Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, О критерии топологической сопряженности квазисимметрической группы группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 6, 31–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:15:32

УДК 515.168.3

Л. А. Бекларян

**О критерии топологической сопряженности
квазисимметрической группы
группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$**

В работе дается новый критерий квазисимметрической сопряженности произвольной группы квазисимметрических гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, некоторой группе аффинных преобразований.

В критерии, предложенном в работе А. Hinkkanen, предполагается равномерная ограниченность констант, входящих в определение квазисимметрического преобразования, для всех элементов группы. В новом критерии требуется равномерная ограниченность констант только лишь для каждой циклической подгруппы.

Библиография: 7 названий.

Введение

Отображение $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *квазисимметрическим*, если оно удовлетворяет условию

$$M_q^{-1} \leq \frac{q(x+t) - q(x)}{q(x) - q(x-t)} \leq M_q. \quad (1)$$

Квазисимметрические отображения являются следами квазиконформных автоморфизмов верхней полуплоскости, нормированных условием $\infty \rightarrow \infty$ (см. [1]).

Группу G , элементы которой – квазисимметрические отображения, будем называть *квазисимметрической*.

В работе [2] для квазисимметрической группы преобразований прямой получен следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – группа гомеоморфизмов прямой. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ Q \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа Q была квазисимметрической и для любого $q \in Q$ выполнялось равенство $M_q = M$, где M – некоторая фиксированная константа.

В представленной работе дается новый, более ослабленный критерий квазисимметрической сопряженности произвольной группы квазисимметрических гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, некоторой группе аффинных преобразований. Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 97-01-00625, 96-00974) и фонда INTAS (грант № 94-3420).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть Q – группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ Q \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа Q была квазисимметрической и для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ выполнялось равенство $M_{q^n} = M_q$.

Здесь же будет дан ответ на следующий вопрос: как устроено множество квазисимметрических гомеоморфизмов η из основной теоремы (как устроено множество аффинных групп преобразований, которым квазисимметрически сопряжена исходная группа)? Принятый подход основан на том, что для группы Q квазисимметрических гомеоморфизмов со свойством $M_{q^n} = M_q$ для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ существует коммутативная нормальная подгруппа G с равномерной константой $M = M_g$ для любых $g \in G$, имеющая групповую и топологическую сложность исходной группы Q (если Q не циклическая, то и G не циклическая; минимальные множества Q и подгруппы G совпадают).

§ 1. Некоторые предварительные результаты. Теорема Данжуа

Приведем важное для дальнейшего изложения понятие полусопряженности, определенное в [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы группы Q , $*Q$ гомеоморфизмов $\mathbb{R}$. Группа Q называется *полусопряженной* группе $*Q$, если существуют монотонно возрастающее отображение $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с образом, состоящим из более чем одной точки, и эпиморфизм $\eta^\sharp: Q \rightarrow *Q$ такие, что для любого $q \in Q$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{*q=\eta^\sharp(q)} & \mathbb{R} \\ \eta \uparrow & & \uparrow \eta \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\eta^\sharp(q)\eta = \eta q$.

Если в определении полусопряженности отображение η непрерывно, то говорят о топологической полусопряженности. Если отображение η является гомеоморфизмом и, как следствие, эпиморфизм $\eta^\sharp$ является изоморфизмом, то группа Q называется *топологически сопряженной* группе $*Q$, или просто *сопряженной*.

Если для отображения $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (без предположений о непрерывности) существует константа $M_q \geq 1$, для которой справедливо условие (1), то такое отображение строго монотонное, непрерывное и его образ совпадает со всем $\mathbb{R}$, т.е. $q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ и q является гомеоморфизмом. Если в определении полусопряженности отображение η является квазисимметрическим или аффинным, то мы будем говорить о *квазисимметрической* или соответственно *аффинной сопряженности*.

В теореме 1 и основной теореме в терминах условий на константы M_q сформулированы необходимые и достаточные условия квазисимметрической сопряженности группы Q гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, группе аффинных преобразований.

Борелевская σ -конечная мера μ называется *проективно-инвариантной* (1-проективно-инвариантной) относительно группы Q , если для любого $q \in Q$ существует константа $c(q) > 0$ такая, что для любого измеримого множества B справедливо равенство $\mu(q^{-1}(B)) = c(q)\mu(B)$. Частным случаем проективно-инвариантной меры является инвариантная мера (0-проективно-инвариантная мера), когда для любого $q \in Q$ имеет место равенство $c(q) = 1$.

В работах [3], [4] показано, что полусопряженность группы гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, группе аффинных преобразований эквивалентна существованию проективно-инвариантной (1-проективно-инвариантной) меры. Носитель такой меры сосредоточен на объединении минимальных множеств (минимальным множеством называется замкнутое множество, инвариантное относительно действия группы преобразований, не содержащее собственных замкнутых инвариантных подмножеств). Сами минимальные множества – либо дискретные множества, либо изоморфны канторову множеству, либо совпадают со всей прямой. Если минимальное множество не дискретное, то оно единственное, сама группа топологически полусопряжена группе аффинных преобразований, а проективно-инвариантная мера непрерывная. Для групп гомеоморфизмов прямой с проективно-инвариантной мерой и не дискретным минимальным множеством условие топологической сопряженности такой группы группе аффинных преобразований эквивалентно тому, что минимальное множество совпадает со всей прямой.

