Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Приближение функций с переменной гладкостью суммами
Фурье–Лежандра, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 5, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 06:06:24

УДК 517.98

И. И. Шарапудинов

Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра

Пусть $0 < \mu \leq 1$, $r \geq 1$ – целое, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\}$, a_i – точки из интервала $(-1, 1)$. В статье введены классы $S^r H_\Delta^\mu$ и $S^r H_\Delta^\mu(B)$, состоящие из функций $f = f(x)$, для которых производная $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, а r -я и $(r+1)$ -я производные удовлетворяют определенным условиям вне множества Δ . Доказано, что при $0 < \mu < 1$ суммы Фурье–Лежандра осуществляют приближение наилучшего порядка на классах $S^r H_\Delta^\mu(B)$. С помощью разложений Фурье–Лежандра построены полиномы $\mathcal{Y}_{n+2r}$ порядка $n+2r$, обладающие тем свойством, что при $0 < \mu < 1$ производная порядка ν полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}$ приближает $f^{(\nu)}(x)$ ($f \in S^r H_\Delta^\mu$) с точностью до $O(n^{\nu+1-r-\mu})$ на $[-1, 1]$, а вне множества Δ точность достигает порядка $O(n^{\nu-r-\mu})$.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Пусть $C[-1, 1]$ – пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f = f(x)$, для которых норма определяется обычным способом с помощью равенства $\|f\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$, $p(f) = p(f, x)$ – алгебраический полином степени n , наименее уклоняющийся от функции $f \in C[-1, 1]$, $E_n(f) = \|f - p_n(f)\|$. Через $S_n(f) = S_n(f, x)$ обозначим сумму Фурье–Лежандра функции $f \in C[-1, 1]$. Тогда имеет место неравенство Лебега

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq E_n(f)(1 + L_n(x)) \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (1.1)$$

где $L_n(x)$ – норма функционала $f \rightarrow S_n(f, x)$, называемая *функцией Лебега* сумм Фурье–Лежандра. Хорошо известно [1]–[7], что при $n \rightarrow \infty$ порядок роста констант Лебега $L_n = \max\{L_n(x) : -1 \leq x \leq 1\}$ совпадает с $\sqrt{n+1}$ и как следствие суммы Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$, вообще говоря, приближают функцию $f \in C[-1, 1]$ в $\sqrt{n+1}$ раз хуже (по порядку), чем полиномы $p_n(f)$. Другими словами, рост констант Лебега L_n при $n \rightarrow \infty$ отрицательно влияет на аппроксимативные свойства сумм Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$. Более того, в работе автора [8] было, в частности, доказано, что отрицательное влияние роста констант Лебега L_n при $n \rightarrow \infty$ на приближение функции $f \in C[-1, 1]$ суммами Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$ не компенсируется ростом скорости стремления к нулю наилучших приближений $E_n(f)$. Точнее, пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$, $C(\varepsilon)$ – множество непрерывных на $[-1, 1]$ функций f таких, что $E_n(f) \leq \varepsilon_n$ ($n = 0, 1, \dots$). Положим

$$\mathcal{E}_n(\varepsilon) = \sup_{f \in C(\varepsilon)} \|f - S_n(f)\|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00930).

Тогда $\mathcal{E}_n(\varepsilon) \asymp \sqrt{n} \varepsilon_n$ ($n = 0, 1, \dots$), см. [8]. Это означает, что если $\varepsilon_n > 0$ для всех $n = 0, 1, \dots$, то для любого n в классе $C(\varepsilon)$ найдется функция f , для которой $\|f - S_n(f)\| \geq c\sqrt{n+1} E_n(f)$; здесь и далее через $c, c_k, c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ обозначаются положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров. Кроме того, в [8] построены примеры функций $f \in C[-1, 1]$ со сколь угодно быстро убывающими наилучшими приближениями $E_n(f)$ таких, что $\|f - S_{n_k}(f)\| \geq c\sqrt{n_k} E_{n_k}(f)$ для бесконечного множества номеров n_k .

Итак, суммы Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$, вообще говоря, не дают хорошего приближения для $f \in C[-1, 1]$ и, следовательно, не всегда могут быть использованы как аппарат приближения функции $f \in C[-1, 1]$, даже если f обладает высокой гладкостью на $[-1, 1]$: может случиться, что $S_n(f, x)$ приближает f в $\sqrt{n}$ раз хуже (по порядку), чем полином наилучшего приближения $p_n(f)$.

И тем не менее, в настоящей статье показано, что суммы Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$ могут быть использованы как аппарат приближения для одного важного класса $S^r H_{\Delta}^{\mu}$, состоящего из функций $f = f(x)$, для которых производная $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, а r -я и $(r+1)$ -я производные удовлетворяют определенным условиям вне множества Δ (точное определение класса $S^r H_{\Delta}^{\mu}$ дано в § 2). Это вытекает из оценки ($0 < \mu < 1$)

$$\sup_{f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)} \|f - S_n(f)\| \leq c(r, \mu, \Delta) \sup_{f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)} E_n(f),$$

см. следствие 5.1.

С помощью разложений Фурье–Лежандра построены полиномы $\mathcal{Y}_{n+2r}$ порядка $n + 2r$, обладающие тем свойством, что при $0 < \mu < 1$ производная порядка ν полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}$ приближает $f^{(\nu)}(x)$ ($f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}$) с точностью до $O(n^{\nu+1-r-\mu})$ на $[-1, 1]$, а вне множества Δ точность достигает порядка $O(n^{\nu-r-\mu})$.

§ 2. Классы $S^r H_{\Delta}^{\mu}$ и $S^r H_{\Delta}^{\mu}(B)$

При определении классов $S^r H_{\Delta}^{\mu}$ нам понадобится следующая функция:

$$x_+^{\gamma} = \begin{cases} x^{\gamma}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

где γ — произвольное действительное число.

Пусть $r \geq 1$ — целое, $0 < \mu \leq 1$, $-1 < a < 1$. Через $S^r H_{a+}^{\mu}$ мы обозначим линейное пространство функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ $r-1$ раз, для которых на $[-1, a) \cup (a, 1]$ существует производная $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющая условиям: $f^{(r)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a + \varepsilon, 1]$ для произвольного положительного ε такого, что $a + \varepsilon < 1$, и

$$|f^{(r)}(x)| \leq c(x-a)_+^{\mu-1}, \quad |f^{(r+1)}(x)| \leq c(x-a)_+^{\mu-2} \quad (2.1)$$

для почти всех $x \in [-1, a) \cup (a, 1]$.

