Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Пламеневский, В. Н. Сеничкин, О классе псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{R}^m$ и на стратифицированных многообразиях, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 5, 109–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:20:53

УДК 517.98

Б. А. Пламеневский, В. Н. Сеничкин

О классе псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{R}^m$ и на стратифицированных многообразиях

Рассматривается класс псевдодифференциальных операторов в области пространства $\mathbb{R}^m$, приспособленный для перенесения на многообразия с (пересекающимися) ребрами разных размерностей. Обсуждается вариант символического исчисления. Операторы действуют в соболевских пространствах с весовыми нормами. Вводятся стратифицированные многообразия (ребра играют роль стратов), и на таких многообразиях определяются псевдодифференциальные операторы.

Библиография: 20 названий.

В последние годы предпринимались попытки дать определение и построить исчисление псевдодифференциальных операторов (ПДО) на многообразиях с особенностями (см. [1]–[5]). Однако эти попытки наталкивались на существенные трудности; классы ПДО оказывались специфическими или неинвариантными относительно естественных преобразований. “Общепринятой” теории ПДО на особых многообразиях пока не существует. Нужно выбрать “разумные” классы многообразий и диффеоморфизмов; определить ПДО вблизи особенностей; установить инвариантность множества рассматриваемых операторов относительно диффеоморфизмов; найти шкалу функциональных пространств, в которых действуют ПДО; построить символические исчисления.

Мы рассматриваем стратифицированное многообразие $\mathcal{M}$, т.е. конечное объединение непересекающихся связных топологических многообразий (стратов); граница каждого страта есть объединение некоторого множества стратов меньших размерностей. Страты наибольшей размерности (равной размерности $\mathcal{M}$) являются гладкими многообразиями. Другие страты играют роль ребер. В окрестности ребер вводится специальная дифференциальная структура. Близкий класс многообразий обсуждался в [6], [7] в связи с исследованием эллиптических задач для дифференциальных операторов. В настоящей статье прототипом ПДО служат дифференциальные операторы из [7]; конические точки для таких операторов рассматривались ранее Кондратьевым, Мазьей, Пламеневским и др. (см., например, [8]). Псевдодифференциальные операторы на многообразиях с коническими точками изучались в [4]. В этом случае ПДО и “ b -ПДО” Мелроуза [3] по существу совпадают. Для ребер положительной размерности ПДО и b -ПДО различаются; примерами ПДО и b -ПДО являются соответственно операторы $\Delta_y + \Delta_z$ и $\Delta_y + |y|^{-2}\Delta_z$, где Δ – лапласиан, z – переменные на ребре, а y – в нормальной к

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-01091).

ребру плоскости. Ребра приносят для ПДО больше осложнений, чем для b -ПДО. Случаю гладких замкнутых ребер посвящена статья [9]. Мы развиваем здесь подход, предложенный в этой статье.

Спектр C^* -алгебр ПДО с разрывными символами на гладких многообразиях исследовался в [10]–[12]; см. также обзор [13]. Алгебры на многообразиях с гладкими замкнутыми ребрами изучены в [14]. Полный список классов эквивалентных неприводимых представлений C^* -алгебр ПДО на стратифицированных многообразиях анонсирован в [15]. С другой точки зрения ПДО с особенностями обсуждались в [5]. Некоторые классы ПДО на негладких поверхностях возникали и в ряде работ, посвященных специальным вопросам (спектральной теории операторов в частности), см., например, [16] и указанную там литературу. В общей ситуации “негладкая” теория ПДО в этих статьях не развивалась.

Вернемся к настоящей статье. Стратифицированные многообразия локально представляются “моделями”, расположенными в евклидовом пространстве. Поэтому сначала вводится класс ПДО на $\mathbb{R}^m$. Для того чтобы пояснить происхождение рассматриваемых операторов, допустим, что роль ребра в $\mathbb{R}^m = \{x = (y, z), y = (x_1, \dots, x_n), z = (x_{n+1}, \dots, x_m)\}$ играет плоскость $y = 0$. Представителями нашего класса операторов являются, например, дифференциальные выражения вида

$$a(x, |y|D_x) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) (|y|D_x)^\alpha = |y|^\mu \sum_{|\alpha| \leq \mu} b_\alpha(x) |y|^{|\alpha| - \mu} D_x^\alpha,$$

где коэффициенты a_α и новые коэффициенты b_α (гладко) зависят, скажем, лишь от z и от точки $y/|y|$ на сфере S^{n-1} . Операторы действуют в шкале весовых пространств с нормами вида

$$\|u\|_{s, \beta} = \left(\int \sum_{|\alpha| \leq s} |y|^{2(\beta + |\alpha|)} |D_x^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Множитель $|y|^\mu$ в дифференциальном выражении перед суммой не очень существен (приводит к сдвигу относительно β в шкале пространств). Свяжем с оператором $a(x, |y|D_x)$ символ $a(x, |y|\xi) = \sum a_\alpha(x) (|y|\xi)^\alpha$.

Обобщая этот пример, введем псевдодифференциальные операторы

$$(2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} a(x, |y|\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

с такими символами $a(x, |y|\xi)$, что

$$|y|^{|\alpha|} |\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta a(x, \eta)| \leq C(\alpha, \beta) \langle \eta \rangle^{\mu - |\beta|}$$

при любых мультииндексах α, β ; как обычно, $\widehat{u}$ – преобразование Фурье функции u . Натянем на эти операторы (порядков $\mu \leq 0$) C^* -алгебру в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$. Оказывается [14], эта алгебра содержит и операторы с однородными символами $h(y, \xi)$ нулевого порядка относительно каждой из переменных y и ξ , и операторы с символами $\sigma(y, \xi)$, гладкими относительно ξ . Поэтому переход от символов

$a(x, |y|\xi)$ к символам $h(x, \xi)$ или $\sigma(x, \xi)$ есть просто переход к другому набору образующих одной и той же C^* -алгебры.

Поясним роль множителя $|y|$ в символах операторов. При замене переменных и в символических исчислениях возникают выражения вида $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, |y|\xi)$. Функция a имеет особенности относительно переменной x вблизи множества $\{x = (y, z) : y = 0\}$. Дифференцирование по x увеличивает порядок особенности, а при дифференцировании по ξ появляется компенсирующий множитель $|y|$.

В статье обсуждается только “скалярное” символическое исчисление ПДО (не операторнозначное). Оно строится по модулю операторов порядка $-\infty$, сглаживающих всюду вне особенностей. Эти операторы могут не быть компактными, что и является причиной введения операторнозначных символов. Скалярные символы – первая ступень в иерархии операторнозначных символических исчислений для ПДО на многообразиях с особенностями. С помощью скалярного исчисления мы устанавливаем, в частности, непрерывность ПДО в шкалах весовых функциональных пространств. (“Материал” для построения операторнозначных исчислений можно найти среди операторов, реализующих неприводимые представления C^* -алгебры ПДО, см. [15].) Мы не требуем стабилизации символов при подходе к особенностям многообразия. Это дает возможность использовать результаты настоящей статьи и при изучении более общих алгебр ПДО, чем в [15].

Обозначим C^* -алгебру, порожденную ПДО нулевого порядка, через $\mathcal{A}$. Известно (см., например, [4]), что элемент $a \in \mathcal{A}$ является фредгольмовым в том и только том случае, если обратим оператор $\pi(a)$ для любого неприводимого представления π факторалгебры $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ по идеалу $\mathcal{K}$ компактных операторов. Поэтому из результатов заметки [15] (содержащей полный список классов эквивалентных неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}$) вытекает критерий фредгольмовости для ПДО нулевого порядка на стратифицированном многообразии.

На таком многообразии можно строить иерархию операторнозначных символических исчислений. Понятие эллиптичности оператора можно связывать с различными уровнями в этой иерархии. “Эллиптический” оператор допускает обращение с точностью до соответствующего “сглаживающего” оператора. В частности, если оператор является эллиптическим на всех уровнях, то на последнем этапе сглаживающие операторы оказываются компактными. Всем этим вопросам предполагается посвятить дальнейшие публикации. Отметим еще, что класс ПДО, обсуждаемый в статье, обеспечивает естественную основу для построения теории псевдодифференциальных краевых задач на многообразиях со стратифицированным краем.

В §1 определяются ПДО на $\mathbb{R}^m$. Преобразованиям ПДО под действием “допустимых диффеоморфизмов” посвящен §2. В §3 изучается символическое исчисление для ПДО на $\mathbb{R}^m$. Ограниченность ПДО в пространствах с весом доказана в §4. Стратифицированные многообразия вводятся в §5; там же определяются ПДО на многообразиях и устанавливается непрерывность операторов в шкале соболевских весовых пространств.

Настоящая статья – начало развернутого изложения результатов, анонсированных в [15]. Она по существу была подготовлена до смертельной болезни Валерия Николаевича Сеничкина. В окончательной доводке текста он уже не участвовал.

§ 1. Псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}^m$

1.1. Классы символов. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^m$ (не обязательно связная), $d \in C^\infty(\Omega)$ – положительная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\sup_{x \in \Omega} d(x)^{|\alpha|-1} |\partial^\alpha d(x)| < +\infty \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m), \quad (1.1)$$

$$\inf_{x \in \Omega} \frac{d(x)}{\ell(x)} > 0, \quad (1.2)$$

где $\ell(x)$ – регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω . Важным для нас примером функции d является регуляризованное расстояние до некоторого множества $s \subset \partial\Omega$. Напомним определение регуляризованного расстояния от точки x до замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $\delta(x) = \text{dist}(x, F)$ – расстояние в $\mathbb{R}^m$ до F . Известно [17], что существует функция $x \mapsto \Delta(x)$ на $\mathbb{R}^m \setminus F$, обладающая свойствами:

- а) $c_1 \delta(x) \leq \Delta(x) \leq c_2 \delta(x)$;
- б) $\Delta \in C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus F)$ и $|\partial_x^\alpha \Delta(x)| \leq B_\alpha (\delta(x))^{1-|\alpha|}$, причем постоянные c_1, c_2 и B_α не зависят от F .

Такая функция Δ называется регуляризованным расстоянием от x до F .

Ограниченное множество $E \subset \Omega$ будем называть *допустимым* (относительно d), если $\inf_{x \in E} \ell(x)/d(x) > 0$. Совокупность всех допустимых множеств обозначим через $E(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функцию $\tilde{\sigma} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ назовем *предсимволом порядка μ* , $\mu \in \mathbb{R}$, если

$$\sup \{ d(x)^{|\alpha|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\sigma}(x, \xi)|; x \in E \} \leq C(\alpha, \beta, E) \langle \xi \rangle^{\mu-|\beta|} \quad (1.3)$$

при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$ и любом $E \in E(\Omega)$. Для каждого предсимвола $\tilde{\sigma}$ введем *символ*

$$\sigma(x, \xi) = \tilde{\sigma}(x, d(x)\xi). \quad (1.4)$$

Множество всех предсимволов (соответственно символов) порядка μ обозначим через $\tilde{S}^\mu(\Omega)$ (соответственно $S^\mu(\Omega)$). Для множеств $\bigcap S^\mu(\Omega)$ и $\bigcup S^\mu(\Omega)$ будем использовать обозначения $S^{-\infty}(\Omega)$ и $S(\Omega)$.

В “гладкой” теории ПДО роль пробных множеств, на которых требуют выполнения оценок типа (1.3), играют компактные подмножества Ω . У нас в качестве пробных выступают допустимые множества; это позволяет контролировать поведение символов вблизи особенностей.

Легко проверить утверждения:

1. при любом $\mu \in \mathbb{R}$ классы $\tilde{S}^\mu$ и S^μ являются линейными пространствами относительно обычных операций сложения и умножения на комплексные числа;
2. если $\mu \leq \nu$, то $\tilde{S}^\mu \subset \tilde{S}^\nu$, $S^\mu \subset S^\nu$;
3. $\tilde{S}^\mu \tilde{S}^\nu \subset \tilde{S}^{\mu+\nu}$, $S^\mu S^\nu \subset S^{\mu+\nu}$ при всех $\mu, \nu \in \mathbb{R}$;
4. пусть $\tilde{\sigma} \in \tilde{S}^\mu$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^m$, тогда функции

$$(x, \xi) \mapsto d(x)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\sigma}(x, \xi), \quad (x, \xi) \mapsto d(x)^{|\alpha|-|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi)$$

принадлежат соответственно классам $\tilde{S}^{\mu-|\beta|}$ и $S^{\mu-|\beta|}$.

1.2. Классы ПДО. С каждым символом $\sigma \in S^\mu(\Omega)$ свяжем оператор $A = \text{Op } \sigma$, определенный на функциях $u \in C_c^\infty(\Omega)$ формулой

$$Au(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} \sigma(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi. \quad (1.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Оператор A вида (1.5), где $\sigma \in S^\mu(\Omega)$, будем называть *псевдодифференциальным оператором (ПДО) порядка μ* (в области Ω). Класс всех таких ПДО обозначим через $\Psi^\mu(\Omega)$. Положим еще $\Psi(\Omega) = \bigcup_\mu \Psi^\mu(\Omega)$.

Если $A \in \Psi(\Omega)$, то каждый элемент $\sigma \in S(\Omega)$, удовлетворяющий условию $A = \text{Op } \sigma$, назовем *символом ПДО A* . В дальнейшем мы покажем (см. следствие 1.12), что из равенства $\text{Op } \sigma = \text{Op } \sigma_1$ следует включение $\sigma - \sigma_1 \in S^{-\infty}(\Omega)$.

Пусть $E \subset \Omega$ — произвольное компактное множество, $\sigma \in S^\mu(\Omega)$. Из (1.3) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$ вытекает оценка

$$\sup_{x \in E} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C'(\alpha, \beta, E) \langle \xi \rangle^{\mu - |\beta|}.$$

Поэтому операторы из $\Psi(\Omega)$ являются ПДО и в смысле “обычного” определения.