Для конечно порожденной коммутативной группы гомеоморфизмов прямой (и даже для группы, не содержащей свободной подполугруппы с двумя образующими) существует инвариантная мера, являющаяся частным случаем проективно-инвариантной меры [4]. Для гомеоморфизма окружности (ему соответствует эквивалентный объект – коммутативная группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, с двумя образующими, где одной из образующих является накрытие исходного гомеоморфизма, а вторая образующая – сдвиг на единицу, т.е. $q(t) = t + 1$) первый результат об отсутствии минимального множества, изоморфного канторову множеству, был получен Данжуа [5] и известен под названием теоремы Данжуа. Ниже для квазисимметрической группы будет доказан аналог теоремы Данжуа.

Группу всех гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, обозначим через K^+ , а подгруппу всех квазисимметрических гомеоморфизмов через K_s^+ . Если $q \in K^+$, то положим $\text{Fix } q = \{t : t \in \mathbb{R}, q(t) = t\}$. Для группы $Q \subseteq K^+$ определим канонические подмножества: $Q^N = \{q : q \in Q; \exists t \in \mathbb{R}, q(t) = t\}$, $H = \{q : q \in Q; \sup\{t : t \in \text{Fix } q\} = +\infty, \inf\{t : t \in \text{Fix } q\} = -\infty\}$, $C = H \cup [Q \setminus Q^N]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если группа Q квазисимметрически сопряжена некоторой группе $*Q$ аффинных преобразований, то группа Q является квазисимметрической, т.е. $Q \subseteq K_s^+$, и для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ справедливо условие $M_{q^n} = M_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для любого элемента $*q$ группы $*Q$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $M_{*q^n} = M_{*q} = 1$. Для любого элемента $q \in Q$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ в силу квазисимметрической сопряженности справедливо равенство

$q^n = \eta^{-1} * q^n \eta$, где $*q = \eta^\sharp(q)$. Тогда утверждение предложения будет следовать из квазисимметричности отображения η .

ЛЕММА 1. Пусть $Q \subseteq K_s^+$ и для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ справедливо условие $M_{q^n} = M_q$. Тогда для всякого элемента $q \in Q^N \setminus e$ множество неподвижных точек $\text{Fix } q$ состоит из одной единственной точки t_q . Более того, для любых $\tau \in]-\infty, t_q[$, $T \in]t_q, +\infty[$ выполняется равенство $\text{sign}[q(\tau) - \tau] = -\text{sign}[q(T) - T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in Q^N \setminus e$ и непустое множество неподвижных точек $\text{Fix } q$ состоит из более чем одной точки. Тогда существуют $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\{x, (x+t)\} \subseteq \text{Fix } q$ и для любого $\tau \in]x, x+t[$ $q(\tau) \neq \tau$. Для определенности будем полагать, что для всех $\tau \in]x, x+t[$ выполняется условие $q(\tau) > \tau$. Тогда для $\bar{x} = x + \frac{t}{2}$, $\bar{t} = \frac{t}{2}$ условие (1) при больших $n \in \mathbb{Z}_+$ нарушается. Следовательно, для любого $q \in Q^N \setminus e$ множество $\text{Fix } q$ состоит из одной единственной точки t_q . В частности, отсюда следует, что $H = \langle e \rangle$.

Пусть для определенности при $T \in]t_q, +\infty[$ $q(T) > T$. Покажем, что для $\tau \in]-\infty, t_q[$ выполняется условие $q(\tau) < \tau$. Действительно, если бы выполнялось условие $q(\tau) > \tau$, то для $x = t_q$ и любого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ условие (1) при больших $n \in \mathbb{Z}_+$ нарушалось бы. Отсюда следует последнее утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях леммы 1 имеет место условие $H = \langle e \rangle$.

ЛЕММА 2. Пусть Q является квазисимметрической группой, т.е. $Q \subseteq K_s^+$, и для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $M_{q^n} = M_q$. Тогда группа Q топологически полусопряжена некоторой группе $*Q$ аффинных преобразований. Более того, эпиморфизм $\eta^\sharp$ из определения полусопряженности является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа Q тривиальная, т.е. $Q = \langle e \rangle$, то доказательство очевидно. Пусть $Q \neq \langle e \rangle$. Выделим два случая.

1. Случай первый – группа Q коммутативная. Тогда либо $Q^N = \langle e \rangle$, либо $Q^N = Q$.

(а) Пусть $Q^N = \langle e \rangle$. Тогда $C = Q$. Если группа Q циклическая, то через $\bar{q}$ обозначим ее образующую. Не нарушая общности, можем полагать, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие $\bar{q}(t) > t$. Фиксируем какую-либо точку $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Определим интервалы $\Delta_k = [\bar{q}^k(\bar{t}), \bar{q}^{(k+1)}(\bar{t})]$, $k \in \mathbb{Z}$, линейное растяжение $\alpha: \Delta_0 \rightarrow [0, 1]$ и отображение $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где для любых $k \in \mathbb{Z}$, $t \in \Delta_k$ $\eta(t) = \alpha(\bar{q}^{-k}(t)) + k$. Несложно заметить, что η – гомеоморфизм, а отображение $*\bar{q} = \eta \circ \bar{q} \circ \eta^{-1}$ является сдвигом на единицу. Поэтому циклическая группа Q сопряжена циклической группе $*Q = \langle *\bar{q} \rangle$.