Аналогично определяется класс $S^r H_{a-}^\mu$, состоящий из функций $g(x)$, для которых почти всюду на $x \in [-1, a) \cup (a, 1]$

$$|g^{(r)}(x)| \leq c(a-x)_+^{\mu-1}, \quad |g^{(r+1)}(x)| \leq c(a-x)_+^{\mu-2}. \quad (2.2)$$

Заметим, что

$$S^r H_{a-}^\mu = \{g : g(x) = f(-x), f \in S^r H_{-a+}^\mu\}. \quad (2.3)$$

Через $S^r H_a^\mu$ обозначим линейную оболочку пространств $S^r H_{a-}^\mu$ и $S^r H_{a+}^\mu$, т.е.

$$S^r H_a^\mu = S^r H_{a-}^\mu + S^r H_{a+}^\mu. \quad (2.4)$$

Пусть $-1 < a_1 < a_2 < \dots < a_l < 1$, $\Delta = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$. Через $S^r H_\Delta^\mu$ мы обозначим линейную оболочку, натянутую на все пространства $S^r H_{a_i}^\mu$ при $i = 1, 2, \dots, l$, т.е.

$$S^r H_\Delta^\mu = S^r H_{a_1}^\mu + \dots + S^r H_{a_l}^\mu. \quad (2.5)$$

Если B – положительное число, то через $S^r H_\Delta^\mu(B)$ мы обозначим подмножество таких функций $f \in S^r H_\Delta^\mu$, что

$$|f^{(r)}(x)| \leq B \left[\sum_{i=1}^l (x-a_i)_+^{\mu-1} + \sum_{i=1}^l (a_i-x)_+^{\mu-1} \right], \quad (2.6)$$

$$|f^{(r+1)}(x)| \leq B \left[\sum_{i=1}^l (x-a_i)_+^{\mu-2} + \sum_{i=1}^l (a_i-x)_+^{\mu-2} \right] \quad (2.7)$$

для почти всех $x \in [-1, 1] \setminus \Delta$.

§3. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Следующие свойства полиномов Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ хорошо известны [3].

Ортогональность ($\alpha, \beta > -1$):

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta}(x) P_m^{\alpha, \beta}(x) \kappa(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (3.1)$$

где $\kappa(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$,

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)} \quad (3.2)$$

и, следовательно, $h_n^{\alpha, \beta} \asymp n^{-1/2}$, $n = 1, 2, \dots$;

рекуррентная формула: $P_0^{\alpha, \beta}(x) = 1$, $P_1^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$,

$$\begin{aligned} & 2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{\alpha, \beta}(x) \\ &= (2n+\alpha+\beta-1)\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x + \alpha^2 - \beta^2\}P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) \\ & \quad - 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{\alpha, \beta}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots; \end{aligned} \quad (3.3)$$

обобщенная формула Родрига:

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{ (1-x)^{m+\alpha} (1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\beta}(x) \}, \quad (3.4)$$

где $a^{[0]} = 1$, $a^{[m]} = a(a-1) \cdots (a-m+1)$;

частное значение:

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}; \quad (3.5)$$

весовая оценка $(-1 \leq x \leq 1)$:

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}. \quad (3.6)$$

§ 4. Некоторые вспомогательные результаты

Здесь мы рассмотрим некоторые свойства полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $\alpha = \beta$. Пусть $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$, i, m — целые, $0 \leq i \leq m$,

$$\sigma_i^k = \sigma_i^k(m) = \frac{2^m (k^{[m]})^2 m^{[i]} (1/2)_i (2k+1-2m+4i)}{(2i)! (2k)^{[2m-2i]} (k-m+1)_i (k+3/2)_i (2k+1)}, \quad (4.1)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_i = a(a+1) \cdots (a+i-1)$ ($i \geq 1$). Тогда имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. Если $0 \leq m \leq k$, то

$$\frac{(1-x^2)^m}{2^m} P_{k-m}^{m,m}(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_i^k P_{k-m+2i}(x). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение $(1-x^2)^m P_{k-m}^{m,m}(x)$ представляет собой полином степени $k+m$, следовательно, мы можем записать

$$(1-x^2)^m P_{k-m}^{m,m}(x) = \sum_{j=0}^{k+m} \gamma_j P_j(x), \quad (4.3)$$

где

$$\gamma_j = \frac{1}{h_{j,0}^{0,0}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^m P_{k-m}^{m,m}(t) P_j(t) dt. \quad (4.4)$$

Поскольку полином $P_{k-m}^{m,m}(x)$ ортогонален с весом $(1-x^2)^m$ к $P_j(x)$ при $j < k-m$, то соответствующие γ_j равны нулю. Кроме того, интервал (4.4) обращается в нуль, если $k-m$ и j имеют неодинаковую четность. Следовательно, (4.3) можно переписать так:

$$(1-x^2)^m P_{k-m}^{m,m}(x) = \sum_{i=0}^m \gamma_{k-m+2i} P_{k-m+2i}(x), \quad (4.5)$$

где в силу (4.4) ($0 \leq i \leq m$)

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{1}{h_{k-m+2i-1}^{0,0}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^m P_{k-m}^{m,m}(t) dt. \quad (4.6)$$

Для вычисления интеграла (4.6) воспользуемся следующим равенством [9]:

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{a,a}(x)}{P_n^{a,a}(1)} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n! (\alpha+1)_{n-2j} (n+2a+1)_{n-2j} (1/2)_j (a-\alpha)_j}{(n-2j)! (2j)! (a+1)_{n-2j} (n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j (n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(1)}, \end{aligned}$$