Если $\mu < -m$, то формулу (1.5) можно записать в виде

$$Au(x) = \int G(x, y) u(y) dy \quad (1.6)$$

с ядром

$$G(x, y) = (2\pi)^{-m} \int e^{i(x-y)\xi} \sigma(x, \xi) d\xi = (2\pi)^{-m} d(x)^{-m} \int e^{i(x-y)\xi/d(x)} \widetilde{\sigma}(x, \xi) d\xi.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$|G(x, y)| \leq (2\pi)^{-m} d(x)^{-m} \left\langle \frac{x-y}{d(x)} \right\rangle^{-2N} \int |\langle D_\xi \rangle^{2N} \widetilde{\sigma}(x, \xi)| d\xi, \quad N \in \mathbb{Z}_+.$$

Из свойств предсимволов вытекает, что для любого множества $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ интеграл в правой части последнего неравенства ограничен равномерно по $x \in E$. Таким образом, при всех $N \in \mathbb{Z}_+$

$$|G(x, y)| \leq C_N d(x)^{2N-m} (d(x)^2 + |x-y|^2)^{-N}, \quad (x, y) \in E \times \Omega. \quad (1.7)$$

Далее, если $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\mu < -m - |\alpha + \beta|$, то производная $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G(x, y)$ есть линейная комбинация функций $G^{(\gamma)}$, $\gamma \leq \alpha$, вида

$$\begin{aligned} G^{(\gamma)}(x, y) &= \int e^{i(x-y)\xi} \xi^{\beta+\gamma} \partial_x^{\alpha-\gamma} \sigma(x, \xi) d\xi \\ &= d(x)^{-|\alpha+\beta|} \int e^{i(x-y)\xi} (d(x)\xi)^{\beta+\gamma} d(x)^{|\alpha-\gamma|} \partial_x^{\alpha-\gamma} \sigma(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку функция $(x, \xi) \mapsto (d(x)\xi)^{\beta+\gamma} d(x)^{|\alpha-\gamma|} \partial_x^{\alpha-\gamma} \sigma(x, \xi)$ является символом порядка $\mu + |\alpha + \beta| < -m$, то для $G^{(\gamma)}$ справедливы оценки (1.7) с заменой $-m$ на $-m - |\alpha + \beta|$. Мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1.3. Пусть $A \in \Psi^\mu(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$, $\mu + |\alpha + \beta| < -m$. Тогда для любых $x \in \mathbb{Z}_+$ и $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ ядро G ПДО A допускает при $(x, y) \in E \times \Omega$ оценку

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G(x, y)| \leq C(\alpha, \beta, N, E) d(x)^{N-m-|\alpha+\beta|} (d(x)^2 + |x-y|^2)^{-N/2}. \quad (1.8)$$

Выше лемма была проверена лишь для четных N . Однако ввиду неравенства $d(x)(d(x)^2 + |x-y|^2)^{-1/2} \leq 1$ она справедлива при всех $N \in \mathbb{Z}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Распределение $G \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ имеет собственный носитель, если

- (i) проекции $\pi_1, \pi_2: \text{supp } G \rightarrow \Omega$ суть собственные отображения;
- (ii) на множестве $\text{supp } G$ отношения $d(x)/d(y)$ и $\ell(x)/\ell(y)$ ограничены и отделены от нуля.

ПДО $A \in \Psi(\Omega)$ назовем *собственным*, если его ядро G_A имеет собственный носитель. Класс всех собственных ПДО порядка μ обозначим через $\Psi_0^\mu(\Omega)$.

Заметим, что если область Ω ограничена, то условие (i) определения 1.4 вытекает из (ii).

ПРИМЕР. Пусть $P(x, D) = \sum_{|\beta| \leq \mu} a_\beta(x) (d(x)D)^\beta$ — дифференциальный оператор, причем коэффициенты $a_\beta \in C^\infty(\Omega)$ удовлетворяют на каждом допустимом множестве E оценкам $|\partial^\alpha a_\beta(x)| \leq C_\alpha d(x)^{-|\alpha|}$. Тогда $P \in \Psi_0^\mu(\Omega)$.

1.3. Выражение собственных ПДО через амплитуды. Для функции $f \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ обозначим через $\text{supp}_{x,y} f$ замыкание проекции множества $\text{supp } f$ на $\Omega \times \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Функцию $\tilde{a} \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ назовем *предамплитудой* порядка μ , если

$$\sup \{ d(x)^{|\alpha|} d(y)^{|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma \tilde{a}(x, y, \xi)|; (x, y) \in E \times E \} \leq C(\alpha, \beta, \gamma, E) \langle \xi \rangle^{\mu-|\gamma|} \quad (1.9)$$

для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^m$ и $E \in \mathcal{E}(\Omega)$. С каждой предамплитудой $\tilde{a}$ свяжем *амплитуду*

$$a(x, y, \xi) = \tilde{a}(x, y, d(x)\xi). \quad (1.10)$$

Предамплитуду $\tilde{a}$ и соответствующую ей амплитуду a будем называть *собственными*, если проекции $\pi_1, \pi_2: \text{supp}_{x,y} \tilde{a} \rightarrow \Omega$ являются собственными отображениями, а отношения $d(x)/d(y)$ и $\ell(x)/\ell(y)$ ограничены и отделены от нуля на множестве $\text{supp}_{x,y} \tilde{a}$.

Множество всех предамплитуд (соответственно амплитуд) порядка μ обозначим через $\tilde{S}^\mu(\Omega, \Omega)$ (соответственно $S^\mu(\Omega, \Omega)$). Множества собственных предамплитуд и амплитуд будем обозначать $\tilde{S}_0^\mu(\Omega, \Omega)$ и $S_0^\mu(\Omega, \Omega)$. Для амплитуд справедливы аналоги свойств 1–4 из п. 1.1. Ограничение амплитуды порядка μ на множество $\{(x, y, \xi) : x = y\}$ есть символ того же порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Если $\tilde{a} \in \tilde{S}_0^\mu(\Omega, \Omega)$, то произведение $d(x)^{|\alpha|} d(y)^{|\beta|}$ в (1.9) можно заменить на $d(x)^{|\alpha+\beta|}$ (или $d(y)^{|\alpha+\beta|}$), а $E \times E$ — на $E \times \Omega$ (или $\Omega \times E$):

$$\sup \{ d(x)^{|\alpha+\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma \tilde{a}(x, y, \xi)|; (x, y) \in E \times \Omega \} \leq C'(\alpha, \beta, \gamma, E) \langle \xi \rangle^{\mu-|\gamma|}. \quad (1.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_1, \pi_2: \text{supp}_{x,y} \tilde{a} \rightarrow \Omega$ – проекции, $E \in \mathcal{E}(\Omega)$, $E_1 = \pi_2(\pi_1^{-1}(E))$. Если $y_0 \in E_1$, то $(x_0, y_0) \in \text{supp}_{x,y} \tilde{a}$ при некотором $x_0 \in E$. Существуют такие $\delta \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$, что $d(x)/d(y) \in [\delta, \delta^{-1}]$, $\ell(x)/\ell(y) \in [\delta, \delta^{-1}]$ для $(x, y) \in \text{supp}_{x,y} \tilde{a}$ и $\varepsilon d(x) \leq \ell(x)$ для $x \in E$. Следовательно, $d(y_0) \leq \delta^{-1} d(x_0) \leq \delta^{-1} \varepsilon^{-1} \ell(x_0) \leq \delta^{-2} \varepsilon^{-1} \ell(y_0)$ и поэтому $\delta^2 \varepsilon d(y_0) \leq \ell(y_0)$. Поскольку точка $y_0 \in E$ выбиралась произвольно, то $E_1 \in \mathcal{E}(\Omega)$.

Множество $E \cup E_1$ также принадлежит $\mathcal{E}(\Omega)$. Значит, оценки (1.10) выполняются при замене $E \times E$ на $(E \cup E_1) \times (E \cup E_1)$ и, тем более, на $E \times E_1$. Поскольку $\tilde{a}(x, y, \xi) = 0$ при $(x, y) \in E \times (\Omega \setminus E_1)$, то $E \times E$ в (1.10) можно заменить на $E \times \Omega$.

Утверждение, касающееся $d(x)^{|\alpha|} d(y)^{|\beta|}$, очевидно.

Отметим еще, что если $a \in S_0^\mu(\Omega, \Omega)$, то функция $(x, y, \xi) \mapsto a(y, x, \xi) = \tilde{a}(y, x, d(y)\xi)$ также принадлежит $S_0^\mu(\Omega, \Omega)$; это легко следует из оценок (1.1) и неравенства $\delta d(x) \leq d(y) \leq \delta^{-1} d(x)$, $(x, y) \in \text{supp}_{x,y} \tilde{a}$. (Для не собственных амплитуд аналогичный факт в общем случае неверен.)

Приведем пример амплитуды нулевого порядка, который будет полезен при доказательстве ряда предложений.

ЛЕММА 1.7. Пусть $X \subset \Omega \times \Omega$ – такое множество, что проекции $\pi_1, \pi_2: X \rightarrow \Omega$ являются собственными отображениями, а отношения $d(x)/d(y)$ и $\ell(x)/\ell(y)$ ограничены и отделены от нуля на X . Тогда существует функция $\chi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, подчиненная требованиям:

- 1) χ имеет собственный носитель;
- 2) $\chi = 1$ в некоторой окрестности множества X ;
- 3) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$ и $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \chi(x, y)| \leq C(\alpha, \beta, E) d(x)^{-|\alpha|} d(y)^{-|\beta|}, \quad (x, y) \in E \times E.$$

Таким образом, χ – собственная амплитуда нулевого порядка (не зависящая от ξ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существует разбиение единицы $\{\chi_j\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ в области Ω , удовлетворяющее условиям [17]:

- а) при любом j множество $\text{supp } \chi_j$ содержится в некотором шаре

$$\mathcal{B}_j \equiv \mathcal{B}(x_j, \rho_j) \Subset \Omega, \quad \rho_j \leq \varepsilon \ell(x_j);$$

- б) каждая точка $x \in \Omega$ принадлежит не более чем N множествам $\text{supp } \chi_j$, где $N \in \mathbb{N}$ – некоторое число, зависящее только от размерности m пространства $\mathbb{R}^m$;

- в) $|\partial_x^\alpha \chi_j(x)| \leq C \ell(x)^{-|\alpha|}$, причем $C = C(\alpha, \varepsilon)$ не зависит от j .

Положим $\chi(x, y) = \sum'_{j,k} \chi_j(x) \chi_k(y)$ (штрих означает, что суммирование распространяется только на те пары (j, k) , для которых $X \cap (\mathcal{B}_j \times \mathcal{B}_k) \neq \emptyset$). Ясно, что $\chi = 1$ в окрестности множества X . Кроме того,

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \chi(x, y)| \leq (CN)^2 \ell(x)^{-|\alpha|} \ell(y)^{-|\beta|}, \quad (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Если $E \in E(\Omega)$, то $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \chi(x, y)| \leq C' d(x)^{-|\alpha|} d(y)^{-|\beta|}$ при $(x, y) \in E \times E$. Таким образом, функция χ обладает свойствами 2) и 3).

Покажем, что если число ε достаточно мало, то χ удовлетворяет и требованию 1). Введем обозначения:

$$C_{\pm 1} = \sup \left\{ \left(\frac{d(x)}{d(y)} \right)^{\pm 1}; (x, y) \in X \right\}, \quad C_0 = \{ \sup |\nabla d(x)|; x \in \Omega \},$$

$$\varepsilon_0 = \inf \left\{ \frac{d(x)}{\ell(x)}; x \in \Omega \right\}.$$

В силу (1.2) $\varepsilon_0 > 0$. Выберем ε так, что $C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1} < 1$. Пусть $(x, y) \in \text{supp } \chi$. Существуют j, k такие, что $x \in \mathcal{B}_j, y \in \mathcal{B}_k$. Поскольку

$$|d(x) - d(x_j)| \leq C_0 |x - x_j| \leq C_0 \rho_j \leq C_0 \varepsilon \ell(x_j) \leq C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1} d(x_j)$$

и аналогично $|d(y) - d(y_k)| \leq C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1} d(y_k)$, то

$$(1 - C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1}) d(x_j) \leq d(x) \leq (1 + C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1}) d(x_j),$$

$$(1 - C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1}) d(y_k) \leq d(y) \leq (1 + C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1}) d(y_k).$$

Полагая $M = (1 + C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1}) / (1 - C_0 \varepsilon \varepsilon_0^{-1})$, выводим отсюда, что

$$M^{-1} \frac{d(x_j)}{d(y_k)} \leq \frac{d(x)}{d(y)} \leq M \frac{d(x_j)}{d(y_k)}.$$

Это неравенство справедливо для любой точки $(x, y) \in (\mathcal{B}_j \times \mathcal{B}_k) \cap \text{supp } \chi$. В частности, мы можем взять в качестве (x, y) точку $(x', y') \in (\mathcal{B}_j \times \mathcal{B}_k) \cap X$:

$$M^{-1} \frac{d(x_j)}{d(y_k)} \leq \frac{d(x')}{d(y')} \leq M \frac{d(x_j)}{d(y_k)}.$$

Но тогда

$$M^{-2} \frac{d(x')}{d(y')} \leq \frac{d(x)}{d(y)} \leq M^2 \frac{d(x')}{d(y')}$$

и, следовательно, $M^{-2} C_1^{-1} \leq d(x)/d(y) \leq M^2 C_1$ при $(x, y) \in \text{supp } \chi$. Отношение $\ell(x)/\ell(y)$ рассматривается аналогично.

Каждой амплитуде a соответствует оператор $A = \text{Op } a$, определенный на функциях $u \in C_c^\infty(\Omega)$ формулой

$$Au(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (1.12)$$

Наша ближайшая цель – показать, что $\Psi_0^\mu(\Omega) = \text{Op } S_0^\mu(\Omega, \Omega)$ ($\forall \mu \in \mathbb{R}$). Включение $\Psi_0^\mu(\Omega) \subset \text{Op } S_0^\mu(\Omega, \Omega)$ справедливо в силу леммы 1.7. Действительно, если $A = \text{Op } \sigma$, $\sigma \in S^\mu(\Omega)$, и χ – функция из леммы, построенная для множества $X := \text{supp } G_A$, то $\chi\sigma \in S_0^\mu(\Omega, \Omega)$ и $A = \text{Op } \chi\sigma$. Для доказательства противоположного включения введем функцию

$$\sigma_A(x, \xi) = e_{-\xi} A e_\xi(x), \quad \text{где } e_\xi(x) = e^{ix\xi}. \quad (1.13)$$

В подробной записи

$$\begin{aligned} \sigma_A(x, \xi) &= (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)(\eta-\xi)} a(x, y, \eta) dy d\eta \\ &= (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\theta} a(x, y, \xi + \theta) dy d\theta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть $A = \text{Op } a$, $a \in S_0^\mu(\Omega, \Omega)$. Тогда

- 1) $\sigma_A \in S^\mu(\Omega)$;
- 2) A – собственный ПДО, причем $A = \text{Op } \sigma_A$;
- 3) имеет место асимптотическое разложение

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_y^{\alpha} a(x, y, \xi) \Big|_{y=x}, \quad (1.15)$$

означающее, что

$$\sigma_A - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_y^{\alpha} a(x, y, \xi) \Big|_{y=x} \in S^{\mu-N}(\Omega) \quad (\forall N \in \mathbb{N}).$$

При доказательстве теоремы понадобится

ЛЕММА 1.9. Пусть $a \in S_0^\mu(\Omega, \Omega)$ и $h \in C[0, 1]$. Для любого $t \in [0, 1]$ положим

$$\sigma_t(x, \xi) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\theta} a(x, y, \xi + t\theta) u(y) dy d\theta$$

и определим функцию σ равенством

$$\sigma(x, \xi) = \int_0^1 \sigma_t(x, \xi) h(t) dt.$$

Тогда $\sigma \in S^\mu(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.9. Пусть $\tilde{\sigma}_t$, $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{a}$ – функции, соответствующие σ_t , σ и a в силу формул (1.4) и (1.10). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t(x, \xi) &= (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\theta} \tilde{a}(x, y, \xi + td(x)\theta) dy d\theta, \\ \tilde{\sigma}(x, \xi) &= \int_0^1 \tilde{\sigma}_t(x, \xi) h(t) dt. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Лемма будет доказана, если мы установим, что для любого множества $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ функция $\tilde{\sigma}_t$ подчиняется при $x \in E$ оценкам

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \tilde{\sigma}_t(x, \xi)| \leq C(\alpha, \beta, E) d(x)^{-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{\mu-|\beta|}, \quad (1.17)$$

в которых постоянные $C(\alpha, \beta, E)$ не зависят от $t \in [0, 1]$. В интеграле (1.16) заменим переменные $y \rightarrow d(x)y$, $\theta \rightarrow \theta/d(x)$, проинтегрируем по частям и получим равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t(x, \xi) &= (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\theta} \langle D_{\theta} \rangle^{2N} [\langle D_y \rangle^{2N} b_t(x, y, \xi, \theta) \langle \theta \rangle^{-2N}] \\ &\quad \times \langle X - y \rangle^{-2N} dy d\theta, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $X = x/d(x)$, $b_t(x, y, \xi, \theta) = \tilde{a}(x, d(x)y, \xi + t\theta)$. Из (1.11) следует, что

$$|\partial_y^{\beta_1} \partial_\theta^{\beta_2} b_t(x, y, \xi, \theta)| \leq C(\beta_1, \beta_2, E) \langle \xi + t\theta \rangle^{\mu - |\beta_2|}, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}_+^m,$$

а так как $\langle \xi + t\theta \rangle^{\mu - |\beta_2|} \leq \langle \xi + t\theta \rangle^\mu \leq 2^{|\mu|/2} \langle \xi \rangle^\mu \langle \theta \rangle^{|\mu|}$, то

$$|\partial_y^{\beta_1} \partial_\theta^{\beta_2} b_t(x, y, \xi, \theta)| \leq C'(\beta_1, \beta_2, E) \langle \xi \rangle^\mu \langle \theta \rangle^{|\mu|}.$$

Отсюда и из (1.18), учитывая соотношение $|\partial^\gamma (\langle \theta \rangle^{-2N})| \leq C_{\gamma N} \langle \theta \rangle^{-2N}$, выводим оценку

$$|\tilde{\sigma}_t(x, \xi)| \leq C(N, E) \langle \xi \rangle^\mu \iint \langle X - y \rangle^{-2N} \langle \theta \rangle^{\mu - 2N} dy d\theta,$$

которую при $N > (m + |\mu|)/2$ можно переписать так: $|\tilde{\sigma}_t| \leq C(E) \langle \xi \rangle^\mu$. Тем самым неравенство (1.17) доказано при $\alpha = \beta = 0$.