Предположим, что группа Q не циклическая. В силу теорем 3.5–3.8 работы [3] для такой группы существует единственная инвариантная мера μ (такая мера называется непрерывной), а группа Q топологически полусопряжена некоторой группе сдвигов. Более того, из теоремы 3.6 работы [3] следует, что гомоморфизм $\eta^\sharp$ из определения полусопряженности является изоморфизмом, откуда и следует доказательство леммы.

(б) Пусть $Q^N = Q$. В силу леммы 1 и коммутативности группы Q все элементы

группы Q имеют одну единственную общую неподвижную точку, которую обозначим через $\bar{t}$.

Предположим, что группа Q циклическая с образующей $\bar{q}$. Для определенности будем полагать, что для всех $t \in]-\infty, \bar{t}[$ выполняется условие $\bar{q}(t) < t$, а для всех $t \in]\bar{t}, +\infty[$ справедливо условие $\bar{q}(t) > t$. Выберем точки $t_l \in]-\infty, \bar{t}[$, $t_r \in]\bar{t}, +\infty[$. Орбиты $Q(t_l)$, $Q(t_r)$ разбивают полупрямые $]-\infty, \bar{t}[$, $]\bar{t}, +\infty[$ на счетное число интервалов. Рассмотрим интервалы $[\bar{q}(t_l), t_l]$, $[t_r, \bar{q}(t_r)]$. Пусть $\eta_{0l}: [\bar{q}(t_l), t_l] \rightarrow [-1, \frac{1}{2}]$, $\eta_{0r}: [t_r, \bar{q}(t_r)] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ — произвольные гомеоморфизмы. Построим гомеоморфизмы $\eta_l:]-\infty, \bar{t}[\rightarrow]-\infty, 0[$, $\eta_r:]\bar{t}, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \text{для любых } n \in \mathbb{Z}, t \in [\bar{q}^{n+1}(t_l), \bar{q}^n(t_l)] \quad \eta_l(t) &= 2^n \eta_{0l}(\bar{q}^{-n}(t)); \\ \text{для любых } n \in \mathbb{Z}, t \in [\bar{q}^n(t_r), \bar{q}^{n+1}(t_r)] \quad \eta_r(t) &= 2^n \eta_{0r}(\bar{q}^{-n}(t)). \end{aligned}$$

Теперь мы можем определить гомеоморфизм $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу:

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta_l(t), & \text{если } t \in]-\infty, \bar{t}[\\ 0, & \text{если } t = \bar{t}, \\ \eta_r(t), & \text{если } t \in]\bar{t}, +\infty[. \end{cases}$$

Построим циклическую аффинную группу $*Q = \langle *\bar{q} \rangle$, где образующий элемент $*\bar{q}$ определим следующим образом: для любого $t \in \mathbb{R}$ $*\bar{q}(t) = \eta(\bar{q}(\eta^{-1}(t)))$. Из построений следует, что группа Q топологически сопряжена аффинной группе $*Q$, что и завершает доказательство.

Предположим, что группа Q не циклическая. Для любого элемента $q \in Q$ через q_l , q_r будем обозначать его ограничение на полупрямые $]-\infty, \bar{t}[$, $]\bar{t}, +\infty[$ соответственно. Совокупность таких ограничений образуют группы Q_l , Q_r соответственно. Заметим, что группы Q_l , Q_r не циклические и изоморфны, а изоморфизм $\theta: Q_l \rightarrow Q_r$ задается в следующем виде: для любого $q_l \in Q_l$ $\theta(q_l) = q_r$.

Рассмотрим полупрямую $]\bar{t}, +\infty[$ и действующую на ней группу Q_r . Гомеоморфизм $\nu_r:]\bar{t}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, где $\nu_r = \ln(t - \bar{t})$, индуцирует группу $\tilde{Q}_r$ гомеоморфизмов прямой, изоморфной Q_r ($\tilde{Q}_r = \{\tilde{q}_r : \exists q_r \in Q_r, \tilde{q}_r = \nu_r \circ q_r \circ \nu_r^{-1}\}$). Через $\nu_r^\sharp: Q_r \rightarrow \tilde{Q}_r$ обозначим отмеченный изоморфизм. Заметим, что для группы $\tilde{Q}_r$ справедливо условие $\tilde{Q}_r^N = \langle e \rangle$, и мы возвращаемся к пункту (а). Тогда в силу второго абзаца пункта (а) для такой группы существует единственная инвариантная мера $\tilde{\mu}_r$ (такая мера оказывается непрерывной), а группа $\tilde{Q}_r$ топологически полусопряжена некоторой группе сдвигов $*\tilde{Q}_r$. Для групп $\tilde{Q}_r$, $*\tilde{Q}_r$ соответствующие отображения из определения полусопряженности будем обозначать следующим образом: $\tilde{\eta}_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\eta}_r^\sharp: \tilde{Q}_r \rightarrow *\tilde{Q}_r$. Обратное отображение $\nu_r^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]\bar{t}, +\infty[$ индуцирует изоморфизм $(\nu_r^{-1})^\sharp: *\tilde{Q}_r \rightarrow *Q_r$ группы сдвигов $*\tilde{Q}_r$ и аффинной группы $*Q_r = \{*\bar{q}_r : \exists *\tilde{q}_r \in *\tilde{Q}_r, *\bar{q}_r = \nu_r^{-1} \circ *\tilde{q}_r \circ \nu_r\}$. Определим отображение $\eta_r:]\bar{t}, +\infty[\rightarrow]\bar{t}, +\infty[$ и изоморфизм $\eta_r^\sharp: Q_r \rightarrow *Q_r$ по следующему правилу: $\eta_r = \nu_r^{-1} \circ \tilde{\eta}_r \circ \nu_r$, $\eta_r^\sharp = (\nu_r^{-1})^\sharp \circ \tilde{\eta}_r^\sharp \circ \nu_r^\sharp$. Для группы Q_l , буквально повторяя все приведенные рассуждения (с естественной заменой отображения ν_r на $\nu_l = -\ln(\bar{t} - t)$), мы можем построить отображение $\eta_l:]-\infty, \bar{t}[\rightarrow]-\infty, \bar{t}[$ и изоморфизм $\eta_l^\sharp: Q_l \rightarrow *Q_l$ группы Q_l и аффинной группы $*Q_l$ по правилу: $\eta_l = \nu_l^{-1} \circ \tilde{\eta}_l \circ \nu_l$, $\eta_l^\sharp = (\nu_l^{-1})^\sharp \circ \tilde{\eta}_l^\sharp \circ \nu_l^\sharp$.

