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{K}$. В § 4 выводятся следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_{T \in C_n(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det(1 + [T]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det T^{-(n+1)/2} dT \\ = \prod_{k=1}^n \pi^{(k-1)/2} \frac{\Gamma(\lambda_k - (k-1)/2) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - (n-k)/2)}{\Gamma(\sigma_k - (n-k)/2)}, \end{aligned} \quad (0.1)$$

$$\begin{aligned} \int_{T \in C_n(\mathbb{C})} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det(1 + [T]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det T^{-n} dT \\ = \prod_{k=1}^n \pi^{k-1} \frac{\Gamma(\lambda_k - k + 1) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - n + k)}{\Gamma(\sigma_k - n + k)}, \end{aligned} \quad (0.2)$$

$$\begin{aligned} \int_{T \in C_n(\mathbb{H})} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det(1 + [T]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det T^{-(2n-1)} dT \\ = \prod_{k=1}^n \pi^{2k-2} \frac{\Gamma(\lambda_k - 2k + 2) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - 2n + 2k)}{\Gamma(\sigma_k - 2n + 2k)}. \end{aligned} \quad (0.3)$$

0.2. Интегралы по пространствам $\mathrm{O}(n, n) / \mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n, n) / \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$, $\mathrm{Sp}(n, n) / \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(n)$. Через $W_n(\mathbb{K})$ мы обозначим пространство диссипативных матриц R над $\mathbb{K}$ размера $n \times n$. Мы будем записывать матрицы R в виде $R = T + S$, где $T = T^* \gg 0$, а $S^* = -S$. В § 5 доказываются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_{T+S \in W_n(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + T + S]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det T^{-n} dT dS \\ = \prod_{k=1}^n \frac{\pi^{k-1} \Gamma(\lambda_k - (n+k)/2 + 1) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - (n-k)/2)}{\Gamma(\sigma_k - n + k)}, \end{aligned} \quad (0.4)$$

$$\begin{aligned} \int_{T+S \in W_n(\mathbb{C})} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + T + S]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \parallel \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \det T^{-2n} dT dS \\ = \prod_{k=1}^n 2^{2(n-k+1) - \sigma_k - \tau_k} \pi^{2k-1} \frac{\Gamma(\lambda_k - n - k + 1) \Gamma(\sigma_k + \tau_k - \lambda_k - n + k)}{\Gamma(\sigma_k - n + k) \Gamma(\tau_k - n + k)}, \end{aligned} \quad (0.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{T+S \in W_n(\mathbb{H})} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + T + S]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det T^{-4n} dT dS \\ = \prod_{k=1}^n 2^{\sigma_k - 4(n-k+1)} \pi^{4k-3} \frac{\Gamma(\lambda_k - 2(n+k) + 1) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - 2(n-k))}{\Gamma(\sigma_n/2 - 2(n-k)) \Gamma(\sigma_n/2 - 2(n-k) - 1)}. \end{aligned} \quad (0.6)$$

0.3. Интегралы по пространствам $O(p, q)/O(p) \times O(q)$, $U(p, q)/U(p) \times U(q)$, $Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$. Пусть $p \leq q$. Определим пространство $SW_{p,q}(\mathbb{K})$. Его точками являются пары (K, L) , где K – матрица размера $p \times p$, а L – матрица размера $p \times (q - p)$, причем

$$\frac{1}{2}(K + K^*) - LL^* \gg 0.$$

Представим матрицу K в виде $K = M + N$, где $M = M^*$, $N = -N^*$. В §6 вычисляются следующие интегралы:

$$\begin{aligned} & \int_{SW_{p,q}(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^p \frac{\det[M - LL^*]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + M + N]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det(M - LL^*)^{-(p+q)/2} dM dN dL \\ &= \prod_{k=1}^p \pi^{k-(q-p)/2-1} \frac{\Gamma(\lambda_k - (q+k)/2 + 1) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - (p-k)/2)}{\Gamma(\sigma_k - p + k)}, \end{aligned} \quad (0.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{SW_{p,q}(\mathbb{C})} \prod_{j=1}^p \frac{\det[M - LL^*]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + M + N]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \parallel \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \det(M - LL^*)^{-(p+q)} dM dN dL \\ &= \prod_{k=1}^p 2^{2(p-k) - \sigma_k - \tau_k} \pi^{2k-1} \frac{\Gamma(\lambda_k - (q+k) + 1) \Gamma(\sigma_k + \tau_k - \lambda_k - p + k)}{\Gamma(\sigma_k - p + k) \Gamma(\tau_k - p + k)}, \end{aligned} \quad (0.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{SW_{p,q}(\mathbb{H})} \prod_{j=1}^p \frac{\det[M - LL^*]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + M + N]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det(M - LL^*)^{-2(p+q)} dM dN dL \\ &= \prod_{k=1}^p 2^{4(p-k+1) - \sigma_k} \pi^{2(q+k)-3} \frac{\Gamma(\lambda_k - 2(q+k) + 1) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - 2(p-k))}{\Gamma(\sigma_k/2 - 2(p-k)) \Gamma(\sigma_k/2 - 2(p-k) - 1)} \end{aligned} \quad (0.9)$$

(мы полагаем $\lambda_{p+1} = \sigma_{p+1} = \tau_{p+1} = 0$).

0.4. Интегралы по пространствам $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$ и $Sp(2n, \mathbb{C})/Sp(n)$. Мы реализуем симметрическое пространство $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$ как пространство комплексных симметрических матриц R размера $n \times n$ с положительно определенной вещественной частью. Запишем матрицу R в виде $R = T + iS$, где матрицы T, S вещественны. В §7 вычисляется следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{T=T^t \gg 0, S=S^t} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + T + iS]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \parallel \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \det T^{-(n+1)} dT dS \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{2^{2-\sigma_k - \tau_k + n-k} \pi^k \Gamma(\lambda_k - (n+k)/2) \Gamma(\sigma_k + \tau_k - \lambda_k - (n-k)/2)}{\Gamma(\sigma_k - (n-k)/2) \Gamma(\tau_k - (n-k)/2)}. \end{aligned} \quad (0.10)$$

Пространство $Sp(2n, \mathbb{C})/Sp(n)$ мы реализуем как множество пар (T, S) комплексных матриц размера $n \times n$, удовлетворяющих условиям

$$T = T^* \gg 0, \quad S = S^t.$$

Пусть $\mathbf{j}$ — одна из кватернионных мнимых единиц. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{T=T^* \gg 0, S=S^t} \prod_{s=1}^n \frac{\det[T]_s^{\lambda_s - \lambda_{s+1}}}{\det[1 + T + S\mathbf{j}]_s^{\sigma_s - \sigma_{s+1}}} \det T^{-(2n+1)} dT dS \\ &= \prod_{k=1}^n 2\pi^{2k-1} \frac{\Gamma(\lambda_k - (n+k))\Gamma(\sigma_k - \lambda_k - (n-k))}{\Gamma(\sigma_k - 2(n-k) - 1)}. \end{aligned} \quad (0.11)$$

0.5. Интегралы по пространствам $O(n, \mathbb{C})/O(n)$, $SO^*(2n)/U(n)$. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (0.12)$$

Пространство $O(2n, \mathbb{C})/O(2n)$ (соответственно $SO^*(4n)/U(2n)$) мы реализуем как пространство матриц R размера $2n \times 2n$ над $\mathbb{R}$ (соответственно над $\mathbb{C}$), удовлетворяющих условиям

$$J^{-1}R^tJ = R, \quad R + R^* \gg 0. \quad (0.13)$$

Положим $R = T + S$, где $T = T^*$, $S = -S^*$. Тогда в случае $O(2n, \mathbb{C})/O(2n)$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_{2j}^{(\lambda_j - \lambda_{j+1})/2}}{\det[1 + T + S]_{2j}^{(\sigma_j - \sigma_{j+1})/2}} \det T^{-(2n-1)/2} dT dS \\ &= \prod_{k=1}^n \pi^{2k-2} \frac{\Gamma(\lambda_k - (n+k) + 2)\Gamma(\sigma_k - \lambda_k - (n-k))}{\Gamma(\sigma_k - (n-k))}, \end{aligned} \quad (0.14)$$

а в случае $SO^*(4n)/U(2n)$

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_{2j}^{(\lambda_j - \lambda_{j+1})/2}}{\det[1 + T + S]_{2j}^{\{(\sigma_j - \sigma_{j+1})/2\} \parallel (\tau_j - \tau_{j+1})/2\}} \det T^{-(2n-1)} dT dS \\ &= \prod_{k=1}^n 2^{2+4(n-k)-\sigma_k-\tau_k} \pi^{4k-3} \frac{\Gamma(\lambda_k - 2(n+k) + 3)\Gamma(\sigma_k + \tau_k - \lambda_k - 2(n-k))}{\Gamma(\sigma_k - 2(n-k))\Gamma(\tau_k - 2(n-k))}. \end{aligned} \quad (0.15)$$

Пространства $O(2n+1, \mathbb{C})/O(2n+1)$ и $SO^*(4n+2)/U(2n+1)$ мы реализуем как пространства матриц R размера $(1+1+2n) \times (1+1+2n)$, имеющих блочное строение вида

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad (0.16)$$

удовлетворяющих условию (0.13). Тогда в случае $O(2n+1, \mathbb{C})/O(2n+1)$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^n \frac{\det[R + R^t]_{2j+2}^{(\lambda_j - \lambda_{j+1})/2}}{\det[1 + R]_{2j+2}^{(\sigma_j - \sigma_{j+1})/2}} \det(R + R^*)^{-n} dR \\ &= C_1 \prod_{k=1}^n \pi^{2k-1} \frac{\Gamma(\lambda_k - (n+k) + 1) \Gamma(\sigma_k - \lambda_k - (n-k))}{\Gamma(\sigma_k - (n-k))}, \end{aligned} \quad (0.17)$$

а в случае $SO^*(4n+2)/U(2n+1)$

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^n \frac{\det[R + R^*]_{2j+2}^{(\lambda_j - \lambda_{j+1})/2}}{\det[1 + R]_{2j+2}^{\{(\sigma_j - \sigma_{j+1})/2 \| (\tau_j - \tau_{j+1})/2\}}} \det(R + R^*)^{-2n} dR \\ &= C_2 \prod_{k=1}^n \pi^{4k-1} \frac{\Gamma(\lambda_k - 2(n+k) + 2) \Gamma(\sigma_k + \tau_k - \lambda_k - 2(n-k))}{\Gamma(\sigma_k - 2(n-k)) \Gamma(\tau_k - 2(n-k))}, \end{aligned} \quad (0.18)$$

где C_1, C_2 – некоторые степени двойки.

0.6. Известные частные случаи. а) Интегралы Хуа Ло Кена [2], т.е. интегралы по матричным шарам (см. §1) вида $\int \det(1 - zz^*)^\alpha dz$, сводятся к весьма частным случаям наших интегралов с помощью преобразования Кэли $z = (1 + R)^{-1}(1 - R)$.

