Общероссийский математический портал

А. Г. Нурмиев, Орбиты и инварианты кубических матриц третьего порядка, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 5, 101–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:27:46

УДК 512.815.4

А. Г. Нурмиев

Орбиты и инварианты кубических матриц третьего порядка

Пусть V_i – трехмерное комплексное векторное пространство, $i = 1, 2, 3$. В работе классифицированы орбиты и описаны образующие алгебры инвариантов естественного линейного представления группы $SL(V_1) \times SL(V_2) \times SL(V_3)$ в пространстве $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

Библиография: 5 названий.

1. В настоящей статье классифицированы орбиты и описаны образующие алгебры инвариантов естественного представления группы $G = SL(V_1) \times SL(V_2) \times SL(V_3)$ в пространстве $U = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, где V_i – трехмерное комплексное векторное пространство, $i = 1, 2, 3$. Образующие алгебры инвариантов этого действия получены в виде сверток форм объема пространств V_i с элементами из U . Отметим, что проблема классификации элементов пространства U относительно действия большей группы, являющейся расширением группы $GL(V_1) \times GL(V_2) \times GL(V_3)$ с помощью группы S_3 , которая переставляет V_1, V_2, V_3 , была рассмотрена и решена в работе [1]. Известно также, что алгебра инвариантов данного представления свободна и степени образующих суть 6, 9, 12 (см. [2]). В работе [2] указана также группа Вейля для данного представления в смысле теории θ -групп (см. [2]).

Автор благодарен своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Введем основные обозначения и соглашения. Если V – векторное пространство, то V^* – двойственное векторное пространство. Пусть $Lie G$ – алгебра Ли группы G , $W = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ и $L_0(W)$ – алгебра Ли группы $SL(W)$. Далее будем пользоваться конструкциями из [3; §2]. Обозначим соответственно через $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ алгебры Ли типа E_8 и E_6 , реализованные как в [3]. Следовательно, мы имеем разложения: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G}'_{-1} \oplus \mathcal{G}'_0 \oplus \mathcal{G}'_1$, где $\mathcal{G}_{-1} = \wedge^3 W^*$, $\mathcal{G}_0 = L_0(W)$, $\mathcal{G}_1 = \wedge^3 W$, $\mathcal{G}'_{-1} = V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*$, $\mathcal{G}'_0 = Lie G$, $\mathcal{G}'_1 = U$, которые являются градуировками по модулю три. Помимо этого $\mathcal{G}'$ следующим образом отождествляется с градуированной подалгеброй в $\mathcal{G}$. Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ может быть отождествлено с подпространством в $\wedge^3 W$ по правилу:

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \quad (v_i \in V_i).$$

Аналогично, $V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*$ отождествляется с подпространством в $\wedge^3 W^*$, а алгебра Ли $Lie G$ диагонально вкладывается в $L_0(W)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00598).

Напомним основные определения и факты из [2]. Элемент пространства U называется *полупростым*, если его G -орбита замкнута в U , и *нильпотентным*, если замыкание G -орбиты содержит нуль. Каждый элемент u из U может быть однозначно записан в виде $u = p + e$, где p – полупростой, а e – nilпотентный элемент из U и $[p, e] = 0$, где $[\cdot, \cdot]$ – умножение в $\mathcal{G}'$. Такое разложение называется *разложением Жордана*. Вектор p называется полупростой, а e – nilпотентной частью u .

Классификация элементов из U осуществляется методом, представленным в [3; § 1]. А именно сначала мы описываем полупростые элементы. Они делятся на пять семейств в соответствии с типом стабилизатора и подпространством векторов из U , коммутирующих с данным вектором в смысле умножения в алгебре $\mathcal{G}'$. После чего мы описываем все возможные nilпотентные части для каждого семейства полупростых элементов по модулю действия стабилизатора полупростого элемента данного семейства. Это и дает классификацию элементов из U . Отметим, что классификация nilпотентных элементов в неявном виде получена в [3; таблица 5].

Сформулируем основные результаты. Для этого в каждом из пространств V_1, V_2, V_3 выберем базис. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в V_1 , $\{e_4, e_5, e_6\}$ – в V_2 , $\{e_7, e_8, e_9\}$ – в V_3 . Положим:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 \otimes e_4 \otimes e_7 + e_2 \otimes e_5 \otimes e_8 + e_3 \otimes e_6 \otimes e_9, \\ u_2 &= e_1 \otimes e_5 \otimes e_9 + e_2 \otimes e_6 \otimes e_7 + e_3 \otimes e_4 \otimes e_8, \\ u_3 &= e_1 \otimes e_6 \otimes e_8 + e_2 \otimes e_4 \otimes e_9 + e_3 \otimes e_5 \otimes e_7. \end{aligned}$$

Тогда каждый полупростой вектор эквивалентен вектору следующей формы

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3. \quad (1)$$

Коэффициенты определены с точностью до линейного преобразования из группы порядка 648, которая порождена комплексными отражениями порядка 3 (см. [2]).

