Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, О задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца на плоскости с граничными условиями на почти замкнутой кривой, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 6, 43–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:05:26

УДК 517.956

Р. Р. Гадильшин

О задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца на плоскости с граничными условиями на почти замкнутой кривой

В работе рассмотрена двумерная краевая задача Дирихле для оператора Гельмгольца с граничными условиями на почти замкнутой кривой Γ_ε , где $\varepsilon \ll 1$ – расстояние между концами кривой. Построена полная асимптотика полюса аналитического продолжения функции Грина этой задачи, сходящегося к простой собственной частоте предельной внутренней задачи, в случае, когда соответствующая собственная функция предельной задачи имеет нуль второго порядка в центре сжатия отверстия. Исследовано влияние симметрии щели на величину мнимой части полюсов.

Библиография: 30 названий.

§ 1. Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть Ω – ограниченная односвязная область на плоскости $x = (x_1, x_2)$, ее граница $\Gamma_0 \in C^\infty$, ω_ε – открытая связная часть Γ_0 , имеющая длину порядка ε , $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_0 \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$. В работе рассматривается следующая краевая задача:

$$(\Delta + k^2)E_\varepsilon = f, \quad x \notin \overline{\Gamma_\varepsilon}, \quad E_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1.1)$$

$$E_\varepsilon = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial r} - ikE_\varepsilon = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где $r = |x|$, k – положительное число, f – функция из $L_2(\mathbb{R}^2)$ с ограниченным носителем. Из [1]–[3] следует, что краевая задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима в классе функций, принадлежащих $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, что соответствует выполнению условий Мейкснера [4] в окрестности концов кривой Γ_ε . Под пространствами $X_{\text{loc}}(D)$ понимается следующее. Пусть $S(R)$ – круг радиуса R с центром в начале координат, а X – символ какого-либо банахова пространства. Тогда

$$X_{\text{loc}}(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{u : u \in X(D \cap S(R)) \quad \forall R\}.$$

Будем также говорить, что последовательность сходится в $X_{\text{loc}}(D)$, если она сходится в $X(D \cap S(R))$ для любого R .

Краевая задача (1.1), (1.2) является электромагнитным аналогом акустического резонатора Гельмгольца [5]–[7]. Ее физический смысл можно интерпретировать (см., например, [3], [8], [9]) как излучение ($\text{supp } f \subset \Omega$) или рассеяние

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00501).

($\text{supp } f \cap \overline{\Omega} = \emptyset$) E -поляризованных полей для цилиндрических идеально проводящих поверхностей, сечением которых является Γ_ε , а малость ω_ε соответствует узкой щели. Очевидно, что задача рассеяния плоской E -поляризованной волны сводится к задаче (1.1), (1.2) с финитной правой частью f , носитель которой лежит вне $\overline{\Omega}$.

Для фиксированного k такого, что k^2 не является собственным значением предельной внутренней задачи

$$(\Delta + k^2)E_0^{\text{in}} = f^{\text{in}}, \quad x \in \Omega, \quad E_0^{\text{in}} = 0, \quad x \in \Gamma_0,$$

решение (1.1), (1.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к E_0^{in} в Ω (если f^{in} – сужение f на Ω) и к решению предельной внешней задачи

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)E_0^{\text{ex}} &= f^{\text{ex}}, \quad x \in \Omega^{\text{ex}}, \quad E_0^{\text{ex}} = 0, \quad x \in \Gamma_0, \\ E_0^{\text{ex}} &= O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial E_0^{\text{ex}}}{\partial r} - ikE_0^{\text{ex}} = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где f^{ex} – сужение f на $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ (см. [10]–[12]).

Известно также [11], [12], что функция Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$ задачи (1.1), (1.2) (а следовательно, и ее решение) допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной полуоси, которое имеет полюсы только в нижней полуплоскости и которое в любой окрестности собственной частоты k_0 при любом достаточно малом ε имеет по крайней мере один полюс τ_ε . С одной стороны, “сползание” полюсов возмущенной задачи в нижнюю полуплоскость обеспечивает разрешимость (1.1), (1.2) при вещественных k . С другой стороны, близость части из них к собственным частотам предельной внутренней задачи существенно сказывается на решении (1.1), (1.2) при $k \in \mathbb{R}$, близких к k_0 . В частности, в [12] показано, что если k_0^2 является простым собственным значением предельной внутренней задачи, а ψ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, продолженная нулем в Ω^{ex} , то при комплексных k , близких к k_0 , для аналитического продолжения решения краевой задачи (1.1), (1.2) справедливо представление

$$E_\varepsilon(x, k) = -\frac{\Psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon^2 - k^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_\varepsilon(y) f(y) dy + \tilde{E}_\varepsilon(x, k), \quad (1.3)$$

где полюс $\tau_\varepsilon \rightarrow k_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, функция Ψ_ε сходится к ψ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, является решением уравнения $(\Delta + \tau_\varepsilon^2)\Psi_\varepsilon = 0$ вне $\overline{\Gamma_\varepsilon}$, удовлетворяющим однородному граничному условию Дирихле на Γ_ε , а $\tilde{E}_\varepsilon$ – голоморфная в некоторой окрестности точки k_0 функция из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, которая сходится к аналитическому продолжению функции E_0^{ex} равномерно по k в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$ и для которой справедлива равномерная по ε и k оценка

$$\|\tilde{E}_\varepsilon\|_{1,S(R)} \leq C_R \|f\|_{\mathbb{R}^2}, \quad (1.4)$$

где $\|\cdot\|_{1,Q}$ и $\|\cdot\|_Q$ – нормы в $W_2^1(Q)$ и $L_2(Q)$ соответственно, а R – любое число такое, что $\text{supp } f \subset S(R)$.

Под голоморфной функцией из $X_{\text{loc}}(D)$ понимается функция, голоморфная как элемент из $X(D \cap S(R))$ для любого R . По аналогии с внутренней предельной

задачей будем называть функцию Ψ_ε *собственной функцией* (1.1), (1.2). Ясно, что при любом фиксированном ε эта собственная функция экспоненциально растет на бесконечности. (Можно показать, что она удовлетворяет обобщенному условию излучения [13] на бесконечности.)

Из (1.3) и (1.4) видно, что первое слагаемое в правой части (1.3) (которое будем называть *резонансным членом*) при вещественных k принимает наибольшие значения в случае, когда

$$k = k(\varepsilon) = \operatorname{Re} \tau_\varepsilon + O(\operatorname{Im} \tau_\varepsilon). \quad (1.5)$$

Решения (1.1), (1.2) при k , удовлетворяющих (1.5), будем называть решениями в пиковом режиме. Однако, так как $\Psi_\varepsilon \rightarrow 0$ в Ω^{ex} при $\varepsilon \rightarrow 0$, то непосредственно из (1.3) не видно, насколько существенное влияние оказывает резонансный член даже в пиковом режиме на решение задачи рассеяния (или задачи излучения в Ω^{ex}). Поэтому для выяснения этого вопроса необходим дополнительный асимптотический анализ τ_ε и Ψ_ε .

В случае, когда

А. Ω совпадает в окрестности начала координат с полуплоскостью $x_2 > 0$, а ω_ε — интервал $(\varepsilon\omega_-, \varepsilon\omega_+)$ на прямой $x_2 = 0$, где $\omega_- < \omega_+$ — произвольные действительные числа, такой анализ проведен в [11] при дополнительном предположении $|\nabla \psi(0)| \neq 0$. Было показано, что в этом случае

$$\operatorname{Im} \tau_\varepsilon = -\varepsilon^4(a_1^2 + O(\varepsilon)), \quad \Psi_\varepsilon(x) \sim \varepsilon^2 a_2 G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (1.6)$$

где $a_j \neq 0$ — некоторые явно вычисляемые постоянные,

$$G_1^{\text{ex}}(x, 0, k) = \frac{\partial}{\partial y_2} G^{\text{ex}}(x, y, k) \Big|_{y=0},$$

а $G^{\text{ex}}(x, y, k)$ — функция Грина предельной внешней задачи. Асимптотики (1.6) делают представление (1.3) конструктивным. Из (1.3), (1.6) следует, что в пиковом режиме решение задачи рассеяния имеет порядок ε^{-2} в Ω , а в Ω^{ex} отличается от решения предельной внешней задачи на величину $O(1)$. Для задачи же излучения решение в пиковом режиме будет иметь уже порядки ε^{-4} и ε^{-2} в Ω и Ω^{ex} соответственно.

Однако, если $|\nabla \psi(0)| = 0$, то $a_j = 0$ (см. [11]) и асимптотики (1.6) теряют свою эффективность.

Построению полных асимптотических разложений полюсов τ_ε и соответствующих им собственных функций Ψ_ε , позволяющих эффективно использовать представление (1.3) и в таком вырожденном случае, посвящена настоящая работа. Заметим, что выполнение или невыполнение условия $|\nabla \psi(0)| = 0$ можно интерпретировать как выбор места прорезания щели.

Работа имеет следующую структуру. В §2 приведены формулировки основных утверждений и, в частности, дано их приложение к задаче рассеяния плоской волны на резонаторе. В §3 исследован случай, когда отверстие ω_ε несимметрично относительно начала координат, а в §4 построены асимптотики для симметричного ω_ε . Показано, что рассмотренные в этих параграфах ситуации достаточно

сильно отличаются как друг от друга, так и от невырожденного случая, рассмотренного в [11], что выражается, в первую очередь, в разных порядках малости мнимых частей полюсов, соответствующих потерям энергии в физике. В заключительном § 5 обсуждаются вопросы, имеющие косвенное отношение к основным результатам работы.

§ 2. Формулировка результатов

Всюду в дальнейшем предполагается, что Ω удовлетворяет условию А из предыдущего параграфа, k_0^2 — простое собственное значение, а соответствующая собственная функция ψ имеет в начале координат нуль второго порядка. В силу этих предположений, уравнения Гельмгольца и граничных условий Дирихле асимптотика в нуле собственной функции имеет вид

$$\psi(x) = \psi_2 x_1 x_2 + \frac{1}{6} \psi_3 (3x_2 x_1^2 - x_2^3) + \psi_4 x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{12} k_0^2 \psi_2 x_1 x_2 r^2 + O(r^5),$$

где ψ_j — некоторые постоянные, зависящие от геометрии области Ω , и $\psi_2 \neq 0$.

Асимптотики полюса τ_ε и соответствующей собственной функции Ψ_ε строятся методом согласования асимптотических разложений [14]. Главные члены асимптотик τ_ε и Ψ_ε зависят от некоторых вполне определенных функций и постоянных. Обозначим

$$G_2^{\text{ex}}(x, 0, k) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} G^{\text{ex}}(x, y, k) \Big|_{y=0},$$

$$\sigma_{i,i}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial S(R)} |G_i^{\text{ex}}(x, 0, k)|^2 ds,$$

$$\sigma_{1,2}(k) = \sigma_{2,1}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Re} \int_{\partial S(R)} G_1^{\text{ex}}(x, 0, k) \overline{G_2^{\text{ex}}(x, 0, k)} ds, \quad k > 0.$$

Положительные постоянные $\sigma_{ii}(k)$ обычно называют поперечниками рассеяния полей $G_i^{\text{ex}}(x, 0, k)$ (см. [6], [15]).