б) Интегралы (0.1)–(0.3) есть В-функция Гиндикина.

в) Березин в одной из своих последних работ [4] анонсировал формулу Планшереля для kern-представлений групп $U(p, q)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $SO^*(2n)$. Фактически это равносильно вычислению интегралов (0.5), (0.8), (0.10), (0.15), (0.18) при $\sigma_1 = \tau_1 = \sigma_2 = \tau_2 = \dots$. Доказательства были опубликованы Упмайером и Унтерберже в [5]. Мы же используем иной метод вычисления.

г) Формула Планшереля известна также для групп ранга 1 (т.е. $O(n, 1)$, $Sp(n, 1)$, см. [7]); этот случай, однако, принципиально проще случая групп большого ранга, и наши вычисления полностью тривиализуются.

§1. Модели симметрических пространств: матричные шары

1.1. Матричные шары. Под *нормой* матрицы мы будем всегда подразумевать норму оператора из координатного евклидова пространства $\mathbb{K}^p$ в евклидово пространство $\mathbb{K}^q$. Под *матричным шаром* мы подразумеваем

или множество всех матриц над $\mathbb{K}$ размера $p \times q$ с нормой < 1 (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$),

или множество всех матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{K}$, удовлетворяющих одному из условий симметричности: *симметричность* ($z = z^t$), *кососимметричность* ($z = -z^t$), *эрмитовость* ($z = z^*$), *антиэрмитовость* ($z = -z^*$).

Пусть G – одна из классических групп $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{H})$, $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(p, q)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{C})$, $SO^*(2n)$. Пусть K – максимальная компактная подгруппа в G . Любое некомпактное риманово симметрическое пространство G/K имеет реализацию типа матричного шара (см. [13]). Сейчас мы

перечислим эти реализации; напомним, что *во всех случаях рассматривается пространство матриц с нормой < 1* :

1. $O(p, q) / O(p) \times O(q)$ – матрицы над $\mathbb{R}$ размера $p \times q$;
2. $GL(n, \mathbb{R}) / O(n)$ – симметричные матрицы над $\mathbb{R}$ размера $n \times n$;
3. $O(n, \mathbb{C}) / O(n)$ – кососимметричные матрицы над $\mathbb{R}$ размера $n \times n$;
4. $U(p, q) / U(p) \times U(q)$ – матрицы над $\mathbb{C}$ размера $p \times q$;
5. $Sp(2n, \mathbb{R}) / U(n)$ – симметричные матрицы над $\mathbb{C}$ размера $n \times n$;
6. $SO^*(2n) / U(n)$ – кососимметричные матрицы над $\mathbb{C}$ размера $n \times n$;
7. $GL(n, \mathbb{C}) / U(n)$ – эрмитовы матрицы над $\mathbb{C}$ размера $n \times n$;
8. $Sp(p, q) / Sp(p) \times Sp(q)$ – матрицы над $\mathbb{H}$ размера $p \times q$;
9. $GL(n, \mathbb{H}) / Sp(n)$ – эрмитовы матрицы над $\mathbb{H}$ размера $n \times n$;
10. $Sp(2n, \mathbb{C}) / Sp(n)$ – антиэрмитовы матрицы над $\mathbb{H}$ размера $n \times n$.

Группа G во всех случаях действует на матричном шаре дробно-линейными преобразованиями, т.е. преобразованиями вида

$$g: z \mapsto z^{[g]} := (\alpha + z\gamma)^{-1}(\beta + z\delta). \quad (1.1)$$

Более того, группа G состоит из всех дробно-линейных преобразований, переводящих матричный шар в себя. Опишем эту группу более явно.

В случаях 1, 4, 8 (т.е. $G = U(p, q, \mathbb{K})$) мы рассмотрим пространство $\mathbb{K}^p \oplus \mathbb{K}^q$, снабженное знаконеопределенной эрмитовой формой $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мы реализуем псевдоунитарную группу $U(p, q, \mathbb{K})$ над $\mathbb{K}$ (т.е. одну из групп $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(p, q)$) как группу блочных матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ размера $(p+q) \times (p+q)$, сохраняющих эрмитову форму M .

В остальных случаях мы рассмотрим пространство $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$, снабженное знаконеопределенной эрмитовой формой $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Элементы группы G по-прежнему сохраняют эту форму, но кроме того они сохраняют еще одну форму Λ , зависящую от пространства матриц:

а) в случае пространств симметрических матриц (т.е. $G/K = GL(n, \mathbb{R})/O(n)$, $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$) форма Λ – это кососимметричная билинейная форма с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) для пространств кососимметрических матриц (т.е. $G/K = O(n, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{R})$, $SO^*(2n)/U(n)$) форма Λ – это симметричная билинейная форма с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) в случае пространств эрмитовых матриц (т.е. $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$, $GL(n, \mathbb{C})/U(n)$, $GL(n, \mathbb{H})/Sp(n)$) форма Λ – это антиэрмитова форма с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; напомним, что полуторалинейная форма Λ называется *антиэрмитовой*, если $\Lambda(v, w) = -\overline{\Lambda(w, v)}$ для всех v, w ;

г) в случае пространств антиэрмитовых матриц (т.е. $Sp(2n, \mathbb{C})/Sp(n)$) форма Λ – это эрмитова форма с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Во всех случаях стабилизатор точки $z = 0$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G$, где матрицы α и δ унитарны над $\mathbb{K}$; отметим, что в случаях 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10 (т.е. $G \neq \mathrm{U}(p, q, \mathbb{K})$) выполнено условие $\delta = \alpha^{*-1}$.

1.2. Якобиан.

ЛЕММА 1.1. *Дифференциал отображения $z \mapsto z^{[g]}$ в точке z равен*

$$(\alpha + z\gamma)^{-1}dz(-\gamma z^{[g]} + \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно вычислить с точностью до $o(\varepsilon)$ выражение

$$\begin{aligned} & (\alpha + (z + \varepsilon u)\gamma)^{-1}(b + (z + \varepsilon u)\delta) \\ &= (\alpha + z\gamma)^{-1}(1 + \varepsilon u\gamma(\alpha + z\gamma)^{-1})^{-1}(\beta + z\delta + \varepsilon u\delta) \\ &= (\alpha + z\gamma)^{-1}(1 - \varepsilon u\gamma(\alpha + z\gamma)^{-1} + o(\varepsilon))(\beta + z\delta + \varepsilon u\delta) \\ &= (\alpha + z\gamma)^{-1}(\beta + z\delta) + \varepsilon(\alpha + z\gamma)^{-1}u[-\gamma(\alpha + z\gamma)^{-1}(\beta + z\delta) + \delta] + o(\varepsilon) \\ &= z^{[g]} + \varepsilon(\alpha + z\gamma)^{-1}u(-\gamma z^{[g]} + \delta) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Напомним формулу для определителя блочной матрицы (см. [14; §II.5]), которая будет часто использоваться:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B). \quad (1.2)$$

ЛЕММА 1.2.

$$\det(-\gamma z^{[g]} + \delta) = (\det g) \det(\alpha + z\gamma)^{-1}. \quad (1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\det(-\gamma z^{[g]} + \delta) = \det(-\gamma(\alpha + z\gamma)^{-1}(\beta + z\delta) + \delta).$$

Применяя формулу (1.2), мы приводим это выражение к виду

$$\det(\alpha + z\gamma)^{-1} \det \begin{pmatrix} \alpha + z\gamma & \beta + z\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \det(\alpha + z\gamma)^{-1} \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Леммы 1.1 и 1.2 влекут следующее высказывание.

ЛЕММА 1.3. *Якобиан преобразования $g \mapsto z^{[g]}$ в точке z равен*

$$|\det(\alpha + z\gamma)|^{-h},$$

где $h = (p + q) \dim \mathbb{K}$ в случаях 1, 4, 8 и $h = \frac{2}{n} \dim G/K$ в остальных случаях.

1.3. Инвариантная мера.

ЛЕММА 1.4.

$$1 - z^{[g]}(z^{[g]})^* = (\alpha + z\gamma)^{-1}(1 - zz^*)(\alpha + z\gamma)^{*-1}. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned}
 1 - z^{[g]}(z^{[g]})^* &= 1 - (\alpha + z\gamma)^{-1}(\beta + z\delta)(\beta^* + \delta^*z^*)(\alpha^* + \gamma^*z^*)^{-1} \\
 &= (\alpha + z\gamma)^{-1}\{(\alpha + z\gamma)(\alpha^* + \gamma^*z^*) - (\beta + z\delta)(\beta^* + \delta^*z^*)\}(\alpha^* + \gamma^*z^*)^{-1},
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

но

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и поэтому множитель, стоящий в (1.5) в фигурных скобках, имеет искомый вид.

СЛЕДСТВИЕ 1.5.

$$\det(1 - z^{[g]}(z^{[g]})^*) = |\det(\alpha + z\gamma)|^{-2} \det(1 - zz^*).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Мера на матричном шаре, инвариантная относительно группы G , задается формулой

$$|\det(1 - zz^*)|^{-h/2} dz,$$

где h определяется в лемме 1.3, а dz обозначает меру Лебега на пространстве матриц.

Доказательство вытекает из леммы 1.3 и следствия 1.5.

1.4. Керн-представления. Рассмотрим функцию на матричном шаре G/K , заданную формулой

$$\mathcal{B}_\alpha(z) = \det(1 - zz^*)^{-\alpha}.$$

Мы можем рассматривать $\mathcal{B}_\alpha(z)$ как функцию на группе G , а именно, положим

$$\mathcal{B}_\alpha(g) := \mathcal{B}_\alpha(0^{[g]}).$$

Керн-представление T_α группы G — это унитарное представление, в котором есть циклический вектор v такой, что

$$\langle T_\alpha(g)v, v \rangle = \mathcal{B}_\alpha(g).$$

Чтобы это определение имело смысл, необходимо, чтобы функция $\mathcal{B}_\alpha(g)$ на группе G была положительно определенной. Условия положительной определенности функций $\mathcal{B}_\alpha(g)$ были получены Березиным в [15].² Например, для серии групп $O(p, q)$ они состоят в следующем:

$$2\alpha = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad \text{или} \quad 2\alpha > p-1$$

(мы предполагаем, что $p \leq q$). Для остальных серий ответ выглядит похожим образом.

Подробное обсуждение, более эстетичные и более “материальные” определения керн-представлений можно найти в [10]–[12], см. также недавние работы [5], [6], [8].

²Теорема Березина о классификации представлений со старшим весом формулировалась несколько иначе, см. обсуждение в [12]; утверждения, несколько усиливающие теорему Березина, были позднее получены Гиндикиным, Вернь (Vergne) и Росси (Rossi), Валлахом (Wallach).

§ 2. Модели симметрических пространств: симметрические конусы и симметрические клинья

Для проводимых ниже вычислений модели симметрических пространств типа матричного шара не очень удобны. Наша цель в §§ 2, 3 – построить реализации, в которых действие параболической подгруппы задается аффинными преобразованиями. Наши реализации близки к реализациям из [16].