Для произвольных мультииндексов α и β это неравенство следует из предыдущих рассуждений, поскольку $d(x)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\sigma}_t(x, \xi)$ есть сумма интегралов вида (1.16) с заменой $\tilde{a}$ на некоторые преамплитуды порядка $\mu - |\beta|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.8. Используя формулу (1.14) и разложение Тейлора

$$\begin{aligned} a(x, y, \xi + \theta) &= \sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi) \theta^\alpha \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi + t\theta) \theta^\alpha dt, \end{aligned}$$

получаем

$$\sigma_A(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{1}{\alpha!} \sigma^{(\alpha)}(x, \xi) + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \sigma^{(\alpha)}(x, \xi), \quad (1.19)$$

где при $|\alpha| \leq N-1$

$$\sigma^{(\alpha)}(x, \xi) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\theta} \partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi) \theta^\alpha dy d\theta = \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x},$$

а при $|\alpha| = N$

$$\begin{aligned} \sigma^{(\alpha)}(x, \xi) &= \int_0^1 (1-t)^{N-1} \sigma_t^{(\alpha)}(x, \xi) dt, \\ \sigma_t^{(\alpha)}(x, \xi) &= (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\theta} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi + t\theta) \theta^\alpha dy d\theta. \end{aligned}$$

Полагая $r_N(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=N} (N/\alpha!) \sigma^{(\alpha)}(x, \xi)$, перепишем равенство (1.19) в виде

$$\sigma_A(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{1}{\alpha!} \sigma^{(\alpha)}(x, \xi) + r_N(x, \xi).$$

Поскольку функция $(x, y, \xi) \mapsto \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)$ является собственной амплитудой порядка $\mu - |\alpha|$, то $r_N \in S^{\mu-N}(\Omega)$ в силу леммы 1.9. Это доказывает утверждение 3) теоремы. Из него следует утверждение 1).

Что касается формулы $A = \text{Op } \sigma_A$, то она справедлива для “обычных” ПДО (см., например, [18]), а значит, и для ПДО из рассматриваемых нами классов $\Psi^\mu(\Omega)$.

Для завершения доказательства заметим, что в силу очевидного включения $\text{supp } G_A \subset \text{supp}_{x,y} a$ оператор A является собственным.

СЛЕДСТВИЕ 1.10. Пусть $A = \text{Op } a$, $a \in S_0^\mu(\Omega, \Omega)$, причем амплитуда a имеет на множестве $\{(x, y, \xi) : x = y\}$ нуль бесконечного порядка. Тогда $A \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.11. $\Psi_0^\mu(\Omega) = \text{Op } S_0^\mu(\Omega, \Omega)$ ($\forall \mu \in \mathbb{R}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, $\Psi_0^\mu(\Omega) \subset \text{Op } S_0^\mu(\Omega, \Omega)$. Обратно, если $A = \text{Op } a$, $a \in S_0^\mu(\Omega, \Omega)$, то $A \in \Psi_0^\mu(\Omega)$ в силу теоремы 1.8.

СЛЕДСТВИЕ 1.12. Пусть χ — функция из леммы 1.7, построенная для множества $X := \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : x = y\}$. Тогда при любом $\mu \in \mathbb{R}$ отображения

$$S^\mu(\Omega) \rightarrow \Psi^\mu(\Omega) \rightarrow \Psi_0^\mu(\Omega) : \sigma \mapsto \text{Op } \sigma \mapsto \text{Op}(\chi\sigma)$$

порождают изоморфизмы $S^\mu/S^{-\infty} \cong \Psi^\mu/\Psi^{-\infty} \cong \Psi_0^\mu/\Psi_0^{-\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B = \text{Op } \chi\sigma$. Из (1.15) вытекает, что $\sigma_B - \sigma \in S^{-\infty}(\Omega)$. Значит, композиция отображений

$$S^\mu/S^{-\infty} \rightarrow \Psi^\mu/\Psi^{-\infty} \rightarrow \Psi_0^\mu/\Psi_0^{-\infty} \rightarrow S^\mu/S^{-\infty} : [\sigma] \mapsto [\text{Op } \sigma] \mapsto [B] \mapsto [\sigma_B]$$

есть тождественное отображение факторпространства $S^\mu/S^{-\infty}$. Для завершения доказательства достаточно проверить, что отображения $p_1 : S^\mu/S^{-\infty} \rightarrow \Psi^\mu/\Psi^{-\infty}$ и $p_2 : \Psi^\mu/\Psi^{-\infty} \rightarrow \Psi_0^\mu/\Psi_0^{-\infty}$ сюръективны. Сюръективность p_1 очевидна. Рассмотрим p_2 . Пусть $A = \text{Op } \sigma \in \Psi_0^\mu$. ПДО A можно рассматривать и как элемент класса Ψ^μ . Поскольку $p_2([A]) = [\text{Op } \chi\sigma]$ и $A - \text{Op } \chi\sigma \in \Psi_0^{-\infty}$ (см. ниже), то отображение p_2 сюръективно.

Покажем, что $A - \text{Op } \chi\sigma \in \Psi_0^{-\infty}$. Пусть $\tilde{\chi}$ — еще одна функция из леммы 1.7, $\tilde{\chi} = 1$ в окрестности носителя ядра оператора A . Тогда $A - \text{Op } \chi\sigma = \text{Op}(\tilde{\chi}(1 - \chi)\sigma) \in \Psi_0^{-\infty}$ в силу следствия 1.10.

СЛЕДСТВИЕ 1.13. Каждый ПДО $A \in \Psi^\mu(\Omega)$ представляется в виде $B + C$, где $B \in \Psi_0^\mu(\Omega)$, $C \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \text{Op } \sigma$, $\sigma \in S^\mu(\Omega)$, χ — функция из леммы 1.7, построенная для диагонали $\{x = y\}$. Тогда $B := \text{Op } \chi\sigma \in \Psi_0^\mu(\Omega)$, $C := \text{Op}(\sigma - \chi\sigma) \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ и $A = B + C$.

1.4. ПДО порядка $-\infty$. Интегральный оператор (1.6) назовем *собственным*, если его ядро G имеет собственный носитель.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. Для линейного оператора $A: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $A \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$;
- 2) A – собственный интегральный оператор с ядром $G \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, которое для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ удовлетворяет при $(x, y) \in E \times \Omega$ оценке (1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из леммы 1.3. Покажем, что 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A – оператор вида (1.6) с ядром G , удовлетворяющим оценке (1.8). Положим

$$\sigma(x, \xi) = \int e^{-i(x-y)\xi} G(x, y) dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\text{Op } \sigma)u(x) &= (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} \left(\int e^{-i(x-y)\xi} G(x, y) dy \right) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-m/2} \iint e^{iy\xi} G(x, y) \widehat{u}(\xi) dy d\xi = \int G(x, y) u(y) dy = Au(x), \end{aligned}$$

и нужно только проверить включение $\sigma \in S^{-\infty}(\Omega)$, которое равносильно включению $\tilde{\sigma} \in \tilde{S}^{-\infty}(\Omega)$, где

$$\tilde{\sigma}(x, \xi) = \sigma\left(x, \frac{\xi}{d(x)}\right) = \int e^{-i(x-y)\xi/d(x)} G(x, y) dy.$$

Прежде всего отметим, что если $N > m/2$, то

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{d(x)^{N-m}}{(d(x)^2 + |x-y|^2)^{N/2}} dy < +\infty, \quad (1.20)$$

причем интеграл не зависит от $x \in \Omega$. Действительно, выполняя замену переменной $y \rightarrow d(x)y$, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{d(x)^N}{(d(x)^2 + |x - d(x)y|^2)^{N/2}} dy &= \int \frac{dy}{(1 + |d(x)^{-1}x - y|^2)^{N/2}} \\ &= \int \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{N/2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что при любых $\beta, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^m$ и $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\left| \partial_y^\beta \left[\left(\frac{x-y}{d(x)} \right)^\mu \cdot \partial_x^\nu G(x, y) \right] \right| \leq C \frac{d(x)^{N-|\nu+\beta|-m}}{(d(x)^2 + |x-y|^2)^{N/2}}, \quad x \in E \quad (1.21)$$

(здесь и далее мы не указываем зависимость постоянной C от $\beta, N, \dots$ и $E \in \mathcal{E}(\Omega)$). Достаточно получить такую оценку для каждой функции

$$(x, y) \mapsto d(x)^{-|\beta_1|} \left(\frac{x-y}{d(x)} \right)^{\mu-\beta_1} \partial_x^\nu \partial_y^{\beta_2} G(x, y), \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta, \quad \beta_1 \leq \mu.$$

Используя неравенство (1.8) с заменой α, β, N на $\nu, \beta_2, N + |\mu - \beta_1|$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| d(x)^{-|\beta_1|} \left(\frac{x-y}{d(x)} \right)^{\mu-\beta_1} \partial_x^\nu \partial_y^{\beta_2} G(x, y) \right| \\ & \leq C d(x)^{-|\beta_1|} \cdot \frac{|x-y|^{|\mu-\beta_1|}}{d(x)^{|\mu-\beta_1|}} \cdot \frac{d(x)^{N+|\mu-\beta_1|-|\nu+\beta_2|-m}}{(d(x)^2 + |x-y|^2)^{(N+|\mu-\beta_1|)/2}} \\ & \leq C \frac{d(x)^{N-|\nu+\beta|-m}}{(d(x)^2 + |x-y|^2)^{N/2}}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Положим

$$\sigma_{\mu\nu}(x, \xi) = \int e^{-i(x-y)\xi/d(x)} \left(\frac{x-y}{d(x)} \right)^\mu \partial_x^\nu G(x, y) dy$$

и проверим, что при всех $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\sup_{x \in E} |\sigma_{\mu\nu}(x, \xi)| \leq C d(x)^{-|\nu|} \langle \xi \rangle^{-k}, \quad x \in E. \quad (1.22)$$

Для этого проинтегрируем по частям:

$$\sigma_{\mu\nu}(x, \xi) = \left\langle \frac{\xi}{d(x)} \right\rangle^{-2k} \int e^{-i(x-y)\xi/d(x)} \langle D_y \rangle^{2k} \left[\left(\frac{x-y}{d(x)} \right)^\mu \partial_x^\nu G(x, y) \right] dy,$$

и воспользуемся оценкой

$$\left| \langle D_y \rangle^{2k} \left[\left(\frac{x-y}{d(x)} \right)^\mu \partial_x^\nu G(x, y) \right] \right| \leq C (1 + d(x)^{-2k}) \frac{d(x)^{N-|\nu|-m}}{(d(x)^2 + |x-y|^2)^{N/2}},$$

которая непосредственно следует из (1.21). Тогда

$$\begin{aligned} |\sigma_{\mu\nu}(x, y)| & \leq C \left\langle \frac{\xi}{d(x)} \right\rangle^{-2k} (1 + d(x)^{-2k}) \int \frac{d(x)^{N-|\nu|-m}}{(d(x)^2 + |x-y|^2)^{N/2}} dy \\ & = C d(x)^{-|\nu|} \frac{1 + d(x)^{2k}}{(d(x)^2 + |\xi|^2)^k} \int \frac{d(x)^{N-m}}{(d(x)^2 + |x-y|^2)^{N/2}} dy. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Если $k \geq 1$ и $|\xi| \geq 1$, то $(1 + d(x)^{2k})/(d(x)^2 + |\xi|^2)^k$ при $x \in E$ оценивается через $|\xi|^{-2k}$, поскольку на любом допустимом множестве функция d ограничена. Значит, для $k \geq 1$ и $|\xi| \geq 1$ имеем $|\sigma_{\mu\nu}(x, y)| \leq C' d(x)^{-\nu} |\xi|^{-2k}$ в силу (1.20). Если же $k = 0$, то из (1.23) и (1.20) следует неравенство $|\sigma_{\mu\nu}(x, y)| \leq C' d(x)^{-|\nu|}$. Тем самым оценка (1.22) доказана.

Далее, производная $\partial_x^\alpha (e^{-i(x-y)\xi/d(x)} G(x, y))$ есть линейная комбинация функций вида $e^{-i(x-y)\xi/d(x)} H(x, y) \xi^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^m$, где

$$H(x, y) = d(x)^{-l} \prod_i \partial^{\lambda_i} d(x) \left(\frac{x-y}{d(x)} \right)^\mu \partial_x^\nu G(x, y), \quad \lambda_i, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^m, \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

(среди мультииндексов λ_i могут быть совпадающие), причем

$$l + \sum_i (|\lambda_i| - 1) + |\nu| = |\alpha|. \quad (1.24)$$

В соответствии с этим производная $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\sigma}(x, \xi)$ есть линейная комбинация функций

$$\tau(x, \xi) = d(x)^{-l} \prod_i \partial^{\lambda_i} d(x) \cdot \xi^\gamma \sigma_{\mu\nu}(x, \xi).$$

Из (1.1) и (1.24) следует соотношение $d(x)^{-l} \prod_i \partial^{\lambda_i} d(x) = O(d(x)^{|\nu| - |\alpha|})$. Значит,

$$|\tau(x, \xi)| \leq C d(x)^{|\nu| - |\alpha|} |\xi^\gamma| d(x)^{-|\nu|} \langle \xi \rangle^{-k} \leq C d(x)^{-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{|\gamma| - k}.$$

Остается учесть, что $k \in \mathbb{Z}_+$ можно выбирать произвольно.