где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. Полагая здесь $a=0$, $\alpha=m$, $n=k-m+2i$ и учитывая (3.5), имеем (если $2j > k-m+2i$, то $(k-m+2i-2j)! = \Gamma(k-m+2i-2j+1) = \infty$)

$$\begin{aligned} P_{k-m+2i}(x) &= \sum_{j=0}^m \frac{(2k-2m+4i-2j)! (k+m+2i-2j)!}{(k-m+2i-2j)! (2j)! (2k+4i-4j)!} \\ &\quad \times \frac{(1/2)_j m^{[j]} (-1)^j}{(k-m+2i-2j+1)_j (k+2i-2j+3/2)_j} P_{k-m+2i-2j}^{m,m}(x). \quad (4.7) \end{aligned}$$

Умножим обе части этого равенства на $(1-x^2)^m P_{k-m}^{m,m}(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[-1, 1]$, тогда

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-t^2)^m P_{k-m}^{m,m}(t) P_{k-m+2i}(t) dt \\ &= \frac{(2k-2m+2i)! (k+m)! (1/2)_i m^{[i]} (-1)^i}{(k-m)! (2i)! (2k)! (k-m+1)_i (k+3/2)_i} h_{k-m}^{m,m}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Сопоставляя (4.6) и (4.8) с (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{k-m+2m} &= \frac{h_{k-m}^{m,m}}{h_{k-m+2i}^{0,0}} \frac{(2k-2m+2i)! (k+m)! (1/2)_i m^{[i]} (-1)^i}{(k-m)! (2i)! (2k)! (k-m+1)_i (k+3/2)_i} \\ &= (-1)^i \frac{2^{2m} (k!)^2 (2k-2m+4i+1)}{(2k+1)(k-m)! (k+m)!} \frac{(2k-2m+2i)! (k+m)! m^{[i]} (1/2)_i}{(2k)! (k-m)! (2i)! (k-m+1)_i (k+3/2)_i} \\ &= \frac{(-1)^i 2^{2m} (k^{[m]})^2 m^{[i]} (1/2)_i (2k+1-2m+4i)}{(2i)! (2k)^{[2m-2i]} (k-m+1)_i (k+3/2)_i (2k+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.1) получим

$$\gamma_{k-m+2m} = (-1)^i 2^m \sigma_i^k.$$

Подставляя это значение в (4.5), приходим к равенству (4.2). Лемма 4.1 доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть k, n, m, q — целые, $2 \leq k \leq n$ и $m, q < k$. Тогда

$$\begin{aligned} (x-t) \sum_{l=k}^n (2l+1) P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t) \\ = (n+1) [P_{n-m+1}^{m,m}(x) P_{n-q}^{q,q}(t) - P_{n-m}^{m,m}(x) P_{n-q+1}^{q,q}(t)] \\ - k [P_{k-m}^{m,m}(x) P_{k-q-1}^{q,q}(t) - P_{k-m-1}^{m,m}(x) P_{k-q}^{q,q}(t)] \\ - \sum_{l=k}^n \frac{1}{l+1} [m^2 P_{l-m+1}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t) - q^2 P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q+1}^{q,q}(t)]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\alpha = \beta = m$ формулу (3.3) перепишем в следующем виде:

$$\frac{n(n+2m)}{n+m} P_n^{m,m}(x) + (n+m-1) P_{n-2}^{m,m}(x) = (2n+2m-1) x P_{n-1}^{m,m}(x). \quad (4.9)$$

Полагая здесь $n = l - q + 1$, $m = q$, $x = t$, имеем

$$\frac{(l-q+1)(l+q+1)}{l+1} P_{l-q+1}^{q,q}(t) + l P_{l-q-1}^{q,q}(t) = (2l+1) t P_{l-q}^{q,q}(t), \quad (4.10)$$

кроме того, заменяя в (4.9) n на $l - m + 1$, находим

$$\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{l+1} P_{l-m+1}^{m,m}(x) + l P_{l-m-1}^{m,m}(x) = (2l+1) x P_{l-m}^{m,m}(x). \quad (4.11)$$

Так как $(l-m+1)(l+m+1) = (l+1)^2 - m^2$, $(l-q+1)(l+q+1) = (l+1)^2 - q^2$, то (4.10) и (4.11) мы можем переписать так:

$$(l+1) P_{l-q+1}^{q,q}(t) + l P_{l-q-1}^{q,q}(t) - \frac{q^2}{l+1} P_{l-q+1}^{q,q}(t) = (2l+1) t P_{l-q}^{q,q}(t), \quad (4.12)$$

$$(l+1) P_{l-m+1}^{m,m}(x) + l P_{l-m-1}^{m,m}(x) - \frac{m^2}{l+1} P_{l-m+1}^{m,m}(x) = (2l+1) x P_{l-m}^{m,m}(x). \quad (4.13)$$

Равенство (4.12), умноженное на $P_{l-m}^{m,m}(x)$, вычтем из равенства (4.13), умноженного на $P_{l-q}^{q,q}(t)$, тогда получим

$$\begin{aligned} (x-t)(2l+1) P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t) \\ = (l+1) [P_{l-m+1}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t) - P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q+1}^{q,q}(t)] \\ - l [P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q-1}^{q,q}(t) - P_{l-m-1}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t)] \\ - \frac{1}{l+1} [m^2 P_{l-m+1}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t) - q^2 P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q+1}^{q,q}(t)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Складывая соответственно правые и левые части равенств (4.14) при $l = k, k+1, \dots, n$, приходим к утверждению леммы 4.2.

Положим $\rho_{m,q}(x, t) = (1-x^2)^m (1-t^2)^q$,

$$\mathcal{K}_{n,k}^{m,q}(x, t) = \rho_{m,q}(x, t) \sum_{l=n+m+1}^k (2l+1) P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t). \quad (4.15)$$