Приведем описание семейств полупростых векторов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таблицы 1, 2, 3 содержат классификацию возможных nilпотентных частей соответствующих семейств полупростых элементов. “Представитель” – сумма некоторых векторов $e_i \otimes e_j \otimes e_k$, являющаяся представителем класса nilпотентных частей, где i, j, k – тройка индексов из наборов, указанных в этой колонке; $\dim S$ – размерность стабилизатора элемента из U с данной полупростой и nilпотентной частями, вычисленная по формуле из [3; п. 4.5]. Последняя строка в таблицах 1, 2, 3 соответствует нулевому классу.

Первое семейство. Это 3-параметрическое семейство полупростых векторов. Канонический вид элемента семейства имеет форму (1), где коэффициенты a_1, a_2, a_3 таковы, что

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 &\neq 0, \\ (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)^3 - (3a_1 a_2 a_3)^3 &\neq 0. \end{aligned}$$

Стабилизатор элемента этого семейства – группа порядка 81. Следовательно, возможна только нулевая nilпотентная часть. Векторы, эквивалентные вектору из первого семейства, составляют открытое по Зарискому подмножество в U .

Второе семейство. Полупростой вектор этого семейства имеет канонический вид:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2,$$

где $a_1 a_2 (a_1^3 + a_2^3) \neq 0$. Коэффициенты a_1, a_2 определены с точностью до линейного преобразования из группы порядка 18, порожденной комплексными отражениями (она изоморфна группе $G(3, 1, 2)$ в обозначениях работы [4]). Классификация возможных нильпотентных частей приведена в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

№	Представитель	dim S
1	168 249	0
2	168	1
3		2

Третье семейство. Канонический вид полупростого вектора:

$$u = a u_1,$$

где $a \neq 0$. Коэффициент a определен с точностью до умножения на корень шестой степени из единицы. Классификация возможных нильпотентных частей приведена в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2

№	Представитель	dim S
1	159 168 249 267	0
2	159 168 249	1
3	159 168 267	1
4	159 168	2
5	159 267	2
6	168 249	2
7	159	3
8	168	3
9		4

Четвертое семейство. Канонический вид полупростого вектора:

$$u = a(u_2 - u_3),$$

где $a \neq 0$. Коэффициент a определен с точностью до умножения на корень третьей степени из единицы. Классификация возможных нильпотентных частей приведена в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3

№	Представитель	dim S
1	149 167 258 347	0
2	149 158 167 248 257 347	1
3	147 258	2
4	148 157 247	3
5	147	5
6		8

Пятое семейство. Здесь $u = 0$. Классификация возможных нильпотентных частей есть просто классификация нильпотентных элементов в U .

Наборы пар индексов, при свертке по которым получаются образующие алгебры инвариантов, приведены в п. 5.

3. Согласно [2] рассматриваемое представление совпадает с представлением θ -группы (см. [2; № 2 в таблице]), дифференциал которого есть присоединенное представление $\mathcal{G}'_0$ в $\mathcal{G}'_1$. Из свойств θ -групп следует, что в данном представлении имеется картановское подпространство. Для его описания рассмотрим векторы:

$$\begin{aligned} P_i &= e_{k_i^1} \wedge e_{j_i^1} \wedge e_{l_i^1} + e_{k_i^2} \wedge e_{j_i^2} \wedge e_{l_i^2} + e_{k_i^3} \wedge e_{j_i^3} \wedge e_{l_i^3}, \\ P_i^* &= e^{k_i^1} \wedge e^{j_i^1} \wedge e^{l_i^1} + e^{k_i^2} \wedge e^{j_i^2} \wedge e^{l_i^2} + e^{k_i^3} \wedge e^{j_i^3} \wedge e^{l_i^3}, \end{aligned}$$

где i – номер набора:

- 1) (123, 456, 789); 2) (147, 258, 369); 3) (159, 267, 348); 4) (168, 249, 357),

k_i^n, j_i^n, l_i^n – n -я тройка чисел из i -го набора, а верхние индексы означают двойственный базис. Из конструкции $\mathcal{G}'_{-1}$, $\mathcal{G}'_1$ и их вложений в $\mathcal{G}_{-1}$, $\mathcal{G}_1$ соответственно следует, что $P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{G}'_1$ и $P_2 = u_1, P_3 = u_2, P_4 = u_3$, а $P_2^*, P_3^*, P_4^* \in \mathcal{G}'_{-1}$. Вследствие [3; п. 3.2, лемма] если $x \in \mathcal{G}'_1$ коммутирует с P_i , то он коммутирует с P_i^* . Так как $P_2, P_3, P_4, P_2^*, P_3^*, P_4^*$ друг с другом коммутируют и полупросты (см. [3]), то подпространство $\mathcal{L} := \langle P_2, P_3, P_4, P_2^*, P_3^*, P_4^* \rangle \subset \mathcal{G}'$ есть подалгебра Картана в $\mathcal{G}'$ и $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle \subset \mathcal{G}'_1$ – картановское подпространство. Следовательно, получаем утверждение: любой полупростой элемент из U эквивалентен линейной комбинации u_1, u_2, u_3 . Из свойств θ -групп следует, что мы получили описание элементов с замкнутыми орбитами с точностью до действия конечной группы, указанной в [2; № 2 в таблице]. Опишем эту группу геометрически.

Как известно из [2; § 9.3], группа Вейля градуированной подалгебры $\mathcal{G}'$, являющейся полупростой частью $\zeta(P_1)$ (см. [3; таблица 7]), где $\zeta(P_1)$ – централизатор P_1 в $\mathcal{G}$, есть W_{P_1} – стабилизатор P_1 в группе Вейля градуированной алгебры $\mathcal{G}$. Следовательно, из сказанного в [3; п. 3.3] получаем следующее. Зеркала отражений из группы Вейля $\mathcal{G}'$ ортогональны векторам: $u_1, u_2, u_3, (w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3)$, где w_i – корни из единицы, относительно подходящего эрмитова скалярного произведения, и этими отражениями порождается указанная группа.

4. Классификация нильпотентных элементов получается очевидным образом из [3]. Действительно, в [3; таблица 5] приведено описание нильпотентных элементов в U при действии группы, равной расширению группы G с помощью группы порядка 3, циклически переставляющей V_1, V_2, V_3 . Следовательно, необходимая классификация получается из [3; таблица 5] путем разнесения каждого представителя при помощи группы порядка 3, циклически переставляющей V_1, V_2, V_3 , с последующим приведением индексов в каждой тройке к порядку по возрастанию. Например, из представителя (147, 158) получаем представителей трех различных классов нильпотентных элементов U относительно G : (147, 158), (147, 248), (147, 257). При описанной выше процедуре у элементов, полученных из одного и того же элемента, “тип” и “dim S ” будут такие же, как у исходного элемента. “Характеристика” получается из исходной перестановкой пар индексов. Например,

из (151, 561) в соответствии с перестановкой получаем (611, 515), (156, 115). Для удобства приводится таблица 4 (см. [3; таблица 5]), к которой нужно применить указанную выше процедуру.

5. Как известно (см. [2; № 2 в таблице]), алгебра инвариантов интересующего нас представления порождается тремя свободными однородными образующими: степеней 6, 9, 12. Следовательно, полную систему свободных образующих будут составлять любые три однородных инварианта этих степеней, не удовлетворяющие соотношению типа:

$$\lambda \cdot F_6^2 = F_{12}, \quad (2)$$

где λ – комплексное число, а F_i – однородный полином степени i .

Обозначим форму объема пространства V_i через $\varepsilon(i)_{i_1 i_2 i_3}$. Будем искать инвариант степени $3k$ в виде полной свертки тензорного произведения $3k$ элементов из U , k форм объема пространства V_1 , k форм объема пространства V_2 , k форм объема пространства V_3 . Индексам формы объема i -го пространства при свертке могут соответствовать только индексы, стоящие на i -м месте у элементов из U .

Сопоставим каждой свертке рассматриваемого вида графическое изображение. Каждой форме объема сопоставим вершину, а тензору из U – треугольник таким образом, что каждая вершина будет вершиной ровно трех различных треугольников.

Рассмотрим следующие инварианты, представленные в виде наборов пар номеров индексов, по которым проводится свертка.

Инвариант степени 6: (1, 1), (2, 4), (3, 10), (4, 2), (5, 5), (6, 7), (7, 3), (8, 13), (9, 8), (10, 16), (11, 6), (12, 11), (13, 17), (14, 14), (15, 12), (16, 18), (17, 15), (18, 9).