Ниже (в § 4) будет доказана

ЛЕММА 2.1. *Квадратичная форма*

$$\langle z, \sigma_\Omega z \rangle = \sum_{j,i=1}^2 \sigma_{ij} z_i z_j,$$

где $\sigma_{i,j} = \sigma_{i,j}(k_0)$, является положительно определенной.

В окрестности отверстия ω_ε главные члены асимптотики собственных функций выражаются через функцию

$$Y_2(\xi) = \frac{1}{2} \text{Im}(\zeta^2 + \zeta((\zeta - \omega_-)(\zeta - \omega_+))^{1/2}) + 2\kappa_\omega Y_1(\xi),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\kappa_\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ (i — мнимая единица),

$$Y_1(\xi) = \frac{1}{2} \text{Im}(\zeta + ((\zeta - \omega_-)(\zeta - \omega_+))^{1/2}),$$

а разрез комплексной плоскости взят по $\gamma = \{\xi = (\xi_1, 0) : (\xi_1 < \omega_-) \cup (\xi_1 > \omega_+)\}$.

Обозначим через $[N]$ целую часть N и положим $c_\omega = \left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{4}\right)^2$. Основным содержанием настоящей работы являются следующие два утверждения, доказательство которых будет приведено в § 3 и § 4 соответственно.

ТЕОРЕМА 2.1. Если $\omega_- \neq -\omega_+$, то асимптотики полюса, сходящегося к k_0 , и соответствующей собственной функции имеют вид

$$\tau_\varepsilon = k_0 + \sum_{j=4}^{\infty} \sum_{i=0}^{[j/2]-2} \tau_{j,i} \varepsilon^j \ln^i \varepsilon, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{4,0} &= -\frac{1}{4k_0} \pi \psi_2^2 c_\omega (c_\omega + 2\kappa_\omega^2), & \tau_{5,0} &= -\frac{1}{k_0} \pi \psi_2 \psi_3 \kappa_\omega c_\omega (2c_\omega + \kappa_\omega^2), \\ \tau_{6,1} &= \frac{1}{2} \pi k_0 (\psi_2 c_\omega \kappa_\omega)^2, & \operatorname{Im} \tau_{6,0} &= -\frac{1}{2} (\pi c_\omega \kappa_\omega \psi_2)^2 \sigma_{1,1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi(x) & \text{при } x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \frac{1}{2} \varepsilon^2 \psi_2 Y_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -\varepsilon^3 \pi \psi_2 c_\omega \kappa_\omega G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0) & \text{при } x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}) \end{aligned}$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ (т.е. в $W_2^1(\Omega \setminus \overline{S(\varepsilon^{1/2})})$, $W_2^1(S(2\varepsilon^{1/2}))$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}} \setminus \overline{S(\varepsilon^{1/2})})$ соответственно).

ТЕОРЕМА 2.2. Если $\omega_- = -\omega_+$, то асимптотики полюса, сходящегося к k_0 , и соответствующей собственной функции имеют вид

$$\tau_\varepsilon = k_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[j/2]-1} \tau_{2j,i} \varepsilon^{2j} \ln^i \varepsilon, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{4,0} &= -\frac{1}{4k_0} \pi (\psi_2 c_\omega)^2, & \tau_{6,0} &= -\frac{\pi c_\omega^3}{k_0} \left(\psi_4 \psi_2 + \frac{1}{6} \psi_3^2 - \frac{1}{24} k_0^2 \psi_2^2 \right), \\ \tau_{8,1} &= \frac{1}{32} \pi k_0^3 c_\omega^4 \psi_2^2, & & \\ \operatorname{Im} \tau_{8,0} &= -\frac{1}{8} (\pi c_\omega^2)^2 \langle z, \sigma_\Omega z \rangle, & z &= (\psi_3, \psi_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi(x) & \text{при } x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \frac{1}{2} \varepsilon^2 \psi_2 Y_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -\frac{1}{2} \varepsilon^4 \pi c_\omega^2 (\psi_2 G_2^{\text{ex}}(x, 0, k_0) + \psi_3 G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)) & \text{при } x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}) \end{aligned}$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$.

Из теорем 2.1, 2.2 вытекает, что пиковые режимы описываются вещественными k , представимыми в виде

$$\begin{aligned} k &= k_0 + \varepsilon^4 \tau_{4,0} + \varepsilon^5 \tau_{5,0} + \varepsilon^6 (\tau_{6,1} \ln \varepsilon + t + o(1)) & \text{при } \omega_- \neq -\omega_+, \\ k &= k_0 + \varepsilon^4 \tau_{4,0} + \varepsilon^6 \tau_{6,0} + \varepsilon^8 (\tau_{8,1} \ln \varepsilon + t + o(1)) & \text{при } \omega_- = -\omega_+ \end{aligned}$$

соответственно, где t – любые действительные числа. Подставляя асимптотики τ_ε и Ψ_ε в (1.3), легко видеть, что в пиковом режиме решения неограниченно растут как в Ω , так и в Ω^{ex} , но порядки роста различны для случаев $\omega_- \neq -\omega_+$ и $\omega_- = -\omega_+$. В пиковых режимах решения задач рассеяния имеют следующие асимптотики:

$$E_\varepsilon(x, k) \sim \varepsilon^{-3} T_1(E_0^{\text{ex}}, t) \psi(x) \quad \text{при } x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (2.5)$$

$$E_\varepsilon(x, k) \sim \varepsilon^{-1} \frac{1}{2} \psi_2 T_1(E_0^{\text{ex}}, t) Y_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \quad (2.6)$$

$$E_\varepsilon(x, k) \sim -\pi \psi_2 c_\omega \varkappa_\omega T_1(E_0^{\text{ex}}, t) G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0) + E_0^{\text{ex}}(x, k_0) \quad \text{при } x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (2.7)$$

где

$$T_1(E_0^{\text{ex}}, t) = \frac{\pi \psi_2 c_\omega \varkappa_\omega}{2k_0(\tau_{6,0} - t)} \frac{\partial}{\partial x_2} E_0^{\text{ex}}(x, k_0) \Big|_{x=0},$$

для несимметричного отверстия ($\omega_- \neq -\omega_+$) и

$$E_\varepsilon(x, k) \sim \varepsilon^{-4} T_2(E_0^{\text{ex}}, t) \psi(x) \quad \text{при } x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (2.8)$$

$$E_\varepsilon(x, k) \sim \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} \psi_2 T_2(E_0^{\text{ex}}, t) Y_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \quad (2.9)$$

$$E_\varepsilon(x, k) \sim -\frac{1}{2} \pi c_\omega^2 T_2(E_0^{\text{ex}}, t) (\psi_2 G_2^{\text{ex}}(x, 0, k_0) + \psi_3 G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)) + E_0^{\text{ex}}(x, k_0) \quad \text{при } x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (2.10)$$

где

$$T_2(E_0^{\text{ex}}, t) = \frac{\pi c_\omega^2}{4k_0(\tau_{8,0} - t)} \left(\psi_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} E_0^{\text{ex}}(x, k_0) \Big|_{x=0} + \psi_3 \frac{\partial}{\partial x_2} E_0^{\text{ex}}(x, k_0) \Big|_{x=0} \right),$$

для симметричного отверстия ($\omega_- = -\omega_+$).

Из (2.5), (2.6), (2.8) и (2.9) видно, что решение задачи рассеяния внутри резонатора и в окрестности отверстия имеет разные порядки роста для случаев несимметричной и симметричной щелей. В свою очередь, из (2.7) и (2.10) следует, что вне резонатора решение отличается от решения предельной внешней задачи на $O(1)$ в обоих случаях, но вид этих добавок различен.

В заключение параграфа покажем, что формулы (2.5)–(2.10) остаются справедливыми и для задачи рассеяния плоской волны E на Γ_ε . Как известно, решения E_ε и E_0 задач рассеяния плоской волны на Γ_ε и на Ω – это функции

$$E_\delta(x, k) = E(x, k) + E_\delta^{\text{ext}}(x, k), \quad \delta \geq 0,$$

где $E_\varepsilon^{\text{ext}}$ и E_0^{ext} – решения уравнения Гельмгольца вне $\overline{\Gamma_\varepsilon}$ и в Ω^{ex} , удовлетворяющие условию излучения (1.2) и граничному условию $E_\varepsilon^{\text{ext}} = -E$ и $E_0^{\text{ext}} = -E$ на Γ_ε и $\partial\Omega$ соответственно. Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$, а $L > 0$ – достаточно большое число такое, что $\overline{\Omega} \subset S(L)$. Очевидно, что функцию E_δ можно представить и в виде

$$E_\delta(x, k) = E(x, k)(1 - \chi(rL^{-1})) + E_{\delta, \chi}(x, k), \quad (2.11)$$

где $E_{\varepsilon, \chi}$ – решение (1.1), (1.2), а $E_{0, \chi}$ – решение предельной задачи в Ω^{ex} с правыми частями, равными

$$E\Delta_{\chi} + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial E}{\partial x_i}.$$

Так как носитель правой части лежит в Ω^{ex} , то для $E_{\varepsilon, \chi}$ справедливы все выше приведенные формулы (2.5)–(2.10) (с заменой в их правых частях E_0^{ex} на $E_{0, \chi}$). Далее, так как $\{0\} \in \partial\Omega$ и по определению $E_0 = E_{0, \chi}$ в окрестности $\partial\Omega$, то $T_i(E_{0, \chi}, t) = T_i(E_0, t)$. Прибавляя к обеим частям представления (1.3) для $E_{\varepsilon, \chi}$ функцию $E(x, k)(1 - \chi(rL^{-1}))$, в силу (2.11) получаем, что для решения задачи рассеяния плоской волны остаются справедливыми соотношения (2.5)–(2.10) с заменой в их правых частях функции E_0^{ex} на решение E_0 задачи рассеяния плоской волны на Ω .

§ 3. Построение асимптотик в случае несимметричного отверстия

В этом параграфе строятся асимптотики полюса τ_{ε} и соответствующей ему собственной функции в случае, когда $\omega_- \neq -\omega_+$. Обозначим

$$D_y^j = \frac{\partial^j}{\partial y_1^{j-1} \partial y_2}.$$

ЛЕММА 3.1. *При $k = \mathbb{C}$, близких к k_0 , для функций Грина $G^{\text{in}}(x, y, k)$ и $G^{\text{ex}}(x, y, k)$ предельных внутренней и внешней задач и их производных справедливы представления*

$$\begin{aligned} D_y^j G^{\text{in}}(x, 0, k) &= \frac{\psi(x)}{k_0^2 - k^2} D_x^j \psi(0) + (-1)^j \frac{i}{2} D_x^j \mathcal{H}_0^{(1)}(kr) + g_j^{\text{in}}(x, k), \\ D_y^j G^{\text{ex}}(x, 0, k) &= (-1)^j \frac{i}{2} D_x^j \mathcal{H}_0^{(1)}(kr) + g_j^{\text{ex}}(x, k), \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода, а g_j^{in} и g_j^{ex} – голоморфные функции соответственно из $C^m(\overline{\Omega})$ и $C^m_{\text{loc}}(\overline{\Omega^{\text{ex}}})$ для любых m , равные нулю на $\Gamma_0 \cap S(R)$ для достаточно малого R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При малых y будем искать функции Грина в виде

$$G^{\text{in, ex}}(x, y, k) = \frac{i}{4} (\mathcal{H}_0^{(1)}(k|x-y|) + \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x-y_*|)) + \tilde{G}^{\text{in, ex}}(x, y, k), \quad (3.1)$$

где $y_* = (y_1, -y_2)$.