2.1. Преобразование Кэли. Преобразование Кэли – это преобразование пространства квадратных матриц, заданное формулой

$$z = \frac{1 - R}{1 + R} = -1 + (1 + R)^{-1}, \quad (2.1)$$

$$R = \frac{1 - z}{1 + z} = -1 + (1 + z)^{-1}. \quad (2.2)$$

По лемме 1.1 дифференциал преобразования Кэли имеет вид

$$dR = 2(1 + z)^{-1} dz (1 + z)^{-1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.

- a) $zz^* = 1 \iff R = -R^*$;
- b) $\|z\| < 1 \iff R + R^* \gg 0$;
- c) $z = z^t \iff R = R^t$;
- d) $z = z^* \iff R = R^*$.

Утверждения a), b) общеизвестны, а c), d) очевидны.

2.2. Симметрические конусы. Из предложения 2.1 b), d) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Преобразование Кэли переводит матричный шар

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) / \mathrm{U}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{O}(n), \quad \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{U}(n), \quad \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) / \mathrm{Sp}(n)$$

в конус положительно определенных эрмитовых матриц над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ соответственно.

Таким образом, мы получили другую реализацию для только что перечисленных симметрических пространств. Группа $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ действует на конусе положительно определенных матриц по формуле

$$A: T \mapsto ATA^*.$$

2.3. Клинь диссипативных матриц. Из предложения 2.1 b) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Преобразование Кэли переводит матричный шар

$$\begin{aligned} &\mathrm{U}(n, n, \mathbb{K}) / \mathrm{U}(n, \mathbb{K}) \times \mathrm{U}(n, \mathbb{K}) \\ &= \mathrm{O}(n, n) / \mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n), \quad \mathrm{U}(n, n) / \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n), \quad \mathrm{Sp}(n, n) / \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(n) \end{aligned}$$

в множество диссипативных матриц над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ соответственно.

Группу $G = \mathrm{U}(n, n, \mathbb{K})$ в этом случае удобно рассматривать как группу матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ над $\mathbb{K}$, сохраняющих эрмитову форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Группа G действует на пространстве диссипативных матриц дробно-линейными преобразованиями

$$R \mapsto R^{[g]} := (a + Rc)^{-1}(b + Rd). \quad (2.3)$$

2.4. Верхняя полуплоскость Зигеля. В силу предложения 2.1 b), c) в случае матричного шара $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) / \mathrm{U}(n)$ (комплексные симметричные матрицы) образ преобразования Кэли есть множество комплексных симметричных матриц с положительно определенной вещественной частью.

2.5. Пространство $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) / \mathrm{Sp}(n)$. В этом случае к антиэрмитовым кватернионным матрицам z мы применяем слегка видоизмененное преобразование Кэли

$$R = -1 + 2(1 + iz)^{-1}.$$

Образ этого преобразования состоит из кватернионных матриц R , удовлетворяющих условию

$$R^* = i^{-1} R i, \quad R + R^* \gg 0. \quad (2.4)$$

Если мы запишем R в виде $R = S + Tj$, где R, S – комплексные матрицы, то условие (2.4) перейдет в

$$T = T^*, \quad S = S^t, \quad T \gg 0.$$

2.6. Пространства $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C}) / \mathrm{O}(2n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}^*(4n) / \mathrm{U}(2n)$. Напомним, что соответствующие матричные шары состоят из кососимметричных матриц размера $2n \times 2n$ над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Определим матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Далее рассмотрим видоизмененное преобразование Кэли

$$R = -1 + (1 + JZ)^{-1}.$$

Образ матричного шара состоит из матриц R , удовлетворяющих условию

$$R^t = J R J^{-1}, \quad R + R^* \gg 0. \quad (2.6)$$

Мы продолжим обсуждение этих пространств в §8.

2.7. Инвариантная мера.

ЛЕММА 2.4. Пусть z и R связаны посредством преобразования Кэли (2.1). Тогда

$$1 - zz^* = 2(1 + R)^{-1}(R + R^*)(1 + R^*)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} 1 - zz^* &= 1 - (1 + R)^{-1}(1 - R)(1 - R^*)(1 + R^*)^{-1} \\ &= (1 + R)^{-1}\{(1 + R)(1 + R^*) - (1 - R)(1 - R^*)\}(1 + R^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Далее раскрываем скобки в среднем сомножителе.

Это высказывание влечет два следствия. Во-первых, позволяет переписать функции $\mathcal{B}_\alpha$ (см. п. 1.4) в новых координатах. Во всех случаях (см. пп. 2.1–2.6) выполнено

$$\mathcal{B}_\alpha(R) = \left(\frac{\det(2(R + R^*))}{|\det(1 + R)|^2} \right)^\alpha. \quad (2.7)$$

Во-вторых, лемма 2.4 и предложение 1.6 дают формулу для G -инвариантной меры на конусе или клине. Во всех перечисленных выше случаях эта мера задается формулой

$$\det(R + R^*)^{-\frac{\dim(G/K)}{m}} dR, \quad (2.8)$$

где m – размер рассматриваемых матриц.

2.8. Действие параболической подгруппы. В случае симметрических конусов $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) / \mathrm{U}(n, \mathbb{K})$ мы выберем в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ минимальную параболическую подгруппу $\mathcal{P}$, состоящую из нижнетреугольных матриц. Тогда, очевидно, функции

$$\prod_{j=1}^n \det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}} \quad (2.9)$$

являются собственными функциями для подгруппы $\mathcal{P}$.

В случае, когда пространство G/K есть клин диссипативных матриц (т.е. в случае $\mathrm{U}(n, n, \mathbb{K}) / \mathrm{U}(n, K) \times \mathrm{U}(n, K)$), мы определим группу $\mathcal{P}$, состоящую из преобразований клина вида

$$R \mapsto QRQ^* + S,$$

где $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ – нижнетреугольная матрица, а $S = -S^*$. Легко видеть, что $\mathcal{P}$ – минимальная параболическая подгруппа в $G = \mathrm{U}(n, n, \mathbb{K})$.

Функции на клине, собственные относительно группы $\mathcal{P}$, имеют вид (2.9), где $T = (R + R^*)/2$.

Для остальных симметрических клиньев картина аналогична.

2.9. Комментарии к внешнему виду интегралов §0. Теперь мы готовы объяснить смысл некоторых сомножителей, стоящих подинтегралами (0.1)–(0.18). Последний сомножитель – плотность инвариантной меры (см. (2.8), в принципе его можно было бы включить в числитель дроби). В числителе дроби стоит функция $\prod_{j=1}^n \det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}$, собственная относительно минимальной параболической подгруппы.

Смысл произведения, стоящего в знаменателе, мне не ясен. Во всяком случае (см. (2.7), (2.8)), среди наших подынтегральных выражений встречаются всевозможные произведения вида $\mathcal{B}_\alpha(R) \cdot \prod_{j=1}^n \det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}$.

§ 3. Модели симметрических пространств типа сечения клина

В этом параграфе мы обсуждаем симметрические пространства, которые не удается реализовать в виде матричного конуса или клина.

3.1. Случай $G = U(p, q)/U(p) \times U(q)$. Обозначим через $B_{\alpha, \beta} = B_{\alpha, \beta}(\mathbb{K})$ пространство матриц размера $\alpha \times \beta$ над $\mathbb{K}$ с нормой < 1 . Напомним, что $B_{\alpha, \beta}(\mathbb{K})$ отождествляется с симметрическим пространством $U(\alpha, \beta, \mathbb{K})/U(\alpha, \mathbb{K}) \times U(\beta, \mathbb{K})$, см. п. 1.1.

Положим для определенности $p < q$. Запишем матрицу $Z \in B_{p, q}$ в виде блочной матрицы размера $p \times ((q - p) + p)$:

$$Z = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}.$$

Дополним матрицу Z до матрицы $\tilde{Z}$ размера $((q - p) + p) \times ((q - p) + p)$ по формуле

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & Y \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Преобразование Кэли (2.1) переводит матрицу $\tilde{Z}$ в диссипативную матрицу R вида

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2L & K \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где

$$K = -1 + 2(1 + Y)^{-1}, \quad L = -(1 + Y)^{-1}X.$$

Обратно, легко проверить, что любая диссипативная матрица вида (3.2) является преобразованием Кэли некоторой матрицы вида (3.1).

Итак, мы реализовали пространство $U(p, q, \mathbb{K})/U(p, \mathbb{K}) \times U(q, \mathbb{K})$ как пространство $SW_{p, q} = SW_{p, q}(\mathbb{K})$ диссипативных матриц, имеющих блочное строение (3.2).

Запишем матрицу (3.2) в виде

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2L & M + N \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $M = M^* \gg 0$, $N = -N^*$. Тогда

$$\frac{1}{2}(R + R^*) = \begin{pmatrix} 1 & L^* \\ L & M \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Отметим равенства (вытекающие из формулы (1.2)):

$$\det \begin{bmatrix} 1 & L^* \\ L & M \end{bmatrix}_{q-p+j} = \det[M - LL^*]_j, \quad (3.5)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & L^* \\ L & M \end{pmatrix} = \det(M - LL^*). \quad (3.6)$$

ЛЕММА 3.1. *Диссипативность матрицы (3.3) равносильна положительной определенности матрицы $M - LL^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем критерий Сильвестра, см. (3.5).

3.2. Минимальная параболическая подгруппа.

ЛЕММА 3.2. *Группа всех дробно-линейных преобразований клина W_q , переводящих подмножество $SW_{p,q}$ в себя, изоморфна группе $U(q-p, \mathbb{K}) \times U(p, q, \mathbb{K})$. При этом первый сомножитель (группа $U(q-p, \mathbb{K})$) оставляет все точки $SW_{p,q}$ на месте.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это высказывание равносильно следующему: группа H всех дробно-линейных преобразований матричного шара $B_{q,q}$, переводящих множество матриц вида (3.1) в себя, есть $U(q-p, \mathbb{K}) \times U(p, q, \mathbb{K})$. Но включение $H \supset U(q-p, \mathbb{K}) \times U(p, q, \mathbb{K})$ очевидно, а с другой стороны, $U(q-p, \mathbb{K}) \times U(p, q, \mathbb{K})$ является максимальной подгруппой в $U(q, q)$.

Далее рассмотрим в группе $U(q, q, \mathbb{K})$ преобразований клина W_q максимальную параболическую подгруппу $\mathcal{Q}$, состоящую из преобразований вида

$$R \mapsto URU^* + H, \quad (3.7)$$

где $U \in GL(n, \mathbb{K})$, а $H = -H^*$. Рассмотрим группу

$$\mathcal{S} = \mathcal{Q} \cap (U(q-p, \mathbb{K}) \times U(p, q, \mathbb{K})),$$

состоящую из всех преобразований вида (3.7), переводящих множество $SW_{p,q}$ в себя. Эти преобразования легко описываются и имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2L & K \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2L & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -AC^* \\ CA^* & Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(DLA^* + CA^*) & DKD^* + CC^* + 2DLC^* + Z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $AA^* = 1$, $Z = -Z^*$.