Инвариант степени 9: (1, 1), (2, 22), (3, 7), (4, 2), (5, 4), (6, 8), (7, 3), (8, 5), (9, 25), (10, 10), (11, 16), (12, 9), (13, 11), (14, 17), (15, 13), (16, 12), (17, 6), (18, 14), (19, 19), (20, 18), (21, 26), (22, 20), (23, 23), (24, 27), (25, 21), (26, 24), (27, 15).

Инвариант степени 12: (1, 1), (2, 4), (3, 25), (4, 2), (5, 5), (6, 28), (7, 3), (8, 6), (9, 31), (10, 7), (11, 10), (12, 26), (13, 8), (14, 11), (15, 29), (16, 9), (17, 12), (18, 34), (19, 13), (20, 16), (21, 27), (22, 14), (23, 17), (24, 32), (25, 15), (26, 18), (27, 35), (28, 19), (29, 22), (30, 30), (31, 20), (32, 23), (33, 33), (34, 21), (35, 24), (36, 36).

Здесь первый индекс в паре – это индекс при координате вектора из U , а второй – индекс при координате формы объема.

Покажем, что эти инварианты не равны нулю, не удовлетворяют соотношению (2) и, следовательно, являются искомой системой образующих.

Заметим, что ввиду [2] интересующая нас алгебра при ограничении на картановское подпространство изоморфно отображается на алгебру инвариантов описанной выше группы Вейля на этом подпространстве. Вид же свободных образующих последней алгебры в базисе u_1, u_2, u_3 известен (см. [5; гл. 4, п. 7]).

Пусть a_1, a_2, a_3 – координатные функции относительно базиса u_1, u_2, u_3 картановского подпространства. Вычислим значения инвариантов степеней 6, 12 на векторе $v = e_1 \otimes e_4 \otimes e_7 + e_2 \otimes e_5 \otimes e_8 + e_3 \otimes e_6 \otimes e_9$ и коэффициенты при $a_1^6 a_2^3$, $a_1^9 a_2^3$ у образов инвариантов степеней 9, 12 при описанном выше изоморфизме соответственно.

Рис. 1

Сопоставим указанным выше инвариантам их графические изображения, см. рис. 1. Пунктирная линия на рис. 1 означает, что соединяемые ею вершины отождествляются.

После подстановки v каждому ненулевому члену альтернированной суммы соответствует раскраска треугольников реализации в три цвета, и она такова, что в каждую вершину не могут войти два треугольника одного и того же цвета. Действительно, назовем раскрашенным в i -й цвет треугольник, соответствующий тензору, у которого в данный член альтернированной суммы выбраны значения индексов, стоящие в i -й тройке набора (147, 258, 369).

Далее каждой раскраске сопоставим ее знак — это произведение координат форм объема, входящих в данный член альтернированной суммы. Напомним, что с одной формой объема могут свернуться только индексы с номерами, имеющими один и тот же остаток от деления на 3. Следовательно, значение инварианта на v равно сумме (по всем раскраскам его графического изображения) знаков этих раскрасок. В результате мы получаем $f_6(v) = -6$, $f_{12}(v) = 24$, где f_i — однородный инвариант степени i .

Пусть T^{ijk} — координата элемента из U . При ограничении инвариантов на картановское подпространство вклад в коэффициенты при указанных выше членах дадут те члены альтернированной суммы, которые выглядят как произведение трех координат вида T^{ijk} , где ijk — тройка из набора (159, 267, 348), а остальные координаты T^{ijk} имеют тройки индексов из набора (147, 258, 369).

Указанным выше членам альтернированной суммы сопоставим раскраску графического изображения инварианта. Треугольники, соответствующие тензорам, у которых в данный член выбрана тройка индексов из набора (147, 258, 369), имеют цвет, равный номеру тройки в наборе. Если же у тензора выбрана тройка ин-