Покажем сначала справедливость леммы для предельной внутренней задачи. Из представления (3.1) следует, что функция $\tilde{G}_j^{\text{in}}(x, k) = D_y^j \tilde{G}^{\text{in}}(x, 0, k)$ принадлежит $C^m(\overline{\Omega})$ для $k \neq k_0$ и любого m , а краевая задача для этой функции имеет вид

$$(\Delta + k^2) \tilde{G}_j^{\text{in}} = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \quad \tilde{G}_j^{\text{in}} = f_j \quad \text{при } x \in \Gamma_0,$$

где f_j – голоморфная функция из $C^m(\Gamma_0)$, равная нулю на $\Gamma_0 \cap S(R)$ для достаточно малого R . Будем искать решение этой краевой задачи в виде $\tilde{G}_j^{\text{in}}(x, k) =$

$\tilde{G}_j^{\text{in}}(x, k^*) + \hat{G}_j^{\text{in}}(x, k)$, где $k^* \neq k_0$ – любое фиксированное число, близкое к k_0 . Тогда краевая задача для $\hat{G}_j^{\text{in}}$ примет вид:

$$(\Delta + k^2)\hat{G}_j^{\text{in}} = F_j \quad \text{при } x \in \Omega, \quad \hat{G}_j^{\text{in}} = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_0,$$

где F_j – голоморфная функция из $C^m(\bar{\Omega})$. В силу произвола в выборе m и теорем вложения получаем, что

$$\hat{G}_j^{\text{in}}(x, k) = \alpha_j(k) \frac{\psi(x)}{k^2 - k_0^2} + \hat{g}_j^{\text{in}}(x, k),$$

где $\hat{g}_j^{\text{in}}$ – голоморфная функция из $C^m(\bar{\Omega})$, а α_j – некоторая голоморфная функция. Следовательно, для производной функции Грина справедливо представление

$$D_y^j G^{\text{in}}(x, 0, k) = -\alpha_j(0) \frac{\psi(x)}{k_0^2 - k^2} + (-1)^j \frac{i}{2} D_x^j \mathcal{H}_0^{(1)}(kr) + g_j^{\text{in}}(x, k), \quad (3.2)$$

где $g_j^{\text{in}}(x, k)$ удовлетворяет утверждению леммы.

С другой стороны, для функции Грина предельной внутренней задачи хорошо известно следующее представление

$$G^{\text{in}}(x, y, k) = \frac{\psi(x)\psi(y)}{k_0^2 - k^2} + \tilde{g}(x, y, k^2), \quad (3.3)$$

где $\tilde{g}(x, y, \lambda)$ – голоморфная функция из $L_2(\Omega)$ при любом фиксированном y в некоторой окрестности точки $\lambda_0 = k_0^2$. Применив оператор D_y^j к вычету (3.3) и сравнив полученный результат в точке $y = 0$ с вычетом (3.2), получаем справедливость утверждения леммы для производных функции Грина предельной внутренней задачи.

Для функции Грина предельной внешней задачи из (3.1) следует, что функция $\tilde{G}_j^{\text{ex}}(x, k) = D_y^j \tilde{G}^{\text{ex}}(x, 0, k)$ принадлежит $C_{\text{loc}}^m(\bar{\Omega}^{\text{ex}})$ для любого m , удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)\tilde{G}_j^{\text{ex}} = 0 \quad \text{при } x \in \Omega^{\text{ex}} \quad (3.4)$$

и граничному условию

$$\tilde{G}_j^{\text{ex}} = f_j \quad \text{при } x \in \Gamma_0, \quad (3.5)$$

где f_j – голоморфная функция из $C^m(\Gamma_0)$, равная нулю на $\Gamma_0 \cap S(R)$ для достаточно малого R , а при вещественных k функция $\tilde{G}_j^{\text{ex}}(x, k)$ удовлетворяет и условию излучения (1.2). Пусть L – произвольное достаточно большое число такое, что $\bar{\Omega} \subset S(L)$ и k_0^2 не является собственным значением задачи Дирихле в $\bar{\Omega}^{\text{ex}} \cap S(L)$. Представляя решение краевой задачи (3.4), (3.5), (1.2) и его аналитическое продолжение в виде потенциала простого слоя, получаем, что $\tilde{G}_j^{\text{ex}}$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)\tilde{G}_j^{\text{ex}} &= 0 & \text{при } x \in \Omega^{\text{ex}} \cap S(L), \\ \tilde{G}_j^{\text{ex}} &= f_j & \text{при } x \in \Gamma_0, \\ \tilde{G}_j^{\text{ex}} &= f^{(j)} & \text{при } x \in \partial S(L), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $f^{(j)}$ — голоморфная функция из $C^m(S(L))$ для любого M . Применяя к решению краевой задачи (3.6) те же рассуждения, что и выше для G_j^{in} , в силу достаточного произвола в выборе L получаем (с очевидными упрощениями, связанными с голоморфностью решения (3.6) в окрестности точки k_0) справедливость утверждения леммы для производных функции Грина предельной внешней задачи. Лемма доказана.

Так как в окрестности начала координат граница области выпрямлена, то существует $t > 0$ такое, что область $\Omega \cap S(t)$ является полукругом в верхней полуплоскости (и, следовательно, $\Omega^{\text{ex}} \cap S(t)$ — полукруг в нижней полуплоскости).

СЛЕДСТВИЕ. *Нечетное продолжение функции $(k_0^2 - k^2)^{-1}\psi(x)D_x^j\psi(0) + g_j^{\text{in}}(x, k)$ в нижнюю полуплоскость (функции $g_j^{\text{ex}}(x, k)$ в верхнюю полуплоскость) является функцией из $C^\infty(\overline{S(t)})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения этих функций следует, что они являются решениями уравнения Гельмгольца в $\Omega \cap S(t)$ и $\Omega^{\text{ex}} \cap S(t)$ соответственно и равны нулю на $\partial\Omega \cap S(t)$. Отсюда в силу уравнения и граничных условий вытекает справедливость утверждения следствия.

Обозначим

$$R_2^{(0)}(D_y) = a_{2,0}^{(2)}D_y^2 + a_{2,0}^{(1)}D_y^1, \quad R_2^{(i)}(D_y) = a_{2,i}^{(1)}D_y^1, \quad i > 0,$$

$$R_m^{(n)}(D_y) = \sum_{q=3}^m a_{m,n}^{(q)}D_y^q + a_{m,n}^{(1)}D_y^1, \quad m \neq 2,$$

где $a_{m,i}^{(q)}$ — произвольные постоянные,

$$\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[j/2]} \varepsilon^{j-1} \ln^i \varepsilon (k_0^2 - k^2) R_{j+1-2i}^{(i)}(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k),$$

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[j/2]} \varepsilon^{j-1} \ln^i \varepsilon (k^2 - k_0^2) R_{j+1-2i}^{(i)}(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k).$$

Коэффициенты рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ будем считать продолженными нулем вне Ω и вне Ω^{ex} соответственно. Далее, обозначим через $\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in,ex}}$ частичную сумму ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}$ до степеней ε^N включительно. Из леммы 3.1 следует

ЛЕММА 3.2. *Функция*

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon,N}(x, k) = (1 - \chi(r\varepsilon^{-1/2}))(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, k) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, k))$$

является голоморфной функцией из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ (в некоторой окрестности точки k_0), удовлетворяет (1.1) при $f = f_{\varepsilon,N}$, где

$$\tilde{f}_{\varepsilon,N}(x, k) = -(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, k) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, k))\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2})$$

$$- 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \chi(r\varepsilon^{-1/2}) \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, k) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, k))$$

– голоморфная функция из $L_2(\mathbb{R}^2)$, а ее носитель лежит в $\overline{S(2\varepsilon^{1/2})} \setminus S(\varepsilon^{1/2})$. При вещественных k функция $\tilde{\psi}_{\varepsilon,N}(x,k)$ удовлетворяет условию излучения (1.2).

Для произвольного $\tau(\varepsilon) = k_0 + O(\varepsilon^4)$ имеет место следующая сходимость в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon,N}(x, \tau(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_{2,0}^{(2)} \psi_2 \psi(x).$$

Асимптотики собственной функции ψ_ε будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon) \quad \text{при } x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.7)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon) \quad \text{при } x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.8)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[j/2]-1} \varepsilon^j \ln^j \varepsilon v_{j,i} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{при } x \in S(2\varepsilon^{1/2}). \quad (3.9)$$

Краевые задачи для коэффициентов $v_{j,i}(\xi)$ получаются следующим стандартным образом [11], [14]. В (1.1) при $f = 0$ подставляем ряды (2.1) и (3.9) вместо k и E_ε соответственно, делаем замену переменных $x = \xi\varepsilon$ и выписываем отдельно равенства при одинаковых степенях ε и $\ln \varepsilon$. Затем переходим к формальному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге получаем следующую рекуррентную систему краевых задач:

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_{j,i} &= - \sum_{p=4}^{j-4} \sum_{q=0}^{[p/2]-2} \lambda_{p,q} v_{j-p-2,i-q} \lambda_0 v_{j-2,i} \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\gamma}, \\ v_{j,i} &= 0 \quad \text{при } \xi \in \gamma, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\lambda_0 = k_0^2$ и $\lambda_{p,q}$ – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2$. Обозначим через $V_{\varepsilon,N}(\xi)$ частичную сумму ряда (3.9).

ЛЕММА 3.3. Пусть функции $v_{j,i}(\xi) \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ имеют асимптотики $O(\rho^{j-2i})$ при $\rho = |\xi| \rightarrow \infty$ и являются решениями рекуррентной системы краевых задач (3.10). Тогда функция

$$\widehat{\psi}_{\varepsilon,N}(x) = \chi(r\varepsilon^{-1/2}) V_{\varepsilon,N} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$$

имеет норму $o(\varepsilon^{1/2})$ в $W_2^1(\mathbb{R}^2)$, является решением (1.1), (1.2) при $f(x) = \widehat{f}_{\varepsilon,N}(x,k)$, где $\widehat{f}_{\varepsilon,N}$ – голоморфная функция из $L_2(\mathbb{R}^2)$, а ее носитель лежит в $\overline{S(2\varepsilon^{1/2})}$.

Для функции $\tau(\varepsilon)$, имеющей асимптотику (2.1), справедливо представление

$$\widehat{f}_{\varepsilon,N}(x, \tau(\varepsilon)) = V_{\varepsilon,N} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \Delta \chi(r\varepsilon^{-1/2}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \chi(r\varepsilon^{-1/2}) \frac{\partial}{\partial x_i} V_{\varepsilon,N} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \widehat{f}_\varepsilon^{(N)}(x),$$

где функция $\widehat{f}_\varepsilon^{(N)}(x) = \chi(r\varepsilon^{-1/2})(\Delta + r^2(\varepsilon)) V_{\varepsilon,N}(x\varepsilon^{-1})$ имеет норму $O(\varepsilon^{N/2})$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения леммы для $\widehat{f}_\varepsilon^{(N)}$ следует в силу равенств (3.10) и условия леммы на порядки роста на бесконечности функций $v_{j,i}(\xi)$. Справедливость остальных утверждений леммы очевидна.