Нам понадобятся некоторые оценки для $|\mathcal{K}_{n,k}^{m,1}(x, t)|$ и $|\mathcal{K}_{n,k}^{m,0}(x, t)|$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $-1 < a < 1$, $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon \leq x \leq 1$. Тогда

$$|\mathcal{K}_{n,k}^{m,0}(x, t)| \leq c(m, a) \frac{1}{\varepsilon} (1 - x^2)^m \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{k} \right)^{-m-1/2} \left(a \leq t \leq a + \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad (4.16)$$

$$|\mathcal{K}_{n,k}^{m,1}(x, t)| \leq c(m, a) \frac{1}{\varepsilon} (1 - x^2)^m \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{k} \right)^{-m-1/2} \left(a \leq t \leq a + \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad (4.17)$$

$$\int_a^1 |\mathcal{K}_{n,k}^{m,1}(x, t)| dt \leq c(m) \frac{1}{\varepsilon} (1 - x^2)^m \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{k} \right)^{-m-1/2} \ln(k+1). \quad (4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 4.2. Мы имеем

$$|\mathcal{K}_{n,k}^{m,q}(x, t)| \leq A_1 + A_2 + A_3, \quad (4.19)$$

где

$$A_1 = \frac{k+1}{|x-t|} \rho_{m,q}(x, t) \left| P_{k-m+1}^{m,m}(x) P_{k-q}^{q,q}(t) - P_{k-m}^{m,m}(x) P_{k-q+1}^{q,q}(t) \right|, \quad (4.20)$$

$$A_2 = \frac{n+m+1}{|x-t|} \rho_{m,q}(x, t) \left| P_{n+1}^{m,m}(x) P_{n+m-q}^{q,q}(t) - P_n^{m,m}(x) P_{n+m+1-q}^{q,q}(t) \right|, \quad (4.21)$$

$$A_3 = \frac{\rho_{m,q}(x, t)}{|x-t|} \left| \sum_{l=n+m+1}^k \frac{1}{l+1} [m^2 P_{l-m+1}^{m,m}(x) P_{l-q}^{q,q}(t) - q^2 P_{l-m}^{m,m}(x) P_{l-q+1}^{q,q}(t)] \right|. \quad (4.22)$$

Оценки (4.16) и (4.17) непосредственно вытекают из (4.19)–(4.22) с учетом весовой оценки (3.6).

Чтобы доказать (4.18), представим интеграл в левой части этого неравенства в виде

$$\int_a^1 = \int_a^{x-1/k} + \int_{x-1/k}^{x+1/k} + \int_{x+1/k}^1 = B_1 + B_2 + B_3. \quad (4.23)$$

Оценим B_2 с помощью равенства (4.15) и весовой оценки (3.6):

$$\begin{aligned} B_2 &= \int_{x-1/k}^{x+1/k} |\mathcal{K}_{n,k}^{m,1}(x, t)| dt \\ &\leq \sum_{l=n+m+1}^k (2l+1) |P_{l-m}^{m,m}(x)| (1-x^2)^m \int_{x-1/k}^{x+1/k} |P_{l-1}^{1,1}(t)| (1-t^2) dt \\ &\leq c(m) (1-x^2)^m \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k} \right)^{-m-1/2} \sum_{l=n+m+1}^k \int_{x-1/k}^{x+1/k} dt \\ &\leq c(m) (1-x^2)^m \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k} \right)^{-m-1/2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

При оценке B_1 и B_3 воспользуемся весовой оценкой (3.6). В силу (4.19)–(4.22) получаем ($i \in \{1, 3\}$)

$$B_i \leq c(m) (1-x^2)^m \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k} \right)^{-m-1/2} \ln(k+1). \quad (4.25)$$

Сопоставляя (4.23)–(4.25), приходим к оценке (4.18). Лемма 4.3 доказана.

ЛЕММА 4.4. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}$,

$$\begin{aligned} \lambda_k(\mu) &= \begin{cases} 1, & 0 < \mu < 1, \\ \ln(k+1), & \mu = 1, \end{cases} \\ \widehat{f}_{r,k} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Тогда имеет место оценка

$$|\widehat{f}_{r,k}| \leq c(f, \mu, \Delta) \lambda_k(\mu) (k+1)^{1/2-\mu}. \quad (4.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, мы можем считать, что $\Delta = \{a\}$, $f \in S^r H_{a+}^{\mu}$, где $-1 < a < 1$. Тогда формулу (4.26) можно переписать так ($k \geq 1$):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{r,k} &= \frac{2k+1}{2} \int_a^{a+1/k} f^{(r)}(t) P_k(t) dt + \frac{2k+1}{2} \int_{a+1/k}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Поскольку из определения класса $f \in S^r H_{a+}^{\mu}$ следует, что

$$|f^{(r)}(t)| \leq c(f)(t-a)^{\mu-1} \quad \text{при } a < t \leq 1,$$

то с учетом весовой оценки (3.6) имеем

$$|A_1| \leq c(f, a) \sqrt{k+1} \int_a^{a+1/k} (t-a)^{\mu-1} dt \leq c(f, \mu, a) (k+1)^{1/2-\mu}. \quad (4.29)$$

Что касается интеграла A_2 , то, используя формулу (3.6) и применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{2k+1}{2} \left[f^{(r)} \left(a + \frac{1}{k} \right) \frac{1 - (a+1/k)^2}{2k} P_{k-1}^{1,1} \left(a + \frac{1}{k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2k} \int_{a+1/k}^1 f^{(r+1)}(t) (1-t^2) P_{k-1}^{1,1}(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Поскольку $f \in S^r H_{a+}^{\mu}$, то

$$\left| f^{(r)} \left(a + \frac{1}{k} \right) \right| \leq c(f) k^{1-\mu}, \quad |f^{(r+1)}(t)| \leq c(f)(t-a)^{\mu-2} \quad (4.31)$$

для почти всех $t \in (a, 1)$, а в силу весовой оценки (3.6)

$$\sqrt{k+1} (1-t^2) |P_{k-1}^{1,1}(t)| \leq c. \quad (4.32)$$

Из (4.30)–(4.32) выводим

$$|A_2| \leq c(f, \mu, a) \lambda_k(\mu) (k+1)^{1/2-\mu}. \quad (4.33)$$

Сопоставляя (4.28), (4.29) и (4.33), приходим к оценке (4.27). Лемма 4.4 доказана.