Определим отображение $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta_l(t), & \text{если } t \in]-\infty, \bar{t}[, \\ \bar{t}, & \text{если } t = \bar{t}, \\ \eta_r(t), & \text{если } t \in]\bar{t}, +\infty[. \end{cases}$$

Через ${}^*\hat{Q}$ обозначим такую максимальную группу аффинных преобразований с единственной неподвижной точкой $\bar{t}$ для всех элементов ${}^*\hat{Q} \setminus e$, что ограничения ее элементов на полупрямые $]-\infty, \bar{t}[$, $]\bar{t}, +\infty[$ обозначаемые через ${}^*\hat{Q}_l$, ${}^*\hat{Q}_r$, совпадают с действиями групп *Q_l , *Q_r соответственно. В группе ${}^*\hat{Q}$ определим подмножество ${}^*Q = \{ {}^*q : {}^*q \in {}^*\hat{Q}, \exists q \in Q, {}^*q_l = \eta_l^\sharp(q_l), {}^*q_r = \eta_r^\sharp(q_r) \}$. Так как Q — группа, то и подмножество *Q будет группой. В таком случае можно корректно определить изоморфизм $\eta^\sharp: Q \rightarrow {}^*Q$, где для любого $q \in Q$ $\eta^\sharp(q) = {}^*q$, таким образом, что ${}^*q_l = \eta_l^\sharp(q_l)$, ${}^*q_r = \eta_r^\sharp(q_r)$.

Если $G = \{t + \alpha_i\}_{i \in A}$, где A — некоторое множество индексов, является группой сдвигов на прямой, то через βG будем обозначать группу сдвигов $\{t + \beta \alpha_i\}_{i \in A}$. Несложно заметить следующий факт. Если группы сдвигов $G = \{t + \alpha_i\}_{i \in A}$ и $\tilde{G} = \{t + \tilde{\alpha}_j\}_{j \in \tilde{A}}$ изоморфны с изоморфизмом $p: G \rightarrow \tilde{G}$, то существует число $\beta > 0$ такое, что для любого $i \in A$ $(t + \beta \alpha_i) \equiv p(t + \alpha_i)$, т.е. группа βG совпадает с группой $\tilde{G}$.

При конструировании отображения $\tilde{\eta}_l$ ($\tilde{\eta}_r$) его можно выбирать с точностью до умножения на положительную константу β . При этом для отображения $\beta \tilde{\eta}_l$ ($\beta \tilde{\eta}_r$) вместо аффинной группы *Q_l (*Q_r) следует рассматривать группу $\beta {}^*Q_l$ ($\beta {}^*Q_r$). Так как группы *Q_l , *Q_r изоморфны с изоморфизмом $p: {}^*Q_l \rightarrow {}^*Q_r$, где $p = \tilde{\eta}_r^\sharp \circ \nu_r^\sharp \circ \theta \circ (\nu_l^\sharp)^{-1} \circ (\tilde{\eta}_l^\sharp)^{-1}$, то, оставляя неизменным отображение $\tilde{\eta}_r$ и заменяя отображение $\tilde{\eta}_l$ на $\beta \tilde{\eta}_l$, с помощью подбора константы $\beta > 0$ мы можем добиться совпадения групп $\beta {}^*Q_l$ и *Q_r . Поэтому, не нарушая общности, мы можем с самого начала считать, что группы сдвигов *Q_l и *Q_r совпадают, а изоморфизм $p: {}^*Q_l \rightarrow {}^*Q_r$ является тождественным. В таком случае группа *Q будет группой аффинных преобразований прямой. Более того, группа Q будет топологически полусопряжена группе *Q с отображением η и изоморфизмом $\eta^\sharp$, определенными выше.