По построению $\mathcal{S} \subset U(q-p, \mathbb{K}) \times U(p, q, \mathbb{K})$. Но сомножитель $U(q-p, \mathbb{K})$ оставляет все точки множества $SW_{p,q}$ на месте, поэтому мы можем считать, что $\mathcal{S} \subset U(p, q, \mathbb{K})$.

Формула (3.8) выглядит довольно громоздко. Приятнее заметить, что подгруппа $\mathcal{S}$ порождена следующими преобразованиями:

1. преобразования $(L, K) \mapsto (LA^*, K)$, образующие группу $U(q-p, \mathbb{K})$;
2. преобразования $(L, K) \mapsto (DL, DKD^*)$, образующие группу $GL(p, \mathbb{K})$;
3. преобразования $(L, K) \mapsto (L, K + Z)$, образующие абелеву группу;
4. преобразования $(L, K) \mapsto (L + C, K + CC^* + 2LC^*)$.

Преобразования вида 4 группы не образуют, однако вместе с преобразованиями вида 3 они составляют нильпотентную группу высоты 2.

Легко видеть, что $\mathcal{S}$ – максимальная параболическая подгруппа в $U(p, q, \mathbb{K})$. Минимальная параболическая подгруппа $\mathcal{P}$ выделяется из $\mathcal{S}$ условием: матрица D нижнетреугольна.

Легко видеть, что функции на пространстве $SW_{p,q}$, собственные относительно минимальной параболической подгруппы $\mathcal{S}$, имеют вид

$$\prod_{j=1}^n \det \begin{bmatrix} 1 & L^* \\ L & M \end{bmatrix}_{q-p+j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1}} = \det [M - LL^*]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}.$$

Эти функции являются ограничением на $SW_{p,q}$ собственных функций параболической подгруппы $\mathcal{Q} \subset W_q$.

3.3. Функции $\mathcal{B}_\alpha$ на $SW_{p,q}$. Перепишем их в наших координатах:

$$\mathcal{B}_\alpha(R) = \left(\frac{\det(2(R + R^*))}{|\det(1 + R)|^2} \right)^\alpha = 2^{\alpha p} \left(\frac{\det(M - LL^*)}{|\det(1 + M + N)|^2} \right)^\alpha. \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти функции получаются ограничением функций (2.7), определенных на клине $W_{q,q}$, на подмногообразии $SW_{p,q}$.

3.4. Пространства $O(2n+1, \mathbb{C})/O(2n+1)$, $SO^*(4n+2)/U(2n+1)$. В п. 1.1 эти пространства были реализованы как пространства кососимметричных матриц размера $(2n+1) \times (2n+1)$ над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ с нормой < 1 . Вложим пространство $((2n+1) \times (2n+1))$ -матриц в пространство $((2n+2) \times (2n+2))$ -матриц, дописав спереди нулевой столбец, а сверху — нулевую строку. Далее применяем конструкцию п. 2.6 и получаем модель, которая уже была описана выше в п. 0.5.

§ 4. Вычисления в симметрических конусах

Сейчас мы проведем наши вычисления в случае симметрических конусов $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$, $GL(n, \mathbb{C})/U(n)$, $GL(n, \mathbb{H})/Sp(n)$. Эти три серии вообще значительно проще остальных (см., например, [17]), наши вычисления также упрощаются. Все эти интегралы были очень элегантно вычислены в 1964 году Гиндикиным в [3], но его подход не обобщается на другие серии.

4.1. Разделение переменных в конусе вещественных симметрических матриц. Итак, мы имеем интеграл

$$\int_{T \gg 0} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det(1 + [T]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det T^{-(n+1)/2} dT. \quad (4.1)$$

Запишем матрицу T как блочную матрицу размера $((n-1)+1) \times ((n-1)+1)$:

$$T = \begin{pmatrix} P & q^t \\ q & r \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (1.2)

$$\det T = \det P \cdot (r - qP^{-1}q^t), \quad (4.2)$$

$$\det(1 + T) = \det(1 + P)(1 + r - q(1 + P)^{-1}q^t). \quad (4.3)$$

В новых координатах область интегрирования $T \gg 0$ заменяется на

$$P \gg 0, \quad r - qP^{-1}q^t > 0$$

(это следует из критерия Сильвестра и равенства (4.2)). Сам интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det(1 + [P]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - (n+1)/2}}{\det(1 + P)^{\sigma_{n-1}}} \\ & \times (r - qP^{-1}q^t)^{\lambda_n - (n+1)/2} \{1 + r - q(1 + P)^{-1}q^t\}^{-\sigma_n} dq dr dP. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $u = r - qP^{-1}q^t$ (мы заменяем r на u , оставляя все остальные переменные теми же). Тогда наш интеграл приводится к форме

$$\int_{P \gg 0} \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det(1 + [P]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - (n+1)/2}}{\det(1 + P)^{\sigma_{n-1}}} \right. \\ \left. \times \int_{u > 0, q \in \mathbb{R}^{n-1}} u^{\lambda_n - (n+1)/2} \{1 + u + qP^{-1}q^t - q(1 + P)^{-1}q^t\}^{-\sigma_n} dq du \right) dP.$$

Выражение в фигурных скобках преобразуется к виду

$$\{1 + u + q(P(1 + P))^{-1}q^t\}.$$

Далее заменяем переменную $q = (q_1, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ на

$$h = (h_1, \dots, h_{n-1}) = q(P(1 + P))^{-1/2} \in \mathbb{R}^{n-1},$$

оставляя переменные P и u теми же. Якобиан этой замены равен

$$\det P^{1/2} \det(1 + P)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Теперь интеграл разлагается в произведение

$$\int_{P \gg 0} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det(1 + [P]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - n/2}}{\det(1 + P)^{\sigma_{n-1} - 1/2}} dP \quad (4.5)$$

$$\times \int_{u > 0, h \in \mathbb{R}^{n-1}} u^{\lambda_n - (n+1)/2} \{1 + u + hh^t\}^{-\sigma_n} dh du. \quad (4.6)$$

Первый сомножитель (4.5) имеет вид (4.1), только n заменилось на $n - 1$, а также изменились параметры σ . Поэтому к интегралу (4.5) применима только что проделанная процедура. Нам осталось лишь вычислить второй сомножитель.

4.2. Несколько лемм. Сейчас мы приведем без доказательства несколько стандартных утверждений, которые многократно будут использоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 4.1. *Площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^k$ равна*

$$S = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}. \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4.2 (см. [18; 3.1.2.1]).

$$\int_{u > 0} \int_{v > 0} f(u + v) u^{\mu-1} v^{\nu-1} du dv = B(\mu, \nu) \int_{w > 0} f(w) w^{\mu+\nu-1} dw. \quad (4.8)$$

ЛЕММА 4.3.

$$\int_{x>0} \int_{y>0} (1+x+y)^{-a} x^{b-1} y^{c-1} dx dy = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a-b-c)}{\Gamma(a)}. \quad (4.9)$$

(В интеграле (4.8) надо сделать замену переменных $z = u$, $w = u + v$ и проинтегрировать по z ; интеграл (4.9) сводится к (4.8).)

4.3. Вычисление отщепившегося сомножителя. Сомножитель (4.6) есть частный случай следующего интеграла.

ЛЕММА 4.4.

$$\int_{u>0, h \in \mathbb{R}^k} u^{\lambda-k/2-1} (1+u+|h|^2)^{-\sigma} du dh = \frac{\pi^{k/2} \Gamma(\lambda-k/2) \Gamma(\sigma-\lambda)}{\Gamma(\sigma)}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к сферическим координатам (см. (4.7)) по переменной $h = (h_1, \dots, h_n)$ в интеграле (4.10), мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \int_{u>0} \int_{\rho>0} u^{\lambda-k/2-1} (1+u+\rho^2)^{-\sigma} \rho^{k-1} d\rho du \\ = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \int_{u>0} \int_{v>0} u^{\lambda-k/2-1} (1+u+v)^{-\sigma} v^{k/2-1} dv du, \end{aligned} \quad (4.11)$$

а это частный случай интеграла (4.9).

4.4. Комплексный и кватернионный случаи почти не отличаются от вещественного. Формула для якобиана (4.4) заменяется на

$$\det P^{\dim \mathbb{K}/2} \det(1+P)^{\dim \mathbb{K}/2}.$$

Далее все сводится к лемме 4.4.

§ 5. Интегралы по клину диссипативных матриц

Напомним, что в п. 2.3 пространства $O(n, n)/O(n) \times O(n)$, $U(n, n)/U(n) \times U(n)$, $Sp(n, n)/Sp(n) \times Sp(n)$ были реализованы как пространства диссипативных матриц. Мы представим диссипативную матрицу R в виде суммы $R = T + S$, где $T = T^*$, $S = -S^*$.

5.1. Вычисление в случае $O(n, n)/O(n) \times O(n)$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{T=T^t \gg 0, S=-S^t} \prod_{j=1}^n \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1+T+S]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det T^{-n} dT dS. \quad (5.1)$$

Представим матрицы T и S в виде блочных матриц размера $((n-1)+1) \times ((n-1)+1)$:

$$T = \begin{pmatrix} P & q^t \\ q & r \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} A & -b^t \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (1.2), получаем

$$\begin{aligned} \det T &= \det P \cdot (r - qP^{-1}q^t), \\ \det(1 + T + S) &= \det(1 + P + A) \cdot (1 + r - (q + b)(1 + P + A)^{-1}(q^t - b^t)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

После замены переменных $u = r - qP^{-1}q^t$ интеграл приводится к форме

$$\begin{aligned} &\int_{P \gg 0, A=A^t} dP dA \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + A]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - n}}{\det(1 + P + A)^{\sigma_{n-1}}} \right. \\ &\times \left. \int_{u > 0, q, b \in \mathbb{R}^{n-1}} u^{\lambda_n - n} \{1 + u + qP^{-1}q^t - (q + b)(1 + P + A)^{-1}(q^t - b^t)\}^{-\sigma_n} du dq db \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Мы записываем выражение в фигурных скобках в виде

$$\left\{ 1 + u + \begin{pmatrix} q & b \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} q^t \\ b^t \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.4)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} P^{-1} - (1 + P + A)^{-1} & (1 + P + A)^{-1} \\ -(1 + P + A)^{-1} & (1 + P + A)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Однако матрица X не симметрична (собственно именно в этом месте наше вычисление отличается от вычисления § 4), поэтому мы перепишем (5.4) в виде

$$\left\{ 1 + u + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q & b \end{pmatrix} (X + X^t) \begin{pmatrix} q^t \\ b^t \end{pmatrix} \right\}.$$

ЛЕММА 5.1. а) Матрица $\frac{1}{2}(X + X^t)$ положительно определена;

б) $\det(\frac{1}{2}(X + X^t)) = \det P^{-1} \det(1 + P + A)^{-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с п. б):

$$\frac{1}{2}(X + X^t) = \begin{pmatrix} P^{-1} - \frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} - \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} & \frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} - \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} \\ \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} - \frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} & \frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} + \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Прибавляя второй столбец к первому, а затем вторую строку к первой, мы получаем

$$\det \left(\frac{1}{2}(X + X^t) \right) = \det \begin{pmatrix} P^{-1} & (1 + P + A)^{-1} \\ (1 + P - A)^{-1} & \frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} + \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Далее, применяя формулу (1.2), получаем

$$\begin{aligned} &\det P^{-1} \det \left(\frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} + \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} - (1 + P - A)^{-1} P (1 + P + A)^{-1} \right) \\ &= \det P^{-1} \det(1 + P + A)^{-1} \det(1 + P - A)^{-1} \det \left(\frac{1}{2}(1 + P - A) + \frac{1}{2}(1 + P + A) - P \right). \end{aligned}$$

Замечая, что в больших скобках стоит единица, а $(1 + P + A)^t = 1 + P - A$, мы получаем искомое утверждение.