§ 5. Приближение функций класса $S^r H_\Delta^\mu$ суммами Фурье–Лежандра

Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $f \in S^r H_\Delta^\mu$. Тогда функция $f^{(r)}(x)$ интегрируема и, следовательно, мы можем рассмотреть ряд Фурье–Лежандра этой функции

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_{r,k} P_k(x), \quad (5.1)$$

где

$$\widehat{f}_{r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt. \quad (5.2)$$

Ниже нам понадобится

ЛЕММА 5.1. Если $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $f \in S^r H_\Delta^\mu$, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} f^{(r-1)}(x) &= f^{(r-1)}(-1) + \widehat{f}_{r,0} \cdot (x+1) - \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k} P_{k-1}^{1,1}(x), \\ f^{(r-1)}(x) &= f^{(r-1)}(-1) + \widehat{f}_{r,0} \cdot (x+1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{2k+1} [P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)], \end{aligned}$$

причем ряды в правых частях этих равенств сходятся равномерно по $x \in [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.4) и (2.5)

$$f(x) = \sum_{i=1}^l (f_i^-(x) + f_i^+(x)), \quad (5.3)$$

где $f_i^- \in S^r H_{a_i-}^\mu$, $f_i^+ \in S^r H_{a_i+}^\mu$ ($1 \leq i \leq l$). Поэтому предварительно рассмотрим случай $f \in S^r H_a^\mu$, где $-1 < a < 1$. Кроме того, в силу (2.3) мы можем ограничиться случаем $f \in S^r H_{a+}^\mu$. Считая это условие выполненным, рассмотрим функцию

$$f_h^{(r)}(x) = \begin{cases} f^{(r)}(x), & a+h \leq x \leq 1, \\ \frac{x-a}{h} f^{(r)}(a+h), & a < x < a+h, \\ 0, & -1 \leq x \leq a, \end{cases} \quad (5.4)$$

где $0 < h < 1$. Заметим, что $f_h^{(r)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f_h^{(r)}(x_1) - f_h^{(r)}(x_2)| \leq c_h |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1],$$

поэтому ее ряд Фурье–Лежандра сходится к ней равномерно на $[-1, 1]$, стало быть,

$$f_h^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_{h,r,k} P_k(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5.5)$$

где

$$\widehat{f}_{h,r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_a^1 f_h^{(r)}(t) P_k(t) dt. \quad (5.6)$$

Выразим $P_k(x)$ по формуле (3.4), тогда (5.5) можно переписать так ($t \in [-1, 1]$):

$$f_h^{(r)}(t) = \widehat{f}_{h,r,k} - \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_{h,r,k} \frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \{(1-t^2)P_{k-1}^{1,1}(t)\}. \quad (5.7)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} f_h^{(r-1)}(x) - f_h^{(r-1)}(-1) &= \int_{-1}^x f_h^{(r)}(t) dt \\ &= \widehat{f}_{h,r,0} \cdot (x+1) - \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{h,r,k}}{k} P_{k-1}^{1,1}(x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

С другой стороны, почленное интегрирование ряда (5.1) нам дает

$$f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(-1) \sim \widehat{f}_{r,0} \cdot (x+1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{2k} (1-x^2) P_{k-1}^{1,1}(x), \quad (5.9)$$

при этом в силу леммы 4.4 и весовой оценки (3.6) ряд в правой части (5.9) равномерно сходится. Покажем, что при $h \rightarrow 0$ правая часть равенства (5.7) сходится равномерно на отрезке $[-1, 1]$ к правой части соотношения (5.9). Из (5.2), (5.4) и (5.6) имеем

$$\widehat{f}_{r,k} - \widehat{f}_{h,r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_a^{a+h} \left[f^{(r)}(t) - \frac{t-a}{h} f^{(r)}(a+h) \right] P_k(t) dt. \quad (5.10)$$

Рассмотрим два случая: $k \leq 1/h$ и $k > 1/h$. Если $k \leq 1/h$, то в силу неравенства $|f^{(r)}(t)| \leq c(f)(t-a)^{\mu-1}$ ($a < t \leq 1$) и весовой оценки (3.6)

$$|\widehat{f}_{r,k} - \widehat{f}_{h,r,k}| \leq c(f, \mu, a) h^{\mu} (k+1)^{1/2}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq 1/h} \frac{1}{k} |\widehat{f}_{r,k} - \widehat{f}_{h,r,k}| \cdot |P_{k-1}^{1,1}(x)| \frac{1-x^2}{2} + |\widehat{f}_{r,0} - \widehat{f}_{h,r,0}| (1+x) \\ \leq c(f, \mu, a) h^{\mu} \ln \left(\frac{1}{h} + 1 \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Если же $k > 1/h$, то правую часть (5.10) представим в виде

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{r,k} - \widehat{f}_{h,r,k} &= \frac{2k+1}{2} \left(\int_a^{a+1/k} + \int_{a+1/k}^{a+h} \right) \left[f^{(r)}(t) - \frac{t-a}{h} f^{(r)}(a+h) \right] P_k(t) dt \\ &= B_1 + B_2 + B_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_a^{a+1/k} \left[f^{(r)}(t) - \frac{t-a}{h} f^{(r)}(a+h) \right] P_k(t) dt, \\ B_2 &= \frac{2k+1}{4k} \left[f^{(r)} \left(a + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{hk} f^{(r)}(a+h) \right] \left(1 - \left(a + \frac{1}{k} \right)^2 \right) P_{k-1}^{1,1} \left(a + \frac{1}{k} \right), \\ B_3 &= \frac{2k+1}{4k} \int_{a+1/k}^{a+h} \left[f^{(r+1)}(t) - \frac{1}{h} f^{(r)}(a+h) \right] (1-t^2) P_{k-1}^{1,1}(t) dt. \end{aligned}$$

При $k > 1/h$, используя весовую оценку (3.6), получаем ($f \in S^r H_{a+}^\mu$)

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq c(a, f, \mu) k^{1/2-\mu}, \quad |B_2| \leq c(a, f, \mu) k^{1/2-\mu}, \\ |B_3| &\leq \frac{c(a)}{\sqrt{k}} \int_{a+1/k}^{a+h} |f^{(r+1)}(t)| dt + \frac{c(a)|f^{(r)}(a+h)|}{\sqrt{k}} \int_{a+1/k}^{a+h} dt \\ &\leq \frac{c(a, f)}{\sqrt{k}} \int_{a+1/k}^{a+h} (t-a)^{\mu-2} dt + c(a, f) k^{1/2-\mu} \leq c(a, f, \mu) \lambda_k(\mu) k^{1/2-\mu}, \end{aligned}$$