2. Случай второй — группа Q не коммутативная. Так как $H = \langle e \rangle$ является подгруппой, факторгруппа Q/H не коммутативная и для любого $q \in Q^N \setminus e$ множество неподвижных точек $\text{Fix } q$ состоит из одной единственной точки, то для группы Q выполняются все условия теоремы 1 работы [6], откуда и следует существование проективно-инвариантной (1-проективно-инвариантной) меры μ . В таком случае по теореме 7.1 работы [4] следует, что группа Q полусопряжена некоторой группе *Q аффинных преобразований $\mathbb{R}$. Отображение η из определения полусопряженности является нетривиальным монотонно возрастающим отображением, задаваемым в виде

$$\eta(t) = \begin{cases} \mu([\bar{t}, t]), & t \geq \bar{t}, \\ -\mu([t, \bar{t}]), & t < \bar{t}, \end{cases} \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

а $\eta^\sharp$ — эпиморфизм. Из следствия 7.2 работы [4] следует, что $H = \ker \eta^\sharp$. Так как $H = \langle e \rangle$, то эпиморфизм $\eta^\sharp$ является изоморфизмом. Из некоммутативности группы Q в силу теоремы 7.4 работы [4] следует, что проективно-инвариантная

мера является непрерывной, откуда в силу формулы (2) и следует непрерывность отображения η .

ЛЕММА 3. Пусть Q является квазисимметрической группой, т.е. $Q \subseteq K_s^+$, для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $M_{q^n} = M_q$ и $Q^N = \langle e \rangle$ (последнее условие влечет коммутативность группы Q). Тогда существуют подгруппа G , не циклическая одновременно с исходной группой Q , и константа M такие, что для любых $g \in G$ справедливо условие $M_g = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа Q циклическая, то доказательство очевидно.

Пусть Q — не циклическая группа. В работе [3] показано, что для такой группы минимальное множество не пусто, не дискретно и единственно. Более того, существует подгруппа G , минимальное множество $E(G)$ которой совпадает с минимальным множеством $E(Q)$ исходной группы Q , а ее структура имеет один из следующих видов:

- (i) $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ — группа с двумя образующими;
- (ii) $G = \langle g_1, g_2, \dots \rangle$ — группа со счетным числом образующих таких, что для любых $i = 2, 3, \dots$ $g_{i-1} = g_i^{n_i}$, где n_i — натуральное число.

Для подгруппы G существование равномерной константы M следует из коммутативности G , свойства образующих и условия $M_{g^n} = M_g$, справедливого для любых $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА ДАНЖУА. Пусть Q является квазисимметрической группой, т.е. $Q \subseteq K_s^+$, и для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $M_{q^n} = M_q$. Тогда группа Q топологически сопряжена группе аффинных преобразований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа Q тривиальная, т.е. $Q = \langle e \rangle$, то доказательство очевидно. Пусть $Q \neq \langle e \rangle$. Выделим два случая.

1. Случай первый — группа Q коммутативная. Тогда либо $Q^N = \langle e \rangle$, либо $Q^N = Q$.

(а) Пусть $Q^N = \langle e \rangle$. Тогда $C = Q$. Если группа циклическая, то доказательство следует из первого абзаца пункта (а) доказательства леммы 2.

Предположим, что группа Q не циклическая. В пункте (а) доказательства леммы 2 отмечалось, что для такой группы существует единственная непрерывная инвариантная мера μ , а группа Q топологически полусопряжена некоторой группе $*Q$ сдвигов. Из нециклическости группы Q следует, что минимальное множество существует и не дискретное [3], [4]. В силу теоремы 9.1 работы [4] такое минимальное множество единственное и либо является совершенным нигде не плотным подмножеством прямой, либо совпадает со всей прямой. Более того, носитель инвариантной меры μ совпадает с минимальным множеством, а отображение η из определения полусопряженности задается формулой (2).

Если минимальное множество (носитель меры μ) совпадает со всей прямой, то отображение η является гомеоморфизмом и группа Q топологически сопряжена группе $*Q$ аффинных преобразований прямой. Остается доказать, что минимальное множество не может быть совершенным нигде не плотным подмножеством прямой. Докажем от противного.

Пусть минимальное множество (носитель меры μ) является совершенным нигде не плотным подмножеством прямой. По лемме 3 существует подгруппа $G \subseteq Q$,

для которой минимальное множество совпадает с минимальным множеством исходной группы Q , и существует константа $M \geq 1$ такая, что для любого $g \in G$ выполняется условие $M_g = M$. Дополнение к минимальному множеству состоит из счетного числа открытых интервалов. Пусть $\Delta =]t_0, t_1[$ – один из таких интервалов. Так как минимальное множество совершенное, то найдутся точка t^* , принадлежащая минимальному множеству, и последовательность элементов $g_n \in G \setminus e$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что длины непересекающихся интервалов $g_n(\Delta)$ стремятся к нулю, а точки $g_n(t_0)$, $g_n(t_1)$ образуют возрастающие последовательности и сходятся к точке t^* . В частности, точку t^* мы можем выбрать такую, чтобы выполнялось условие $t^* > t_1$. Через Δ_m , $m \in \mathbb{Z}$, обозначим интервалы $]t_0 + (t_1 - t_0)m, t_1 + (t_1 - t_0)m[$. В таком случае из условия (1) с константой M , справедливого для всех элементов группы G , следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}$ последовательность длин интервалов $g_n(\Delta_m)$, $n = 1, 2, \dots$, также стремится к нулю, а их концы сходятся к точке t^* . Зафиксируем $\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}_+$ такими, чтобы выполнялись условия $t_0 + (t_1 - t_0)\bar{m} > t^*$, $g_{\bar{n}}(t_1 + (t_1 - t_0)\bar{m}) < t_1 + (t_1 - t_0)\bar{m}$, $g_{\bar{n}}(t_1) > t_1$. Тогда найдется промежуточная точка $\hat{t} \in]t_1, t_1 + (t_1 - t_0)\bar{m}[$, для которой выполняется условие $g_{\bar{n}}(\hat{t}) = \hat{t}$, т.е. точка $\hat{t}$ является неподвижной точкой нетривиального гомеоморфизма $g_{\bar{n}}$. Но это противоречит условию $G^N = \langle e \rangle$. Следовательно, минимальное множество совпадает со всей прямой.