а) Величина $\det(1 + T + S)$ не обращается в нуль. В силу формулы (5.2) не обращается в нуль при положительных u и выражение (5.4). Отсюда следует, что квадратичное слагаемое $(q \ b) X \begin{pmatrix} q^t \\ b^t \end{pmatrix}$ неотрицательно. Только что вычисленный определитель не обращается в нуль, и мы получаем искомое утверждение.

Теперь в интеграле (5.3) мы заменяем переменные $q \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ на переменную $h \in \mathbb{R}^{2n-2}$ по формуле

$$h = (q \ b) \sqrt{\frac{1}{2}(X + X^*)}. \quad (5.6)$$

Все остальные переменные мы оставляем теми же. Якобиан этой замены равен $\det P^{1/2} \det(1 + P + A)$. В итоге наш интеграл распадается в произведение интегралов

$$\int_{P \gg 0, A = -A^t} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + A]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - n + 1/2}}{\det(1 + P + A)^{\sigma_{n-1} - 1}} dP dA \quad (5.7)$$

$$\times \int_{u > 0, h \in \mathbb{R}^{2n-2}} u^{\lambda_n - n} (1 + u + |h|^2)^{-\sigma_n} du dh. \quad (5.8)$$

Второй сомножитель вычисляется по лемме 4.4, а первый сомножитель имеет вид (5.1).

5.2. Разделение переменных для серии $U(n, n)/U(n) \times U(n)$. Рассмотрим интеграл (0.5) по клину комплексных диссипативных матриц. Запишем матрицы T и S (напомним, что $T = T^*$, $S = -S^*$) в виде блочных матриц размера $((n-1)+1) \times ((n-1)+1)$:

$$T = \begin{pmatrix} P & q^* \\ q & r \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} A & -b^* \\ b & ic \end{pmatrix}.$$

Рассуждая так же, как в п. 5.1, мы преобразуем наш интеграл к форме

$$\begin{aligned} & \int_{P \gg 0, A = -A^*} dP dA \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + A]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \|\tau_j - \tau_{j+1}\}\}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - 2n}}{\det(1 + P + A)^{\{\sigma_{n-1} \|\tau_{n-1}\}\}} \right. \\ & \times \int_{u > 0, b \in \mathbb{C}^{n-1}, q \in \mathbb{C}^{n-1}, c \in \mathbb{R}} u^{\lambda_n - 2n} \\ & \left. \times \{1 + u + ic + qP^{-1}q^* - (q + b)(1 + P + A)^{-1}(q^* - b^*)\}^{\{-\sigma_n \|\tau_n\}\} du db dq dc \right). \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках имеет вид

$$\left\{ 1 + u + ic + (q \ b) X \begin{pmatrix} q^* \\ b^* \end{pmatrix} \right\},$$

где матрица X — та же, что и выше (см. (5.5)). Заменяем переменную c на переменную s по формуле

$$s = c - \frac{1}{2i} (q \ b) (X^* - X) \begin{pmatrix} q^* \\ b^* \end{pmatrix}.$$

Якобиан этой замены равен 1. Выражение в фигурных скобках примет вид

$$\left\{ 1 + u + is + \frac{1}{2} (q - b) (X + X^*) \begin{pmatrix} q^* \\ b^* \end{pmatrix} \right\}.$$

Далее делаем замену переменной

$$h = \det\left(\frac{1}{2}(X + X^*)\right)^{1/2}.$$

Ее якобиан равен $\det P |\det(1 + P + A)|^2$ (см. лемму 5.1). Тогда наш интеграл распадается в произведение интегралов

$$\begin{aligned} & \int_{P \gg 0, A = -A^*} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + A]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \|\tau_j - \tau_{j+1}\}}} \\ & \quad \times \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - 2n+1}}{\det(1 + P + A)^{\{\sigma_{n-1} - 1 \|\tau_{n-1} - 1\}}} dP dA \\ & \quad \times \int_{u>0, h \in \mathbb{C}^{2n-2}, s \in \mathbb{R}} u^{\lambda_n - 2n} \{1 + u + is + |h|^2\}^{\{-\sigma_n \|\tau_n\}} du dh dc. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Нам остается вычислить множитель (5.9).

5.3. Вычисление отщепившегося сомножителя. Переходя к сферическим координатам по переменной $h \in \mathbb{C}^{2n-2} \simeq \mathbb{R}^{4n-4}$, записываем (5.9) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^{2n-2}}{\Gamma(2n-2)} \int_{u>0, \rho>0, c \in \mathbb{R}} u^{\lambda_n - 2n} (1 + u + ic + \rho^2)^{-\sigma_n} (1 + u - ic + \rho^2)^{-\tau_n} \rho^{4n-5} d\rho du dc \\ & = \frac{\pi^{2n-2}}{\Gamma(2n-2)} \int_{u>0, v>0, c \in \mathbb{R}} u^{\lambda_n - 2n} (1 + u + ic + v)^{-\sigma_n} (1 + u - ic + v)^{-\tau_n} v^{2n-3} dv du dc. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4.2, мы приводим интеграл к форме

$$\frac{\pi^{2n-2} \Gamma(\lambda_n - 2n + 1)}{\Gamma(\lambda_n - 1)} \int_0^\infty dw \int_{-\infty}^\infty dc \{ (1 + w + ic)^{-\sigma_n} (1 + w - ic)^{-\tau_n} w^{\lambda_n - 2} \}. \quad (5.10)$$

Но (см. [18; 2.2.5.33]) при $a > 0, b > 0$ выполнено

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(a + ix)^\mu (b - ix)^\nu} = 2\pi(a + b)^{1-\mu-\nu} \frac{\Gamma(\mu + \nu - 1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}.$$

Поэтому интегрирование по переменной c в (5.10) дает

$$\frac{2\pi^{2n-1} \Gamma(\lambda_n - 2n + 1)}{\Gamma(\lambda_n - 1)} \int_0^\infty (2 + 2w)^{1-\sigma_n-\tau_n} w^{\lambda_n-2} dw \cdot \frac{\Gamma(\sigma_n + \tau_n - 1)}{\Gamma(\sigma_n)\Gamma(\tau_n)}.$$

Последний интеграл стандартным образом сводится к В-функции, и окончательно мы получаем

$$\frac{2^{2-\sigma_n-\tau_n} \pi^{2n-1} \Gamma(\lambda_n - 2n + 1) \Gamma(\sigma_n + \tau_n - \lambda_n)}{\Gamma(\sigma_n)\Gamma(\tau_n)}.$$

5.4. Случай пространств $\mathrm{Sp}(n, n)/\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(n)$. Рассмотрим интеграл (0.6) по клину диссипативных кватернионных матриц $R = T + S$, напомним, что $T = T^*$, $S = -S^*$. По аналогии с предыдущими случаями мы представим матрицы T и S в виде

$$T = \begin{pmatrix} P & q^* \\ q & r \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} A & -b^* \\ b & c \end{pmatrix},$$

на этот раз $c = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$ — чисто мнимый кватернион. Буквально повторяя рассуждения п. 5.2, мы приводим интеграл (0.6) к виду

$$\begin{aligned} & \int_{P \gg 0, A = -A^*} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + A]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - 4n + 2}}{\det(1 + P + A)^{\sigma_{n-1} - 4}} dP dA \\ & \times \int_{u > 0, h \in \mathbb{R}^{8n-8}, c = -\bar{c} \in \mathbb{H}} u^{\lambda_n - 4n} |1 + u + c + |h|^2|^{-\sigma_n} du dh dc. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Осталось вычислить отщепившийся сомножитель (5.11).

Переходя к сферическим координатам по переменной $h \in \mathbb{R}^{8n-8}$, мы получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^{4k-4}}{\Gamma(4k-4)} \int_{u > 0, \rho > 0, c = -\bar{c} \in \mathbb{H}} u^{\lambda_n - 4n} |1 + u + \rho^2 + c|^{-\sigma_n} \rho^{8n-9} du d\rho dc \\ & = \frac{\pi^{4k-4}}{\Gamma(4k-4)} \int_{u > 0, v > 0, c = -\bar{c} \in \mathbb{H}} u^{\lambda_n - 4n} |1 + u + v + c|^{-\sigma_n} v^{4n-5} du dv dc \\ & = \frac{\pi^{4k-4}}{\Gamma(4k-4)} \int_{u > 0, v > 0, c = -\bar{c} \in \mathbb{H}} u^{\lambda_n - 4n} ((1 + u + v)^2 + |c|^2)^{-\sigma_n/2} v^{4n-5} du dv dc. \end{aligned}$$

Теперь мы переходим к сферическим координатам по переменной $c \in \mathbb{R}^3$ и получаем

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi \cdot \pi^{4k-4}}{\Gamma(4k-4)} \int_{u > 0, v > 0, z > 0} u^{\lambda_n - 4n} ((1 + u + v)^2 + z^2)^{-\sigma_n/2} v^{4n-5} z^2 du dv dz \\ & = \frac{2\pi^{4k-3}}{\Gamma(4k-4)} \int_{u > 0, v > 0, x > 0} u^{\lambda_n - 4n} ((1 + u + v)^2 + x)^{-\sigma_n/2} v^{4n-5} x^{1/2} du dv dx. \end{aligned}$$

Интегрирование по x дает

$$\frac{2\pi^{4k-3}}{\Gamma(4k-4)} \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{\sigma_n}{2} - \frac{3}{2}\right) \int_{u > 0, v > 0} u^{\lambda_n - 4n} v^{4n-5} (1 + u + v)^{3-\sigma_n} du dv.$$

Наконец, применяя лемму 4.3, приходим к окончательному ответу:

$$\frac{2\pi^{4k-3}}{\Gamma(4k-4)} \cdot \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\sigma_n/2 - 3/2)}{\Gamma(\sigma_n/2)} \cdot \frac{\Gamma(4k-4)\Gamma(\lambda_n - 4n + 1)\Gamma(\sigma_n - \lambda_n)}{\Gamma(\sigma_n - 3)}.$$

Применяя формулу удвоения к $\Gamma(\sigma_n - 3)$, мы можем преобразовать наше выражение к виду

$$2^{\sigma_n - 4} \pi^{4k-3} \frac{\Gamma(\lambda_n - 4n + 1)\Gamma(\sigma_n - \lambda_n)}{\Gamma(\sigma_n/2)\Gamma(\sigma_n/2 - 1)}.$$

§6. Интегралы по пространствам $U(p, q, \mathbb{K})/U(p, \mathbb{K}) \times U(q, \mathbb{K})$

В этом параграфе мы вычисляем интегралы (0.7)–(0.9) по пространствам $O(p, q)/O(p) \times O(q)$, $U(p, q)/U(p) \times U(q)$, $Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$. Для определенности полагаем $p \leq q$.