Из утверждений лемм 3.2 и 3.3 вытекает

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3. Тогда функция

$$\psi_{\varepsilon,N}(x,k) = \widetilde{\psi}_{\varepsilon,N}(x,k) + \widehat{\psi}_{\varepsilon,N}(x)$$

является голоморфной функцией из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ (в некоторой окрестности точки k_0), удовлетворяет (1.1) при $f = f_{\varepsilon,N}$, где $f_{\varepsilon,N}$ – голоморфная функция из $L_2(\mathbb{R}^2)$, а ее носитель лежит в $\overline{S(2\varepsilon^{1/2})}$. При вещественных k функция $\psi_{\varepsilon,N}(x,k)$ удовлетворяет условию излучения (1.2). Имеет место следующая сходимость в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\psi_{\varepsilon,N}(x, \tau(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_{2,0}^{(2)} \psi_2 \psi(x).$$

Если к тому же функция

$$\begin{aligned} & \left(V_{\varepsilon,N} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau(\varepsilon)) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau(\varepsilon)) \right) \Delta \chi(r\varepsilon^{-1/2}) \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \chi(r\varepsilon^{-1/2}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_{\varepsilon,N} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau(\varepsilon)) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau(\varepsilon)) \right) \end{aligned}$$

имеет норму $O(\varepsilon^{N_1})$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$, где N_1 растет неограниченно вместе с N , то функция $f_{\varepsilon,N}(x, \tau(\varepsilon))$ имеет норму $O(\varepsilon^{N_2})$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$, где $N_2 = \min\{N/2; N_1\}$.

Таким образом, для построения формального асимптотического разложения полюса и соответствующей собственной функции достаточно построить ряды (2.1), (3.7)–(3.9), удовлетворяющие условиям леммы 3.4, что будет достигаться согласованием рядов (3.7)–(3.9).

Через $P_j(\xi)$ обозначим однородные полиномы степени j , тождественно равные нулю при $\xi_2 = 0$, а через $H_q(\xi)$ – однородные функции степени q , представимые в виде $H_q(\xi) = P_{q+2j}(\xi) \rho^{-2j}$ при каком-нибудь целом $j \geq 0$.

Пусть $\mathcal{B}_j$ – множество рядов вида

$$H(\xi) = \sum_{q=-j}^{\infty} H_q(\xi) + \ln \rho \sum_{q=1}^j P_q(\xi).$$

Ряды $H^{(1)}(\xi)$ и $H^{(2)}(\xi)$ будем называть сопряженными, если разность $H^{(1)}(\xi) - H^{(2)}(\xi_*)$ является многочленом.

На суммах $U(x, \varepsilon)$ вида $\psi_{\varepsilon}^{\text{in}, \text{ex}}(x, \tau(\varepsilon))$ определим оператор K_N следующим образом [11], [14]. Коэффициенты ряда $U(x, \varepsilon)$ заменяем на их асимптотики при $r \rightarrow 0$, а функцию $r(\varepsilon)$ – на ее асимптотику и переходим к переменным $\xi = x\varepsilon^{-1}$. В полученном двойном ряду оставляем члены вида $\varepsilon^j \ln^i \varepsilon \Phi(\xi)$ при $j \leq N$. Эту сумму и будем обозначать $K_N(U(x, \varepsilon))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Очевидно, функция $\text{Im } G_q^{\text{ex}}(x, 0, k_0)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в Ω^{ex} (при $k = k_0$) и равна нулю на $\partial\Omega \setminus \{0\}$. С другой стороны, из леммы 3.1 следует, что $\text{Im } G_q^{\text{ex}}(x, 0, k_0) \in C^\infty(\bar{\Omega}^{\text{ex}} \cap \bar{S}(R))$ для достаточно малого $R > 0$ и, следовательно, эта функция равна нулю на $\partial\Omega$. Отсюда в силу уравнения и граничных условий получаем, что

$$\text{Im } G_q^{\text{ex}}(x, 0, k_0) = g_{q,1}x_1 + g_{q,2}x_1x_2 + O(r^3) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Обозначим через θ полярный угол. С учетом замечания 3.1 из леммы 3.1 и ее следствия вытекает

ЛЕММА 3.5. Пусть асимптотика некоторой функции $\tau(\varepsilon)$ имеет вид (2.1). Тогда для любого целого $N \geq 2$ справедливы равенства

$$K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{j=2}^N \sum_{i=0}^{[j/2]-1} \varepsilon^j \ln^i \varepsilon V_{j,i}^{\text{in,ex}}(\xi),$$

где ряды $V_{j,q}^{\text{in,ex}}$ сопряжены при любых фиксированных j и q .

Ряды $V_{j,0}^{\text{in,ex}} \in \tilde{\mathcal{B}}_j$, $V_{j,i}^{\text{in,ex}} \in \tilde{\mathcal{B}}_{j-2i-2}$ (при $i > 0$) и являются формальными асимптотическими решениями (3.10) при $\rho \rightarrow \infty$, где в правой части уравнения функции $v_{j,i}$ заменены на ряды $V_{j,i}^{\text{in,ex}}$.

Справедливы представления:

$$\begin{aligned} V_{2,0}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \tilde{V}_{2,0}^{\text{in,ex}}(\xi) \mp \frac{2k_0}{\pi} \tau_{4,0} \Pi_{0,0}, \\ V_{j,i}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \tilde{V}_{j,i}^{\text{in,ex}}(\xi) \mp \frac{2k_0}{\pi} (\tau_{j+2,i} \Pi_0 + \tau_{4,0} \Pi_{j-2,i}) \quad \text{при } j > 2, \\ \Pi_{n,i} &= \sum_{q=1}^{\infty} (q-1)! a_{n+q,i}^{(q)} \rho^{-q} \sin(q\theta), \\ \tilde{V}_{2,0}^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{2} a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 \rho^2 \sin(2\theta), \quad \tilde{V}_{2,0}^{\text{ex}}(\xi) = \tilde{V}_{3,0}^{\text{ex}}(\xi) \equiv 0, \\ \tilde{V}_{3,0}^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{6} \psi_2 \psi_3 (a_{2,0}^{(2)} \rho^3 \sin(3\theta) + 3a_{3,0}^{(3)} \rho^2 \sin(2\theta)), \\ \tilde{V}_{4,1}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \pm \pi^{-1} k_0^3 \tau_{4,0} a_{1,0}^{(1)} \rho \sin \theta, \end{aligned}$$

где ряды $\tilde{V}_{j,i}^{\text{in,ex}}$ не зависят от $\tau_{m+2,k}$ и $a_{m+q-2,k}^{(q)}$ при $m \geq j$.

Если к тому же $\text{Im } \tau_{4,0} = \text{Im } a_{j,0}^{(j)} = \text{Im } a_{4,0}^{(3)} = \text{Im } \tau_{4,0} = 0$, то

$$\text{Im } \tilde{V}_{4,0}^{\text{in}}(\xi) = 0, \quad \text{Im } \tilde{V}_{4,0}^{\text{ex}}(\xi) = 2k_0 \tau_{4,0} a_{1,0}^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0) \Big|_{x=0} \right) \rho \sin \theta.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_j$ множество функций $v \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\gamma})$ таких, что они равны нулю на γ , имеют при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемые асимптотики из $\tilde{\mathcal{B}}_j$ (вообще говоря, разные при $\xi_2 > 0$ и $\xi_2 < 0$), а разность $v(\xi) - v(\xi_*)$ является многочленом.

Заметим, что ранее определенные гармонические функции Y_1 и Y_2 принадлежат $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ соответственно и имеют следующие асимптотики при $\rho \rightarrow \infty$:

$$Y_q(\xi) = \rho^q \sin(q\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} c_{q,j} \rho^{-j} \sin(j\theta) \quad \text{при } \xi_2 > 0,$$

$$Y_q(\xi) = - \sum_{j=1}^{\infty} c_{q,j} \rho^{-j} \sin(j\theta) \quad \text{при } \xi_2 < 0.$$

В дальнейшем (в § 4) нам понадобятся гармонические функции $Y_3 \in \mathcal{B}_3$ и $Y_4 \in \mathcal{B}_4$, имеющие на бесконечности указанные выше асимптотики. Получить явные представления для функций Y_q (в том числе и для $q = 1, 2$) достаточно просто следующим образом. Вначале нужно рассмотреть случай $\omega_+ = -\omega_- = 1$. Легко видеть, что в этом случае функции $Y_q = \hat{Y}_q$, имеющие заданный вид асимптотик на бесконечности, представимы в виде

$$\hat{Y}_j(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\zeta^j + \zeta^{j-1}(\zeta^2 - 1)^{1/2}) \quad \text{при } j = 1, 2,$$

$$\hat{Y}_j(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\zeta^j + \zeta^{j-1}(\zeta^2 - 1)^{1/2}) + \frac{1}{4}(\hat{Y}_{j-2}(\xi) + \hat{Y}_{j-2}(\xi_*)) \quad \text{при } j = 3, 4.$$

Далее, используя растяжение системы координат с коэффициентом $t = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)$ и сдвиг ее вдоль оси $O\xi_1$ на $\varkappa_\omega$, последовательно получаем искомые функции в виде

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= t\hat{Y}_1\left(\frac{\xi_1 - \varkappa_\omega}{t}, \frac{\xi_2}{t}\right), \\ Y_2(\xi) &= t^2\hat{Y}_2\left(\frac{\xi_1 - \varkappa_\omega}{t}, \frac{\xi_2}{t}\right) + 2\varkappa_\omega Y_1(\xi), \\ Y_3(\xi) &= t^3\hat{Y}_3\left(\frac{\xi_1 - \varkappa_\omega}{t}, \frac{\xi_2}{t}\right) + 3\varkappa_\omega Y_2(\xi) - 3\varkappa_\omega^2 Y_1(\xi), \\ Y_4(\xi) &= t^4\hat{Y}_4\left(\frac{\xi_1 - \varkappa_\omega}{t}, \frac{\xi_2}{t}\right) + 4\varkappa_\omega Y_3(\xi) - 6\varkappa_\omega^2 Y_2(\xi) + 4\varkappa_\omega^3 Y_1(\xi). \end{aligned}$$

Принимая во внимание определение функций $\hat{Y}_q$ и равенство $4c_\omega = t^2$, получаем для функций Y_1 и Y_2 вид, приведенный в § 2, а для функций Y_3 и Y_4 — вид

$$\begin{aligned} Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\zeta^3 + \zeta^2((\zeta - \omega_-)(\zeta - \omega_+))^{1/2}) + c_\omega(Y_1(\xi) + Y_1(\xi_*)) \\ &\quad + 2\varkappa_\omega Y_2(\xi) - \varkappa_\omega^2 Y_1(\xi), \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\zeta^4 + \zeta^3((\zeta - \omega_-)(\zeta - \omega_+))^{1/2}) + c_\omega(Y_2(\xi) + Y_2(\xi_*)) \\ &\quad - 2c_\omega \varkappa(Y_1(\xi) + Y_1(\xi_*)) + 4\varkappa_\omega Y_3(\xi) - 6\varkappa_\omega^2 Y_2(\xi) + 4\varkappa_\omega^3 Y_1(\xi). \end{aligned}$$

На этом же пути вычисляются и значения коэффициентов $c_{i,j}$ и, в частности, получается, что