(б) Пусть $Q^N = Q$. В пункте (б) доказательства леммы 2 отмечалось, что для такой коммутативной группы все ее элементы имеют одну единственную общую неподвижную точку, которую обозначим через $\bar{t}$. Если группа Q циклическая, то доказательство следует из пункта (б) доказательства леммы 2.

Предположим, что группа Q не циклическая. Используем конструкции пункта (б) доказательства леммы 2. В силу построения группы $\tilde{Q}_r$ для нее выполнено условие $\tilde{Q}_r^N = \langle e \rangle$ и она состоит из свободно действующих элементов. Более того, группа $\tilde{Q}_r$ будет квазисимметрической и будет удовлетворять условию: для любых $\tilde{q} \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ $M_{\tilde{q}^n} = M_{\tilde{q}}$. В таком случае для группы $\tilde{Q}_r$ выполняются условия пункта (а) доказательства данной теоремы. Поэтому минимальное множество $E(\tilde{Q}_r)$ группы $\tilde{Q}_r$ совпадает с $\mathbb{R}$.

Дословно повторяя те же рассуждения для группы $\tilde{Q}_l$, получим, что минимальное множество $E(\tilde{Q}_l)$ группы $\tilde{Q}_l$ также совпадает с $\mathbb{R}$. Тогда в силу построения минимальные множества групп Q_l , Q_r совпадают с $]-\infty, \bar{t}[$, $]\bar{t}, +\infty[$ соответственно.

В силу доказанных свойств минимальных множеств групп Q_l , Q_r следует, что отображение η , построенное в пункте (б) доказательства леммы 2, является гомеоморфизмом. Следовательно, группа Q сопряжена группе аффинных преобразований.

2. Случай второй – группа Q не коммутативная. В пункте 2 доказательства леммы 2 отмечалось, что для такой группы существует проективно-инвариантная мера μ . Для такой некоммутативной группы не существует инвариантной меры. Тогда в силу следствия 7.3 работы [4] подмножество $C \subseteq Q$ является не циклической нормальной подгруппой группы Q . По теореме 7.3 работы [4] минимальные множества группы Q и подгруппы C единственны, совпадают и являются носителем проективно-инвариантной меры μ . Более того, проективно-инвариантная мера μ для подгруппы C является инвариантной. В пункте 2 доказательства леммы 2 устанавливалась топологическая полусопряженность группы Q группе аффинных

преобразований, в которой отображение η задавалось формулой (2). Для завершения доказательства остается показать, что минимальное множество не циклической группы C совпадает со всей прямой, а это следует из пункта (а) доказательства теоремы, так как для группы C справедливо условие $C^N = \langle e \rangle$.

§ 2. Формулировка основных результатов

Ниже будет приведено доказательство основной теоремы, дан иной критерий квазисимметрической сопряженности группе аффинных преобразований.

Используя понятие квазисимметрической сопряженности, приведем переформулировку основной теоремы, эквивалентную исходной.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (эквивалентный вариант). Пусть $Q \subseteq K^+$. Для того чтобы группа Q была квазисимметрически сопряжена группе аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы Q была квазисимметрической группой и для любых $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$ выполнялось равенство $M_{q^n} = M_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из предложения 1.

Достаточность. Если группа Q тривиальная, т.е. $Q = \langle e \rangle$, то доказательство очевидно. Пусть $Q \neq \langle e \rangle$. Выделим два случая.

1. Случай первый – группа Q коммутативная. Тогда либо $Q^N = \langle e \rangle$, либо $Q^N = Q$.

(а) Пусть $Q^N = \langle e \rangle$. Тогда $C = Q$. Если группа циклическая, то доказательство может быть получено непосредственно из вида гомеоморфизма $\eta(t)$, построенного в первом абзаце пункта (а) доказательства леммы 2.

Предположим, что группа Q не циклическая. В силу условия $Q^N = \langle e \rangle$ группа Q состоит из элементов, свободно действующих на прямой. По лемме 3 существует нормальная подгруппа G с равномерной константой M , т.е. для любых $g \in G$ $M_g = M$. Более того, минимальные множества $E(Q)$, $E(G)$ группы Q и ее нормальной подгруппы G совпадают и в силу теоремы Данжуа совпадают со всей прямой. Нам следует доказать квазисимметричность отображения $\eta(t)$, заданного формулой (2), в которой μ является инвариантной мерой относительно группы Q , а следовательно, относительно и подгруппы G . Следует показать существование константы M_η такой, что для любых $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ справедливо условие

$$M_\eta^{-1} \leq \frac{\eta(x+t) - \eta(x)}{\eta(x) - \eta(x-t)} \leq M_\eta.$$

