Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Куржанский, Н. Б. Мельников, О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 6, 69–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:32:10

УДК 517.977

А. Б. Куржанский, Н. Б. Мельников

О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби

Настоящая работа посвящена задаче нелинейного синтеза управлений в системах с линейной структурой и мгновенными (геометрическими) ограничениями на входные параметры. Подчеркиваются значение методов многозначного анализа и особая роль альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина в построении предлагаемых решений. Обсуждается их тесная взаимосвязь с уравнением Гамильтона–Якоби.

В данной работе также представлен конструктивный подход, основанный на эллипсоидальном исчислении. С его помощью удастся перейти от абстрактной теории к численно реализуемым процедурам.

Библиография: 28 названий.

Введение

Одной из центральных задач математической теории управления является решение проблемы синтеза, например, вопросов о возможностях и методах построения стратегий управления, обеспечивающих попадание на известное целевое множество, невзирая на возмущения, присутствующие в системе. Данная задача имеет большую библиографию, в том числе по применениям игрового подхода [1]–[5]. Настоящая работа посвящена двум аспектам этой задачи. Во-первых – взаимосвязи методов, основанных на применении многозначного анализа [6], в частности, теории многозначного интеграла Л. С. Понтрягина, и методов, основанных на теории уравнения Гамильтона–Якоби. И во-вторых – вопросам доведения решений до конца. Последние опираются здесь на эллипсоидальное исчисление, предложенное в монографии [7]. Единство изложения в данной работе достигается за счет подходов, основанных на формализме Н. Н. Красовского [8]. Среди полученных результатов следует отметить указание на возможность представления основополагающих соотношений работ [2], [1], [4], а также работ [9], [10] в виде численно реализуемых эллипсоидальных представлений [7].

Определения и обозначения

Приведем определения и обозначения, используемые в дальнейшем:
 $\text{comp } \mathbb{R}^n$ – множество всех выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$;
 $(\text{conv } F)(l)$ – замкнутая выпуклая оболочка функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$;
 $\partial F(l)$ – субдифференциал выпуклой функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$;

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Университеты России” и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 99-01-01224, 00-01-00646).

$A \dot{-} B = \{c : c + B \subseteq A\}$ – геометрическая разность (Минковского) множеств A и B ;

$\rho(l | A) = \{\max(l, a) : a \in A\}$ – опорная функция множества $A \in \text{comp } \mathbb{R}^n$;

$d(x, \mathcal{M}) = \min\{\|z - x\| : z \in \mathcal{M}\}$ – евклидово расстояние от точки x до множества $\mathcal{M}$;

$h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ – хаусдорфова полуметрика, определяемая на множестве всех компактов соотношением

$$h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) = \max_x \min_z \{(x - z, x - z)^{1/2} : x \in \mathcal{X}, z \in \mathcal{Z}\},$$

причем $h_+(x, \mathcal{Z}) = d(x, \mathcal{Z})$;

$h(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) = \max\{h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Z}); h_+(\mathcal{Z}, \mathcal{X})\}$ – хаусдорфова метрика.

§ 1. Задача синтеза управлений при неопределенности. Альтернированный интеграл Понтрягина

Одной из основных задач теории управления с обратной связью является *нелинейный синтез управления* в условиях неизвестных, но ограниченных помех. Этот вопрос был детально изучен как в рамках “робастного” управления, так и в рамках теории игр. Ниже приводится типичный пример подобной задачи (см. [2], [7]).

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t) \quad (1.1)$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u \in \mathbb{R}^p$ – управление, $v \in \mathbb{R}^q$ – внешнее возмущение, стесненные для почти всех t геометрическими ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t).$$

Здесь $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$ – заданные многозначные функции с выпуклыми компактными значениями, непрерывно зависящие от времени.

Управление u может быть выбрано в одном из двух классов:

- в классе *U программных управлений* $u = u(t)$ – измеримых по Лебегу функций со значениями $u(t) \in \mathcal{P}(t)$ почти всюду, и
- в классе *U $\mathcal{P}$ позиционных стратегий* – многозначных функций

$$\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$$

таких, что выполнены условия существования и продолжаемости решения дифференциального включения (ДВ)

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t \leq t \leq t_1, \quad (1.2)$$

для любой измеримой по Лебегу функции $v(t)$ ¹.

¹Таким, например, является класс всех многозначных отображений, измеримых по t и полунепрерывных сверху по x , с выпуклыми и компактными значениями. В этом случае ДВ имеет решение на всем отрезке времени для произвольного $x^0 = x(t_0)$, т.е. существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая ДВ почти всюду.

Возмущение задается среди измеримых по Лебегу функций при ограничении $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ почти всюду.

Пусть задано “целевое” множество $\mathcal{M} \in \text{comp } \mathbb{R}^n$.