стало быть,

$$|\widehat{f}_{r,k} - \widehat{f}_{h,r,k}| \leq c(a, f, \mu) \lambda_k(\mu) k^{1/2-\mu}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1/h} \frac{1}{k} |\widehat{f}_{r,k} - \widehat{f}_{h,r,k}| \cdot |P_{k-1}^{1,1}(x)| \frac{1-x^2}{2} &\leq c(a, f, \mu) \sum_{k \geq 1/h} \frac{\ln(k+1)}{k^{1+\mu}} \\ &\leq c(a, f, \mu) h^\mu \ln \frac{1}{h}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Сопоставляя (5.11) и (5.12), мы заключаем, что правая часть равенства (5.7) сходится равномерно на $[-1, 1]$ к правой части соотношения (5.9). С другой стороны, из (5.4) следует, что если $h \rightarrow 0$, то равномерно по $x \in [-1, 1]$

$$f_h^{(r-1)}(x) - f_h^{(r-1)}(-1) = \int_{-1}^x f_h^{(r)}(t) dt \rightarrow \int_{-1}^x f^{(r)}(t) dt = f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(-1),$$

поэтому

$$f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(-1) = \widehat{f}_{r,0} \cdot (x+1) - \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k} P_{k-1}^{1,1}(x). \quad (5.13)$$

С другой стороны, если мы воспользуемся формулой (4.2) при $m = 1$, то из (5.13) получим

$$f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(-1) = \widehat{f}_{r,0} \cdot (x+1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{2k+1} [P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)]. \quad (5.14)$$

Утверждение леммы 5.1 непосредственно вытекает из (5.13) и (5.14).

Пусть $r \geq 2$. Тогда мы можем рассмотреть формулу Тейлора

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!} (x+1) + \dots + \frac{f^{(r-2)}(-1)}{(r-2)!} (x+1)^{r-2} \\ &\quad + \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x f^{(r-1)}(t) (x-t)^{r-2} dt, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где в силу леммы 5.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x f^{(r-1)}(t)(x-t)^{r-2} dt &= \frac{f^{(r-1)}(-1)}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} dt \\ &+ \frac{\widehat{f}_{r,0}}{(r-2)!} \int_{-1}^x (1+t)(x-t)^{r-2} dt \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{2k} \int_{-1}^x \frac{1-t^2}{(r-2)!} P_{k-1}^{1,1}(x-t)^{r-2} dt. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Далее,

$$\int_{-1}^x (1+t)(x-t)^{r-2} dt = \frac{(1+x)^r}{(r-1)r}, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x (1-t^2) P_{k-1}^{1,1}(t)(x-t)^{r-2} dt \\ = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!} \int_{-1}^x \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \{(1-t^2)^k\} (x-t)^{r-2} dt = d_{k,r}(x). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если $k \geq r$, то в силу (3.4)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x (1-t^2) P_{k-1}^{1,1}(t)(x-t)^{r-2} dt \\ = \frac{(-1)^{r-1}}{2^{r-1}(k-1)^{[r-1]}} \int_{-1}^x \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \{(1-t^2)^r P_{k-r}^{r,r}(t)\} (x-t)^{r-2} dt \\ = \frac{(-1)^{r-1}(r-2)!}{2^{r-1}(k-1)^{[r-1]}} (1-x^2)^r P_{k-r}^{r,r}(x). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Сопоставляя (5.15)–(5.19), мы можем записать ($r \geq 2$):

$$f(x) = \mathcal{Q}_{r-1}(x) + \frac{\widehat{f}_{r,0}}{r!} (1+x)^r + \mathcal{D}_r(x) + \mathcal{F}_r(x), \quad (5.20)$$

где

$$\mathcal{Q}_{r-1}(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(-1)}{j!} (x+1)^j, \quad (5.21)$$

$$\mathcal{D}_r(x) = - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\widehat{f}_{r,k} d_{k,r}(x)}{2k(r-2)!}, \quad (5.22)$$

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r}{2^r} (1-x^2)^r \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x). \quad (5.23)$$

Если мы положим $\mathcal{D}_1(x) = 0$, то равенство (5.20) остается в силе и для $r = 1$. Это вытекает из леммы 5.1

Пусть $n \geq 2r$,

$$\mathcal{J}_{r,n}(x) = \frac{(-1)^r}{2^r} (1-x^2)^r \sum_{k=r}^{n-r} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (5.24)$$

$$\mathcal{J}_{r,n}(x) = \frac{(-1)^r}{2^r} (1-x^2)^r \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (5.25)$$

$$\mathcal{R}_{r,n}(x) = \mathcal{R}_{r,n}(f, x) = \frac{(-1)^r}{2^r} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} (1-x^2)^r P_{k-r}^{r,r}(x). \quad (5.26)$$

В силу леммы 4.1 мы можем записать

$$\mathcal{J}_{r,n}(x) = \varphi_{r,n}(x) + \psi_{r,n}(x), \quad (5.27)$$

где

$$\varphi_{r,n}(x) = (-1)^r \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+r-k}{2} \rfloor} (-1)^i \sigma_i^k P_{k-r+2i}(x), \quad (5.28)$$

$$\psi_{r,n}(x) = (-1)^r \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} \sum_{i=\lfloor \frac{n+r-k}{2} \rfloor + 1}^r (-1)^i \sigma_i^k P_{k-r+2i}(x), \quad (5.29)$$

$[a]$ — целая часть числа a . Из (5.23)–(5.29) мы имеем

$$\mathcal{F}_r(x) = \mathcal{U}_{r,n}(x) + \mathcal{V}_{r,n}(x), \quad (5.30)$$

где

$$\mathcal{U}_{r,n}(x) = \mathcal{J}_{r,n}(x) + \varphi_{r,n}(x), \quad (5.31)$$

$$\mathcal{V}_{r,n}(x) = \psi_{r,n}(x) + \mathcal{R}_{r,n}(x). \quad (5.32)$$

Поскольку в силу (5.26) и леммы 4.1

$$\mathcal{R}_{r,n}(x) = (-1)^r \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} \sum_{i=0}^r (-1)^i \sigma_i^k P_{k-r+2i}(x),$$

то $\mathcal{V}_{r,n}(x)$ имеет вид

$$\mathcal{V}_{r,n}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k P_k(x), \quad (5.33)$$

а $\mathcal{U}_{r,n}(x)$ — алгебраический полином степени n . Поэтому, сопоставляя (5.20)–(5.23) с (5.30)–(5.33), мы имеем

$$f(x) = S_n(f, x) + \mathcal{V}_{r,n}(x), \quad (5.34)$$

где

$$S_n(f, x) = \mathcal{Q}_{r-1}(x) + \frac{\widehat{f}_{r,0}}{r!}(1+x)^r + \mathcal{D}_r(x) + \mathcal{J}_{r,n}(x) + \varphi_{r,n}(x) \quad (5.35)$$

представляет собой частную сумму порядка n ряда Фурье–Лежандра функции f .