В силу определения отображения $\eta(t)$ выписанное неравенство имеет вид

$$M_\eta^{-1} \leq \frac{\mu([x, x+t])}{\mu([x-t, x])} \leq M_\eta. \quad (3)$$

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Так как минимальное множество $E(G)$ совпадает с $\mathbb{R}$, то для любого $\delta > 0$ найдется элемент $g \in G$ такой, что для любого $\bar{t} \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $g(\bar{t}) > \bar{t}$ и выполняется система условий $g(x) - x < \delta$, $(x+t) - g^{-1}(x+t) < \delta$, $g(x-t) - (x-t) < \delta$. Введем обозначения: $\Delta_n = g^{(n+1)}(x) - g^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\varepsilon_n = \Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_n$, $\varepsilon_{-n} = \Delta_0 + \Delta_{-1} + \Delta_{-2} + \dots + \Delta_{-n}$, $n = 0, 1, \dots$. В силу условия (1),

справедливого для элементов G с равномерной константой M , имеют место неравенства

$$\left(\frac{M+1}{M}\right)^n |\Delta_0| \leq |\varepsilon_n| \leq (M+1)^n |\Delta_0|, \quad (4)$$

$$\left(\frac{M+1}{M}\right)^n |\Delta_0| \leq |\varepsilon_{-n}| \leq (M+1)^{n+1} |\Delta_0|. \quad (5)$$

Заметим, что в силу инвариантности меры μ справедливы оценки

$$n_1 \mu(\Delta_0) \leq \mu([x, x+t]) \leq n_1 \mu(\Delta_0) + \delta, \quad (6)$$

$$n_2 \mu(\Delta_0) \leq \mu([x-t, x]) \leq n_2 \mu(\Delta_0) + \delta, \quad (7)$$

где n_1 – число интервалов Δ_i , $i = 0, 1, \dots$, целиком лежащих в интервале $[x, x+t]$, а n_2 – число интервалов Δ_i , $i = -1, -2, \dots$, целиком лежащих в интервале $[x-t, x]$. В таком случае получим оценку

$$\frac{n_1 \mu(\Delta_0)}{n_2 \mu(\Delta_0) + \delta} \leq \frac{\mu([x, x+t])}{\mu([x-t, x])} \leq \frac{n_1 \mu(\Delta_0) + \delta}{n_2 \mu(\Delta_0)}. \quad (8)$$

Заметим, что неравенства (4) и (5) справедливы для любого $\delta > 0$ (для любого выбранного g), ибо M – равномерная константа для подгруппы G . Если δ стремится к нулю, то величины $n_1 \mu(\Delta_0)$, $n_2 \mu(\Delta_0)$ стремятся к $\mu([x, x+t])$ и $\mu([x-t, x])$ соответственно. Поэтому при $\delta \rightarrow 0$ левая и правая части неравенства (8) зависят только лишь от асимптотики чисел n_1 и n_2 . Но при $\delta \rightarrow 0$ (при $|\Delta_0| \rightarrow 0$) из неравенств (4) и (5) следует, что

$$\underline{D} \ln \frac{t}{|\Delta_0|} \leq n_1 \leq \overline{D} \ln \frac{t}{|\Delta_0|}, \quad (9)$$

$$\underline{D} \ln \frac{t}{|\Delta_0|} \leq n_2 \leq \overline{D} \ln \frac{t}{|\Delta_0|}, \quad (10)$$

где числа $\underline{D}$ и $\overline{D}$ не зависят от x и t . В таком случае квазисимметричность отображения $\eta(t)$ будет следовать из неравенств (8), (9), (10).

(б) Пусть $Q^N = Q$. В пункте (б) доказательства леммы 2 отмечалось, что для такой коммутативной группы все ее элементы имеют одну единственную общую неподвижную точку, которую обозначим через $\bar{t}$. Если группа Q циклическая, то доказательство можно получить, непосредственно используя вид гомеоморфизма $\eta(t)$, построенного в первом абзаце пункта (б) доказательства леммы 2.

Предположим, что группа Q не циклическая. Используем конструкции пункта (б) доказательства леммы 2. В силу построения группы $\tilde{Q}_r$ для нее выполнено условие $\tilde{Q}_r^N = \langle e \rangle$ и она состоит из свободно действующих элементов. Более того, группа $\tilde{Q}_r$ будет квазисимметрической и будет удовлетворять условию: для любых $\tilde{q} \in \tilde{Q}_r$, $n \in \mathbb{Z}$ $M_{\tilde{q}^n} = M_{\tilde{q}}$. В таком случае для группы $\tilde{Q}_r$ выполняются условия пункта (а) доказательства данной теоремы. Поэтому отображение $\tilde{\eta}_r$ будет квазисимметрическим.

Дословно повторяя те же рассуждения для группы $\tilde{Q}_l$, получим, что отображение $\tilde{\eta}_l$ также будет квазисимметрическим. Тогда в силу построения отображение $\eta(t)$ также будет квазисимметрическим.

2. Случай второй — группа Q не коммутативная. В пункте 2 доказательства леммы 2 отмечалось, что для такой группы существует коммутативная, не циклическая нормальная подгруппа C со свойством $C^N = \langle e \rangle$, минимальным множеством $E(C)$, совпадающим с минимальным множеством $E(Q)$ исходной группы Q . Более того, проективно-инвариантная мера μ является инвариантной относительно подгруппы C и ее носитель совпадает с минимальным множеством $E(C)$.

Из теоремы Данжуа следует, что $E(Q) = \mathbb{R}$. Далее, повторяя все рассуждения пункта (а) доказательства данной теоремы, получим, что отображение $\eta(t)$, определенное по формуле (2), является квазисимметрическим.