Таблица 4

№	Тип	Представитель	Характеристика	$\dim S$
1	E_6	159 168 249 258 267 347	6 12 6 6 6 6	0
2	$E_6(a_1)$	159 168 249 257 258 347	6 6 6 6 0 6	1
3	$A_5 + A_1$	149 158 167 248 259 347	0 6 0 6 6 0	2
4	D_5	149 158 248 257 367	6 0 6 0 6 6	2
5	$D_5(a_1)$	149 167 168 257 348	3 3 3 3 0 6	3
6	A_5	149 158 248 267 357	1 5 1 5 6 1	3
7	$A_4 + A_1$	149 158 167 248 357	3 0 3 3 3 3	4
8	D_4	149 167 258 347	2 4 2 4 2 4	4
9	$D_4(a_1)$	147 158 258 269	0 6 0 0 0 0	4
10	$3A_2$	149 158 167 248 257 347	2 2 2 2 2 2	5
11	A_4	149 167 248 357	2 0 4 2 4 2	5
12	$A_3 + A_1$	149 167 247 258	1 5 0 1 0 1	5
13	$2A_2 + A_1$	149 158 167 248 257	1 4 1 1 1 1	6
14	$2A_2 + A_1$	149 157 168 247 348	3 0 3 0 0 3	7
15	A_3	158 169 247	2 4 1 0 1 0	7
16	$A_2 + 2A_1$	149 158 167 247	2 2 1 1 1 1	8
17	$2A_2$	148 157 249 267	0 4 2 0 2 0	8
18	$A_2 + 2A_1$	147 158 248 259	0 3 0 3 0 0	8
19	$A_2 + A_1$	149 157 248	1 2 1 2 0 1	9
20	A_2	147 258	0 2 0 2 0 2	10
21	$3A_1$	148 157 247	1 1 1 1 1 1	11
22	$3A_1$	147 158 169	3 0 0 0 0 0	13
23	$2A_1$	147 158	2 0 0 1 0 1	14
24	A_1	147	1 0 1 0 1 0	17
25				24

дексов из набора (159, 267, 348), то раскрасим только вершины соответствующего треугольника по следующему правилу. Каждому индексу j из тройки набора (159, 267, 348) соответствует при свертке индекс формы объема, следовательно, в вершину, соответствующую этой форме объема, входит вершина треугольника, отвечающего рассматриваемому тензору; тогда раскрасим эту вершину в цвет, равный остатку от деления j на 3, если j не делится на 3, и равный 3 в противном случае.

Так же, как и выше, определим знак раскраски. В результате нужные нам коэффициенты равны сумме знаков раскрасок по всем раскраскам, удовлетворяющим условиям, что в каждую вершину входят только разные цвета и раскраска треугольника с цветными вершинами получается из тройки набора (159, 267, 348). Соответственно коэффициенты ограниченных полиномов следующие: при $a_1^6 a_2^3$ в инварианте степени 9 он равен -72 , при $a_1^9 a_2^3$ в инварианте степени 12 он равен 96.

В силу сказанного выше, учитывая результаты из [5], мы знаем все коэффициенты ограничения инварианта шестой степени на картановское подпространство. Тогда получаем, что описанные выше инварианты не равны тождественно нулю

и, сравнивая коэффициенты при $a_1^9 a_2^3$ у f_6^2 и f_{12} , что соотношение (2) не выполнено. Отсюда вытекает, что указанные инварианты составляют свободную систему образующих.

6. Разделение полупростых элементов на семейства производится так же, как в [3; п. 3.4]. То есть все сводится к классам сопряженности стабилизаторов элементов картановского подпространства в группе Вейля. А они описаны в [4; таблица 8]. Вместе с тривиальными классами их пять. Используя аргументы из [3; п. 3.4 и § 5], можно легко получить указанное в п. 2 описание семейств полупростых элементов и нильпотентных частей для каждого из них.

7. Обозначения таблицы 4: $\dim S$ – размерность стабилизатора, вычисленная по формуле, указанной в [3; п. 4.5]; “характеристика” – это значения простых корней группы G на характеристике нильпотентного элемента, выбранных стандартным образом; “представитель” – это сумма некоторых векторов $e_i \otimes e_j \otimes e_k$, являющаяся представителем орбиты, где i, j, k – тройка индексов из наборов, указанных в этой колонке; “тип” – тип неприводимого нильпотентного элемента в смысле [3; п. 4.2]. Последняя строка соответствует нулевому классу.

Список литературы

1. *Thrall R. M., Chanler J. H.* Ternary trilinear forms in the field of complex numbers // *Duke Math. J.* 1938. V. 4. № 4. P. 678–690.
2. *Винберг Э. Б.* Группа Вейля градуированной алгебры Ли // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1976. Т. 40. № 3. С. 488–526.
3. *Винберг Э. Б., Элашвили А. Г.* Классификация тривекторов девятимерного пространства // *Труды семинара по векторному и тензорному анализу.* Т. 18. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 197–233.
4. *Shephard G. C., Todd J. A.* Finite unitary reflection groups // *Canad. J. Math.* 1954. V. 6. № 2. P. 274–304.
5. *Спрингер Т.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1981.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22.06.1999