ЗАДАЧА 1.1 *о синтезе управления при неопределенности* состоит в отыскании множества разрешимости $\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*[\tau]$ и позиционной стратегии управления $\mathcal{U}(t, x) \in U_{\mathcal{P}}$ таких, что все решения ДВ (1.2), выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1)$, достигали бы целевого множества $\mathcal{M}$ в момент времени t_1 , каково бы ни было внешнее возмущение $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Задача 1.1 имеет смысл, если $\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) \neq \emptyset$. Многозначная функция $\mathcal{W}^*[t] = \mathcal{W}^*(t, t_1, \mathcal{M})$ называется *трубкой разрешимости* или *мостом Красовского*. Эта функция является ключевым элементом в решении задачи синтеза управлений при неопределенности. Существенным обстоятельством является возможность вычислить функцию $\mathcal{W}^*[t]$ при помощи некоторого многозначного интеграла – *альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина* (см. [11]).

Напомним определение этого интеграла. Приведем вначале систему (1.1) к более простому виду

$$\dot{x}(t) = u + v \quad (1.3)$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t), \quad (1.4)$$

где $\mathcal{P}_0(t) = S(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}_0(t) = S(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t)$ и $S(t_1, t)$ – фундаментальная матрица однородного уравнения

$$\frac{\partial S(t_1, t)}{\partial t} = A(t)S(t_1, t), \quad S(t_1, t_1) = I.$$

Не умаляя общности, будем в дальнейшем рассматривать систему (1.3) с ограничениями (1.4), опуская индекс нуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Множеством разрешимости максиминного типа* (в классе программных управлений) будем называть совокупность векторов

$$W[\tau] = W(\tau, t, \mathcal{M}) = \{x : \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 : x(\tau) = x\}.$$

Здесь $x(t)$, $\tau \leq t \leq t_1$, – конец траектории, выпущенной из точки $x(\tau) = x$ при некоторых $u(\cdot) \in U$, $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

ЛЕММА 1.1. *Для $W[t]$ справедлива формула*

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(t)) dt \right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(t) dt, \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированных $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, удовлетворяющих ограничениям (1.4), решение уравнения (1.3) имеет вид

$$x(t_1) = x(t) + \int_t^{t_1} u(\tau) d\tau + \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \in \mathcal{M}. \quad (1.6)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W(t, t_1, \mathcal{M}) &= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \left\{ x^* : x^* = x(t_1) - \int_t^{t_1} u(\tau) d\tau - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau, x(t_1) \in \mathcal{M} \right\} \\ &= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \left\{ \mathcal{M} - \int_t^{t_1} u(\tau) d\tau - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \right\} \\ &= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \right\} \\ &= \left\{ x^* : x^* \in \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \quad \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\} \\ &= \left\{ x^* : x^* + \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \in \mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \quad \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее в силу определения геометрической разности совпадает с правой частью формулы (1.5). Лемма доказана.

Опишем формальную процедуру построения альтернированного интеграла. С этой целью рассмотрим следующую суперпозицию множеств $W(t, t_1, \mathcal{M})$.

Пусть набор $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ задает произвольное разбиение Σ_m отрезка $t \leq \tau \leq t_1$ вида

$$t = t_1 - \sum_{i=1}^m \sigma_i, \dots, t_1 - \sigma_1, t_1,$$

где $\sigma_i > 0$, $\sum_{i=1}^m \sigma_i = t_1 - t$. Начиная с момента t_1 , положим на первом шаге $W_m[t_1 - \sigma_1] = W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})$, имея по формуле (1.5)

$$W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau. \quad (1.7)$$

Продолжая процедуру далее, получим

$$\begin{aligned} W_m[t_1 - \sigma_1 - \sigma_2] &= W(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, t_1 - \sigma_1, W_m[t_1 - \sigma_1]) \\ &= \left(W_m[t_1 - \sigma_1] + \int_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.8)$$

и т. д. Наконец, на левом конце t отрезка времени $[t, t_1]$ имеем

$$\begin{aligned} W_m[t] &= W(t, t + \sigma_m, W(t + \sigma_m, t + \sigma_m + \sigma_{m-1}, \dots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}))) \dots \\ &= \left(W_m[t + \sigma_m] + \int_t^{t + \sigma_m} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int_t^{t + \sigma_m} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \\ &= \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m). \end{aligned} \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Описанная процедура построения реализует идею многошагового программного *управления с коррекцией* при условии, что продолжительность каждого дискретного шага стремится к нулю, а число шагов неограниченно возрастает. В каждый момент времени t_j сообщается текущее положение $x(t_j)$ и значение внешней помехи $v(t)$ на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$. Таким образом, каждый момент t_j является точкой коррекции управления. При этом на j -м шаге вычисляется множество $W_m[t_1 - \sum_1^j \sigma_i]$ всех $x^* \in \mathbb{R}^n$ таких, что *для любого* возмущения $v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau)$, $t_1 - \sum_1^j \sigma_i \leq \tau \leq t_1 - \sum_1^{j-1} \sigma_i$, *существует* программная стратегия $u = u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$, которая приводит решение системы

$$\dot{x} = u(\tau) + v(\tau) \quad (1.10)$$

с начальным условием $x(t_1 - \sum_1^j \sigma_i) = x^*$ во множество $W_m[t_1 - \sum_1^{j-1} \sigma_i]$ за время σ_j .