§ 2. Допустимые диффеоморфизмы

Пусть Ω_1 — еще одна область в $\mathbb{R}^m$ и $d_1 \in C^\infty(\Omega_1)$ — функция, удовлетворяющая оценкам (1.1) и (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Отображение $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$ называется *допустимым диффеоморфизмом*, если

1) существуют такие постоянные $C, c > 0$, что

$$c|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$c d(x) \leq d_1(f(x)) \leq C d(x), \quad x \in \Omega; \quad (2.2)$$

2) элементы $f_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ матрицы Якоби f' при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ подчиняются оценкам

$$|\partial^\alpha f_{ij}(x)| \leq C_\alpha d(x)^{-|\alpha|}, \quad x \in \Omega. \quad (2.3)$$

Заметим, что условие 1) влечет соотношения

$$c \frac{d_1(f(x))}{d(x)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq C \frac{d_1(f(x))}{d(x)}.$$

Верно и обратное. В самом деле, точки x и y равноправны; последние неравенства сохраняются и при замене x на y . Поэтому $cd_1(f(x))/d(x) \leq Cd_1(f(y))/d(y)$. Значит, отношение $d_1(f(x))/d(x)$ ограничено и отделено от нуля. Следовательно, таким же свойством обладает и отношение $|f(x) - f(y)|/|x - y|$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$ — допустимый диффеоморфизм. Тогда

- 1) диффеоморфизм $g: \Omega_1 \rightarrow \Omega$, обратный к f , также является допустимым;
- 2) якобиан $\det f'$ отделен от нуля на множестве Ω ;
- 3) если $E \in \mathcal{E}(\Omega)$, то $E_1 := f(E) \in \mathcal{E}(\Omega_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в (2.1) и (2.2) $x, y \in \Omega$ на $g(x), g(y)$ ($x, y \in \Omega_1$), получим, что диффеоморфизм g удовлетворяет условию 1) определения 2.1. Далее, из неравенства $|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$ вытекает ограниченность производных $g_{pq} := \frac{\partial g_p}{\partial x_q}$ ($1 \leq p, q \leq m$) на множестве Ω_1 . Поэтому определитель $\det g'$ также ограничен и, значит, определитель $\det f'$ отделен от нуля.

Проверим оценки

$$|\partial^\alpha g_{pq}(x)| \leq C d_1(x)^{-|\alpha|}, \quad x \in \Omega_1, \quad (2.4)$$

уже установленные в случае $\alpha = 0$. Поскольку элементы $g_{pq}(f(z))$ матрицы $g'(f(z))$ суть рациональные функции от элементов $f_{ij}(z)$ матрицы $f'(z)$, а знаменатель $\det f'(z)$ этих функций отделен от нуля, то

$$|\partial_z^\alpha (g_{pq} \circ f)(z)| \leq C d(z)^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, \quad z \in \Omega,$$

в силу (2.3). Производная $\partial_x^\alpha g_{pq}(x)$ является суммой слагаемых вида

$$\partial_z^\beta (g_{pq} \circ f)(z) \Big|_{z=g(x)} \prod_{k=1}^{|\beta|} \partial^{\gamma_k} g_{p_k}(x),$$

где $|\beta| \leq |\alpha|$, $\sum_k |\gamma_k| = |\alpha|$, $\gamma_k \neq 0$ (числа $p_k \in \{1, \dots, m\}$, соответствующие различным k , могут совпадать; это относится и к мультииндексам γ_k). Рассуждая по индукции, можно считать, что оценки (2.4) выполняются при замене α на любой мультииндекс γ с $|\gamma| \leq |\alpha| - 1$. Но тогда $|\partial^{\gamma_k} g_{p_k}(x)| \leq C d_1(x)^{1-|\gamma_k|}$ при всех k и поэтому

$$\begin{aligned} \left| \partial_z^\beta (g_{pq} \circ f)(g(x)) \prod_{k=1}^{|\beta|} \partial^{\gamma_k} g_{p_k}(x) \right| &\leq C d(g(x))^{-|\beta|} d_1(x)^{(1-|\gamma_1|)+\dots} \\ &= C d(g(x))^{-|\beta|} d_1(x)^{|\beta|-|\alpha|} \leq C_1 d_1(x)^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Теперь докажем утверждение 3). Обозначим через $\ell_1(x)$ регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega_1$ до $\partial\Omega_1$. Пусть $E \in \mathbf{E}(\Omega)$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $\ell(z) \geq \varepsilon d(z)$ для всех $z \in E$. При $z = g(x)$, $x \in E_1$, получаем $\ell(g(x)) \geq \varepsilon d(g(x)) \geq \varepsilon C d_1(x)$. Но $\ell(g(x)) \leq C \ell_1(x)$ ввиду ограниченности производных $\frac{\partial g_p}{\partial x_q}$. Значит, $E_1 \in \mathbf{E}(\Omega_1)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\tilde{a} \in \tilde{S}^\mu(\Omega, \Omega)$, $V \subset \Omega_1 \times \Omega_1$ – открытое множество, $V \ni (x, y) \mapsto c(x, y) = (c_{pq}(x, y))$ – гладкая матрица-функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\inf\{|\det c(x, y)|; (x, y) \in V\} > 0$;
- 2) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$ и $E_1 \in \mathbf{E}(\Omega_1)$ выполняется неравенство

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta c_{pq}(x, y)| \leq C(\alpha, \beta, E_1) d_1(x)^{-|\alpha|} d_1(y)^{-|\beta|}, \quad (x, y) \in (E_1 \times E_1) \cap V.$$

Тогда функция $\tilde{\Delta}: (x, y, \xi) \mapsto \tilde{a}(g(x), g(y), c(x, y)\xi)$ подчиняется оценкам

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma \tilde{\Delta}(x, y, \xi)| &\leq C(\alpha, \beta, \gamma, E_1) d_1(x)^{-|\alpha|} d_1(y)^{-|\beta|} \langle \xi \rangle^{\mu-|\gamma|}, \\ (x, y) &\in (E_1 \times E_1) \cap V. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\gamma = 0$. Для $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{Z}_+^m$ положим $\tilde{a}_{(\alpha_1\beta_1)}^{(\gamma_1)}(z, w, \xi) = \partial_z^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} \partial_\xi^{\gamma_1} \tilde{a}(z, w, \xi)$, $(z, w) \in \Omega \times \Omega$. Производная $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \tilde{\Delta}(x, y, \xi)$ является линейной комбинацией функций

$$(x, y, \xi) \mapsto \tilde{a}_{(\alpha_1\beta_1)}^{(\gamma_1)}(g(x), g(y), c(x, y)\xi) \xi^{\gamma_2} \\ \times \prod_i \partial^{\delta_i} g(x) \prod_j \partial^{\varepsilon_j} g(y) \prod_k \partial_x^{\lambda_k} \partial_y^{\nu_k} c_{p_k q_k}(x, y),$$

причем $|\alpha_1| + \sum_i (|\delta_i| - 1) + \sum_k |\lambda_k| = |\alpha|$, $|\beta_1| + \sum_j (|\varepsilon_j| - 1) + \sum_k |\nu_k| = |\beta|$, $|\gamma_1| = |\gamma_2|$. Таким образом, достаточно получить оценки (2.5) (при $\gamma = 0$) для каждой из этих функций.

Если $(x, y) \in E_1 \times E_1$, то $(g(x), g(y)) \in E \times E$, где $E := g(E_1)$ принадлежит $E(\Omega)$ в силу утверждения 3) леммы 2.2. Поэтому

$$|\tilde{a}_{(\alpha_1\beta_1)}^{(\gamma_1)}(g(x), g(y), c(x, y)\xi) \xi^{\gamma_2}| \leq C d(g(x))^{-|\alpha_1|} d_1(g(y))^{-|\beta_1|} \langle c(x, y)\xi \rangle^\mu$$

ввиду (1.9) (здесь и далее мы не указываем зависимость постоянной C от мультииндексов $\alpha_1, \beta_1, \dots$ и множества E_1). Из условий леммы следует существование констант $c_1, c_2 > 0$ таких, что $c_1|\xi| \leq |c(x, y)\xi| \leq c_2|\xi|$. Учитывая (2.2), получаем

$$|\tilde{a}_{(\alpha_1\beta_1)}^{(\gamma_1)}(g(x), g(y), c(x, y)\xi) \xi^{\gamma_1}| \leq C d_1(x)^{-|\alpha_1|} d_1(y)^{-|\beta_1|} \langle \xi \rangle^\mu.$$

Требуемые оценки теперь следуют из неравенств

$$\left| \prod_i \partial^{\delta_i} g(x) \right| \leq C d_1(x)^{\sum_i (1 - |\delta_i|)}, \quad \left| \prod_j \partial^{\varepsilon_j} g(y) \right| \leq C d_1(y)^{\sum_j (1 - |\varepsilon_j|)}$$

(см. (2.4)) и неравенства

$$\left| \prod_k \partial_x^{\lambda_k} \partial_y^{\nu_k} c_{p_k q_k}(x, y) \right| \leq C d_1(x)^{-\sum_k |\lambda_k|} d_1(y)^{-\sum_k |\nu_k|}$$

(см. условие 2) леммы).

Случай произвольного γ вытекает из предыдущего ввиду соотношения

$$\partial_\xi^\gamma \tilde{\Delta}(x, y, \xi) = \tilde{a}^{(\gamma)}(g(x), g(y), c(x, y)\xi) \prod_{k=1}^{|\gamma|} c_{p_k q_k}(x, y),$$

в котором $\tilde{a}^{(\gamma)}(z, w, \eta) = \partial_\eta^\gamma \tilde{a}(z, w, \eta)$, $a^{(\gamma)} \in S^{\mu - |\gamma|}(\Omega)$.

Пусть, как и выше, $\ell_1(x)$ обозначает регуляризованное расстояние от $x \in \Omega_1$ до $\partial\Omega_1$. Можно считать [17], что

$$\frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega_1) \leq \ell_1(x) \leq 2 \text{dist}(x, \partial\Omega_1). \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $g: \Omega_1 \rightarrow \Omega$ — допустимый диффеоморфизм. Существует такое число $\varepsilon > 0$, что матрица-функция

$$h(x, y) = \int_0^1 g'(y + t(x - y)) dt \quad (2.7)$$

корректно определена на множестве

$$V_\varepsilon := \{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_1 : |x - y| < \varepsilon \ell_1(x)\},$$

а ее элементы h_{pq} удовлетворяют оценкам

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta h_{pq}(x, y)| \leq C_{\alpha\beta} \ell_1(x)^{-|\alpha+\beta|}, \quad (x, y) \in V_\varepsilon. \quad (2.8)$$

Число ε можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\inf \{ |\det h(x, y)|; (x, y) \in V_\varepsilon \} > 0. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon \in (0, 1/4]$. Фиксируем $x \in \Omega_1$ и для $y \in \mathbb{R}^m$ положим $y_t = y + t(x - y)$, $t \in [0, 1]$. Если $(x, y) \in V_\varepsilon$, то, учитывая (2.6), получаем

$$|x - y_t| = (1 - t)|y - x| \leq \varepsilon \ell_1(x) \leq 2\varepsilon \operatorname{dist}(x, \Omega_1) \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, \Omega_1).$$

Таким образом, $y_t \in \Omega_1$ при всех $t \in [0, 1]$, и поэтому функция h корректно определена на множестве V_ε .

Далее, из (2.7) и соотношений $\partial^\alpha g_{pq}(x) = O(d_1(x)^{-|\alpha|})$ выводим

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta h_{pq}(x, y)| \leq \int_0^1 |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta g_{pq}(y + t(x - y))| dt \leq C'_{\alpha\beta} \int_0^1 d_1(y_t)^{-|\alpha+\beta|} dt.$$

В силу (1.2) (с заменой d и ℓ на d_1 и ℓ_1) существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что $d_1(x) \geq \varepsilon_1 \ell_1(x)$ для всех $x \in \Omega_1$. Следовательно,

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta h_{pq}(x, y)| \leq C'_{\alpha\beta} \varepsilon_1^{-|\alpha+\beta|} \int_0^1 \ell_1(y_t)^{-|\alpha+\beta|} dt.$$

Поскольку $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega_1) - \operatorname{dist}(y_t, \partial\Omega_1) \leq |x - y_t| \leq \varepsilon \ell_1(x)$, то $\operatorname{dist}(y_t, \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_1) - \varepsilon \ell_1(x)$. Отсюда и из (2.6) вытекает, что $2\ell_1(y_t) \geq (1/2 - \varepsilon)\ell_1(x) \geq \ell_1(x)/4$, т.е. $\ell_1(y_t) \geq \ell_1(x)/8$. Значит, $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta h_{pq}(x, y)| \leq C_{\alpha\beta} \ell_1(x)^{-|\alpha+\beta|}$.

Осталось доказать неравенство (2.9). Согласно лемме 2.2 существует такое $\delta > 0$, что $|h(x, x)| = |g'(x)| \geq \delta$ для всех $x \in \Omega_1$. Определитель $\det h(x, y)$, как и его элементы, удовлетворяет оценкам (2.8). В частности, $|\nabla_y \det h(x, y)| \leq C \ell_1(x)^{-1}$ при $(x, y) \in V_\varepsilon$ и поэтому

$$|\det h(x, y)| \geq |\det h(x, x)| - |\det h(x, x) - \det h(x, y)| \geq \delta - C \frac{|x - y|}{\ell_1(x)} \geq \delta - C\varepsilon.$$

Если выбрать ε так, что $C\varepsilon < \delta/2$, то на множестве V_ε будет выполняться неравенство $|\det h(x, y)| \geq \delta/2$.

Пусть $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$, $g: \Omega_1 \rightarrow \Omega$ — взаимно обратные допустимые диффеоморфизмы. Каждому ПДО $A \in \Psi(\Omega)$ сопоставим оператор B , заданный на функциях $u \in C_c^\infty(\Omega_1)$ равенством

$$Bu = [A(u \circ f)] \circ g. \quad (2.10)$$

ТЕОРЕМА 2.5. Для любого ПДО $A \in \Psi_0^\mu(\Omega)$ оператор B , определенный формулой (2.10), принадлежит $\Psi_0^\mu(\Omega_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a \in S_0^\mu(\Omega, \Omega)$ — такая амплитуда, что $A = \text{Op } a$, то

$$Bu(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(g(x)-g(y))\xi} a(g(x), g(y), \xi) |\det g'(y)| u(y) dy d\xi. \quad (2.11)$$

Пусть V_ε и h — множество и матрица-функция из леммы 2.4. Для $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_1$ положим $\psi(x, y) = \zeta(|x - y|/\ell_1(x))$, где $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta(t) = 1$ при $t < \varepsilon/2$, $\zeta(t) = 0$ при $t > \varepsilon$. Ясно, что $\text{supp } \psi \subset V_\varepsilon$. Определим операторы B_0 и B_1 формулой (2.11) с заменой a на ψa и $(1 - \psi)a$ соответственно. Тогда $B = B_0 + B_1$ и для доказательства теоремы достаточно проверить, что $B_0 \in \Psi_0^\mu(\Omega_1)$, $B_1 \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega_1)$. В силу формулы $g(x) - g(y) = h(x, y)(x - y)$ имеем

$$B_0 u(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\eta} b(x, y, \eta) \psi(x, y) u(y) dy d\eta,$$

где

$$b(x, y, \eta) = \Delta(x, y, \eta) |\det g'(y)| \cdot |\det h(x, y)^{-1}|, \\ \Delta(x, y, \eta) = a(g(x), g(y), {}^t h(x, y)^{-1} \eta).$$

Прежде всего отметим, что на множестве $\text{supp}_{x,y} b$ отношения $d_1(x)/d_1(y)$ и $\ell_1(x)/\ell_1(y)$ ограничены и отделены от нуля. Для $d_1(x)/d_1(y)$ это следует из неравенства $c d(g(x)) \leq d_1(x) \leq C d(g(x))$, вытекающего из (2.2), а для $\ell_1(x)/\ell_1(y)$ — из неравенства $c_1 \ell(g(x)) \leq \ell_1(x) \leq C_1 \ell(g(x))$, которое обеспечивается ограниченностью производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial g_p}{\partial x_q}$.