6.1. Случай $O(p, q)/O(p) \times O(q)$. Прежде всего применим равенства (3.5), (3.6). Теперь мы можем переписать интеграл (0.7) в виде

$$\int_{M-L^t \gg 0, N=-N^t} \prod_{j=1}^n \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & L^t \\ L & M \end{bmatrix}_{q-p+j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1+M+N]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \det \begin{pmatrix} 1 & L^t \\ L & M \end{pmatrix}^{-(p+q)/2} dL dM dN. \quad (6.1)$$

Далее представим M, N в виде блочных матриц размера $((p-1)+1) \times ((p-1)+1)$, а L – в виде блочной матрицы размера $((p-1)+1) \times (q-p)$:

$$M = \begin{pmatrix} P & q^t \\ q & r \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} A & -b^t \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} H \\ l \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (1.2)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & L^t \\ L & M \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & H^t & l^t \\ H & P & q^t \\ l & q & r \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix} \cdot \left\{ r - (l \ q) \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l^t \\ q^t \end{pmatrix} \right\}, \\ \det(1+M+N) &= \det(1+P+A) \cdot (1+r-(q+b)(1+P+A)^{-1}(q^t-b^t)). \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, мы обозначим через u . Тогда интеграл преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\int dP dA dH \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{bmatrix}_{q-p+j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1+P+A]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{\lambda_{n-1} - (p+q)/2}}{\det(1+P+A)^{\sigma_{n-1}}} \right. \\ &\times \int_{u>0, q, b \in \mathbb{R}^{p-1}, l \in \mathbb{R}^{q-p}} u^{\lambda_p - (p+q)/2} \left\{ 1 + u + (l \ q) \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l^t \\ q^t \end{pmatrix} \right. \\ &\left. \left. + (q \ b) \begin{pmatrix} -(1+P+A)^{-1} & -(1+P+A)^{-1} \\ (1+P+A)^{-1} & (1+P+A)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^t \\ b^t \end{pmatrix} \right\}^{-\sigma_p} du dl dq db \right). \quad (6.2) \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в (6.2)–(6.3) в фигурных скобках, имеет вид

$$\left\{ 1 + u + (l \ q \ b) X \begin{pmatrix} l^t \\ q^t \\ b^t \end{pmatrix} \right\}, \quad (6.4)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -S^{-1} \end{pmatrix} \\ (0 & S^{-1}) & S^{-1} \end{pmatrix},$$

а через S обозначено

$$S = 1 + P + A.$$

Как и в п. 5.1, мы записываем (6.4) в виде

$$\left\{ 1 + u + (l \ q \ b) \frac{1}{2}(X + X^t) \begin{pmatrix} l^t \\ q^t \\ b^t \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.5)$$

ЛЕММА 6.1. а) Матрица $\frac{1}{2}(X + X^t)$ положительно определена;

$$\text{б) } \det \left(\frac{1}{2}(X + X^t) \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} \cdot \det(1 + P + A)^{-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. б)

$$\begin{aligned} & \det \left(\frac{1}{2}(X + X^t) \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(S^t)^{-1} - \frac{1}{2}S^{-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}S^{-1} + \frac{1}{2}(S^t)^{-1} \end{pmatrix} \\ (0 \quad \frac{1}{2}S^{-1} - \frac{1}{2}(S^t)^{-1}) & \frac{1}{2}S^{-1} + \frac{1}{2}(S^t)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее мы прибавляем третью строку ко второй, а затем третий столбец ко второму. В итоге получаем

$$\det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + P - A)^{-1} \end{pmatrix} \\ (0 \quad (1 + P + A)^{-1}) \quad \frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} + \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (1.2), приводим определитель к виду

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} \cdot \det \left(\frac{1}{2}(1 + P + A)^{-1} + \frac{1}{2}(1 + P - A)^{-1} \right. \\ & \quad \left. - (0 \quad (1 + P + A)^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + P - A)^{-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{-1} \det(1 + P + A)^{-1} \det(1 + P - A)^{-1} \\ & \quad \times \det \left(\frac{1}{2}(1 + P - A) + \frac{1}{2}(1 + P + A) - P \right). \end{aligned}$$

Пункт а) доказывается так же, как и лемма 5.1.

Теперь мы можем сделать замену переменных

$$(l \ q \ b) \sqrt{\frac{1}{2}(X + X^t)} = h \in \mathbb{R}^{q-p} \oplus \mathbb{R}^{p-1} \oplus \mathbb{R}^{p-1}$$

в интеграле (6.2)–(6.3). Получаем

$$\int \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{bmatrix}_{q-p+j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + A]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & H^t \\ H & P \end{pmatrix}^{\lambda_{n-1} - (p+q)/2 + 1/2}}{\det(1 + P + A)^{\sigma_{p-1} - 1}} dP dA dH \\ \times \int_{u>0, h \in \mathbb{R}^{q+p-2}} u^{\lambda_p - (p+q)/2} \{1 + u + |h|^2\}^{-\sigma_p} du dh.$$

Первый множитель имеет вид (6.1), а второй множитель вычисляется с помощью леммы 4.4.

6.2. Случай пространств $U(p, q)/U(p) \times U(q)$ и $Sp(n, n)/Sp(n) \times Sp(n)$. Разделение переменных производится точно так же, а отщепляющиеся множители фактически совпадают с ранее вычисленными интегралами (5.9) и (5.11).

§ 7. Интегралы по пространствам $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$ и $Sp(2n, \mathbb{C})/Sp(n)$

7.1. Интегралы по $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$. Мы реализуем это пространство так же, как в п. 2.4. Пусть R – комплексная симметрическая матрица, пусть $R = T + iS$, где матрицы T и S вещественны. Рассмотрим интеграл (0.10). Представим матрицы T и S в виде

$$T = \begin{pmatrix} P & q^t \\ q & r \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} A & b^t \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det T = \det P \cdot (r - qP^{-1}q^t), \\ \det(1 + T + iS) = \det(1 + P + iA) \{1 + r + ic - (q + ib)(1 + P + iA)^{-1}(q^t + ib^t)\}.$$

Вводя новую переменную

$$u = r - qP^{-1}q^t,$$

мы преобразуем интеграл (0.10) к форме

$$\int dT dS \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\det[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + iA]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \parallel \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - (n+1)}}{\det(1 + P + iA)^{\{\sigma_{n-1} \parallel \tau_{n-1}\}}} \right. \\ \left. \times \int u^{\lambda_n - (n+1)} \left\{ 1 + u + ic + (q \ b) X \begin{pmatrix} q^t \\ b^t \end{pmatrix} \right\}^{\{-\sigma_n \parallel -\tau_n\}} du dp db \right),$$

где

$$X = \begin{pmatrix} P^{-1} - (1 + P + iA)^{-1} & -i(1 + P + iA)^{-1} \\ -i(1 + P + iA)^{-1} & (1 + P + iA)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Далее рассуждаем так же, как в пп. 5.1, 5.2. Мы делаем замену переменных

$$s = c + \operatorname{Im} (q \ b) X \begin{pmatrix} q^t \\ b^t \end{pmatrix}, \\ h = (q \ b) \sqrt{\operatorname{Re} X}.$$

Потом так же, как в лемме 5.1, мы замечаем, что

$$\det(\operatorname{Re} X) = \det P^{-1} |\det(1 + P + iA)|^{-2},$$

и приводим интеграл к виду

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^n \frac{\det[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\det[1 + P + iA]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \parallel \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \\ & \quad \times \frac{\det[P]_j^{\lambda_{n-1} - (n+1) + 1/2}}{\det[1 + P + iA]_j^{\{\sigma_{n-1} - 1/2 \parallel \tau_{n-1} - 1/2\}}} dP dA \\ & \quad \times \int u^{\lambda_n - 2n} \{1 + u + is + |h|^2\}^{\{-\sigma_n \parallel -\tau_n\}} du ds dh. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Отшепляющийся сомножитель (7.1) вычисляется с помощью леммы 4.4.

7.2. Пространство $\operatorname{Sp}(2n, \mathbb{C}) / \operatorname{Sp}(n)$. Мы рассматриваем реализацию этого пространства, описанную в п. 2.5. Запишем матрицы T и S в виде

$$T = \begin{pmatrix} P & q^* \\ q & r \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} A & b^t \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \text{где } q, b \in \mathbb{C}^n, \quad c \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Повторяя многократно проведенные выкладки, мы приводим интеграл (0.11) к виду

$$\begin{aligned} & \int dP dA \left(\prod_{s=1}^n \frac{\det[P]_s^{\lambda_s - \lambda_{s+1}}}{\det[1 + P + A\mathbf{j}]_s^{\sigma_s - \sigma_{s+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - (2n+1)}}{\det(1 + P + A\mathbf{j})^{\sigma_{n-1}}} \right. \\ & \quad \left. \times \int u^{\lambda_n - (2n+1)} |1 + u + c\mathbf{j} + \Psi(q, b)|^{-\sigma_n} du dp db dc \right), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где

$$\Psi(q, b) = qP^{-1}q^* - (q + b\mathbf{j})(1 + P + A\mathbf{j})^{-1}(q^* + \mathbf{j}b^*).$$

Далее заметим, что выражение

$$\frac{1}{2}(\Psi(q, b) - \mathbf{i}^{-1}\Psi(q, b)\mathbf{i})$$

является кватернионом вида $\alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$, поэтому в интеграле (7.2) мы можем заменить переменную $c = c_1 + c_2\mathbf{i}$ на переменную $y_1\mathbf{j} + y_2\mathbf{k}$ по формуле

$$y_1\mathbf{j} + y_2\mathbf{k} = c\mathbf{j} + \frac{1}{2}(\Psi(q, b) - \mathbf{i}^{-1}\Psi(q, b)\mathbf{i}).$$

Тогда величина, стоящая в (7.2) под знаком модуля, примет вид

$$\begin{aligned} & \left| 1 + u + y_1\mathbf{j} + y_2\mathbf{k} + \frac{1}{2}(\Psi(q, b) + \mathbf{i}^{-1}\Psi(q, b)\mathbf{i}) \right| \\ & = \left| 1 + u + y_1\mathbf{j} + y_2\mathbf{k} + qP^{-1}q^* \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\{(q + b\mathbf{j})(1 + P + A\mathbf{j})^{-1}(q^* + \mathbf{j}b^*) + (q - b\mathbf{j})(1 + P - A\mathbf{j})^{-1}(q^* - \mathbf{j}b^*)\} \right|. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Выражение в фигурных скобках принимает чисто комплексные значения (хотя в его записи и присутствует кватернионная единица $\mathbf{j}$) и, более того, является эрмитовой формой от комплексного вектора (q, b) . Определитель этой формы легко вычисляется и равен

$$\det P^{-1} |\det(1 + P + A\mathbf{j})|^{-2}.$$

Теперь наш интеграл разлагается в произведение

$$\begin{aligned} \int \prod_{s=1}^n \frac{\det[P]_s^{\lambda_s - \lambda_{s+1}}}{\det[1 + P + A\mathbf{j}]_s^{\sigma_s - \sigma_{s+1}}} \cdot \frac{\det P^{\lambda_{n-1} - (2n-1)+1}}{\det(1 + P + A\mathbf{j})^{\sigma_{n-1}-2}} dP dA \\ \times \int u^{\lambda_n - (2n+1)} |1 + u + y_1\mathbf{j} + y_2\mathbf{k} + |h|^2|^{-\sigma_n} du dy_1 dy_2 dh, \quad (7.4) \end{aligned}$$

где $h \in \mathbb{C}^{2n-2}$. Множитель (7.4) вычисляется так же, как интеграл (5.11), только интегрирование по $c \in \mathbb{R}^3$ заменяется на интегрирование по $y \in \mathbb{R}^2$.