Сходимость процедуры предполагает, что все множества $W_m[\cdot]$ типа (1.7)–(1.9) должны быть не пусты. Указанное условие обеспечивается следующим требованием.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.1. *Существует такая непрерывная функция $w(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, что множества*

$$\begin{aligned} & W\left(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i, t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i, W\left(t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i, t_1 - \sum_{i=1}^{j-2} \sigma_i, \dots, W(t - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})\right) \dots\right) \\ & \quad \dot{\cap} w\left(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i\right) B \neq \emptyset \end{aligned}$$

для любого разбиения Σ_m и $j = 1, \dots, m$. Здесь $B = \{x : (x, x) \leq 1\}$.

Предположение 1.1 гарантирует условие $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) \neq \emptyset$ для любого разбиения Σ_m . *Всюду в дальнейшем будем считать предположение 1.1 выполненным без дополнительных оговорок.*

Следуя (1.7)–(1.9), получим аналитическое выражение для интегральной суммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) &= \left(\dots \left(\left(\mathcal{M} + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{\cap} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) \dots \right) \\ & \quad \dot{\cap} \int_t^{t + \sigma_m} \mathcal{Q}(\tau) d\tau = W_m[t]. \end{aligned}$$

Множество $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)$ является выпуклым компактом для произвольного Σ_m . Рассмотрим хаусдорфов предел $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)$ при условии

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, m\} \rightarrow 0, \quad \sum_{i=1}^m \sigma_i = t_1 - t.$$

ЛЕММА 1.2. *Существует хаусдорфов предел $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})$:*

$$\lim h(\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m), \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, m\} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^m \sigma_i = t_1 - t,$$

и этот предел не зависит от разбиения Σ_m .

Предел

$$\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[t] \quad (1.11)$$

будем называть *альтернированным множеством разрешимости* задачи 1.1, обозначая

$$\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}) = \int_{t_1, \mathcal{M}}^t ((-\mathcal{P}(\tau)) d\tau - \mathcal{Q}(\tau) d\tau).$$

Множество $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})$ есть значение некоторого многозначного интеграла, известного как “*альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина*”. Этот интеграл был введен в работе [1] и подробно описан в статье [11].

ЛЕММА 1.3. *Многозначное отображение $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M})$ удовлетворяет полугрупповому свойству (в попятном времени). А именно:*

$$\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}(\tau, t, \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M})), \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (1.12)$$

Доказательство этого соотношения вытекает из свойств аддитивности альтернированного интеграла $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})$.

Основное свойство альтернированного интеграла дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Множество разрешимости $\mathcal{W}^*[t]$ задачи 1.1 может быть представлено в виде альтернированного интеграла*

$$\mathcal{W}^*[t] \equiv \mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

В следующем параграфе будет указана связь альтернированного интеграла с функциями цены дифференциальных игр. Теорема 1.1 послужила основой для применения этого интеграла к решению дифференциальных игр преследования [1], [11], [12], а также разработки численных процедур построения и кусочно линейных аппроксимаций.² Однако во многих задачах синтеза “гарантирующего” управления возникает необходимость вычислять опорную функцию $\rho(l | \mathcal{W}[t])$ и сам альтернированный интеграл $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})$ как функцию времени. Основное препятствие на этом пути — необходимость многократного и достаточно громоздкого вычисления разности положительно однородных функций, соответствующего вычислению опорной функции геометрической разности выпуклых множеств. В этой связи кроме обсуждения некоторых полезных приложений альтернированного интеграла (сверх изложенного в [11]) остановимся также на конструкции, в основе

²См. также [13].

которой лежит *эллипсоидальное исчисление*, разработанное для решения задач синтеза управления с обратной связью и теории игр [7].³ Эта конструкция позволяет обойти проблему овыпукления и, в частности, эффективно решать целый класс задач управления с обратной связью при неопределенности с неквадратичными “геометрическими” ограничениями на параметры возмущений (см. [7]).

§ 2. Функции цены в задаче синтеза. Последовательный максимин

Рассмотрим задачу о приведении объекта на заданное множество при помощи позиционного управления $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$ в условиях воздействия неопределенной внешней помехи (см. задачу 1.1). В такой постановке задача не содержит критерия оптимизации: необходимо найти лишь некоторое “гарантирующее” решение. Тем не менее будем сводить задачу к экстремальной, применяя методы динамического программирования (ДП), в рамках подходящих *минимаксных* задач. С этой целью рассмотрим *функцию цены*

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{ \mathcal{J}(t, x) : \mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}, x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot) \}, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{J}(t, x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M})$$

и $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — множество всех траекторий $x(\cdot)$ включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x, \quad (2.2)$$

порожденного заданной стратегией $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$.

Для функции цены (2.1) можно составить формальное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (Г–Я–Б–А):

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t), \quad v \in \mathcal{Q}(t), \quad (2.3)$$

с краевым условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}). \quad (2.4)$$

В общем случае последнее уравнение может не иметь классического решения. Тогда необходимо говорить о вязкостных решениях [15] или эквивалентных им минимаксных решениях [16] (см. также [17]–[19]). Однако в рамках рассматриваемой задачи функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ оказывается выпуклой или квазивыпуклой по x , в связи с чем решения соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана и Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса не выходят за рамки вязкостных или даже классических.