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= c_\omega, & c_{2,1} &= 2c_{1,2} = 2c_\omega \varkappa_\omega, \\ c_{3,1} &= 3c_{1,3} = 3c_\omega(c_\omega + \varkappa_\omega^2), & c_{2,2} &= c_\omega(c_\omega + 2\varkappa_\omega^2), \\ 2c_{3,2} &= 3c_{2,3} = 6\varkappa_\omega c_\omega(2c_\omega + \varkappa_\omega^2), & c_{4,2} &= 2c_{2,4} = 2c_\omega(2c_\omega^2 + 9c_\omega \varkappa_\omega^2 + 2\varkappa_\omega^4), \\ c_{3,3} &= c_\omega(4c_\omega^2 + 12c_\omega \varkappa_\omega^2 + \varkappa_\omega^4). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.6. Пусть функция $F \in \mathcal{B}_{j-2}$, а сопряженные ряды $V^\pm \in \tilde{\mathcal{B}}_j$ являются формальными асимптотическими решениями уравнения $\Delta V^\pm = F$ при $\rho \rightarrow \infty$, $\pm \xi_2 > 0$. Тогда существует функция $v \in \mathcal{B}_j$, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta v = F \quad \text{при} \quad \xi \notin \bar{\gamma}, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \gamma \quad (3.11)$$

и имеющая при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики

$$v(\xi) = V^\pm(\xi) \pm \sum_{j=1}^{\infty} c_j^\pm \rho^{-j} \sin(j\theta) \quad \text{при} \quad \pm \xi_2 \geq 0, \quad (3.12)$$

где $c_j^+ = c_j^- = c_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $F_\pm$ сужения функции F на полуплоскости $\mathbb{R}_\pm^2 = \{\xi : \pm \xi_2 > 0\}$. Стандартным вычитанием растущих на бесконечности членов и использованием явных формул для решения задачи Дирихле в полуплоскости легко показать (см., например, [14]), что существуют решения $v^\pm \in W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}_\pm^2)$ задач Дирихле для уравнений $\Delta v^\pm = F_\pm$ в $\mathbb{R}_\pm^2$, имеющие при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики (3.12) при некоторых постоянных $c_q^\pm$. Так как $F \in \mathcal{B}_{j-2}$, то функция $v^+(\xi) - v(\xi_*)$ является решением задачи Дирихле в $\mathbb{R}_+^2$ с правой частью, равной многочлену. Следовательно, функция $v^+(\xi) - v(\xi_*)$ также является многочленом. А так как $V^\pm \in \tilde{\mathcal{B}}_j$, то отсюда следует, что $c^+ = c^-$ (в асимптотиках функций $v^\pm(\xi)$).

Обозначим $\omega = \{\xi = (\xi_1, 0) : \omega_- < \xi_1 < \omega_+\}$. Известно (см., например, [16]), что существует гармоническая вне $\bar{\omega}$ функция $V \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega})$, представимая в виде потенциала двойного слоя и удовлетворяющая граничному условию

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} V = \phi, \quad \xi \in \omega,$$

для $\phi \in L_2(\omega)$. Положим

$$\phi = \frac{\partial}{\partial \xi_2} (v^+ - v^-).$$

Легко видеть, что функция

$$v = v^+ - \frac{1}{2}V, \quad \xi_2 \geq 0, \quad v = v^- + \frac{1}{2}V, \quad \xi_2 \leq 0,$$

удовлетворяет утверждению леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ — два решения (3.11) из $\mathcal{B}_j$ и $v^{(1)}(\xi) - v^{(2)}(\xi) = O(\rho^{-1})$ при $\rho \rightarrow \infty$, то $v^{(1)} = v^{(2)}$.

Справедливость этого утверждения легко показать, интегрируя по частям правую часть равенства

$$0 = \int_{S(R)} (v^{(1)} - v^{(2)}) \Delta (v^{(1)} - v^{(2)}) d\xi$$

при $R \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\omega_- = -\omega_+$, а функция F и ряды $V^\pm$ четные (нечетные) по переменной ξ_1 , то функция v является тоже четной (нечетной) по этой переменной, а постоянные $c_{2j} = 0$ ($c_{2j+1} = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Очевидно, что если функция F и ряды $V^\pm$ вещественные, то функция v и постоянные c_q также вещественные.

Леммы 3.5 и 3.6 позволяют перейти к согласованию рядов (3.7)–(3.9).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\omega_- \neq -\omega_+$, $N \geq 2$ – произвольное целое число. Тогда существуют функция $\tau(\varepsilon)$, имеющая асимптотику вида (2.1), и ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}, \text{ex}}(x, k)$ и (3.9) такие, что коэффициенты $v_{j,0} \in \mathcal{B}_j$, $v_{j,i} \in \mathcal{B}_{j-2i-2}$ (при $i > 0$) являются решениями краевых задач (3.11), для любого $N \geq 2$ справедливы равенства

$$V_{\varepsilon,N}(\xi) = K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in}, \text{ex}}(x, \tau(\varepsilon))) \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \pm \xi_2 \geq 0, \quad (3.13)$$

коэффициенты $\tau_{4,0}$, $\tau_{5,0}$, $\tau_{6,1}$, $\tau_{6,0}$ удовлетворяют соотношениям (2.2) и

$$a_{1,0}^{(1)} = \psi_2^{-1} c_{2,2}^{-1} c_{2,1}, \quad a_{2,0}^{(2)} = \psi_2^{-1}, \quad v_{2,0} = \frac{1}{2} \psi_2 Y_2. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрав $a_{2,0}^{(2)}$ в соответствии с (3.14), в силу леммы 3.4 получаем, что для любой функции $\tau(\varepsilon)$, имеющей асимптотику вида (2.1), имеет место сходимость

$$\psi_{\varepsilon,N}(x, \tau(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(x) \quad (3.15)$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$.

По определению функция

$$v_{2,0}(\xi) = \frac{1}{2} a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 Y_2(\xi) \quad (3.16)$$

является решением краевой задачи (3.10), и в силу леммы 3.5 для ее асимптотик на бесконечности справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_{2,0}(\xi) - V_{2,0}^{\text{in}, \text{ex}}(\xi) = & \pm \left(\frac{1}{2} a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 \sum_{q=1}^{\infty} c_{2,q} \rho^{-q} \sin(q\theta) \right. \\ & \left. + \tau_{4,0} \frac{2k_0}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (q-1)! a_{q,0}^{(q)} \rho^{-q} \sin(q\theta) \right) \quad \text{при} \quad \pm \xi_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Приравнявая в последнем равенстве коэффициенты при ρ^{-2} , получаем, что

$$\tau_{4,0} = -\frac{\pi}{4k_0} \psi_2^2 c_{2,2}. \quad (3.17)$$

Подставляя в (3.17) значение $c_{2,2}$, получаем значение (2.2) для $\tau_{4,0}$. Приравнявая же коэффициенты при остальных степенях ρ , определяем постоянные $a_{q,0}^{(q)}$ для

$q \neq 2$ и, в частности, принимая во внимание (3.17) и то, что $a_{2,0}^{(2)} = \psi^{-1}$, получаем значение (3.14) для $a_{1,0}^{(1)}$, а также равенство

$$a_{3,0}^{(3)} = (2\psi_2 c_{2,2})^{-1} c_{2,3}. \quad (3.18)$$

И, наконец, подставляя значение (3.14) для $a_{2,0}^{(2)}$ в (3.16), получаем (3.14) для $v_{2,0}$. В результате проделанного согласования построены постоянные $\tau_{4,0}$, $a_{q,0}^{(q)}$ и функции $v_{2,0}$ такие, что оказалось выполненным равенство (3.13) для $N = 2$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции. Допустим, что при $j \leq M$ существуют постоянные $a_{q+j-2,i}^{(q)}$, $\tau_{j+2,i}$ и функции $v_{j,0} \in \mathcal{B}_j$, $v_{j,i} \in \mathcal{B}_{j-2i-2}$ (при $i > 0$), являющиеся решениями краевых задач (3.10), такие, что при $\rho \rightarrow \infty$ имеют место равенства (3.13). Тогда в силу лемм 3.5, 3.6 при $0 \leq i \leq [(M+1)/2] - 1$ существуют функции $v_{M+1,0} \in \mathcal{B}_{M+1}$, $v_{M+1,i} \in \mathcal{H}_{M-2i-1}$ (при $i > 0$), являющиеся решениями краевых задач (3.10), такие, что при $\rho \rightarrow \infty$ имеют место равенства

$$v_{M+1,i}(\xi) = \tilde{V}_{M+1,i}^{\text{in,ex}}(\xi) \pm \sum_{j=1}^{\infty} c_j \rho^{-j} \sin(j\theta), \quad \pm \xi_2 \geq 0. \quad (3.19)$$

Приравняв правую часть (3.19) к $V_{M+1,i}^{\text{in,ex}}(\xi)$, последовательно находим постоянные $\tau_{M+3,i}$ и $a_{q+M-1,i}^{(q)}$ и получаем асимптотическое равенство при $\rho \rightarrow \infty$:

$$v_{M+1,i}(\xi) = V_{M+1,i}^{\text{in,ex}}(\xi), \quad \pm \xi_2 \geq 0. \quad (3.20)$$

Из равенства (3.20) и справедливости равенства (3.13) при $N = M$ следует справедливость равенства (3.13) при $N = M + 1$.

Покажем справедливость остальных равенств в (2.1). Формула для $\tau_{5,0}$ получается из следующей цепочки (см. лемму 3.5, лемму 3.6, ее следствие 1, равенства (3.14), (3.18) и асимптотики функций $Y_q(\xi)$):

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{3,0}^{\text{ex}}(\xi) &= 0, \\ \tilde{V}_{3,0}^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{6} a_{2,0}^{(2)} \psi_2 \psi_3 \rho^3 \sin(3\theta) + \frac{1}{2} a_{3,0}^{(3)} \psi_3 \psi_2 \rho^2 \sin(2\theta) \\ &\Rightarrow v_{3,0} = \psi_3 \left(\frac{1}{6} Y_3 + \frac{1}{4} c_{2,3} c_{2,2}^{-1} Y_2 \right) \\ &\Rightarrow \psi_3 \left(\frac{1}{6} c_{3,2} + \frac{1}{4} c_{2,3} c_{2,2}^{-1} c_{2,2} \right) = -\frac{2k_0}{\pi} \tau_{5,0} \psi_2^{-1} \\ &\Rightarrow \tau_{5,0} = -\frac{\pi}{2k_0} \psi_2 \psi_3 \left(\frac{1}{3} c_{3,2} + \frac{1}{2} c_{2,3} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство значения $c_{j,q}$, получаем соотношение (2.2) для $\tau_{5,0}$. Приравняв $V_{3,0}^{\text{in,ex}}$ и асимптотики $v_{3,0}$, легко убедиться, что $\text{Im } a_{4,0}^{(3)} = 0$.