Положим

$$\tilde{\Delta}(x, y, \eta) = \Delta\left(x, y, \frac{\eta}{d_1(x)}\right) = \tilde{a}\left(g(x), g(y), {}^t h(x, y)^{-1} d(g(x)) \frac{\eta}{d_1(x)}\right),$$

где $\tilde{a}$ — преамплитуда, соответствующая a . Нетрудно проверить (мы не останавливаемся на подробностях, поскольку проверки такого рода уже неоднократно приводились выше), что матрица-функция $c(x, y) := {}^t h(x, y)^{-1} d(g(x))/d_1(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2.3 (роль множества V играет V_ε). Следовательно, если $E_1 \in \mathbf{E}(\Omega_1)$, то при $(x, y) \in (E_1 \times E_1) \cap V$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\eta^\gamma \tilde{\Delta}(x, y, \eta)| \leq C(\alpha, \beta, \gamma, E_1) d_1(x)^{-|\alpha|} d_1(y)^{-|\beta|} \langle \eta \rangle^{\mu - |\gamma|}.$$

Кроме того,

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi(x, y)| \leq C(\alpha, \beta, E_1) \ell_1(x)^{-|\alpha+\beta|} \\ \leq C'(\alpha, \beta, E_1) d_1(x)^{-|\alpha|} d_1(y)^{-|\beta|}, \quad (x, y) \in E_1 \times E_1.$$

Учитывая (2.4), (2.8) и (2.9), заключаем, что функция $(x, y, \eta) \mapsto b(x, y, \eta) \psi(x, y)$ принадлежит $S_0^\mu(\Omega_1, \Omega_1)$, и поэтому $B_0 \in \Psi_0^\mu(\Omega_1)$.

Теперь рассмотрим оператор B_1 . По формуле (2.10) ему соответствует ПДО $A_1 = \text{Op}((1 - \varphi)a)$, где $\varphi(x, y) = \psi(f(x), f(y))$. Поскольку функция $(1 - \varphi)a$ является собственной амплитудой и обращается в нуль в окрестности диагонали $\{(x, y) \in \Omega \times \Omega : x = y\}$, то $A_1 \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$. Пусть G — ядро ПДО A_1 . Положим $G_1(x, y) = G(g(x), g(y))|\det g'(y)|$. Тогда

$$B_1 u(x) = \int G(g(x), g(y))|\det g'(y)|u(y) dy, \quad u \in C_c^\infty(\Omega_1).$$

Согласно предложению 1.14 функция G удовлетворяет оценкам (1.8). Ввиду (2.4) аналогичным оценкам (с заменой $d(x)$ на $d_1(x)$) удовлетворяет и функция G_1 . Снова применяя предложение 1.14, получаем, что $B_1 \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega_1)$.

§ 3. Исчисление ПДО

3.1. Формально сопряженный оператор. Пусть $A = \text{Op } \sigma$, $\sigma \in S^\mu(\Omega)$, — собственный ПДО, χ — функция из леммы 1.7, равная единице в окрестности множества $\text{supp } G_A$. Легко проверяется, что при любом $\gamma \in \mathbb{R}$ функция $(x, y, \xi) \mapsto (d(y)/d(x))^{2\gamma} \overline{\sigma(y, \xi)} \chi(y, x)$ принадлежит классу $S_0^\mu(\Omega, \Omega)$. Собственный ПДО $A^* \equiv {}_\gamma A^*$ порядка μ , заданный формулой

$$\begin{aligned} A^* u(x) &= (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} \left(\frac{d(y)}{d(x)} \right)^{2\gamma} \overline{\sigma(y, \xi)} u(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} \left(\frac{d(y)}{d(x)} \right)^{2\gamma} \overline{\sigma(y, \xi)} \chi(y, x) u(y) dy d\xi, \end{aligned}$$

называется *формально сопряженным* с A относительно скалярного произведения

$$(u, v)_\gamma := \int d(x)^{2\gamma} u(x) \overline{v(x)} dx,$$

поскольку при всех $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$ выполняется равенство $(Au, v)_\gamma = (u, A^*v)_\gamma$. Асимптотическое разложение символа $\sigma^* \equiv {}_\gamma \sigma^*$ оператора A^* имеет вид

$$\sigma^*(x, \xi) \sim d(x)^{-2\gamma} \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha (d(x)^{2\gamma} \overline{\sigma(x, \xi)}). \quad (3.1)$$

3.2. Композиция ПДО. Собственные ПДО переводят пространство $C_c^\infty(\Omega)$ в себя. Поэтому определена композиция таких ПДО.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $A_j \in \Psi_0^{\mu_j}(\Omega)$, $j = 1, 2$, $\sigma_j \in S^{\mu_j}(\Omega)$ — символ ПДО A_j , и пусть $A = A_1 A_2$. Тогда

- 1) A — собственный ПДО порядка $\mu_1 + \mu_2$;
- 2) символ σ ПДО A допускает асимптотическое разложение

$$\sigma(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_1(x, \xi) D_x^\alpha \sigma_2(x, \xi). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $a_j \in S_0^{\mu_j}(\Omega, \Omega)$, $A_j = \text{Op } a_j$ (см. следствие 1.11). Тогда

$$Au(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (3.3)$$

где

$$a(x, y, \xi) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\theta} a_1(x, z, \xi + \theta) a_2(z, y, \xi) dz d\theta$$

(мы не проверяем включение $a \in S^{\mu_1+\mu_2}(\Omega, \Omega)$ и рассматриваем сейчас оператор (3.3) как “обычный” ПДО). Согласно определению собственных амплитуд существует такое $\delta > 0$, что если $d(x)/d(y) \notin [\delta, \delta^{-1}]$ или $\ell(x)/\ell(y) \notin [\delta, \delta^{-1}]$, то $a_1(x, y, \xi) = a_2(x, y, \xi) = 0$. Значит, $a(x, y, \xi) = 0$ при $d(x)/d(y) \notin [\delta^2, \delta^{-2}]$ или $\ell(x)/\ell(y) \notin [\delta^2, \delta^{-2}]$. Отсюда и из (3.3) вытекает, что отношения $d(x)/d(y)$ и $\ell(x)/\ell(y)$ ограничены и отделены от нуля на множестве $\text{supp } G_A$.

Далее, введем *транспонированный ПДО*

$${}^t A_2 u(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} \sigma_2(y, -\xi) u(y) dy d\xi. \quad (3.4)$$

Имеет место равенство

$${}^t A_2 u(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} a_2(y, x, -\xi) u(y) dy d\xi,$$

из которого вытекает, что ${}^t A_2 \in \Psi_0^{\mu_2}(\Omega)$. Пусть ${}^t \sigma_2 \in S^{\mu_2}(\Omega)$ – символ ПДО ${}^t A_2$. Поскольку $A_2 = {}^t({}^t A_2)$, то для оператора A_2 справедлива формула, аналогичная (3.4):

$$A_2 u(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} {}^t \sigma_2(y, -\xi) u(y) dy d\xi.$$

Вводя обозначение $\sigma'_2(x, \xi) = {}^t \sigma_2(x, -\xi)$ и заменяя u на $A_2 u$ в равенстве

$$A_1 u(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} \sigma_1(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi,$$

получаем

$$Au(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} \sigma_1(x, \xi) \sigma'_2(y, \xi) u(y) dy d\xi.$$

Пусть χ – функция из леммы 1.7, равная единице в окрестности множества $\text{supp } G_A$. Тогда

$$Au(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} \sigma_1(x, \xi) \sigma'_2(y, \xi) \chi(x, y) u(y) dy d\xi \quad (3.5)$$

и утверждение 1) доказано, поскольку функция $(x, y, \xi) \mapsto \sigma_1(x, \xi) \sigma'_2(y, \xi) \chi(x, y)$ принадлежит классу $S_0^{\mu_1+\mu_2}(\Omega, \Omega)$.

2) Пусть $\sigma \in S^{\mu_1+\mu_2}(\Omega)$ – символ ПДО A . Можно считать, что $\chi = 1$ в окрестности диагонали $\{(x, y) \in \Omega \times \Omega : x = y\}$. Тогда из формулы (3.5) и теоремы 1.9 следует асимптотическое разложение

$$\sigma(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} [\sigma_1(x, \xi) D_x^{\alpha} \sigma'_2(x, \xi)]. \quad (3.6)$$

Аналогично, используя формулу

$${}^tA_2u(x) = (2\pi)^{-m} \iint e^{i(x-y)\xi} \sigma_2(y, -\xi) \chi(x, y) u(y) dy d\xi$$

(ср. с (3.4)), получаем

$$\sigma'_2(x, \xi) = {}^t\sigma_2(x, -\xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} \sigma_2(x, \xi). \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) асимптотическое разложение (3.2) выводится с помощью дополнительных рассуждений комбинаторного характера; мы не будем здесь их воспроизводить (см. [18]).

3.3. Эллиптические ПДО.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Символ $\sigma \in S^{\mu}(\Omega)$ назовем *эллиптическим*, если существуют такие положительные числа ρ_0 и C , что

$$|\tilde{\sigma}(x, \xi)| \geq C |\xi|^{\mu} \quad \text{при} \quad |\xi| \geq \rho_0$$

($\tilde{\sigma}$ и σ связаны формулой (1.4)). Собственный ПДО $A = \text{Op } \sigma$ будем называть *эллиптическим*, если σ — эллиптический символ. Класс всех эллиптических символов (соответственно ПДО) порядка μ обозначим через $ES^{\mu}(\Omega)$ (соответственно $E\Psi_0^{\mu}(\Omega)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Собственный ПДО B называется *параметриком* собственного ПДО A , если

$$BA = I + R_1, \quad AB = I + R_2,$$

где $R_1, R_2 \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$, I — тождественный оператор.

ТЕОРЕМА 3.4. 1) Любой ПДО $A \in E\Psi_0^{\mu}(\Omega)$ имеет параметрикс B такой, что $B \in E\Psi_0^{-\mu}(\Omega)$.

2) Если B' — другой собственный ПДО, для которого либо $B'A - I \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$, либо $AB' - I \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$, то $B' - B \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$.

Мы не приводим доказательства, так как теорема является формальным следствием исчисления ПДО (см., например, [18]).

§ 4. Ограниченность ПДО

4.1. Ограниченность ПДО в пространствах $L^2_{\gamma}(\Omega)$ и $\mathcal{L}^2_{\gamma}(\Omega)$. Функцию $\eta \in C^{\infty}(\Omega)$ назовем *срезающей функцией* (срезкой), если $\text{supp } \eta \in E(\Omega)$ и $\partial^{\alpha} \eta(x) = O(d(x)^{-|\alpha|})$ при любом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$. Множество всех срезов обозначим через $\mathcal{CF}(\Omega)$.

Отметим, что для любого множества $E \in E(\Omega)$ существует функция $\eta \in \mathcal{CF}(\Omega)$, равная единице в окрестности E . Например, можно взять $\eta = \sum_j' \chi_j$, где $\{\chi_j\}$ — разбиение единицы, использованное в доказательстве леммы 1.7, а штрих означает, что суммирование распространяется только на те индексы j , для которых $E \cap \text{supp } \chi_j \neq \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $A \in \Psi_0^\mu(\Omega)$, $\mu \leq 0$, $\eta \in \mathcal{C}F(\Omega)$. Тогда при любом $\gamma \in \mathbb{R}$ оператор ηA продолжается до ограниченного оператора в пространстве $L_\gamma^2(\Omega)$ с нормой $\|u; L_\gamma^2(\Omega)\| = \|u d^\gamma; L^2(\Omega)\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\gamma = 0$. Рассмотрим три случая.

а) $\mu < -m$. Пусть $A = \text{Op } \sigma$, $\sigma \in S^\mu(\Omega)$. Положим $B = \eta A$. Тогда

$$Bu(x) = \int \eta(x) G(x, y) u(y) dy,$$

где

$$G(x, y) = (2\pi)^{-2m} \int e^{i(x-y)\xi} \sigma(x, \xi) d\xi.$$

Ввиду (1.7) и (1.20) имеем

$$\sup_x \int |\eta(x) G(x, y)| dy < \infty.$$

Так как ПДО A собственный, то из (1.7) следует неравенство

$$|\eta(x) G(x, y)| \leq C'_N \frac{d(y)^{2N-m}}{(d(y)^2 + |x-y|^2)^N}, \quad (x, y) \in \text{supp } \eta \times \Omega.$$

Значит,

$$\sup_y \int |\eta(x) G(x, y)| dx < \infty.$$

Используя известную оценку нормы интегрального оператора, заключаем, что $\|B; \mathcal{B}L^2(\Omega)\| < \infty$.

б) $\mu < 0$. Ввиду равенства $\|Bu\| = (B^*Bu, u)$ ограниченность оператора B следует из ограниченности B^*B , которая по аналогичной причине вытекает из ограниченности $(B^*B)^{2^k}$ (при каком-нибудь $k \in \mathbb{Z}_+$). Выберем число k настолько большим, чтобы порядок $\mu 2^k$ оператора $(B^*B)^{2^k}$ был меньше чем $-m$. Тогда согласно уже доказанному оператор $(B^*B)^{2^k}$ будет ограничен.

в) $\mu = 0$. Приводимое далее рассуждение является вариантом известного доказательства непрерывности ПДО нулевого порядка в $L^2(\mathbb{R}^m)$ (см. [19]).