Рассмотрим иную интерпретацию функции цены $\mathcal{V}(t, x)$. А именно: для фиксированного разбиения Σ_m отрезка $[\tau, t_1]$ определим последовательно набор функций

$$V_m^+(t_1 - \sigma_1, x) = \{ \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) : t_1 - \sigma_1 \leq t \leq t_1, x(t_1 - \sigma_1) = x \},$$

³Эллипсоидальное исчисление предназначено для точного представления выпуклых множеств при помощи параметрических семейств эллипсоидов в отличие от аппроксимаций одним или несколькими эллипсоидами, как это сделано в [14].

далее,

$$\begin{aligned} V_m^+(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) \\ = \left\{ \max_v \min_u V_m^+(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) : \right. \\ \left. t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \leq t \leq t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \right\} \end{aligned}$$

и, наконец, в точке $\tau = t_1 - \sum_1^m \sigma_i$

$$V_m^+(\tau, x) = \left\{ \max_v \min_u V_m^+(\tau + \sigma_m, x(\tau + \sigma_m)) : \tau \leq t \leq \tau + \sigma_m, x(\tau) = x \right\},$$

где, как и ранее, $u(t) \in \mathcal{P}(t)$, $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ почти всюду на соответствующих интервалах $[t - \sum^{k+1} \sigma_i, t - \sum^k \sigma_i]$. Всюду выше предполагаем, что “максимины” существуют.

Для каждого m функция $V_m^+(\tau, x)$ может рассматриваться как функция цены задачи программного управления с коррекцией в моменты времени $t, t + \sigma_m, \dots, t_1 - \sigma_1, t_1$.⁴ Как станет видно из дальнейшего, предел функций цены $V_m^+(\tau, x)$ будет совпадать с функцией цены $\mathcal{V}(\tau, x)$ задачи 1.1.

ЛЕММА 2.1. *При $\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, m\} \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $\sum_{i=1}^m \sigma_i = t_1 - t$ существует поточечный предел*

$$V^+(\tau, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m^+(\tau, x), \quad (2.5)$$

не зависящий от разбиения Σ_m .

Функцию $V^+(\tau, x)$ будем называть *последовательным максимином*. Доказательство леммы 2.1 следует из леммы 2.3, которая будет доказана ниже.

Обозначим

$$V^+(\tau, x) = V^+(\tau, x | V^+(t_1, \cdot)), \quad V^+(t_1, x) \equiv d^2(x, \mathcal{M}). \quad (2.6)$$

Непосредственной проверкой устанавливаются следующие свойства последовательного максимины.

ЛЕММА 2.2. (i) *Функция $V^+(\tau, x)$ удовлетворяет полугрупповому свойству*

$$V^+(\tau, x | V^+(\tau_1, \cdot)) = V^+(\tau, x | V^+(t, \cdot | V^+(t_1, \cdot))), \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (2.7)$$

(ii) *Справедливо неравенство*

$$V^+(t, x) \geq \left\{ \max_v \min_u V^+(t + \sigma, x(t + \sigma)) : x(t) = x \right\}, \quad \sigma \geq 0. \quad (2.8)$$

Отметим связь функции $V^+(\tau, x)$ с альтернированным интегралом.

⁴Такое управление иногда называют *кусочно программным*. Другие аспекты этой задачи рассмотрены в монографии [20].

ЛЕММА 2.3. *Справедливо соотношение*

$$V^+(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})),$$

где $\mathcal{W}[\tau] = \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{J}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ – значение альтернированного интеграла (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать утверждение леммы, проведем явное вычисление значения критерия $d^2(x, \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}))$, используя технику выпуклого анализа (см., например, [7; разделы 1.5–1.8]).

Функция $\phi^*(l)$, сопряженная по Фенхелю к $\phi(x) = d^2(x, \mathcal{M})$, равна (см. [21])

$$\begin{aligned} \phi^*(l) &= \sup\{(l, x) - \phi(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \max\{\sup\{(l, x) - (x - q, x - q) : x \in \mathbb{R}^n\} : q \in \mathcal{M}\} \\ &= \max\left\{(l, q) + \frac{1}{4}(l, l) : q \in \mathcal{M}\right\} = \rho(l | \mathcal{M}) + \frac{1}{4}(l, l). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку вторая сопряженная ϕ^{**} к собственной выпуклой функции ϕ совпадает с ней самой, можем записать⁵

$$\begin{aligned} V_m^+(\tau, x) &= \max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} d^2(x[t_1], \mathcal{M}) = \max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \max_l \left[(l, x[t_1]) - \rho(l | \mathcal{M}) - \frac{1}{4}(l, l) \right] \\ &= \max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \max_l \left[(l, x) + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (l, u(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (l, v(\tau)) d\tau - \rho(l | \mathcal{M}) - \frac{1}{4}(l, l) \right]. \end{aligned}$$