Значение $\tau_{6,1}$ находится (с учетом (3.14), следствия 1 леммы 3.6) по следующей цепочке:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{4,1}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \pm \pi^{-1} k_0^3 \tau_{4,0} a_{1,0}^{(1)} \rho \sin \theta \\ &\Rightarrow v_{4,1}(\xi) = \pi^{-1} k_0^3 \tau_{4,0} a_{1,0}^{(1)} (Y_1(\xi) + Y_1(\xi_*)) \\ &\Rightarrow 2\pi^{-1} k_0^3 \tau_{4,0} \psi_2^{-1} c_{2,2}^{-1} c_{2,1} c_{1,2} = -\frac{2k_0}{\pi} \tau_{6,1} \psi_2^{-1} \\ &\Rightarrow \tau_{6,1} = -k_0^2 \tau_{4,0} c_{2,2}^{-1} c_{2,1} c_{1,2}.\end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство значения $\tau_{4,0}$ и $c_{j,q}$, получаем соотношение (2.2) для $\tau_{6,1}$.

И, наконец, значение $\text{Im } \tau_{6,0}$ определяем по цепочке (с учетом (3.14), леммы 3.5, следствия 1 леммы 3.6 и замечания 3.2):

$$\begin{aligned}\text{Im } \tilde{V}_{4,0}^{\text{in}}(\xi) &= 0, \\ \text{Im } \tilde{V}_{4,0}^{\text{ex}}(\xi) &= 2k_0 \tau_{4,0} a_{1,0}^{(1)} \left(\frac{\partial \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) \rho \sin \theta \\ &\Rightarrow \text{Im } v_{4,0}(\xi) = -2k_0 \tau_{4,0} a_{1,0}^{(1)} \left(\frac{\partial \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) Y_1(\xi_*) \\ &\Rightarrow -2k_0 \tau_{4,0} \psi_2^{-1} c_{2,2}^{-1} c_{2,1} \left(\frac{\partial \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) c_{1,2} \\ &= -\frac{2k_0}{\pi} \psi_2^{-1} \text{Im } \tau_{6,0} \\ &\Rightarrow \text{Im } \tau_{6,0} = \pi \tau_{4,0} c_{2,2}^{-1} c_{2,1} c_{1,2} \left(\frac{\partial \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Интегрируя по частям левую часть тождества

$$\text{Im} \int_{B(R)} \overline{G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)} (\Delta + k_0^2) G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0) ds \equiv 0,$$

где $B(R) = S(R) \setminus (S(R^{-1}) \cup \Omega)$, и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем равенство

$$\left(\frac{\partial \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) = k_0 \sigma_{1,1}.\tag{3.22}$$

Подставляя (3.22) и значения $\tau_{4,0}$ и $c_{j,q}$ в (3.21), получаем соотношение (2.2) для $\text{Im } \tau_{6,0}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Из определения $\psi_\varepsilon^{\text{in}}, \psi_\varepsilon^{\text{ex}}$, оператора K_N и из леммы 3.1 следует, что для любой функции $\tau(\varepsilon)$, имеющей асимптотику вида (2.1), справедливо равенство

$$\begin{aligned}\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in,ex}}(x, \tau(\varepsilon)) - K_N(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in,ex}}(x, \tau(\varepsilon))) &= O(r^{N+1} + \varepsilon^3 r^{N-2}) \\ \text{при } \varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}, \quad \pm x_2 > 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Причем это равенство можно дифференцировать (по переменным x_j).

Пусть ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}, \psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ и (3.9) и функция $\tau(\varepsilon)$ удовлетворяют утверждениям теоремы 3.1. Тогда, во-первых, выполнены условия леммы 3.3. Покажем, что и оставшееся условие леммы 3.4 выполнено. В силу леммы 3.1 и равенства (3.13) получаем, что при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$)

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon,N}(\xi) - K_N(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in,ex}}(x, \tau(\varepsilon))) &= K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x, \tau(\varepsilon)) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in,ex}}(x, \tau(\varepsilon))) \\ &= O(\varepsilon^N \ln^{[N/2]+1} \varepsilon \rho^{-5}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Причем это равенство можно дифференцировать.

Из (3.23) и (3.24) получаем, что

$$\begin{aligned} \left| V_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau(\varepsilon)) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau(\varepsilon)) \right| &= O(\varepsilon^{(N+1)/2}), \\ \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau(\varepsilon)) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau(\varepsilon)) \right) \right| &= O(\varepsilon^{N/2}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$. Из (3.25) следует, что и последнее условие леммы 3.4 выполняется для $N_1 = N/2$. Следовательно, справедливо утверждение леммы 3.4, причем $N_2 = N/2$ и имеет место сходимость (3.15).

Вначале рассуждением от противного докажем, что полюс имеет асимптотику (2.1), (2.2). Допустим, что существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $|\tau_\varepsilon - \tau(\varepsilon)| > C\varepsilon^\delta$. Тогда из (1.3), (1.4) и утверждения леммы 3.4 следует, что

$$\|\psi_{\varepsilon,N}(\cdot, \tau(\varepsilon))\|_{1,S(R)} = O(\varepsilon^{N/2-\delta})$$

для любого R , что в силу произвола в выборе N противоречит (3.15). Следовательно, полюс τ_ε имеет асимптотику (2.1), (2.2).

Далее, из леммы 3.4, представления (1.3) и оценки (1.4) следует, что

$$\psi_{\varepsilon,N}(x, k) = \alpha_{\varepsilon,N}(k) \Psi_\varepsilon(x) + \Psi_{\varepsilon,N}(x, k), \quad (3.26)$$

где $\Psi_{\varepsilon,N}(x, k)$ — голоморфная функция из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ (а следовательно, множитель $\alpha_{\varepsilon,N}(k)$ голоморфен), и

$$\|\Psi_{\varepsilon,N}(\cdot, \tau_\varepsilon)\|_{1,S(R)} = O(\varepsilon^{N/2}) \quad (3.27)$$

для любого R . Из (3.15), (3.26) и (3.27) следует, что

$$\psi_{\varepsilon,N}(x, \tau_\varepsilon) = \alpha_{\varepsilon,N}(\tau_\varepsilon) \Psi_\varepsilon(x) + O(\varepsilon^{N/2}), \quad \alpha_{\varepsilon,N}(\tau_\varepsilon) = 1 + o(1). \quad (3.28)$$

Из (3.28), определения функции $\psi_{\varepsilon,N}$ и равенства (3.14) следует справедливость утверждения теоремы 2.1 для собственной функции вне $S(2\varepsilon^{1/2}) \setminus S(\varepsilon^{1/2})$. Но так как при $x \in S(2\varepsilon^{1/2}) \setminus S(\varepsilon^{1/2})$

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,N}(x, \tau_\varepsilon) &= V_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + (1 - \chi(r\varepsilon^{-1/2})) \\ &\quad \times \left(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon) - V_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right), \\ \psi_{\varepsilon,N}(x, \tau_\varepsilon) &= \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon) \\ &\quad - \chi(r\varepsilon^{-1/2}) \left(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon) - V_{\varepsilon,N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right), \end{aligned}$$

то из (3.25) и (3.28) следует справедливость утверждения теоремы для собственной функции и при $x \in S(2\varepsilon^{1/2}) \setminus S(\varepsilon^{1/2})$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В силу произвола в выборе N легко видеть, что (3.7)–(3.9) являются полным асимптотическим разложением собственной функции $\psi_\varepsilon(x)$, равной $\alpha(\varepsilon)\Psi_\varepsilon(x)$ при некотором $\alpha(\varepsilon)$, стремящемся к единице при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§4. Построение асимптотик в случае симметричного отверстия

В отличие от предыдущего параграфа ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, k) &= (k_0^2 - k^2) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j} R_{2j+2}^{(0)}(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^j \varepsilon^{2j} \ln^i \varepsilon R_{2j+1-2i}^{(i)}(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k) \right), \\ \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, k) &= (k^2 - k_0^2) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j} R_{2j+2}^{(0)}(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^j \varepsilon^{2j} \ln^i \varepsilon R_{2j+1-2i}^{(i)}(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k) \right),\end{aligned}$$

а асимптотики собственной функции – в виде (3.7), (3.8) и

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]-1} \varepsilon^j \ln^i \varepsilon v_{j,i} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{при } x \in S(2\varepsilon^{1/2}). \quad (4.1)$$

Краевые задачи для коэффициентов $v_{j,i}(\xi)$ получаются так же, как и в предыдущем параграфе, и имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta_\xi v_{j,i} &= - \sum_{p=2}^{[j/2]-2} \sum_{q=0}^{[p/2]-2} \lambda_{2p,q} v_{j-2p-2,i-q} - \lambda_0 v_{j-2,i} \quad \text{при } \xi \in \overline{\gamma}, \\ v_{j,i} &= 0 \quad \text{при } \xi \in \gamma,\end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\lambda_{p,q}$ – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2$ (но τ_ε – уже ряд вида (2.3)).

Обозначим через $Y^{\text{in,ex}}$ ряды вида

$$\begin{aligned}Y^{\text{in}}(\xi) &= \rho^4 \sin(2\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \rho^{-2j+2} \sin(2j\theta), \\ Y^{\text{ex}}(\xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j \rho^{-2j+2} \sin(2j\theta).\end{aligned}$$

С учетом последнего обозначения из леммы 3.1 и ее следствия вытекает следующий аналог леммы 3.5.

ЛЕММА 4.1. Пусть асимптотика произвольной функции $\tau(\varepsilon)$ имеет вид (2.3). Тогда для любого целого $N \geq 2$ справедливы равенства

$$K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]-1} \varepsilon^j \ln^i \varepsilon V_{j,i}^{\text{in,ex}}(\xi),$$

где ряды $V_{j,q}^{\text{in,ex}}$ сопряжены при любых фиксированных j и q .

Ряды $V_{j,0}^{\text{in,ex}} \in \tilde{\mathcal{B}}_j$, $V_{j,i}^{\text{in,ex}} \in \tilde{\mathcal{B}}_{j-2i-2}$ при $i > 0$ являются формальными асимптотическими решениями (4.2) при $\rho \rightarrow \infty$, где в правой части уравнения функции $v_{j,i}$ заменены на ряды $V_{j,i}^{\text{in,ex}}$. Четность рядов $V_{j,i}^{\text{in,ex}}$ по переменной ξ_1 совпадает с четностью $j+1$, и для них справедливы представления

$$\begin{aligned}
V_{2,0}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \tilde{V}_{2,0}^{\text{in,ex}}(\xi) \mp \tau_{4,0} \frac{2k_0}{\pi} (a_{2,0}^{(2)} \rho^{-2} \sin(2\theta) + \Pi_{0,0}), \\
V_{2j-1,i}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \tilde{V}_{2j-1,i}^{\text{in,ex}}(\xi) \mp \tau_{4,0} \frac{2k_0}{\pi} \Pi_{2j-3,i}, \\
V_{2j,i}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \tilde{V}_{2j,i}^{\text{in,ex}}(\xi) \mp \frac{2k_0}{\pi} (\tau_{2j+2,i} (a_{2,0}^{(2)} \rho^{-2} \sin(2\theta) + \Pi_{0,0}) \\
&\quad + \tau_{4,0} \Pi_{2j-2,i}) \quad \text{при } j \geq 2, \\
\Pi_{2m,i} &= \sum_{q=2}^{\infty} (2q-1)! a_{2m+2q,i}^{(2q)} \rho^{-2q} \sin(2q\theta), \\
\Pi_{2m-1,i} &= \sum_{q=1}^{\infty} (2q-2)! a_{2m+2q-2,i}^{(2q-1)} \rho^{-2q+1} \sin((2q-1)\theta), \\
\tilde{V}_{2,0}^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{2} a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 \rho^2 \sin(2\theta), \quad \tilde{V}_{3,0}^{\text{in}}(\xi) = \frac{1}{6} a_{2,0}^{(2)} \psi_2 \psi_3 \rho^3 \sin(3\theta), \\
\tilde{V}_{4,0}^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{4} a_{2,0}^{(2)} \psi_2 \psi_4 \rho^4 \sin(4\theta) + \frac{1}{2} \left(a_{4,0}^{(3)} \psi_3 + a_{4,0}^{(4)} \left(6\psi_4 - \frac{1}{2} k_0^2 \psi_2 \right) \right) \psi_2 \rho^2 \sin(2\theta) \\
&\quad - \frac{1}{2} k_0^2 a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 Y^{\text{in}}(\xi), \\
\tilde{V}_{2,0}^{\text{ex}}(\xi) &= \tilde{V}_{3,0}^{\text{ex}}(\xi) \equiv 0, \quad \tilde{V}_{4,0}^{\text{ex}}(\xi) = \frac{1}{2} k_0^2 a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 Y^{\text{ex}}(\xi), \\
\tilde{V}_{6,1}^{\text{in,ex}}(\xi) &= \pm \frac{1}{8} \pi^{-1} k_0^5 \tau_{4,0} a_{2,0}^{(2)} \rho^2 \sin(2\theta).
\end{aligned}$$

Ряды $\tilde{V}_{j,i}^{\text{in,ex}}$ не зависят от $\tau_{m+2,k}$ и $a_{m+q-2,k}^{(q)}$ при $m \geq j$.