§ 8. Интегралы по пространствам $O(2n, \mathbb{C})/O(n)$, $SO^*(2n)/U(n)$

8.1. Случай пространства $O(2n, \mathbb{C})/O(2n)$. Обозначим через $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ алгебру вещественных матриц размера 2×2 . Рассмотрим в $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ элементы

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$J^2 = -1, \quad \theta^2 = 1; \quad J\theta = -\theta J. \quad (8.1)$$

Каждому $z \in \mathbb{C}$ мы поставим в соответствие элемент

$$z^\circ = \alpha + \beta J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Множество всех матриц такого вида образует подалгебру в $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, изоморфную алгебре $\mathbb{C}$. Эту подалгебру мы будем обозначать через $\mathbb{C}^\circ$. Мнимой единице $i \in \mathbb{C}$ соответствует матрица $J \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Мы определим в $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ также подалгебру $\mathbb{R}^\circ \subset \mathbb{C}^\circ$, состоящую из матриц вида $\alpha \cdot 1$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что алгебра $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ порождена подалгеброй $\mathbb{C}^\circ$ и элементом θ , при этом для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\theta z^\circ = (\bar{z})^\circ \theta. \quad (8.3)$$

Введем в $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ инволюцию $\Psi \mapsto \Psi^*$ по формуле

$$\Psi^* = J\Psi^t J^{-1}$$

или, иначе, для любых $z, w \in \mathbb{C}$

$$(z^\circ + w^\circ \theta)^* = \bar{z}^\circ - w^\circ \theta = \bar{z}^\circ - \theta \bar{w}^\circ.$$

Тогда $(pq)^* = q^* p^*$. Важно заметить, что множество неподвижных элементов инволюции * совпадает с подалгеброй $\mathbb{R}^\circ$.

Введем на алгебре $(k \times k)$ -матриц над $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ определитель $\text{DET } A$, положив, что $\text{DET } A$ есть корень из модуля обычного определителя матрицы $\det A$, понимаемого как определитель $(2k \times 2k)$ -матрицы. Тогда для матриц над подалгеброй $\mathbb{C}^\circ$ этот определитель совпадает с модулем обычного определителя комплексной матрицы.

Рассмотрим модель пространства $O(2n, \mathbb{C})/O(2n)$, построенную в п. 2.6 (мы сохраняем все обозначения этого пункта). Запишем матрицу R в виде $R = T + H$, где $R = R^t$, $H = -H^t$. Далее запишем H в виде $H = S\theta$. Таким образом, элемент R представлен в виде

$$R = T + S\theta, \quad \text{где } T = T^t \gg 0, \quad S^t = -\theta S\theta, \quad JT = TJ, \quad JS = SJ.$$

Матрица R является матрицей размера $2n \times 2n$. Мы можем ее рассматривать как блочную матрицу размера $n \times n$, составленную из матриц размера 2×2 . Иными словами, мы будем рассматривать R как матрицу над $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Условие

$$R^t = J^{-1}RJ \tag{8.4}$$

(см. (2.6)) тогда превращается в $\star$ -эрмитовость в следующем смысле: матрица R как матрица над $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ совпадает с матрицей, полученной транспонированием и поэлементным применением инволюции $\star$.

В силу условий $JT = TJ$, $JS = SJ$ блоки матриц T и S имеют вид (8.1), т.е. лежат в $\mathbb{C}^\circ$. Поэтому мы можем рассматривать T и S как матрицы над $\mathbb{C}^\circ$ размера $n \times n$. При этом T является эрмитовой матрицей как матрица над $\mathbb{C}^\circ$, а матрица S как матрица над $\mathbb{C}^\circ$ кососимметрична.

В этих обозначениях интеграл (0.14) переписывается в виде

$$\int \prod_{j=1}^n \frac{\text{DET}[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\text{DET}[1 + T + S\theta]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \text{DET } T^{-(2n-1)} dT dS.$$

Далее мы записываем матрицы T и S над $\mathbb{C}^\circ$ в виде

$$T = \begin{pmatrix} P & q^{\circ*} \\ q & r \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} A & -b^{\circ t} \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}^\circ,$$

где символы $^{\circ*}$, $^{\circ t}$ подчеркивают, что мы рассматриваем операции транспонирования и сопряжения над алгеброй $\mathbb{C}^\circ$.

Повторяя проводившиеся выше вычисления, мы преобразуем интеграл к виду

$$\begin{aligned} \int dP dA \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\text{DET}[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\text{DET}[1 + P + A\theta]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\text{DET } P^{\lambda_{n-1} - (2n-1)}}{\text{DET}(1 + P + A\theta)^{\sigma_{n-1}}} \right. \\ \left. \times \int u^{\lambda_n - (2n-1)} \text{DET}(1 + u + \Psi(q, b))^{-\sigma_n} du dq db \right), \end{aligned}$$

где

$$\Psi(q, b) = qP^{-1}q^{\circ*} - (q + b\theta)(1 + P + A\theta)^{-1}(q^{\circ*} - b^{\circ t}\theta).$$

Запишем это выражение следующими двумя способами:

$$\Psi(q, b) = qP^{-1}q^* - (q + b\theta)(1 + P + A\theta)^{-1}(q + b\theta)^*, \quad (8.5)$$

$$\Psi(q, b) = \begin{pmatrix} q & b \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} q^{\circ*} \\ b^{\circ*} \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} P^{-1} - (1 + P + A\theta)^{-1} & -(1 + P + A\theta)^{-1}\theta \\ \theta(1 + P + A\theta)^{-1} & \theta(1 + P + A\theta)^{-1}\theta \end{pmatrix}.$$

Из записи (8.5) ясно, что $\Psi(q, b) \in \mathbb{R}^\circ$ (так как матрицы P и $(1 + P + A\theta)$ являются $\star$ -эрмитовыми, отсюда видно, что $\Psi(q, b) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ — неподвижный элемент инволюции $\star$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из-за наличия слагаемого $qP^{-1}q^*$ выражение $\Psi(q, b)$ не является $\star$ -эрмитовой формой на модуле $\mathcal{M}(\mathbb{R})^{n-1}$ над алгеброй $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Поэтому

$$\Psi(q, b) = \frac{1}{2}(\Psi(q, b) + J^{-1}\Psi(q, b)J).$$

Применяя это замечание к (8.6), мы получаем

$$\Psi(q, b) = \begin{pmatrix} q & b \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} q^{\circ*} \\ b^{\circ*} \end{pmatrix},$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} P^{-1} - \frac{1}{2}(1 + P + A\theta)^{-1} - \frac{1}{2}(1 + P - A\theta)^{-1} & -\frac{1}{2}(1 + P + A\theta)^{-1}\theta + \frac{1}{2}(1 + P - A\theta)^{-1}\theta \\ \frac{1}{2}\theta(1 + P + A\theta)^{-1} - \frac{1}{2}\theta(1 + P - A\theta)^{-1} & \frac{1}{2}\theta(1 + P + A\theta)^{-1}\theta + \frac{1}{2}\theta(1 + P - A\theta)^{-1}\theta \end{pmatrix}.$$

Далее мы видим, что, во-первых, матрица Y не зависит θ , хотя θ и входит в ее запись. Говоря формально, Y является матрицей над $\mathbb{C}^\circ$. Во-вторых, матрица Y является $\star$ -эрмитовой (так как таковыми являются X и $J^{-1}XJ$). Таким образом, Y — эрмитова матрица над $\mathbb{C}^\circ$. Ее определитель легко считается и равен

$$\text{DET}(P)^{-1} \text{DET}(1 + P + A\theta)^{-2}.$$

Теперь интеграл переписывается в форме

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\text{DET}[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\text{DET}[1 + P + A\theta]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1}}} \cdot \frac{\text{DET} P^{\lambda_{n-1} - (2n-1)+1}}{\text{DET}(1 + P + A\theta)^{\sigma_{n-1}-2}} \int dP dA \\ & \times \int_{u>0, h \in \mathbb{C}^{2n-2}} u^{\lambda_n - (2n-1)} \text{DET}(1 + u + |h|^2)^{-\sigma_n} du dh. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Множитель (8.7) вычисляется с помощью леммы 4.4.

8.2. Случай пространства $SO^*(2n)/U(n)$. Далее обозначим через $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ алгебру комплексных матриц размера 2×2 над $\mathbb{C}$. Алгебра $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ содержит подалгебру $\mathbb{H}^\circ$, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Эта подалгебра, очевидно, изоморфна алгебре кватернионов $\mathbb{H}$.

Для матрицы X размера $k \times k$ над $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ мы введем определитель $\text{DET } X$ как квадратный корень из определителя той же матрицы, рассматриваемой как $(2k \times 2k)$ -матрица над $\mathbb{C}$ (мы будем применять это понятие лишь к диссипативным матрицам, поэтому корень корректно определен).

Мы сохраняем обозначения п. 2.6. Представим матрицу R (имеющую размер $2n \times 2n$ и удовлетворяющую условию $R^t = J^{-1}RJ$) в виде суммы $R = T + iS$, где $T = T^*, S = S^*$. Тогда

$$T = J^{-1}\bar{T}J, \quad S = J^{-1}\bar{S}J. \quad (8.9)$$

Как и в предыдущем пункте, мы можем рассматривать матрицу R как $(n \times n)$ -матрицу над $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Условия (8.9) в точности означают, что T и S являются матрицами над $\mathbb{H}^\circ$.