Функция, стоящая в квадратных скобках, линейна по $u(\cdot)$, вогнута по l и стремится к бесконечности при $\|l\| \rightarrow \infty$. Следовательно, операции взятия минимума и максимума перестановочны [22]. Значит, предыдущее равенство может быть продолжено следующим образом:

$$\begin{aligned} V_m^+(\tau, x) &= \max_{v(\cdot)} \max_l \left[(l, x) - \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \rho(l | -\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (l, v(\tau)) d\tau - \rho(l | \mathcal{M}) - \frac{1}{4}(l, l) \right] \\ &= \max_l \left[(l, x) - \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \rho(l | -\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau - \rho(l | \mathcal{M}) - \frac{1}{4}(l, l) \right] \\ &= \max_l \left[(l, x) - \left(\rho(l | \mathcal{M}) + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \rho(l | -\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau + \frac{1}{4}(l, l) \right) \right] \end{aligned}$$

⁵ Всюду, где sup и inf достигается, будем писать max и min соответственно.

$$= \max_l \left[(l, x) - \text{conv} \left(\rho(l | \mathcal{M}) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | - \mathcal{P}(\tau)) d\tau - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau + \frac{1}{4}(l, l) \right) \right].$$

Последний переход использует тот факт, что максимум функции F совпадает с максимумом ее вогнутой оболочки $\text{conc } F$ и справедливо равенство $\text{conc } F = -\text{conv}(-F)$. Представив вектор $l \neq 0$ в виде $l = \alpha l'$, $\alpha = \|l\|$, с учетом

$$d(x, M) = \max\{(l, x) - \rho(l | M) : \|l\| \leq 1\} \quad (2.9')$$

будем далее иметь

$$\begin{aligned} V_m^+(\tau, x) &= \max_{\alpha \geq 0} \max_{\|l\| \leq 1} \left[(\alpha l, x) - \text{conv} \left(\rho(\alpha l | \mathcal{M}) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(\alpha l | - \mathcal{P}(\tau)) d\tau - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(\alpha l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau + \frac{1}{4}(\alpha l, \alpha l) \right) \right] \\ &= \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha \max_{\|l\| \leq 1} \left[(l, x) - \text{conv} \left(\rho(l | \mathcal{M}) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | - \mathcal{P}(\tau)) d\tau - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right) \right] - \frac{\alpha^2}{4} \right) \\ &= \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha \max_{\|l\| \leq 1} \left[(l, x) - \rho \left(l | \left(\mathcal{M} - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right) \right] - \frac{\alpha^2}{4} \right) \\ &= \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha d \left(x, \left(\mathcal{M} - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right) - \frac{\alpha^2}{4} \right) \\ &= d^2 \left(x, \left(\mathcal{M} - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right) \\ &= d^2(x, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})). \end{aligned}$$

По индукции для произвольного разбиения Σ_m имеем

$$V_m^+(t, x) = d^2(x, \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)),$$

откуда в силу непрерывности функции расстояния получаем

$$\begin{aligned} V^+(t, x) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0+} V_m^+(t, x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} d^2(x, \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)) \\ &= d^2(x, \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)) = d^2(x(t), \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})). \end{aligned}$$

В качестве следствия получаем утверждение.

ЛЕММА 2.4. *Альтернированный интеграл Понтрягина является множеством уровня последовательного максимина*

$$\mathcal{J}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : V^+(\tau, x) \leq 0\}.$$

§3. Функции цены в задаче синтеза. Последовательный минимакс

Теперь рассмотрим задачу, тесно связанную с предыдущей. Для произвольно-го Σ_m определим последовательно набор функций аналогично тому, как это было сделано ранее, изменяя порядок следования максимума и минимума:

$$\begin{aligned} V_m^-(t_1 - \sigma_1, x) &= \left\{ \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) : x(t_1 - \sigma_1) = x, t_1 - \sigma_1 \leq t \leq t_1 \right\}, \\ V_m^-(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) &= \left\{ \min_u \max_v V_m^-(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) : x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x, \right. \\ &\quad \left. t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \leq t \leq t_1 - \sigma_1 \right\}, \dots, \\ V_m^-(t, x) &= \left\{ \min_u \max_v V_m^-(\tau + \sigma_m, x(\tau + \sigma_m)) : x(\tau + \sigma_m) = x, \tau \leq t \leq \tau + \sigma_m \right\}. \end{aligned}$$

Всюду, как и прежде, предполагаем, что соответствующие минимумы и максимумы существуют.

ЛЕММА 3.1. *При $\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, m\} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \sum_{i=1}^m \sigma_i = t_1 - t$ существует поточечный предел*

$$V^-(\tau, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m^-(\tau, x), \quad (3.1)$$

не зависящий от разбиения Σ_m .

Функцию $V^-(\tau, x)$ назовем *последовательным минимаксом*, вводя обозначение

$$V^-(\tau, x) = V^-(\tau, x | V^-(t_1, \cdot)), \quad V^-(t_1, x) \equiv d^2(x, \mathcal{M}).$$

Непосредственной проверкой устанавливаются следующие свойства последовательного минимакса.