Если к тому же $\text{Im } a_{q+n,0}^{(q)} = \text{Im } \tau_{4,0} = 0$ при $n \leq 2$, то

$$\begin{aligned}
\text{Im } \tilde{V}_{5,0}^{\text{in}}(\xi) &= 0, \quad \text{Im } \tilde{V}_{6,0}^{\text{in}}(\xi) = \frac{1}{2} \text{Im } a_{6,0}^{(3)} \psi_3 \psi_2 \rho^2 \sin(2\theta), \\
\text{Im } \tilde{V}_{5,0}^{\text{ex}}(\xi) &= 2k_0 \tau_{4,0} \left(a_{2,0}^{(2)} \left(\frac{\partial \text{Im } G_2^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) \right. \\
&\quad \left. + a_{2,0}^{(1)} \left(\frac{\partial \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) \right) \rho \sin \theta, \\
\text{Im } \tilde{V}_{6,0}^{\text{ex}}(\xi) &= k_0 \tau_{4,0} \left(a_{2,0}^{(2)} \left(\frac{\partial^2 \text{Im } G_2^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{x=0} \right) \right. \\
&\quad \left. + a_{2,0}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{x=0} \right) \right) \rho^2 \sin(2\theta).
\end{aligned}$$

Прежде чем перейти к согласованию асимптотических разложений, докажем лемму 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Обозначим $G_q(x) = G_q^{\text{ex}}(x, 0, k_0)$. Согласно замечанию 3.1

$$\text{Im } G_q(x) = g_{q,1}x_1 + g_{q,2}x_1x_2 + O(r^3) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Проинтегрировав по частям левые части равенств

$$\text{Im} \int_{B(R)} G_q(\Delta + k_0^2) \overline{G_i} dx = 0, \quad \text{Im} \int_{B(R)} G_q(\Delta + k_0^2) G_i dx = 0$$

и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем соотношения

$$g_{q,j} + g_{j,q} = 2k_0\sigma_{q,j}, \quad g_{j,q} = g_{j,q},$$

из которых следуют равенства

$$g_{j,q} = k_0\sigma_{q,j} = k_0\sigma_{j,q}. \quad (4.3)$$

В силу этих равенств матрица Q_Ω с компонентами $g_{j,q}$ симметрична. Следовательно, существует ортогональная матрица T с компонентами $t_{j,q}$ такая, что $D = TB_\Omega T'$ — диагональная матрица с элементами $d_{q,q}$ (T' — транспонированная матрица). Обозначим

$$g_q(x) = \sum_{i=1}^2 t_{q,i} G_i(x).$$

Проинтегрировав по частям левую часть равенства

$$\int_{B(R)} g_q(\Delta + k_0^2) \bar{g}_q dx = 0$$

и перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем неравенства $d_{q,q} > 0$, из которых следует справедливость леммы 2.1.

Перейдем к согласованию асимптотических разложений (к доказательству аналога теоремы 3.1).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\omega_- = -\omega_+$, $N \geq 2$ — произвольное целое число. Тогда существуют функция $\tau(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (2.3), и ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}, \text{ex}}$ и (4.1) такие, что коэффициенты $v_{j,0} \in \mathcal{B}_j$, $v_{j,i} \in \mathcal{B}_{j-2i-2}$ (при $i > 0$) являются решениями краевых задач (4.2), при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства (3.13), коэффициенты $a_{2,0}^{(2)}$ и $v_{2,0}$ определяются соотношениями (3.14), коэффициенты $\tau_{4,0}$, $\tau_{6,0}$, $\tau_{8,1}$, $\tau_{8,0}$ удовлетворяют соотношениям (2.4) и

$$a_{2,0}^{(1)} = \frac{1}{3} \psi_3 \psi_2^{-1} c_{3,1} c_{2,2}^{-1}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Постоянную $a_{2,0}^{(2)}$ и функцию $v_{2,0}(\xi)$ выбираем из тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 3.1. Учитывая следствие 2 леммы 3.6 и лемму 4.1, при $\rho \rightarrow \infty$ имеем

$$v_{2,0}(\xi) - V_{2,0}^{\text{in,ex}}(\xi) = \pm \left(\frac{1}{2} a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 \sum_{q=1}^{\infty} c_{2,2q} \rho^{-2q} \sin(2q\theta) + 2k_0 \tau_{4,0} \pi^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} (2q-1)! a_{2q,0}^{(2q)} \rho^{-2q} \sin(2q\theta) \right) \quad \text{при} \quad \pm \xi_2 \geq 0.$$

Приравнявая в последнем равенстве коэффициенты при ρ^{-2} , получаем для $\tau_{4,0}$ значение (3.17), а затем с учетом значения $c_{2,2}$ — значение (2.4). Приравнявая коэффициенты при остальных степенях ρ , определяем вещественные постоянные $a_{2q,0}^{(2q)}$ для $q \neq 1$ и, в частности, равенства (4.4) и

$$a_{4,0}^{(4)} = \frac{1}{6} \psi_2^{-1} c_{2,4} c_{2,2}^{-1}. \quad (4.5)$$

Положив $v_{3,0} = \frac{1}{6} \psi_3 Y_3$, в силу леммы 4.1 и значения (3.14) для $a_{2,0}^{(2)}$ имеем:

$$v_{3,0}(\xi) - \tilde{V}_{3,0}^{\text{in,ex}}(\xi) = \pm \left(\frac{1}{6} \psi_3 \sum_{q=1}^{\infty} c_{3,2q-1} \rho^{-2q+1} \sin((2q-1)\theta) + 2k_0 \tau_{4,0} \pi^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} (2q-2)! a_{2q,0}^{(2q-1)} \rho^{-2q+1} \sin((2q-1)\theta) \right).$$

Приравнявая правую часть последнего равенства к нулю, определяем вещественные $a_{2q,0}^{(2q-1)}$ и, в частности, с учетом (3.17) получаем равенства (4.4) и

$$a_{4,0}^{(3)} = \frac{1}{6} \psi_3 \psi_2^{-2} c_{3,3} c_{2,2}^{-1}. \quad (4.6)$$

Дальнейшее доказательство проводится по индукции так же, как и в предыдущем параграфе, с использованием следствия 2 леммы 3.6 и леммы 4.1 (вместо леммы 3.5).

Покажем справедливость оставшихся равенств в (2.4). Краевая задача (4.2) для $v_{4,0}$ имеет вид

$$\Delta v_{4,0} = -k_0^2 v_{2,0} \quad \text{при} \quad \xi \notin \bar{\gamma}, \quad v_{4,0} = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \gamma. \quad (4.7)$$

Из леммы 4.1 и проведенного согласования рядов $V_{2,0}^{\text{in,ex}}$ с асимптотиками на бесконечности функции $v_{2,0}$ следует, что ряды

$$-\frac{1}{2} k_0^2 a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 Y^{\text{in}}(\xi), \quad \frac{1}{2} k_0^2 a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 Y^{\text{ex}}(\xi)$$

являются асимптотическими решениями (4.7) при $\xi_2 > 0$ и $\xi_2 < 0$ соответственно.

С другой стороны, так как $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}$, то функция

$$Y(\xi) = \frac{1}{24} \text{Im}(\bar{\zeta}(\zeta^3 + (\zeta^2 - \omega^2)^{3/2})),$$

где $\omega = \omega_+ = -\omega_-$, во-первых, является решением краевой задачи (3.11) при $F = Y_2$ и принадлежит $\mathcal{B}_4$, а, во-вторых, ее асимптотика на бесконечности имеет структуру рядов Y^{in} и $-Y^{\text{ex}}$ при $\pm\xi_2 > 0$. Пусть X_1 и X_2 — два ряда из $\mathcal{B}_m$ таких, что $\Delta X_1 = \Delta X_2$ и их разность не содержит членов вида $\rho^j \sin(j\theta)$ при любом целом j . Легко видеть, что в этом случае $X_1(\xi) = X_2(\xi)$. А так как по определению функций Y и $v_{2,0}$, функция

$$-\frac{1}{2}k_0^2 a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 Y(\xi)$$

является решением (4.7) (а следовательно, ее асимптотики являются асимптотическим решением (4.7)), то ее асимптотики совпадают с Y^{in} и $-Y^{\text{ex}}$ при $\pm\xi_2 > 0$. С учетом этого замечания в силу лемм 4.1, 3.6, следствий леммы 3.6 и определения функций $v_{2,0}$, Y_4 и Y функция

$$\begin{aligned} v_{4,0}(\xi) = & \frac{1}{4}a_{2,0}^{(2)}\psi_2\psi_4Y_4(\xi) + \frac{1}{2}\left(a_{4,0}^{(3)}\psi_3 + a_{4,0}^{(4)}\left(6\psi_4 - \frac{1}{2}k_0^2\psi_2\right)\right)\psi_2Y_2(\xi) \\ & - \frac{1}{2}k_0^2 a_{2,0}^{(2)} \psi_2^2 Y(\xi), \end{aligned}$$

во-первых, является решением краевой задачи (4.7), а во-вторых, при $\rho \rightarrow \infty$ и $\pm\xi_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} 0 = v_{4,0}(\xi) - V_{4,0}^{\text{in,ex}}(\xi) = & \pm \left(\frac{1}{4}a_{2,0}^{(2)}\psi_2\psi_4c_{4,2} + \frac{1}{2}\left(a_{4,0}^{(3)}\psi_3 \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{4,0}^{(4)}\left(6\psi_4 - \frac{1}{2}k_0^2\psi_2\right)\right)\psi_2c_{2,2} + \frac{2k_0}{\pi}\tau_{6,0}a_{2,0}^{(2)} \right) \rho^{-2} \sin(2\theta) + O(\rho^{-3}). \end{aligned}$$

Из равенства нулю коэффициентов при ρ^{-2} и соотношений (3.14), (4.5), (4.6) следует, что

$$\tau_{6,0} = -\frac{\pi}{48k_0}(6\psi_4\psi_2c_{4,2} + 2\psi_3^2c_{3,3} + 12c_{2,4}\psi_4\psi_2 - k_0^2\psi_2^2c_{2,4}).$$

Подставляя в последнюю формулу значения постоянных $c_{3,3}$, $c_{4,2}$ и $c_{2,4}$, получаем (2.4) для $\tau_{6,0}$. Легко видеть, что коэффициенты $a_{q+2,0}^{(q)}$ вещественны.