Вместе с $S_n(f, x)$ мы также рассмотрим сумму

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = \mathcal{Q}_{r-1}(x) + \frac{\widehat{f}_{r,0}}{r!}(1+x)^r + \mathcal{D}_r(x) + \mathcal{J}_{r,n}(x) + \mathcal{J}_{r,n}(x). \quad (5.36)$$

Сопоставляя (5.25), (5.27), (5.29), (5.35) с (5.36), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) &= S_n(f, x) + \psi_{r,n}(x) \\ &= S_n(f, x) + (-1)^r \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{\widehat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} \sum_{i=\lfloor \frac{n+r-k}{2} \rfloor + 1}^r (-1)^i \sigma_i^k P_{k-r+2i}(x). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Отсюда следует, что $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ – полином порядка $n + 2r$.

Будем приближать функцию $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)$ суммами $S_n(f, x)$ и $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)$. Тогда при $n \geq r$, $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \Delta)}{n^{r+\mu}} \lambda_n(\mu) \left[\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} + n(1-x^2)^{r/2-1/4} \right], \quad (5.38)$$

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \Delta)}{n^{r-1+\mu}} \lambda_n(\mu) (1-x^2)^{r/2-1/4}. \quad (5.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что оценки (5.38) и (5.39) справедливы для функции $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1) \cap S^r H_{a+}^{\mu}$, где $-1 < a < 1$, $\Delta = \{a\}$. Для такой функции f в силу (5.34) и (5.32) имеем

$$f(x) - S_n(f, x) = \psi_{r,n}(x) + \mathcal{R}_{r,n}(x), \quad (5.40)$$

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = \mathcal{R}_{r,n}(x). \quad (5.41)$$

Оценим $\mathcal{R}_{r,n}(x)$. В силу (5.26) и леммы 4.4 имеем

$$|\mathcal{R}_{r,n}(x)| \leq c(r, \mu, a) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \lambda_k(\mu) \frac{(k+1)^{1/2-\mu}}{k^r} (1-x^2)^r |P_{k-r}^{r,r}(x)|.$$

Теперь воспользуемся весовой оценкой (3.6). Это дает

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_{r,n}(x)| &\leq c(r, \mu, a) (1-x^2)^{r/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \lambda_k(\mu) k^{-r-\mu} \\ &\leq c(r, \mu, a) (1-x^2)^{r/2-1/4} n^{-r-\mu+1}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Далее, из оценки (3.6), леммы 4.4 и равенства (5.29) имеем

$$|\psi_n(x)| \leq \frac{c(r, \mu, a)}{n^{r+\mu}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2}. \quad (5.43)$$

Сопоставляя (5.41)–(5.43), убеждаемся в справедливости теоремы 5.1.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu < 1$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$. Тогда при $n \geq r$ имеет место оценка

$$\sup_{f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)} \|f - S_n(f)\| \leq c(r, \mu, \Delta) \sup_{f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)} E_n(f).$$

В самом деле, при $0 < \mu < 1$ функция

$$f_{r,\mu}(x) = \frac{1}{r!} (x - a_1)^{r-1} |x - a_1|^{\mu},$$

очевидно, принадлежит классу $S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)$, стало быть,

$$\sup_{f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)} E_n(f) \geq E_n(f_{r,\mu}).$$

С другой стороны, хорошо известно [10; п. 7.2.2], что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{r-1+\mu} E_n(f_{r,\mu}) > 0.$$

Сопоставляя эти оценки с (5.38), убеждаемся в справедливости следствия 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $\varepsilon > 0$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $\Delta_{\varepsilon} = \bigcup_{j=1}^l (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$, $\hat{\Delta}_{\varepsilon} = [-1, 1] \setminus \Delta_{\varepsilon}$, $x \in \hat{\Delta}_{\varepsilon}$, $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1)$. Тогда при $n \geq r$ имеют место следующие оценки:

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \Delta)}{n^{r+\mu}} \lambda_n(\mu) \left[\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} + \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \right], \quad (5.44)$$

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \Delta)}{n^{r+\mu}} \lambda_n(\mu) \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4}. \quad (5.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\mathcal{R}_{r,n}(x)$ при $x \in \hat{\Delta}_{\varepsilon}$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\Delta = \{a\}$, $-1 < a < 1$, $a + \varepsilon \leq x \leq 1$ и $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(1) \cap S^r H_{a+}^{\mu}$. Равенство (5.26) перепишем так:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{r,n}(x) &= \frac{(-1)^r}{2^{r+1}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^r}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) (2k+1) \int_a^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt \\ &= Z_1 + Z_2, \end{aligned} \quad (5.46)$$

где

$$Z_1 = \frac{(-1)^r}{2^{r+1}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^r}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) (2k+1) \int_a^{a+1/n} f^{(r)}(t) P_k(t) dt, \quad (5.47)$$

$$Z_2 = \frac{(-1)^r}{2^{r+1}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^r}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) (2k+1) \int_{a+1/n}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt. \quad (5.48)$$