ЛЕММА 3.2. (i) *Функция $V^-(\tau, x)$ удовлетворяет полугрупповому свойству*

$$V^-(\tau, x | V^-(\tau_1, \cdot)) = V^-(\tau, x | V^-(t, \cdot | V^-(t_1, \cdot))), \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (3.2)$$

(ii) *Справедливо неравенство*

$$V^-(t, x) \leq \left\{ \min_u \max_v V^-(t + \sigma, x(t + \sigma)) : x(t) = x \right\}, \quad \sigma \geq 0. \quad (3.3)$$

Поскольку альтернированный интеграл $\mathcal{J}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ совпадает со множеством уровня функции $V^+(\tau, x)$, возникает естественный вопрос: как интерпретировать множество уровня функции $V^-(\tau, x)$? Оказывается, что это множество также является некоторым многозначным интегралом, к определению которого приступаем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Множество разрешимости $W^-[s]$ минимаксного типа (в классе программных управлений) определим как совокупность векторов*

$$W^-[s] = W^-(s, t, \mathcal{M}) = \left\{ x : \left\{ \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) : s \leq t_1, x(s) = x \right\} \leq 0 \right\}.$$

Аналогично лемме 1.1 может быть доказано утверждение.

ЛЕММА 3.3. Для $W^-[s]$ справедлива формула

$$W^-(s, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_s^{t_1} \mathcal{Q}(t) dt \right) + \int_s^{t_1} (-\mathcal{P}(t)) dt, \quad t_0 \leq s \leq t_1. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированных $u(\cdot), v(\cdot)$, удовлетворяющих ограничениям (1.4), решение уравнения (1.3) имеет вид (1.5). Следовательно,

$$\begin{aligned} W^-[s] &= \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \left\{ x^* : x^* = x(t_1) - \int_s^{t_1} u(\tau) d\tau - \int_s^{t_1} v(\tau) d\tau, x(t_1) \in \mathcal{M} \right\} \\ &= \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{M} - \int_s^{t_1} u(\tau) d\tau - \int_s^{t_1} v(\tau) d\tau \right\} \\ &= \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \left\{ \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_s^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right) - \int_s^{t_1} (l, u(\tau)) d\tau \right\} \\ &= \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_s^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) + \int_s^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Теперь, аналогично построению альтернированного интеграла Понтрягина $\mathcal{J}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, рассмотрим суперпозицию множеств $W^-(t, t_1, \mathcal{M})$ для произвольного разбиения Σ_m отрезка $t \leq \tau \leq t_1$. Получим аналитическое выражение для интегральной суммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) &= \left(\dots \left(\left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t + \sigma_m} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Описанная схема реализует предельный случай *неупреждающего программного управления*. Именно, на j -м шаге вычисляется множество $W_m^-[t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i]$ всех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых *существует* управление $u = u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$, $t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i \leq \tau \leq t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i$, приводящее решение системы (1.3) с начальным условием $x(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i) = x$ во множество $W_m^-[t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i]$ за время σ_j для *любого* возмущения $v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau)$.

Формальная процедура, описанная выше, предполагает, что все множества $W_m^-[\cdot]$ не пусты. Для этого необходимо принять предположение, аналогичное предположению 1.1.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.1. *Существуют непрерывная функция $g(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и число $r > 0$ такие, что для любого разбиения Σ_m справедливо включение⁶*

$$g\left(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i\right) + rB \subseteq W_m^-\left[t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i\right], \quad j = 1, \dots, m.$$

⁶Эти предположения о невырожденности не являются лишь техническими условиями. Например, в отсутствии подобных предположений сформулированная и доказанная ниже теорема 3.1 может быть неверна.

ЛЕММА 3.4. *При*

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, m\} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^m \sigma_i = t_1 - t$$

существует хаусдорфов предел $\mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M})$:

$$\lim h(\mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m), \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M})) = 0.$$

Множество

$$\mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^-(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^-[t], \quad (3.5)$$

следуя [23], будем называть *альтернированным интегралом Л. С. Понтрягина второго рода*.

ЛЕММА 3.5. *Справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} V^-(\tau, x) &= d^2(x, \mathcal{W}^-(\tau, t_1, \mathcal{M})), \\ \mathcal{J}^-(\tau, t_1, \mathcal{M}) &= \{x : V^-(\tau, x) \leq 0\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь тем, что линейную форму можно выносить за знак выпуклой оболочки, и свойством $\max F = \max \operatorname{conc} F = \max(-\operatorname{conv}(-F))$, преобразуем выражение для $V_m^-(t_1 - \sigma_1, x)$. Тогда с учетом (2.9) имеем