Краевая задача (4.2) для $v_{6,1}$ имеет вид

$$\Delta v_{6,1} = 0 \quad \text{при} \quad \xi \notin \bar{\gamma}, \quad v_{6,1} = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \gamma.$$

Функция

$$v_{6,1}(\xi) = \frac{1}{8\pi}k_0^5\tau_{4,0}a_{2,0}^{(2)}(Y_2(\xi) + Y_2(\xi_*))$$

является решением этой задачи. В силу леммы 4.1 при $\rho \rightarrow \infty$ и $\pm\xi_2 \geq 0$ справедливости равенства

$$v_{6,1}(\xi) - V_{6,1}^{\text{in,ex}}(\xi) = \pm \frac{1}{\pi}k_0a_{2,0}^{(2)}\left(\frac{1}{4}k_0^4\tau_{4,0}c_{2,2} + 2\tau_{8,1}\right)\rho^{-2} \sin(2\theta) + O(\rho^{-4}).$$

Следовательно,

$$\tau_{8,1} = -\frac{1}{8}k_0^4\tau_{4,0}c_{2,2}.$$

Подставляя в последнее выражение значения $\tau_{4,0}$ и $c_{2,2}$, получаем равенство (2.4) для $\tau_{8,1}$.

Так как по построению $\text{Im } v_{2,0} = \text{Im } v_{3,0} = \text{Im } v_{4,0} = 0$, то функции $\text{Im } v_{5,0}$ и $\text{Im } v_{6,0}$ являются решениями следующих краевых задач

$$\Delta \text{Im } v_{j,0} = 0 \quad \text{при } \xi \notin \overline{\gamma}, \quad \text{Im } v_{j,0} = 0 \quad \text{при } \xi \in \gamma.$$

Так как по построению $\text{Im } a_{q+n,0}^{(q)} = \text{Im } \tau_{4,0} = 0$ при $n \leq 2$, то значение $\text{Im } \tau_{8,0}$ определяем по следующей цепочке (см. лемму 4.1 и (4.3)):

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{V}_{5,0}^{\text{in}}(\xi) &= 0, \\ \text{Im } \tilde{V}_{5,0}^{\text{ex}}(\xi) &= 2k_0\tau_{4,0} \left(a_{2,0}^{(2)} \left(\frac{\partial \text{Im } G_2^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) \right. \\ &\quad \left. + a_{2,0}^{(1)} \left(\frac{\partial \text{Im } G_1^{\text{ex}}(x, 0, k_0)}{\partial x_2} \Big|_{x=0} \right) \rho \sin \theta \right) \\ &\Rightarrow \text{Im } v_{5,0}(\xi) = -2k_0\tau_{4,0}(a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,1} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,1})Y_1(\xi_*) \\ &\Rightarrow -2k_0^2\tau_{4,0}(a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,1} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,1})c_{1,3} = -4k_0\tau_{4,0}\pi^{-1} \text{Im } a_{6,0}^{(3)} \\ &\Rightarrow \text{Im } a_{6,0}^{(3)} = \frac{1}{2}k_0\pi(a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,1} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,1})c_{1,3}. \end{aligned}$$

А так как согласно лемме 4.1 и равенству (4.3)

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{V}_{6,0}^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{2} \text{Im } a_{6,0}^{(3)}\psi_3\psi_2\rho^2 \sin(2\theta), \\ \text{Im } \tilde{V}_{6,0}^{\text{ex}}(\xi) &= k_0^2\tau_{4,0}(a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,2} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,2})\rho^2 \sin(2\theta), \end{aligned}$$

то, учитывая значение (3.17) для $\tau_{4,0}$ и утверждение леммы 4.1, получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Im } v_{6,0}(\xi) &= \frac{1}{4}k_0\pi(a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,1} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,1})c_{1,3}\psi_3\psi_2Y_2(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{4}k_0\pi(a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,2} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,2})\psi_2^2c_{2,2}Y(\xi_*) \\ &\Rightarrow -\frac{2k_0}{\pi}a_{2,0}^{(2)} \text{Im } \tau_{8,0} = \frac{1}{4}k_0\pi((a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,1} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,1})c_{1,3}\psi_3\psi_2 \\ &\quad + (a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,2} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,2})\psi_2^2c_{2,2})c_{2,2} \\ &\Rightarrow \text{Im } \tau_{8,0} = -\frac{1}{8}\pi^2c_{2,2}(a_{2,0}^{(2)})^{-1}((a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,2} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,2})\psi_2^2c_{2,2} \\ &\quad + (a_{2,0}^{(2)}\sigma_{2,1} + a_{2,0}^{(1)}\sigma_{1,1})c_{1,3}\psi_3\psi_2). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство значения $c_{1,3}$, $c_{2,2}$, $a_{2,0}^{(2)}$ и $a_{2,0}^{(1)}$ (см. (3.14) и (4.4)), получаем формулу (2.4) для $\text{Im } \tau_{8,0}$. Теорема доказана.

Обоснование построенных асимптотик, т.е. окончательное доказательство теоремы 2.2, полностью аналогично обоснованию, приведенному в предыдущем параграфе при доказательстве теоремы 2.1. Главный член асимптотики собственной

функции в $S(2\varepsilon^{1/2})$ определяется из (4.1) и значения (3.14) для $v_{2,0}$, а вид главного члена в $\Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2})$ вытекает из структуры ряда $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$, равенств (3.14) и (4.4) для его коэффициентов $a_{2,0}^{(2)}$ и $a_{2,0}^{(1)}$ и конкретных значений постоянных $c_{i,j}$ (с учетом того, что в рассматриваемом симметричном случае $\kappa_\omega = 0$).

§ 5. Заключительные замечания

Вырождение собственной функции в точке прорезания отверстия существенно влияет на асимптотики полюсов с малой мнимой частью и в случае классического акустического резонатора Гельмгольца (т.е. для задачи Неймана в $\mathbb{R}^3$). Построение же полных асимптотик для акустического резонатора существенно проще, чем для рассматриваемого в настоящей работе его электромагнитного аналога, ввиду отсутствия в разложениях логарифмических членов [17].

Используя метод согласования асимптотических разложений, можно строить асимптотики полюсов, сходящихся к кратной собственной частоте предельной задачи. Случай, когда k_0^2 является двукратным собственным значением, рассмотрен в [18], где были приведены асимптотики двух полюсов, сходящихся к k_0 и имеющих разные порядки малости мнимых частей.

Отметим, что построение (и обоснование) асимптотик полюсов аналитического продолжения функции Грина (1.1), (1.2), сходящихся к полюсам аналитического продолжения функции Грина предельной внешней задачи, лежащим в нижней полуплоскости, не представляет каких-либо дополнительных трудностей (см., например, [19]). Правда, физический смысл таких полюсов неясен. Последнее, по-видимому, является причиной того, что аналитические продолжения решений в случае четномерных пространств обычно рассматриваются в комплексной плоскости с разрезом C' (см., например, [20]). Хотя, вообще говоря, решение аналитически продолжается на бесконечнолистную поверхность $\tilde{C}$. Алгоритм построения асимптотик, приведенный в настоящей работе, сохраняется для любого листа $\tilde{C}$. Но так как значение функции Грина предельной внешней задачи при переходе с одного листа на другой изменяется, то, естественно, будут изменяться и значения коэффициентов в (2.1) и (2.3). Поэтому "проекции" полюсов, сходящихся к k_0 на разных листах $\tilde{C}$, не совпадут. Последнее, впрочем, неудивительно, так как известно, что такое несовпадение имеет место, например, для задачи рассеяния на круге [21].

В заключение заметим, что для резонаторов со стенками конечной толщины вопросы существования полюсов с малой мнимой частью, их резонансного характера, оценок и асимптотик рассматривались в [20], [22]–[30].

Список литературы

1. Wolfe P. An existence theorem for the reduced wave equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. P. 663–666.
2. Hayashi Y. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 44. P. 489–530.
3. Еремич Ю. А., Захаров Е. В. О некоторых прямых и обратных задачах теории дифракции. Дополнение к кн.: Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
4. Meixner J. Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Shirmer // Ann. Phys. 1949. V. 6. P. 1–9.

5. *Lord Rayleigh*. The theory of Helmholtz resonator // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1916. V. 92. P. 265–275.
6. *Miles J. W.* Scattering by a spherical cap // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 50. P. 892–903.
7. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
8. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.
9. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наукова думка, 1983.
10. *Готлиб В. Ю.* Рассеяние на круглом резонаторе с узкой щелью как задача теории возмущений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. С. 1109–1113.
11. *Гадильшин Р. Р.* Поверхностные потенциалы и метод согласования асимптотических разложений в задаче о резонаторе Гельмгольца // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 2. С. 88–115.
12. *Гадильшин Р. Р.* Существование и асимптотики полюсов с малой мнимой частью для резонатора Гельмгольца // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 3–76.
13. *Reichardt H.* Ausstrahlungs Bedingungen fur die Wellengleichung // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1960. V. 24. P. 41–53.
14. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
15. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
16. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
17. *Гадильшин Р. Р.* О влиянии выбора места отверстия и его формы на свойства акустического резонатора // ТМФ. 1992. Т. 93. № 1. С. 107–118.
18. *Гадильшин Р. Р.* О расщеплении полюсов функции Грина для электромагнитного аналога резонатора Гельмгольца // Радиотехника и электроника. Т. 36. С. 2045–2047.
19. *Гадильшин Р. Р.* Об аналитическом продолжении функции Грина резонатора Гельмгольца // Асимптотические методы решения дифференциальных уравнений. Уфа, 1992. С. 18–26.
20. *Beale J. T.* Scattering frequencies of resonators // Commun. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. P. 549–563.
21. *Shenk N., Thoe D.* Resonant states and poles of scattering matrix for perturbations of $-\Delta$ // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 467–491.
22. *Арсеньев А. А.* Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца // ЖВМиМФ. 1971. Т. 12. № 1. С. 112–138.
23. *Петрас С. В.* О расщеплении серий резонансов на “нефизическом листе” // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 155–169.
24. *Арсеньев А. А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // ЖВМиМФ. 1976. Т. 16. С. 718–724.
25. *Санчес-Паленсия Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
26. *Fernandez C.* Resonances in scattering by a resonator // Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34. P. 115–125.
27. *Hislop P. D., Martinez A.* Scattering resonances of a Helmholtz resonator // Indiana Univ. Math. J. 1991. V. 40. № 2. P. 767–788.
28. *Hislop P. D.* Singular perturbations of Dirichlet and Neumann domains and resonances for obstacle scattering // Astérisque. 1992. V. 210. P. 197–216.
29. *Гадильшин Р. Р.* О полюсах акустического резонатора // Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 5. С. 3–16.
30. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотика решений сингулярно возмущенной задачи Дирихле // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 1. С. 92–102.