Обозначим через σ_B и σ_B^* символы ПДО B и формально сопряженного ПДО B^* . Из формул (3.2) и (3.1) следует, что

$$B^*Bu(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} (|\sigma_B(x, \xi)|^2 + \sigma_{-1}(x, \xi)) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad \sigma_{-1} \in S^{-1}(\Omega).$$

Возьмем $M > \sup |\sigma_B(x, \xi)|$ и положим $\tau(x, \xi) = (M^2 - |\sigma_B(x, \xi)|^2)^{1/2}$. Тогда для некоторого $B_{-1} \in \Psi^{-1}(\Omega)$ имеем

$$B^*Bu(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} (M^2 - \tau(x, \xi)^2) \widehat{u}(\xi) d\xi + B_{-1}u(x).$$

В силу следствия 1.12 существует такой ПДО $C \in \Psi_0^0(\Omega)$, что $\sigma_C - \tau \in S^{-\infty}(\Omega)$. Сопоставляя формулу

$$C^*Cu(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} \tau(x, \xi)^2 \hat{u}(x, \xi) d\xi + B'_{-1}u(x), \quad B'_{-1} \in \Psi^{-1}(\Omega),$$

с формулой для B^*B , получаем

$$B^*B = M^2 - C^*C + B''_{-1}, \quad B''_{-1} \in \Psi^{-1}(\Omega). \quad (4.1)$$

Поскольку оператор (умножения на) M^2 есть собственный ПДО, то из равенства (4.1) следует включение $B''_{-1} \in \Psi_0^{-1}(\Omega)$. Но тогда согласно уже доказанному оператор $B''_{-1}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ непрерывен. Значит,

$$\|Bu\|^2 = (B^*Bu, u) = M^2\|u\|^2 - \|Cu\|^2 + (B''_{-1}u, u) \leq (M^2 + \|B''_{-1}\|)\|u\|^2.$$

Это завершает доказательство предложения в случае $\gamma = 0$.

Для произвольного γ предложение теперь очевидно, так как ограниченность ПДО ηA в пространстве $L_\gamma^2(\Omega)$ равносильна ограниченности ПДО $d^{-\gamma}\eta Ad^\gamma$ в $L^2(\Omega)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_\gamma^2(\Omega)$ совокупность всех функций u в области Ω , удовлетворяющих при любом выборе множества $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ условию

$$p_E^{(\gamma)}(u) \equiv p_E(u) := \left(\int_E d(x)^{2\gamma} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (4.2)$$

С полунормами p_E пространство $\mathcal{L}_\gamma^2(\Omega)$ является пространством Фреше.

ТЕОРЕМА 4.2. *Каждый ПДО $A \in \Psi_0^0(\Omega)$ продолжается до непрерывного оператора в пространстве $\mathcal{L}_\gamma^2(\Omega)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \text{Op } a$, $a \in S_0^0(\Omega, \Omega)$, $\pi_1, \pi_2: \text{supp}_{x,y} a \rightarrow \Omega$ — проекции. Для произвольного множества $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ положим $E_1 = \pi_2(\pi_1^{-1}(E))$. Поскольку $E \in \mathcal{E}(\Omega)$, то и $E_1 \in \mathcal{E}(\Omega)$ (см. предложение 1.6). Выберем функции $\eta, \zeta \in \mathcal{C}F(\Omega)$ так, чтобы $\eta = 1$ в окрестности множества E и $\zeta = 1$ в окрестности множества E_1 . Тогда $\eta A \zeta = \eta A$, и поэтому $\|\eta A u; L_\gamma^2(\Omega)\| \leq C \|\zeta u; L_\gamma^2(\Omega)\|$, $u \in C_c^\infty(\Omega)$, в силу предложения 1.21. Из последнего неравенства следует оценка $p_E(Au) \leq C' p_{E'}(u)$, где $E' = \text{supp } \zeta$.

4.2. Ограниченность ПДО в пространствах $\mathcal{H}^{(s, \gamma)}(\Omega)$. Для каждого $s \in \mathbb{R}$ обозначим через Λ_s какой-нибудь эллиптический ПДО порядка s , а через M_s — параметрикс оператора Λ_s . Тогда $M_s \Lambda_s = I + R_s$, $R_s \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$. Равенство

$$q_E^{(s, \gamma)}(u) = (p_E^{(\gamma)}(\Lambda_s u)^2 + p_E^{(\gamma)}(R_s u)^2)^{1/2}, \quad (4.3)$$

где $p_E^{(\gamma)}$ — полунорма (4.2), определяет на $C_c^\infty(\Omega)$ полунорму $q_E^{(s, \gamma)}$. Поскольку $u = M_s \Lambda_s u - R_s u$, то $u = 0$, если $q_E^{(s, \gamma)}(u) = 0$ при всех $E \in \mathcal{E}(\Omega)$. С полунормами $q_E^{(s, \gamma)}$ пространство $\mathcal{C}F(\Omega)$ является метризуемым локально выпуклым пространством. Его пополнение обозначим через $\mathcal{H}^{(s, \gamma)}(\Omega)$. Инвариантность определения пространств $\mathcal{H}^{(s, \gamma)}(\Omega)$ относительно выбора ПДО Λ_s и некоторые другие свойства этих пространств мы рассмотрим позже.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $s, t, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \leq s - t$, и пусть $A \in \Psi_0^\mu(\Omega)$. Тогда ПДО A продолжается до непрерывного оператора $\mathcal{H}^{(s, \gamma)}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{(t, \gamma)}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $I = M_s \Lambda_s - R_s M_s \Lambda_s + R_s^2$ следует, что

$$p_E(\Lambda_t A u) \leq p_E(\Lambda_t A (M_s - R_s M_s) \Lambda_s u) + p_E(\Lambda_t A R_s^2 u).$$

Поскольку $M_s \in \Psi_0^{-s}(\Omega)$, то ПДО $\Lambda_t A (M_s - R_s M_s)$ принадлежит классу $\Psi_0^{t-s+\mu}(\Omega)$, а так как $t - s + \mu \leq 0$, то указанный ПДО непрерывен в $\mathcal{L}_\gamma^2(\Omega)$. Таким же свойством обладает и оператор $\Lambda_t A R_s$. Применяя теорему 4.2, получаем

$$p_E(\Lambda_t A u) \leq C_1(p_{E'}(\Lambda_s u) + p_{E'}(R_s u))$$

для некоторого $E' \in E(\Omega)$. Аналогичным образом проверяется, что

$$p_E(R_t A u) \leq C_2(p_{E'}(\Lambda_s u) + p_{E'}(R_s u)).$$

В силу двух последних неравенств $q_E^{(t, \gamma)}(A u) \leq C q_{E'}^{(s, \gamma)}(u)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Утверждение теоремы 4.3 справедливо при любом выборе ПДО $\Lambda_s \in E\Psi_0^s(\Omega)$, $\Lambda_t \in E\Psi_0^t(\Omega)$ и их параметриков M_s, M_t , участвующих в определении полунорм $q_E^{(s, \gamma)}$ и $q_E^{(t, \gamma)}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Любой собственный ПДО порядка $-\infty$ продолжается до непрерывного оператора $\mathcal{H}^{(s, \gamma)}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{(t, \gamma)}(\Omega)$ при всех $s, t, \gamma \in \mathbb{R}$.

Пусть $s, \gamma \in \mathbb{R}$, $\Lambda_s, \tilde{\Lambda}_s \in E\Psi_0^s(\Omega)$, $M_s, \tilde{M}_s$ — параметрикс ПДО $\Lambda_s, \tilde{\Lambda}_s$, так что $M_s \Lambda_s = I + R_s$, $\tilde{M}_s \tilde{\Lambda}_s = I + \tilde{R}_s$, $R_s, \tilde{R}_s \in \Psi_0^{-\infty}(\Omega)$. В соответствии с формулой (4.3) определим на пространстве $C_c^\infty(\Omega)$ полунормы q_E и $\tilde{q}_E$ (мы не указываем зависимость q_E и $\tilde{q}_E$ от s и γ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Семейства полунорм $\{q_E\}$ и $\{\tilde{q}_E\}$ определяют на пространстве $C_c^\infty(\Omega)$ эквивалентные топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно для любых $u \in C_c^\infty(\Omega)$ и $E \in E(\Omega)$ получить оценку $\tilde{q}_E(u) \leq C q_{E'}(u)$, в которой C и E' зависят только от E . Так как порядки ПДО $\tilde{\Lambda}_s$ и R_s не превосходят s , то из теоремы 4.3 следует неравенство

$$(q_E^{(0, \gamma)}(\tilde{\Lambda}_s u)^2 + q_E^{(0, \gamma)}(\tilde{R}_s u)^2)^{1/2} \leq C q_{E'}(u). \quad (4.4)$$

Согласно замечанию 4.4 мы можем считать, что $\Lambda_0 = I$ и $R_0 = 0$. Тогда $q_E^{(0, \gamma)} = p_E^{(\gamma)}$ и неравенство (4.4) принимает вид $\tilde{q}_E(u) \leq C q_{E'}(u)$, что и требовалось установить.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. *Запас элементов и топология в каждом пространстве $\mathcal{H}^{(s,\gamma)}(\Omega)$ не зависят от выбора ПДО $\Lambda_s \in E\Psi_0^s(\Omega)$ и его параметрикса M_s , с помощью которых вводятся полунормы $q_E^{(s,\gamma)}$. В частности, всегда $\mathcal{H}^{(0,\gamma)}(\Omega) \cong \mathcal{L}_\gamma^2(\Omega)$.*

Отметим, что

- 1) при $t \leq s$ тождественный оператор $I: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega)$ продолжается до оператора вложения $\mathcal{H}^{(s,\gamma)}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(t,\gamma)}(\Omega)$ (т.е. непрерывного инъективного отображения);
- 2) для $s \in \mathbb{Z}_+$ каждая полунорма $q_E^{(s,\gamma)}$ эквивалентна полунорме

$$u \mapsto \left(\sum_{|\alpha|=0}^s \int_E d(x)^{2(\gamma+|\alpha|)} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

§ 5. ПДО на многообразиях

В этом параграфе вводятся стратифицированные многообразия. Они снабжаются дифференциальной $\mathfrak{s}$ -структурой, которая задается специальным атласом. Псевдодифференциальные операторы на $\mathbb{R}^m$, изученные в предыдущих разделах, переносятся на $\mathfrak{s}$ -многообразия. Устанавливается непрерывность ПДО в шкале весовых пространств.

5.1. Стратифицированные многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Компактное метрическое пространство $(\mathcal{M}, \rho)$ называется *стратифицированным многообразием*, если:

- 1) $\mathcal{M}$ есть конечное объединение непересекающихся связных топологических многообразий (*стратов*);
- 2) граница $\partial T = \overline{T} \setminus T$ каждого страта T есть объединение некоторого (возможно, пустого) множества стратов меньших размерностей.

Наибольшая из размерностей стратов называется *размерностью* $\dim \mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{M}$. Множество всех стратов, граница которых содержит страт T , есть по определению *звезда* $\text{st } T$ страта T . Объединение стратов размерностей $\leq \dim \mathcal{M} - 1$ обозначается через $\mathcal{S}$. Далее предполагается, что многообразие $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{M}$. В классе стратифицированных многообразий выделим подкласс $\mathfrak{D}_m$. Через $\mathfrak{D}_0$ обозначим множество конечных наборов точек с дискретной топологией. Предположим, что уже определены $\mathfrak{D}_k$, $0 \leq k \leq m - 1$. Многообразие $\mathcal{M}$ класса $\mathfrak{D}_m$ ($m = \dim \mathcal{M}$) подчиняется следующим условиям.

(i) Для любого страта T , $\dim T = q < m$, и любой точки $a \in T$ существуют окрестность $\mathcal{O}_a$ в $\mathcal{M}$ и гомеоморфизм $\varkappa: \mathcal{O}_a \rightarrow \varkappa(\mathcal{O}_a)$, где $\varkappa(\mathcal{O}_a)$ – открытое подмножество произведения $K(\mathcal{M}') \times \mathbb{R}^q$, а $K(\mathcal{M}')$ – замкнутый конус в некотором пространстве $\mathbb{R}^N$ с направляющим многообразием $\mathcal{M}' \in \mathfrak{D}_{m-q-1}$ (метрика ρ' на $\mathcal{M}'$ индуцируется из $\mathbb{R}^N$). При этом $\varkappa(\mathcal{O}_a \cap T) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^q$, 0 – вершина $K(\mathcal{M}')$, и если $R \in \text{st } T$, $\dim R = r$, то $\varkappa(\mathcal{O}_a \cap R) \subset K(R') \times \mathbb{R}^q$, где $R' = (r - q - 1)$ -мерный страт многообразия $\mathcal{M}'$. (Будем говорить, что R' отвечает страту R .)

(ii) Существуют такие постоянные c_1 и c_2 , что

$$c_1 \rho(a_1, a_2) \leq |\varkappa(a_1) - \varkappa(a_2)| \leq c_2 \rho(a_1, a_2) \quad \text{для всех } a_1, a_2 \in \mathcal{O}_a.$$

5.2. Модели. Опишем подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, которые являются моделями многообразия $\mathcal{M} \in \mathfrak{D}_m$ вблизи особых точек.

В случае $m = 0$ особых точек нет. При $m = 1$ назовем моделью любой промежуток $\{x_1 \in \mathbb{R}^1 : 0 \leq x_1 < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Пусть модели размерностей $\leq m-1$ определены. Модели размерности m имеют вид $K(\mathfrak{M}'; \varepsilon) \times U$, где U – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^q$, $0 \leq q < m$, $K(\mathfrak{M}'; \varepsilon) = \{x = t(x', 1) : 0 \leq t < \varepsilon, x' \in \mathfrak{M}'\}$ (часть конуса $K(\mathfrak{M}')$), $\mathfrak{M}' \subset \mathbb{R}^{m'}$ – либо открытое множество, либо модель размерности $m' = m - q - 1$. Пусть $\mathfrak{M}$ – m -мерная модель, $x \in \mathfrak{M}$ – некоторая точка. В соответствии с равенством $\mathfrak{M} = K(\mathfrak{M}'; \varepsilon) \times U$ имеем $x = (x' x_{m-q}, x_{m-q}, y)$, где $x' \in \mathfrak{M}'$, $x_{m-q} \in [0, \varepsilon)$, $y \in U \subset \mathbb{R}^q$. Множество $\mathfrak{M}$ совпадает с образом произведения $\mathfrak{M}' \times [0, \varepsilon) \times U$ при отображении $(x', x_{m-q}, y) \mapsto (x' x_{m-q}, x_{m-q}, y)$. Применяя аналогичное рассуждение к точке $x' \in \mathfrak{M}'$, получаем отображение

$$(x'', x_{m'-q'}, y', x_{m-q}, y) \mapsto (x'' x_{m'-q'} x_{m-q}, x_{m'-q'} x_{m-q}, x_{m-q} y', x_{m-q}, y)$$

из $\mathfrak{M}'' \times [0, \varepsilon') \times U' \times [0, \varepsilon) \times U$ на $\mathfrak{M}$. Продолжая этот процесс, приходим к отображению

$$p: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N} = U_0 \times [0, \varepsilon_1) \times U_1 \times \cdots \times U_{k-1} \times [0, \varepsilon_k) \times U_k, \quad (5.1)$$

где $U_j \subset \mathbb{R}^{q_j}$ – открытые множества ($U_k = U$, $U_{k-1} = U'$), $k + \sum_{j=0}^k q_j = m$, ε_j – положительные числа ($\varepsilon_k = \varepsilon$, $\varepsilon_{k-1} = \varepsilon'$).

Вот несколько простых примеров.

1. m -мерное многообразие с конической точкой. Особая точка обслуживается моделями вида $\{x = t(x', 1) : 0 \leq t < \varepsilon, x' \in \mathfrak{M}'\}$, где $\mathfrak{M}'$ – открытое подмножество в $\mathbb{R}^{m-1}$.

2. Особенность типа двумерного конуса с ребром. Модели получаются из указанных в примере 1 заменой $\mathfrak{M}'$ на множество $\{x_1 \in \mathbb{R} : 0 \leq x_1 < \varepsilon\}$. Можно, хотя и не обязательно, добавить модели из примера 1 с $m = 2$.