$$\begin{aligned} V_m^-(t_1 - \sigma_1, x) &= \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \\ &= \min_u \max_v \max_l \left[(l, x(t_1)) - \rho(l | \mathcal{M}) - \frac{1}{4}(l, l) \right] \\ &= \min_u \max_v \max_l \left[(l, x) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l, u(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l, v(\tau)) d\tau - \rho(l | \mathcal{M}) - \frac{1}{4}(l, l) \right] \\ &= \min_u \max_l \left[(l, x) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l, u(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau - \rho(l | \mathcal{M}) - \frac{1}{4}(l, l) \right] \\ &= \min_u \max_l \left[(l, x) - \operatorname{conv} \left(\rho(l | \mathcal{M}) - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l, u(\tau)) d\tau + \frac{1}{4}(l, l) \right) \right] \\ &= \min_u \max_{\alpha \geq 0} \max_{|l| \leq 1} \left[(\alpha l, x) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (\alpha l, u(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{conv} \left(\rho(\alpha l | \mathcal{M}) - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(\alpha l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau + \frac{1}{4}(\alpha l, \alpha l) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min_u \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha \max_{|l| \leq 1} \left[(l, x) - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l | u(\tau)) d\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{conv} \left(\rho(l | \mathcal{M}) - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right) \right] - \frac{\alpha^2}{4} \right) \\
&= \min_u \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha \max_{|l| \leq 1} \left[(l, x) - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l | u(\tau)) d\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \rho \left(l | \mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) \right] - \frac{\alpha^2}{4} \right).
\end{aligned}$$

Функция, стоящая в квадратных скобках, линейна по u , вогнута по $\alpha = |l|$ и стремится к бесконечности при $\alpha \rightarrow \infty$. Следовательно, операции взятия минимума по u и максимума по α перестановочны (см. [22]). Значит, равенство может быть продолжено:

$$\begin{aligned}
V_m^-(t_1 - \sigma_1, x) &= \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha \min_u \max_{|l| \leq 1} \left[(l, x) - \rho \left(l | \mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l | u(\tau)) d\tau \right] - \frac{\alpha^2}{4} \right).
\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, линейно по u и вогнуто по l . Вновь применяя теорему о перестановке максимума и минимума, с учетом формулы (2.9') имеем

$$\begin{aligned}
V_m^-(t_1 - \sigma_1, x) &= \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha \max_{|l| \leq 1} \min_u \left[(l, x) - \rho \left(l | \mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (l | u(\tau)) d\tau \right] - \frac{\alpha^2}{4} \right) \\
&= \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha \max_{|l| \leq 1} \left[(l, x) - \rho \left(l | \mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{P}(\tau) d\tau \right] - \frac{\alpha^2}{4} \right) \\
&= \max_{\alpha \geq 0} \left(\alpha d \left(x, \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{P}(\tau) d\tau \right) - \frac{\alpha^2}{4} \right) \\
&= d^2 \left(x, \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \rho(l | \mathcal{Q}(\tau)) d\tau \right) - \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \\
&= d^2(x, W^-(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})).
\end{aligned}$$

По индукции получаем

$$V_m^-(t, x) = d^2(x, \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)).$$

Тогда в силу непрерывности функции расстояния имеем

$$\begin{aligned} V_m^-(t, x) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0+} V_m^-(t, x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} d^2(x, \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)) \\ &= d^2(x, \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)) = d^2(x(t), \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M})). \end{aligned}$$

Последнее означает, что альтернированный интеграл второго рода является множеством уровня $\mathcal{J}^-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : V^-(\tau, x) \leq 0\}$ функции $V_m^-(t, x)$.

Вместе со свойством аддитивности интеграла $\mathcal{J}^-(\tau, t_1, \mathcal{M})$ отсюда следует утверждение.

ЛЕММА 3.6. *Многозначное отображение $\mathcal{W}^-(t, t_1, \mathcal{M})$ удовлетворяет полугрупповому свойству (в понятном времени), а именно:*

$$\mathcal{W}^-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^-(\tau, t, \mathcal{W}^-(t, t_1, \mathcal{M})), \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (3.6)$$

Необходимо отметить, что альтернированные интегралы (1.9) и (3.5) соответствуют пределам разных *информационных схем* и, как следствие, разных кусочно программных управлений: упреждающего и неупреждающего. Так, альтернированный интеграл Понтрягина предполагает появление текущей информации о помехах с опережением, в то время как интеграл второго рода – с запаздыванием. Тем не менее, в пределе эти схемы дают один и тот же результат, а именно, справедливо утверждение.⁷

ТЕОРЕМА 3.1. *Альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго рода: $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^-(t, t_1, \mathcal{M})$.*

Для того чтобы проверить справедливость теоремы, докажем лемму о непрерывной зависимости альтернированного интеграла от целевого множества и подынтегральных функций. Для определенности сформулируем и докажем утверждение для альтернированного интеграла второго рода.

ЛЕММА 3.7. *Пусть $U(\tau)$, $\tilde{U}(\tau)$, $V(\tau)$, $\tilde{V}(\tau)$ – непрерывные многозначные отображения на отрезке $[t, t_1]$. Пусть множества $\mathcal{M}$, $\tilde{\mathcal{M}}$, $U(\tau)$, $\tilde{U}(\tau)$, $V(\tau)$, $\tilde{V}(\tau) \in \text{comp } \mathbb{R}^n$ таковы, что*

$$h(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M}) \leq \tilde{\delta}, \quad (3.7)$$

$$h(\tilde{U}(\tau), U(\tau)) \leq \alpha(\tau), \quad (3.8)$$

$$h(V(\tau), \tilde{V}(\tau)) \leq \beta(\tau), \quad (3.9)$$

где $\tilde{\delta}$ – положительное число, $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ – неотрицательные функции, интегрируемые на $[t, t_1]$. Пусть также справедлива оценка

$$2J(t) = \frac{2}{r} \left(\tilde{\delta} + \int_t^{t_1} (\alpha(\tau) + \beta(\tau)) d\tau \right) \exp \left(\frac{1}{r} C_1(t_1 - t) \right) \leq 1, \quad (3.10)$$

$$C_1 = \max_{\tau \in [t, t_1]} \max \{ \|u(\tau) - v(\tau)\| : u(\tau) \in \tilde{U}(\tau), v(\tau) \in \tilde{V}(\tau) \}. \quad (3.11)$$

⁷Интерпретируя теорему 3.1, следует помнить о том, что при невыполнении предположений 1.1, 3.1 теорема может быть неверна.