Запишем интеграл (0.15) в форме

$$\int \prod_{j=1}^n \frac{\text{DET}[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\text{DET}[1 + T + iS]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \parallel \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \text{DET } T^{-2(2n-1)} dT dS,$$

где i обозначает умножение на скаляр i в алгебре комплексных матриц размера $2n \times 2n$. Далее запишем матрицы T и S над $\mathbb{H}^\circ$ в виде

$$T = \begin{pmatrix} P & q^{\circ*} \\ q & r \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} A & b^{\circ*} \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \text{где } b, q \in \mathbb{H}^{\circ n-1}, \quad r, c \in \mathbb{R}^\circ.$$

Тогда интеграл преобразуется к форме

$$\begin{aligned} & \int dP dA \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\text{DET}[T]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\text{DET}[1 + T + iA]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \parallel \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \cdot \frac{\text{DET } T^{\lambda_{n-1} - 2(2n-1)}}{\text{DET}(1 + T + iA)^{\{\sigma_{n-1} \parallel \tau_{n-1}\}}} \right. \\ & \left. \times \int u^{\lambda_n - 2(2n-1)} \text{DET}(1 + u + ic + \Psi(q, b))^{\{-\sigma_n \parallel -\tau_n\}} du dc db dq \right), \quad (8.10) \end{aligned}$$

где

$$\Psi(b, q) = qP^{-1}q^{\circ*} - (q + ib)(1 + P + iA)^{-1}(q^{\circ*} + ib^{\circ*}).$$

Это выражение удовлетворяет соотношению

$$\Psi(b, q)^t = J^{-1}\Psi(b, q)J,$$

где символ t обозначает обычное транспонирование в алгебре $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ матриц 2×2 .

Отсюда вытекает, что матрица $\Psi(b, q)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, где $\mu \in \mathbb{C}$.

Далее заменой

$$y = c + \operatorname{Im}(q + ib)(1 + P + iA)^{-1}(q^{\circ*} + ib^{\circ*})$$

(символ Im здесь обозначает мнимую часть комплексной матрицы 2×2) мы приводим множитель (8.10) к виду

$$\int u^{\lambda_n - 2(2n-1)} \operatorname{DET}(1 + u + iy + \operatorname{Re} \Psi(q, b))^{\{-\sigma_n \| -\tau_n\}} du dc db dq.$$

Но выражение $\operatorname{Re} \Psi(q, b)$ является эрмитовой формой над $\mathbb{H}^\circ$, а ее определитель равен

$$\operatorname{DET} P^{-1} |\operatorname{DET}(1 + P + iA)|^{-2}.$$

Поэтому интеграл преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int dP dA \left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{\operatorname{DET}[P]_j^{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\operatorname{DET}[1 + P + iA]_j^{\{\sigma_j - \sigma_{j+1} \| \tau_j - \tau_{j+1}\}}} \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{DET} P^{\lambda_{n-1} - 2(2n-1) + 2}}{\operatorname{DET}(1 + P + iA)^{\{\sigma_{n-1} - 2 \| \tau_{n-1} - 2\}}} \right. \\ \left. \times \int_{u>0, h \in \mathbb{H}^{2n-2}} u^{\lambda_n - 2(2n-1)} \operatorname{DET}(1 + u + ic + |h|^2)^{\{-\sigma_n \| -\tau_n\}} du dc db dq \right). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Множитель (8.11) вычисляется с помощью леммы 4.4.

§ 9. Формула Планшереля для kern-представлений

Мы обсуждаем лишь случай групп $G = O(p, q)$, другие случаи ничем не отличаются от этого.

Для пространства $G/K = O(p, q)/O(p) \times O(q)$ рассмотрим модель $SW_{p,q}(\mathbb{R})$ типа сечения клина, см. п. 3.1. Точку пространства G/K мы реализуем как матрицу R размера $((q-p) + p) \times ((q-p) + p)$ вида

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2L & M + N \end{pmatrix}, \quad \text{где } M = M^t, \quad N = -N^t, \quad M - LL^t \gg 0.$$

Пусть $s_1, \dots, s_p$ — вещественные числа. Рассмотрим функцию u_s на $SW_{p,q}(\mathbb{R})$, заданную формулой

$$u_s(R) = \prod_{j=1}^p \det[M - LL^t]_j^{-\theta_j/2 + i(s_j - s_{j+1})},$$

где $\theta_1 = \theta_{p-1} = 1$, $\theta_p = q - p$. Напомним (см. п. 3.2), что эти функции являются собственными функциями минимальной параболической подгруппы в G . Через φ_s

мы обозначим усреднение функции u_s под действием максимальной компактной подгруппы $K = O(p) \times O(q) \subset O(p, q)$:

$$\varphi_s(R) = \int_K u_s(R^{[k]}) dk,$$

где через dk обозначена мера Хаара на K (нормированная так, что мера всей группы равна 1), а $R^{[g]}$ определяется формулой (2.3).

Легко видеть, что функции φ_s — это в точности сферические функции на симметрическом пространстве G/K (см., например, [19], [17]).

Функция Березина $\mathcal{B}_\alpha$ в наших координатах задается формулой

$$\mathcal{B}_\alpha(R) = \frac{4^{\alpha p} \det(M - LL^t)^\alpha}{\det(1 + M + N)^{2\alpha}}$$

(см. п. 3.3). Ее сферическое преобразование (см. [19], [17]) равно

$$A_\alpha(s) = \int_{G/K} \mathcal{B}_\alpha(R) \varphi_{-s}(R) dL dM dN.$$

В силу K -инвариантности функции $\mathcal{B}_\alpha(R)$ этот интеграл равен интегралу

$$\int_{G/K} \mathcal{B}_\alpha(R) u_{-s}(R) dL dM dN,$$

который является частным случаем интеграла (0.7). Итак,

$$A_\alpha(s) = C \cdot 2^{p\alpha} \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(\alpha + is_j - (q+p)/4 + 1/2) \Gamma(\alpha - is_j - (q+p)/4 + 1/2)}{\Gamma(2\alpha_j - (m-j))},$$

где C — константа, зависящая лишь от p, q .

Согласно формуле обращения Гиндикина–Карпелевича (см. [20], [19])

$$\mathcal{B}_\alpha(R) = \text{const} \int_{s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0} A_\alpha(s) \varphi_s(R) d\mu(s), \quad (9.1)$$

где $d\mu(s)$ — мера Гиндикина–Карпелевича.

Выписывая эту формулу в явном виде, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $\alpha > (q+p)/4 - 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\alpha(R) &= C \cdot 2^{p\alpha} \prod_{k=1}^p \frac{1}{\Gamma(2\alpha - (m-k))} \\ &\times \int_{s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0} \prod_{k=1}^p \left| \frac{\Gamma(\alpha + 2is_k - (q+p)/4 + 1/2) \Gamma((q-p)/2 + 2is_k)}{\Gamma(2is_k)} \right|^2 \\ &\times \prod_{1 \leq k < l \leq p} \left| \frac{\Gamma(1/2 + i(s_k - s_l)) \Gamma(1/2 + i(s_k + s_l))}{\Gamma(is_k - s_l) \Gamma(is_k + s_l)} \right|^2 \varphi_s(R) ds_1 ds_2 \dots ds_p. \end{aligned} \quad (9.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (9.2) заведомо верна, если

$$\int \mathcal{B}_\alpha(R) < \infty, \quad \int |A_\alpha(s)| d\mu(s) < \infty$$

(см. [19; теорема IV.9.5], [17; теорема XIV.5.3]). И то и другое верно при достаточно больших $\operatorname{Re} \alpha$. Далее, левая часть голоморфна по α на всей плоскости, а правая — при $\alpha > (p+q)/4 - 1/2$. Из соображений аналитического продолжения формула (9.2) остается правильной при всех $\alpha > (q+p)/4 - 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В точке $\alpha = (q+p)/4 - 1/2$ в правой части (9.2) появляется полюс в числителе, в этой же точке функция $\mathcal{B}_\alpha$ перестает быть квадратично интегрируемой функцией на группе $G = O(p, q)$. Аналитическое продолжение правой части на всю плоскость $\alpha \in \mathbb{C}$ и формула Планшереля, верная для всех допустимых α , получена в [12]. Формула Планшереля в этом случае состоит из большого числа слагаемых, соответствующих разным сериям унитарных представлений $O(p, q)$.

Список литературы

1. Siegel C. L. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen // Ann. of Math. (2) 1935. V. 36. P. 527–606.
2. Хуа Ло Кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.
3. Гиндикин С. Г. Анализ на однородных пространствах // УМН. 1964. Т. 19. № 4. С. 3–92.
4. Березин Ф. А. Связь между ко- и контравариантными символами операторов на классических комплексных симметрических пространствах // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 1. С. 15–17.
5. Unterberger A., Upmeyer H. The Berezin transform and invariant differential operators // Comm. Math. Phys. 1994. V. 164. № 3. P. 563–597.
6. Неретин Ю. А., Ольшанский Г. И. Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $O(p, q)$ и их пределы при $q \rightarrow \infty$ // Записки научн. сем. ПОМИ. Т. 223. С.-Петербург: ПОМИ, 1995; Англ. пер.: J. Math. Sci. 1997. С. 9–91.
7. van Dijk G., Hille S. C. Canonical representations related to hyperbolic spaces // J. Funct. Anal. 1997. V. 147. № 1. P. 109–139.
8. Olafsson G., Örsted B. Generalizations of the Bargmann transform // Lie theory and its applications in physics. Proceedings of the international workshop, Clausthal, Germany, August 14–17, 1995 / ed. H.-D. Doebner et al. Singapore: World Scientific, 1996. P. 3–14.
9. Örsted B., Zhang G. Tensor products of analytic continuations of holomorphic discrete series // Canad. J. Math. 1997. V. 49. № 6. P. 1224–1241.
10. Neretin Yu. A. Boundary values of holomorphic functions and some spectral problems for unitary representations // Positivity in Lie groups: open problems / ed. J. Hilgert et al. Berlin: Walter de Gruyter, 1998. P. 221–248.
11. Неретин Ю. А. О разделении спектров в анализе ядер Березина // Preprint, xxx.lanl.gov.RT/9906075.
12. Neretin Yu. A. Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space // Preprint, available xxx.lanl.gov.math.RT/9911024.
13. Неретин Ю. А. Продолжение представлений классических групп до представлений категорий // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 1. С. 176–202.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
15. Березин Ф. А. Квантование в комплексных симметрических областях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 2. С. 1362–1402.
16. Пятацкий-Шапиро И. И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматлит, 1961.

17. *Faraut J., Koranyi A.* Analysis on symmetric cones. Oxford: Clarendon Press, 1994.
18. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1984.
19. *Helgason S.* Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Orlando: Academic Press, 1984; Русск. пер.: М.: Мир, 1987.
20. *Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И.* Мера Планшереля для римановых симметрических пространств неположительной кривизны // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. С. 252–255.

Московский институт
электроники и математики

Поступила в редакцию
15.03.1999