Чтобы оценить Z_1 , применим к правой части равенства (5.47) преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(-1)^r}{2^{r+1}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{[r]}} - \frac{1}{(k+1)^{[r]}} \right) \\ &\quad \times \int_a^{a+1/n} f^{(r)}(t) \sum_{j=n+r+1}^k (2k+1) P_k(t) P_{k-r}^{r,r}(x) (1-x^2)^r dt \\ &= \frac{(-1)^r}{2^{r+1}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{r}{(k+1)^{[r+1]}} \int_a^{a+1/n} f^{(r)}(t) \mathcal{K}_{n,k}^{r,0}(x, t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 4.3 (оценка (4.16)), получим

$$\begin{aligned} |Z_1| &\leq c(r, a) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} (1-x^2)^{r/2-1/4} \int_a^{a+1/n} |f^{(r)}(t)| dt \\ &\leq c(r, \mu, a) \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} \int_a^{a+1/n} (t-a)^{\mu-1} dt \\ &\leq c(r, \mu, a) \frac{n^{-\mu}}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} \\ &\leq c(r, \mu, a) \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \frac{1}{n^{r+\mu}}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Оценим $|Z_2|$. Из (5.48), применяя метод интегрирования по частям и формулу (3.4), имеем

$$Z_2 = Z_{21} + Z_{22}, \quad (5.50)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{(-1)^r}{2^{r+2}} f^{(r)} \left(a + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=n+r+1}^{\infty} (2k+1) \frac{(1-x^2)^r (1-(a+1/n)^2)}{k k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) P_{k-1}^{1,1} \left(a + \frac{1}{n} \right), \\ Z_{22} &= \frac{(-1)^r}{2^{r+2}} \int_{a+1/n}^1 f^{(r+1)}(t) \\ &\quad \times \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k k^{[r]}} (1-t^2) (1-x^2)^r P_{k-r}^{r,r}(x) P_{k-1}^{1,1}(t) dt. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Абеля, перепишем эти равенства в следующем виде:

$$Z_{21} = \frac{(-1)^r}{2^{r+2}} f^{(r)} \left(a + \frac{1}{n} \right) \times \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k k^{[r]}} - \frac{1}{(k+1)(k+1)^{[r]}} \right) \mathcal{K}_{n,k}^{r,1} \left(x, a + \frac{1}{n} \right), \quad (5.51)$$

$$Z_{22} = \frac{(-1)^r}{2^{r+2}} \int_{a+1/n}^1 f^{(r+1)}(t) \times \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k k^{[r]}} - \frac{1}{(k+1)(k+1)^{[r]}} \right) \mathcal{K}_{n,k}^{r,1}(x, t) dt. \quad (5.52)$$

Поскольку $|f^{(r)}(a+1/n)| \leq c(r, \mu) n^{1-\mu}$, то из леммы 4.3 (оценка (4.17)) и равенства (5.51) выводим

$$|Z_{21}| \leq \frac{c(r, \mu, a)}{n^{r+\mu}} \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4}. \quad (5.53)$$

Что касается Z_{22} , то из (5.52) имеем

$$|Z_{22}| \leq c(r) \int_{a+1/n}^1 |f^{(r+1)}(t)| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} |\mathcal{K}_{n,k}^{r,1}(x, t)| dt. \quad (5.54)$$

Последний интеграл разобьем по схеме

$$\int_{a+1/n}^1 = \int_{a+1/n}^{a+\varepsilon/2} + \int_{a+\varepsilon/2}^1 = Z'_{22} + Z''_{22}. \quad (5.55)$$

Тогда в силу леммы 4.3 (оценки (4.17) и (4.18))

$$Z'_{22} \leq c(r, a) \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} \int_{a+1/n}^{a+\varepsilon/2} (t-a)^{\mu-2} dt \leq c(r, \mu, a) \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+\mu}}, \quad (5.56)$$

$$Z''_{22} \leq c(r, \mu) (1-x^2)^{r/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{k^{r+2}} \int_{a+\varepsilon/2}^1 (t-a)^{\mu-2} dt \leq c(r, \mu) \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{k^{r+2}} \leq c(r, \mu) \frac{1}{\varepsilon} (1-x^2)^{r/2-1/4} \frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+\mu}}. \quad (5.57)$$

Из (5.50), (5.53)–(5.57) имеем

$$|Z_2| \leq \frac{c(r, \mu, a)}{n^{r+\mu}} \frac{1}{\varepsilon} \lambda_n(\mu) (1-x^2)^{r/2-1/4}, \quad (5.58)$$

а из (5.46), (5.49) и (5.58), в свою очередь, получаем

$$|\mathcal{R}_{r,n}(x)| \leq \frac{c(r, \mu, a)}{n^{r+\mu}} \frac{1}{\varepsilon} \lambda_n(\mu) (1-x^2)^{r/2-1/4}. \quad (5.59)$$

Оценки (5.44) и (5.45) непосредственно вытекают из (5.40), (5.41), (5.43) и (5.59). Теорема 5.2 доказана.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $0 < \mu \leq 1$, $\varepsilon > 0$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $\Delta_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^l (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$, $\widehat{\Delta}_\varepsilon = [-1, 1] \setminus \Delta_\varepsilon$, $f \in S^r H_\Delta^\mu(1)$. Тогда при $n \geq r$ имеют место следующие оценки:

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \Delta)}{n^{r-\nu-1+\mu}} \lambda_n(\mu) (1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \Delta)}{n^{r-\nu+\mu}} \frac{1}{\varepsilon} \lambda_n(\mu) (1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}} \quad (x \in \widehat{\Delta}_\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.41), (5.26) и (3.4) следует, что

$$f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x) = \mathcal{R}_{r-\nu, n+\nu}(f^{(\nu)}, x),$$

поэтому теорема 5.3 вытекает из оценок (5.42) и (5.59), примененных к функции $f^{(\nu)}(x)$ (вместо $f(x)$).

Список литературы

1. Gronwall T. Über die Laplacesche Reihe // Math. Ann. 1913. V. 74. P. 213–270.
2. Rau H. Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen // J. für Math. 1929. V. 161. P. 237–254.
3. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
4. Агаханов С. А., Натансон Г. И. Функция Лебега сумм Фурье–Якоби // Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон. 1968. Т. 1. №1. С. 11–23.
5. Агаханов С. А., Натансон Г. И. Приближение функций суммами Фурье–Якоби // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. №1. С. 9–10.
6. Бадков В. М. Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. №6. С. 1263–1283.
7. Бадков В. М. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным многочленам // УМН. 1978. Т. 33. №4 (202). С. 51–106.
8. Шарипудинов И. И. О наилучшем приближении и суммах Фурье–Якоби // Матем. заметки. 1983. Т. 34. №5. С. 651–661.
9. Gasper G. Positivity and special functions // Theory Appl. Spec. Funct., Proc. Adv. Semin., Madison, 1975. P. 375–433.
10. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

г. Махачкала, Дагестан

Поступила в редакцию
10.06.1998 и 17.05.1999