3. Поверхность трехмерного куба. Для вершин годятся модели из примера 2. Модели для ребер имеют вид $[0, \varepsilon) \times U$, где U – открытый интервал в $\mathbb{R}$.

Для дальнейшего удобно изменить обозначения и записывать точки $x \in \mathfrak{M}$ в виде строки $(y^0, x_1, y^1, \dots, y^{k-1}, x_k, y^k)$, $y^j \in \mathbb{R}^{q_j}$; она играет роль декартовых координат. При некоторых j может выполняться равенство $q_j = 0$; тогда $y^j (= 0)$ будем опускать. Если $x \in \text{Int } \mathfrak{M}$ (все числа x_j положительны), то декартовы координаты $(\zeta^0, \rho_1, \dots, \zeta^{k-1}, \rho_k, \zeta^k)$ точки $p^{-1}(x) \in \mathfrak{N}$ будем называть *цилиндрическими координатами* точки x . Связь декартовых координат с цилиндрическими устанавливается формулами

$$\begin{aligned} x_j &= \rho_j \cdots \rho_k, \quad \rho_j = \frac{x_j}{x_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad x_k = \rho_k; \\ y^{j-1} &= \rho_j \cdots \rho_k \zeta^{j-1}, \quad \zeta^{j-1} = \frac{y^{j-1}}{x_j}, \quad j = 1, \dots, k, \quad \zeta^k = y^k. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Число k из (5.1) назовем *рангом* модели $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ – m -мерная модель ранга k , то $\mathfrak{M} = (K(\mathfrak{M}') \times U_k) \cap \{x : 0 \leq x_k < \varepsilon_k\}$, где $U_k \subset \mathbb{R}^{q_k}$ – открытое множество,

$\mathfrak{M}' - (m - q_k - 1)$ -мерная модель ранга $k - 1$, расположенная в плоскости $\{(x', 1) : x' \in \mathbb{R}^{m-q_k-1}\}$; в случае $k = 1$ имеем $\mathfrak{M} = (K(U_0) \times U_1) \cap \{x : 0 \leq x_1 < \varepsilon_1\}$.

Для модели $\mathfrak{M}$ ранга k положим $\mathcal{S}(\mathfrak{M}) = \bigcup_{j=1}^k \{x : x_1 = \dots = x_j = 0\}$ и обозначим через $d(x)$ регуляризованное расстояние от точки $x \in \mathfrak{M}$ до $\mathcal{S}(\mathfrak{M})$. Из соотношений $d(x) \sim \min_j \{(x_1^2 + \dots + x_j^2)^{1/2}\}$, $x_j = \rho_j \dots \rho_k \geq c_j \rho_1 \dots \rho_k = c_j x_1$, $c_j > 0$, следует, что

$$d(x) \sim x_1, \quad x \in \mathfrak{M}. \quad (5.3)$$

Множество вида $\{x : x_1 = \dots = x_j = 0\}$ будем называть стратом T_j модели; размерность его равна $d_j = q_k + q_{k-1} + \dots + q_j + (k - j)$, $j = 1, \dots, k$. Каждая модель обладает единственной максимальной цепочкой стратов $T_k, T_{k-1}, \dots, T_0$ ($T_i \in \text{st } T_j$ при $i \geq j$); через T_0 обозначен m -мерный страт $\text{Int } \mathfrak{M}$. Формула (5.3) означает, что величина $d(x)$ эквивалентна расстоянию от $x \in \mathfrak{M}$ до страта T_1 .

5.3. s -многообразия. Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие класса $\mathfrak{D}_m$. Нам понадобится атлас на $\mathcal{M}$, обладающий специальными свойствами. Мы построим его индукцией по m .

Прим $m = 0$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 = \{a_1, \dots, a_k\}$ каждая карта имеет вид $v_i : a_i \rightarrow \mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Предположим, что на многообразиях $\mathcal{M} \in \mathfrak{D}_l$, $l \leq m - 1$, специальные атласы уже построены. Рассмотрим $\mathcal{M} \in \mathfrak{D}_m$. Пусть $a \in T$, $q = \dim T < m$, и пусть $\theta_a, \varkappa, \mathcal{M}', K(\mathcal{M}')$ имеют тот же смысл, что и в п. 5.1. Пусть еще $\{(V'_i, v'_i)\}$ — (конечный) специальный атлас на $\mathcal{M}'$. Каждое множество $v'_i(V'_i)$ принадлежит пространству $\mathbb{R}^{m'}$, где $m' = m - q - 1$ — размерность многообразия $\mathcal{M}'$. отождествим $\mathbb{R}^{m'}$ с гиперплоскостью $\{(x', 1) : x' \in \mathbb{R}^{m'}\}$ в $\mathbb{R}^{m'+1}$ и продолжим v'_i до однородного первой степени отображения $\pi'_i : K(V'_i) \rightarrow K(v'_i(V'_i))$. В свою очередь, π'_i можно продолжить до отображения

$$\pi_i : K(V'_i) \times \mathbb{R}^q \rightarrow K(v'_i(V'_i)) \times \mathbb{R}^q, \quad (X, y) \mapsto (\pi'_i(X), y).$$

Вводя обозначения $V_{a,i} = \varkappa^{-1}(K(V'_i) \times \mathbb{R}^q)$, $v_{a,i} = \pi_i \circ \varkappa|_{V_{a,i}}$, получаем карту $(V_{a,i}, v_{a,i})$, “обслуживающую” точку $a \in T$.

Из построения карт $(V_{a,i}, v_{a,i})$ вытекает, что множество $v_{a,i}(V_{a,i})$ содержит (в качестве относительно открытого подмножества) некоторую m -мерную модель $\mathfrak{M}_{a,i} \ni 0 = v_{a,i}(a)$. Уменьшая окрестность $V_{a,i}$, можно считать, что $v_{a,i}(V_{a,i}) = \mathfrak{M}_{a,i}$. Кроме того, можно предполагать, что если $V_{a,i}$ обслуживает точку a , принадлежащую некоторому страту T , то замыкание $\overline{V}_{a,i}$ пересекает разве лишь страты из $\text{st } T$.

Семейство окрестностей θ_a , $a \in \mathcal{S}$, покрывает множество $\mathcal{S}$. Ввиду компактности $\mathcal{S}$ можно найти конечное подсемейство, покрывающее $\mathcal{S}$. Поскольку $\theta_a = \bigcup_i V_{a,i}$, причем число слагаемых в правой части конечно, то существует конечное покрытие множества $\mathcal{S}$, составленное из множеств вида $V_{a,i}$. Добавляя к этому покрытию конечное семейство координатных окрестностей, обслуживающих точки $a \in \mathcal{M}_0$ и принадлежащих $\mathcal{M}_0$ вместе со своим замыканием, получаем искомый специальный атлас.

Пусть $\{(V_i, v_i)\}$ — специальный атлас на многообразии $\mathcal{M} \in \mathfrak{D}_m$. Окрестности V_i , обслуживающие точки из $\mathcal{M}_0$, назовем *стандартными*, остальные — *специальными*. Напомним, что $\overline{V}_i \subset \mathcal{M}_0$ для любой стандартной окрестности V_i . Если

V_i – специальная окрестность, то множество $\mathfrak{M}_i := v(V_i)$ представляет собой некоторую m -мерную модель. Обозначим через $d_i(x)$ регуляризованное расстояние от точки $x \in \mathfrak{M}_i$ до $\mathcal{S}(\mathfrak{M}_i)$ (см. п. 5.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Атлас $\{(V_i, v_i)\}$ определяет на $\mathcal{M}$ структуру **$\mathfrak{s}$ -многообразия**, если любые две его карты (V_i, v_i) и (V_j, v_j) согласованы, т.е. либо $V_i \cap V_j = \emptyset$, либо $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ и тогда

а) отображение

$$v_j \circ v_i^{-1}: v_i(V_i \cap V_j \cap \text{Int } \mathfrak{M}_i) \rightarrow v_j(V_i \cap V_j \cap \text{Int } \mathfrak{M}_j) \quad (5.4)$$

является допустимым диффеоморфизмом в смысле определения 2.1, если обе карты специальные (роли функций d и d_1 играют d_i и d_j);

б) отображение $v_j \circ v_i^{-1}: v_i(V_i \cap V_j) \rightarrow v_j(V_i \cap V_j)$ – диффеоморфизм гладких многообразий, если хотя бы одна из карт стандартная.

Введем разбиение единицы, подчиненное специальному атласу. Для каждой специальной окрестности V_i обозначим через $\mathfrak{M}_i$ модель $v_i(V_i)$. Пусть $\mathfrak{N}_i$ – множество (5.1), соответствующее $\mathfrak{M}_i$, $p_i: \mathfrak{N}_i \rightarrow \mathfrak{M}_i$ – проекция. Для каждого j выберем число $\varepsilon'_j \in (0, \varepsilon_j)$ и обозначим через $\mathfrak{N}'_i$ множество, определяемое тем же равенством (5.1) с заменой ε_j на $\varepsilon'_j \geq 0$. Затем для любого i фиксируем функции χ_i^c, ζ_i^c из $C_c^\infty(\mathfrak{N}_i)$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $\chi_i^c|_{\mathfrak{N}'_i} = 1$;
- 2) $\chi_i^c \zeta_i^c = \chi_i^c$.

Тогда композиции $\chi_i := \chi_i^c \circ p_i^{-1} \circ v_i$, $\zeta_i := \zeta_i^c \circ p_i^{-1} \circ v_i$ будут гладкими функциями на многообразии $\mathcal{M}_0$, причем $\chi_i \zeta_i = \chi_i$.

Далее, в каждой стандартной окрестности V_i выберем компактное множество F_i и обозначим через χ_i, ζ_i неотрицательные функции из $C_c^\infty(V_i)$, удовлетворяющие условиям:

- 1') $\chi_i|_{F_i} = 1$;
- 2') $\chi_i \zeta_i = \chi_i$.

Числа ε'_j и множества F_j можно выбрать так, чтобы $\inf_{x \in \mathcal{M}} \sum_s \chi_s(x) > 0$. Заменяя χ_i функциями $\chi_i(\sum_s \chi_s)^{-1}$ (которые снова обозначим через χ_i), мы получим разбиение единицы на $\mathcal{M}_0$, подчиненное покрытию V_i .

Обозначим расстояние от точки x до множества $\mathcal{S}$ через $\rho_{\mathcal{S}}(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $(V_{a,i}, v_{a,i})$ ($a \in \mathcal{S}$) – карта специального атласа на многообразии $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}_{a,i} = v_{a,i}(V_{a,i})$. Тогда

$$(\rho_{\mathcal{S}} \circ v_{a,i}^{-1})(x) \sim x_1 \quad \text{при} \quad x \in \mathfrak{M}_{a,i}. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем обозначения $\mathcal{O}_a, \kappa, \mathcal{M}', v'_i, \dots$, введенные выше при построении специального атласа.

Произведение $K(\mathcal{M}') \times \mathbb{R}^q$ является стратифицированным многообразием (некомпактным!). Обозначим через $r(X)$ евклидово расстояние от точки $X \in K(\mathcal{M}') \times \mathbb{R}^q$ до множества особенностей, а через $R(X)$ – расстояние до

“ребра” $0 \oplus \mathbb{R}^{q_k}$. Уменьшая, если необходимо, окрестность $\mathcal{O}_a$, можно считать, что

$$r(X) \sim (\rho_{\mathcal{S}} \circ \kappa^{-1})(X) \quad \text{при } X \in \kappa(\mathcal{O}_a). \quad (5.6)$$

Пусть сначала ранг модели $\mathfrak{M}_{a,i}$ равен 1, т.е. $\mathfrak{M}_{a,i} = (K(U_0) \times U_1) \cap \{x : 0 \leq x_1 < \varepsilon_1\}$, где U_0 и U_1 – открытые подмножества пространств $\mathbb{R}^{q_0}$ и $\mathbb{R}^{q_1}$ соответственно (как и ранее, в такой ситуации $\mathbb{R}^{q_0}$ отождествляется с плоскостью $\{(x', 1) : x' \in \mathbb{R}^{q_0}\}$). Прообразом модели $\mathfrak{M}_{a,i}$ при отображении π_i является множество $(K(V'_i) \times U_1) \cap \{X : 0 \leq R(X) < \varepsilon_1\}$, где V'_i – открытое подмножество многообразия $\mathcal{M}'$, удовлетворяющее условию $\overline{V'_i} \subset \mathcal{M}'_0$. Из этого условия следует, что $r(X) \sim R(X)$ при $X \in K(V'_i) \times \mathbb{R}^{q_1}$. Сопоставляя последнее соотношение с (5.6), получаем

$$R(X) \sim (\rho_{\mathcal{S}} \circ \kappa^{-1})(X), \quad X \in \kappa(\mathcal{O}_a),$$

или после замены X на $\pi_i^{-1}(x)$

$$(R \circ \pi_i^{-1})(x) \sim (\rho_{\mathcal{S}} \circ v_{a,i}^{-1})(x), \quad x \in \mathfrak{M}_{a,i}.$$

Но $(R \circ \pi_i^{-1})(x) \sim x_1$ в силу определения отображения π_i . Это доказывает соотношение (5.5) для моделей ранга 1.

Пусть теперь ранг модели ≥ 2 . Положим $\rho' = r|_{\mathcal{M}'}$. Можно предполагать (по индукции), что

$$(\rho' \circ (v'_i)^{-1})(x) \sim x_1 \quad \text{при } x \in \mathfrak{M}'_{a,i}.$$

Но тогда

$$(r \circ \pi_i^{-1})(x) \sim x_1 \quad \text{при } x \in \mathfrak{M}_{a,i}.$$

Снова используя (5.6) (с $X = \pi_i^{-1}(x)$), заканчиваем доказательство.

5.4. ПДО на $\mathfrak{s}$ -многообразии. Пусть $\mathcal{M}$ – $\mathfrak{s}$ -многообразие, $\{(V_i, v_i)\}$ – специальный атлас на $\mathfrak{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Интегральный оператор

$$Bu(x) = \int G(x, y)u(y) d\nu_y, \quad G \in C^\infty(\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0), \quad (5.7)$$

определенный на функциях $u \in C_c^\infty(\mathcal{M}_0)$, назовем *сглаживающим*, если при любом $N \in \mathbb{Z}_+$ функция G допускает оценку

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G(x, y)| \leq C(\alpha, \beta, N, E) \rho_{\mathcal{S}}(x)^{N-m-|\alpha+\beta|} (\rho_{\mathcal{S}}(x)^2 + \rho(x, y)^2)^{-N/2}, \quad (5.8)$$

$$(x, y) \in \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0$$

(дифференцирование можно отнести к любой из карт $((V_i \times V_j), (v_i, v_j))$ на $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$). Если, кроме того, ядро оператора имеет *собственный носитель*, т.е.

- (i) обе проекции $\text{supp } G \rightarrow \mathcal{M}_0$ суть собственные отображения,
- (ii) отношение $\rho_{\mathcal{S}}(x)/\rho_{\mathcal{S}}(y)$ ограничено и отделено от нуля на $\text{supp } G$,

то оператор (5.7) будем называть *собственным*.