Дадим несколько иной критерий квазисимметрической сопряженности группе аффинных преобразований.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Q \subseteq K^+$. Для того чтобы группа Q была квазисимметрически сопряжена группе аффинных преобразований, необходимо и достаточно одновременного выполнения следующих условий:

- (i) для любого элемента $q \in Q$ множество неподвижных точек $\text{Fix } q$ состоит из не более чем одной точки;
- (ii) если t_q — неподвижная точка гомеоморфизма $q \in Q$, то для любых $\tau \in]-\infty, t_q[$, $T \in]t_q, +\infty[$ выполняется равенство $\text{sign}[q(\tau) - \tau] = -\text{sign}[q(T) - T]$;
- (iii) существует коммутативная нормальная подгруппа G такая, что Q и G не циклические одновременно и для любых $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ выполняется условие $M_{g^n} = M_g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Условия (i) и (ii) следуют из предложения 1 и леммы 1. Если группа Q коммутативная, то положив $G = Q$, получим доказательство пункта (iii).

Пусть группа Q не коммутативная. В теореме Данжуа (второй раздел в доказательстве) отмечалось, что в этом случае C является коммутативной нормальной не циклической подгруппой, элементы которой являются свободно действующими гомеоморфизмами, что и завершает доказательство.

Достаточность. В случае циклической группы Q доказательство полностью повторяет доказательство достаточности основной теоремы.

Пусть группа Q не циклическая, но коммутативная. Тогда либо $Q^N = \langle e \rangle$, либо $Q^N = Q$. Для группы со свойством $Q^N = \langle e \rangle$ в силу нецикличности подгруппы G (см. [7]) минимальные множества $E(Q)$, $E(G)$ группы Q и подгруппы G совпадают; мера, инвариантная относительно подгруппы G , единственная и является инвариантной и относительно исходной группы Q (см. [3]). Дословно повторяя доказательство достаточности основной теоремы для группы G , получим, что она квазисимметрически сопряжена некоторой группе сдвигов. Отображение η в силу сказанного выше одновременно будет задавать квазисимметрическое сопряжение и исходной группы Q некоторой группе сдвигов, что и завершает доказательство.

Рассмотрим случай $Q^N = Q$. Воспользуемся конструкциями пункта (б) доказательства леммы 2. Из нецикличности подгруппы G следует, что минимальные множества $E(\tilde{Q}_l)$, $E(\tilde{G}_l)$ совпадают. Точно так же совпадают минимальные множества $E(\tilde{Q}_r)$, $E(\tilde{G}_r)$. Дословно повторяя доказательство достаточности основной теоремы для группы G , получим, что она квазисимметрически сопряжена не-

которой аффинной группе. Отображение η в силу сказанного выше одновременно будет задавать квазисимметрическое сопряжение и исходной группы Q некоторой аффинной группе, что и завершает доказательство.

Пусть группа Q не коммутативная. Тогда минимальные множества $E(Q)$, $E(G)$ совпадают (см. [3], [4], [7]). Более того, подгруппа G содержится в нормальной подгруппе C . Мера, инвариантная относительно G , единственная и является проективно-инвариантной относительно исходной группы Q (см. [3], [4]). Дословно повторяя доказательство достаточности основной теоремы для группы G , получим, что она квазисимметрически сопряжена некоторой группе сдвигов. Отображение η в силу сказанного выше одновременно будет задавать квазисимметрическое сопряжение и исходной группы Q некоторой аффинной группе, что и завершает доказательство.

Сформулируем результат, описывающий множество всевозможных групп $*Q$ аффинных преобразований, которым квазисимметрически сопряжена группа Q .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если группа Q сопряжена аффинным группам $*Q_1$ и $*Q_2$, то группы $*Q_1$ и $*Q_2$ аффинно сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа Q циклическая, то доказательство очевидно.

Пусть группа Q не циклическая. Из условия сопряженности и теоремы 7.1 работы [4] следует, что отображения $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ из определения сопряженности и проективно-инвариантные меры μ_1, μ_2 связаны формулой (2), в которой $\bar{t}$ — некоторая фиксированная точка. Так как группа Q не циклическая, то в силу теорем 3.5–3.8 работы [3], теорем 7.3, 7.4 и следствия 7.3 работы [4] меры μ_1 и μ_2 связаны соотношением $\mu_2 = \lambda \mu_1$, где $\lambda > 0$. Так как проективно-инвариантная мера с точностью до растяжения единственная, а фиксированная точка $\bar{t}$ может быть выбрана любой, то отсюда и следует аффинная сопряженность аффинных групп $*Q_1$ и $*Q_2$.

Автор признателен всем участникам семинара “Динамические системы и эргодическая теория” и его руководителям Д. В. Аносову, А. М. Степину и Р. И. Григорчуку за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. *Альфорт Л. В.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
2. *Hinkkanen A.* The structure of certain quasimetric groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 83. № 422. P. 1–87.
3. *Бекларян Л. А.* К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 3. С. 23–54.
4. *Бекларян Л. А.* К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 4. С. 3–28.
5. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
6. *Бекларян Л. А.* Критерий существования проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, связанный со структурой множества неподвижных точек // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 179–180.
7. *Бекларян Л. А.* К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω -проективно-инвариантные меры // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 4. С. 43–62.