Пусть (V_i, v_i) – специальная карта. Фиксируем $\mu \in [-\infty, +\infty)$. Класс $\Psi^\mu(\text{Int } \mathfrak{M}_i)$ для краткости будем обозначать через $\Psi^\mu(\mathfrak{M}_i)$ (роль функции d , участвующей в определении этого класса, играет $d_i(x) = x_1$). Каждому ПДО $A_i \in \Psi^\mu(\mathfrak{M}_i)$ соответствует оператор

$$v_i^* A_i (v_i^{-1})^*: C_c^\infty(V_i \cap \mathcal{M}_0) \rightarrow C_c^\infty(V_i \cap \mathcal{M}_0), \quad u \mapsto [A_i(u \circ v_i^{-1})] \circ v_i.$$

Аналогично, если (V_i, v_i) – стандартная карта и A_i – ПДО порядка μ в области $v_i(V_i)$ (в обычном смысле), то определен оператор $v_i^* A_i (v_i^{-1})^*: C_c^\infty(V_i) \rightarrow C^\infty(V_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. Линейный оператор $A: C_c^\infty(\mathcal{M}_0) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}_0)$ называется ПДО порядка μ на $\mathfrak{s}$ -многообразии $\mathcal{M}$, если существуют такие ПДО $A_i \in \Psi^\mu(\mathfrak{M}_i)$ и такой сглаживающий оператор B , что

$$Au = \sum_i v_i^* A_i (v_i^{-1})^* u + Bu, \quad u \in C_c^\infty(\mathcal{M}_0). \quad (5.9)$$

ПДО A называется *собственным*, если операторы A_i и B можно выбрать собственными. Класс всех ПДО (соответственно собственных ПДО) порядка μ обозначим через $\Psi^\mu(\mathcal{M})$ (соответственно $\Psi_0^\mu(\mathcal{M})$).

Из определения 5.5 вытекает, что каждый сглаживающий оператор B есть ПДО порядка $-\infty$ (достаточно в (5.9) взять $A = B$, $A_i = 0$ ($\forall i$)). Верно и обратное. Это легко следует из предложения 1.14. Таким образом, класс сглаживающих операторов совпадает с $\Psi^{-\infty}(\mathcal{M})$.

Для любых $s, \gamma \in \mathbb{R}$ пространство $H^{(s, \gamma)}(\mathcal{M})$ введем как пополнение $C_c^\infty(\mathcal{M}_0)$ по норме

$$\|u\|_{s, \gamma} = \left(\sum_i q_{E_i}^{(s, \gamma)} ((\chi_i u) \circ v_i^{-1})^2 \right)^{1/2}, \quad E_i = \text{supp } \chi_i \quad (5.10)$$

(определение полунорм $q_E^{(s, \gamma)}$ см. в п. 4.2). При $s \geq t$ имеет место включение $H^{(s, \gamma)}(\mathcal{M}) \subset H^{(t, \gamma)}(\mathcal{M})$; это вытекает из аналогичного свойства пространств $\mathcal{H}^{(s, \gamma)}(\Omega)$ (см. упомянутый пункт).

Следующее утверждение по существу получается из теоремы 4.3.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть $s, t, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \leq s - t$, и пусть $A \in \Psi_0^\mu(\mathcal{M})$. Тогда ПДО A продолжается до непрерывного оператора $H^{(s, \gamma)}(\mathcal{M}) \rightarrow H^{(t, \gamma)}(\mathcal{M})$.

Мы не обсуждаем здесь непрерывность несобственных ПДО. Соответствующая теорема верна и для таких операторов при условии, что весовой показатель γ принадлежит определенному интервалу (ср. с [9]; см. также [4], [20]).

5.5. $\mathfrak{s}$ -многообразия. От символов $a(x, \xi)$ операторов не требовалась стабилизация при подходе точки x к особенностям многообразия. Естественным выделить подклассы ПДО, символы которых стабилизируются вблизи $\mathcal{S}$ в том или ином смысле (скажем, имеют вдоль $\mathcal{S}$ “разрывы первого рода”). Для того чтобы можно было такие операторы корректно определить на многообразии, нужно несколько сузить и класс допустимых преобразований координат. С этой целью

введем пространства $\check{C}^\infty$. Будем говорить, что функция φ , заданная на модели $\mathfrak{M}$, принадлежит классу $\check{C}^\infty(\mathfrak{M})$, если $\varphi \circ p \in C^\infty(\mathfrak{N}) := C^\infty(\mathbb{R}^m)|\mathfrak{N}$.

Следующее предложение 5.7 позволяет описать в “декартовых координатах” поведение функций из $\check{C}^\infty(\mathfrak{M})$ вблизи множества $\mathcal{S}(\mathfrak{M})$. Предварительно определим правильные окрестности точек в $\mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{M}$ – модель ранга k . Возьмем произвольную точку $(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k) \in \mathfrak{N}$. Обозначим через i наименьший из индексов $j \in \{1, \dots, k\}$, удовлетворяющих условию $\bar{\rho}_j \neq 0$ (если $\bar{\rho}_j = 0$ при всех j , то полагаем $i = k + 1$). Пусть $\mathcal{G}$ – открытое подмножество в $\mathfrak{N}$, содержащее точку $(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k)$. По определению множество $\mathcal{G}$ является *правильной окрестностью* точки $(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k)$, если замыкание $\bar{\mathcal{G}}$ не содержит точек $(\zeta^0, \rho_1, \dots, \zeta^k)$ с $\rho_j = 0$ при $j \geq i$. Иными словами, $\mathcal{G}$ – правильная окрестность, если $p(\bar{\mathcal{G}})$ не пересекается с теми стратами в $\mathfrak{M}$, чья размерность меньше размерности страта, содержащего точку $p(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Пусть $\varphi \in \check{C}^\infty(\mathfrak{M})$. Тогда

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_\alpha x_1^{1-|\alpha|}, \quad x \in \text{Int } \mathfrak{M}, \quad (5.11)$$

для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, $\alpha \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно точку $(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k)$. Достаточно проверить, что оценка (5.11) выполняется на множестве $G \cap \text{Int } \mathfrak{M}$, где $G = p(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ – правильная окрестность точки $(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k)$. Пусть, как и прежде, i – наименьший из индексов j , для которых $\bar{\rho}_j \neq 0$. Если $i = 1$, то доказывать нечего, поскольку в этом случае $G \subset \text{Int } \mathfrak{M}$ (так что $\varphi \in C^\infty(G)$) и $\inf_{x \in G} x_1 > 0$. Пусть $i \geq 2$. Обозначим через $Q = p^{-1}(\bar{x})$ полный прообраз точки $\bar{x} = p(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k)$. Множество Q является пересечением окрестности $\mathcal{G}$ с плоскостью $\{\rho_j = \bar{\rho}_j, \zeta^j = \bar{\zeta}^j, j \geq i-1\}$, где $\bar{\rho}_{i-1} = 0$ и $\bar{\rho}_j \neq 0$ при $j \geq i$; размерность плоскости равна $i-2 + \sum_{j=0}^{i-2} q_j$. Пусть $\Phi \in C^\infty(\mathcal{G})$ – такая функция, что $\Phi = \varphi \circ p$. Тогда $\Phi|_Q = \text{const}$ и на множестве Q выполняются равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_s^j} = 0, \quad j \leq i-2, \quad s \leq q_j.$$

Варьируя координаты $\bar{\rho}_i, \bar{\zeta}^i, \dots, \bar{\zeta}^k$, получаем, что эти равенства выполняются на множестве $\mathcal{G} \cap \{\rho_{i-1} = 0\}$.

Заменяя точку $(\bar{\zeta}^0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\zeta}^k)$ близкой точкой, принадлежащей множеству $\mathfrak{N} \cap \mathcal{G} \cap \{\rho_{i-2} = 0, \rho_{i-1} > 0\}$, повторим предыдущие рассуждения и придем к выводу, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_s^j} = 0, \quad j \leq i-2, \quad s \leq q_j,$$

на множестве $\mathcal{G} \cap \{\rho_{i-2} = 0\}$. Продолжая подобным образом, заключаем, что для любого $j \leq i-2$ производные $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_s^j}$ делятся (в пространстве $C_b^\infty(\text{Int } \mathcal{G})$ гладких ограниченных функций) на $\rho_{j+1} \cdots \rho_{i-1}$, а тогда и на $\rho_{j+1} \cdots \rho_k$, поскольку

произведение $\rho_i \cdots \rho_k$ отделено от нуля на множестве $\mathcal{G}$. Итак,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j} = \rho_{j+1} \cdots \rho_k \Phi_j, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_s^j} = \rho_{j+1} \cdots \rho_k \Psi_{js}, \quad \Phi_j, \Psi_{js} \in C_b^\infty(\text{Int } \mathcal{G}), \quad (5.12)$$

при $j \leq i - 2$, $s \leq q_j$. В действительности эти соотношения справедливы при всех $j \leq k$; для доказательства нужно еще раз воспользоваться тем фактом, что произведение $\rho_i \cdots \rho_k$ отделено от нуля (в случае $j = k$ указанное произведение считаем равным 1). Согласно формулам (5.2) имеем

$$\varphi(y^0, x_1, \dots, y^k) = \Phi\left(\frac{y^0}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}, \dots, y^k\right) \quad (5.13)$$

при $(y^0, x_1, \dots, y^k) \in G \cap \text{Int } \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\frac{x_{j-1}}{x_j^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_{j-1}} - \sum_{s=1}^{q_{j-1}} \frac{y_s^{j-1}}{x_j^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_s^{j-1}} + \frac{1}{x_{j+1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_s^j} = \frac{1}{x_{j+1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_s^j}$$

(по определению $x_{m+1} = 1$). Отсюда и из (5.12) (с учетом равенства $\rho_{j+1} \cdots \rho_k = x_{j+1}$) вытекает, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\frac{x_{j-1}}{x_j} \Phi_{j-1} - \sum_{s=1}^{q_{j-1}} \frac{y_s^{j-1}}{x_j} \Psi_{j-1,s} + \Phi_j, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_s^j} = \Psi_{js}.$$

Все слагаемые в правых частях этих равенств имеют вид $F \circ p^{-1}$, $F \in C_b^\infty(\mathcal{G})$ (см. (5.2) и (5.12)). Для завершения доказательства остается заметить, что производные любой функции f такого вида подчиняются оценкам $|\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha x_1^{-|\alpha|}$; это следует из (5.13) (с заменой φ , Φ на f , F) и соотношений $x_1 = \rho_1 \cdots \rho_k \leq C \rho_j \cdots \rho_k = x_j$.

Пусть $\{(V_i, v_i)\}$ – специальный атлас на многообразии $\mathcal{M} \in \mathfrak{D}_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8. Атлас $\{(V_i, v_i)\}$ определяет на $\mathcal{M}$ структуру $\check{\mathfrak{s}}$ -многообразия, если любые две его карты (V_i, v_i) и (V_j, v_j) согласованы, т.е. либо $V_i \cap V_j = \emptyset$, либо $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ и тогда отображение

$$v_j \circ v_i^{-1}: v_i(V_i \cap V_j \cap \text{Int } \mathfrak{M}_i) \rightarrow v_j(V_i \cap V_j \cap \text{Int } \mathfrak{M}_j) \quad (5.14)$$

принадлежит классу $\check{C}^\infty$, если обе карты специальные, и является диффеоморфизмом гладких многообразий, если хотя бы одна из карт стандартная.

Для каждой специальной окрестности V_i обозначим через $\mathfrak{M}_i$ модель $v_i(V_i)$. На множестве $\mathfrak{M}_i$ определим функцию $d_i(x) = x_1$. Тогда отображение (5.14) будет допустимым диффеоморфизмом в смысле определения 2.1. Действительно, как нетрудно понять, отображения π_i удовлетворяют условию Липшица. Но тогда этому условию удовлетворяют и отображения $v_i = \pi_i \circ \varkappa$ (см. (ii) из п. 5.1). Отсюда в силу предложения 5.3 вытекает свойство 1) определения 2.1. Свойство 2) установлено в предложении 5.7. Итак, $\check{\mathfrak{s}}$ -многообразие является и $\mathfrak{s}$ -многообразием.

В заключение несколько слов о ПДО на $\mathfrak{f}$ -многообразиях. Можно строить исчисление операторов, предсимволы $\tilde{\sigma}(x, \xi)$ которых являются гладкими функциями цилиндрических координат $(\zeta^0, \rho_1, \dots, \zeta^k)$ точки x (включая нулевые значения координат ρ_j). Более точно, пусть $p: \mathfrak{N}_i \rightarrow \mathfrak{M}_i$ — проекция, и пусть $q = p \times \text{Id}: \mathfrak{N}_i \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{M}_i \times \mathbb{R}^m$. Речь идет о предсимволах $\tilde{\sigma}$ из класса $\tilde{S}(\text{Int } \mathfrak{M}_i)$, которые допускают представление $\tilde{\sigma} = f \circ q^{-1}$ на множестве $\text{Int } \mathfrak{M}_i \times \mathbb{R}^m$, где $f \in C^\infty(\mathfrak{N}_i \times \mathbb{R}^m) := C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)(\mathfrak{N}_i \times \mathbb{R}^m)$. В [15] анонсирован список всех классов эквивалентных неприводимых представлений C^* -алгебры, порожденной такого рода операторами (с несколько более регулярным поведением предсимволов по ξ на бесконечности).

Список литературы

1. *Dynin A. S.* Algebras generated by classical pseudodifferential operators on open Riemannian manifolds // Proc. Sympos. Pure Math. 1990. V. 51. №2. P. 93–98.
2. *Cordes H. O.* Spectral theory of linear differential operators and comparison algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
3. *Melrose R. B.* The Atiyah–Patodi–Singer index theorem. Wellesley, MA: A. K. Peters, 1994.
4. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. М.: Наука, 1986.
5. *Schulze B.-W.* Pseudo-differential operators on manifolds with singularities. Amsterdam: North-Holland, 1991.
6. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об одном классе многообразий с особенностями // Изв. вузов. Математика. 1972. №11. С. 46–52.
7. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями // Проблемы матем. анализа. 1977. №6. С. 85–142.
8. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
9. *Сеничкин В. Н.* Псевдодифференциальные операторы на многообразиях с ребрами // Проблемы матем. анализа. 1992. №13. С. 162–214.
10. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* О спектре C^* -алгебр, порожденных псевдодифференциальными операторами с разрывными символами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. №6. С. 1263–1284.
11. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* О представлениях алгебры псевдодифференциальных операторов с многомерными разрывами в символах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №4. С. 833–859.
12. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* Спектр алгебры псевдодифференциальных операторов с кусочно гладкими символами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. №1. С. 147–177.
13. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* Разрешимые алгебры операторов // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. №5. С. 1–87.
14. *Сеничкин В. Н.* Спектр алгебры псевдодифференциальных операторов на многообразии с гладкими ребрами // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. №6. С. 105–147.
15. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* Псевдодифференциальные операторы на многообразиях с особенностями // Функци. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. №2. С. 88–90.
16. *Агранович М. С., Амосов Б. А.* Оценки s -чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях // Функци. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. №2. С. 1–18.
17. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
18. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.

19. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. М.: Мир, 1987.
20. *Пламеневский Б. А., Таццян Г. М.* Оператор свертки в пространствах с весом // Проблемы матем. анализа. 1990. № 11. С. 208–237.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию
19.04.1999