Тогда имеет место соотношение

$$h(\mathcal{J}^-(t, t_1, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{U}(\cdot), \widetilde{V}(\cdot)), \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, U(\cdot), V(\cdot))) \leq \varepsilon B, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon = \frac{4J(t)}{(1-J(t))}(C_0 + C_1(t_1 - t)), \quad C_0 = \max_{x \in \mathcal{M}} \|x\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем без специальных ссылок будем использовать следующие свойства суммы и геометрической разности выпуклых множеств (см., например, [24]):

$$(A + B) \dot{-} B = A, \quad (A \dot{-} C) + B \subseteq (A + B) \dot{-} C,$$

$$(A \dot{-} B) + B \subseteq A, \quad (A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B + C).$$

Пусть набор $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, $\sigma_k > 0$, $t_1 - t = \sum_{i=1}^m \sigma_k$, фиксирует разбиение Σ_m отрезка $t \leq \tau \leq t_1$ вида

$$t_1 - \sum_{i=1}^m \sigma_k, \dots, t_1 - \sigma_1, t_1.$$

Будем обозначать отрезки $[t_1 - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_j, t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_j]$ разбиения Σ_m как $[\sigma_k]$, $k = 1, \dots, m$. Определим числа $\alpha_k = \int_{[\sigma_k]} \alpha(\tau) d\tau$, $\beta_k = \int_{[\sigma_k]} \beta(\tau) d\tau$, а также множества $U_k = \int_{[\sigma_k]} (-U(\tau)) d\tau$, $V_k = \int_{[\sigma_k]} V(\tau) d\tau$, $\widetilde{U}_k = \int_{[\sigma_k]} (-\widetilde{U}(\tau)) d\tau$, $\widetilde{V}_k = \int_{[\sigma_k]} \widetilde{V}(\tau) d\tau$, $\mathcal{M}_k = (\mathcal{M}_{k-1} \dot{-} V_k) + U_k$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}_k = (\widetilde{\mathcal{M}}_{k-1} \dot{-} V_k) + U_k$, $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, m$. Здесь $\widetilde{\mathcal{M}}_k$ и $\mathcal{M}_k$ суть множества $W_m^-[t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i]$, построенные по $\widetilde{\mathcal{M}}$, $\widetilde{U}(t)$, $\widetilde{V}(t)$ и $\mathcal{M}$, $U(t)$, $V(t)$ соответственно.

Пусть $a_k = g(t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i)$, $a_0 = g(t_1)$, тогда

$$a_k + rB \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.13)$$

Покажем прежде всего, что достаточно доказать непрерывную зависимость $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, U(\cdot), V(\cdot))$ только от целевого множества $\mathcal{M}$. Действительно, поскольку

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_m &= ((\dots ((\widetilde{\mathcal{M}} \dot{-} \widetilde{V}_1) + \widetilde{U}_1) \dots) \dot{-} \widetilde{V}_m) + \widetilde{U}_m \\ &\subseteq ((\dots ((\widetilde{\mathcal{M}} \dot{-} \widetilde{V}_1) + (U_1 + \alpha_1 B)) \dots) \dot{-} \widetilde{V}_m) + (U_m + \alpha_m B) \\ &\subseteq \left(\left(\dots \left(\left(\left(\widetilde{\mathcal{M}} + \left(\int_t^{t_1} \alpha(\tau) d\tau \right) B \right) \dot{-} \widetilde{V}_1 \right) + U_1 \right) \dots \right) \dot{-} \widetilde{V}_m \right) + U_m \\ &\subseteq \left(\left(\dots \left(\left(\left(\left(\widetilde{\mathcal{M}} + \left(\int_t^{t_1} \alpha(\tau) d\tau + \int_t^{t_1} \beta(\tau) d\tau \right) B \right) \right) \right) \right) \right) \right) \dot{-} \widetilde{V}_1 + U_1 \dots \dot{-} \widetilde{V}_m + U_m \\ &\quad \dot{-} \left(\int_t^{t_1} \beta(\tau) d\tau B \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq \left(\left(\dots \left(\left(\left(\widetilde{\mathcal{M}} + \left(\int_t^{t_1} (\alpha(\tau) + \beta(\tau)) d\tau \right) B \right) \dot{-} (\widetilde{V}_1 + \beta_1 B) \right) + U_1 \right) \dots \right) \right. \\
&\quad \left. \dot{-} (\widetilde{V}_m + \beta_m B) \right) + U_m \\
&\subseteq \left(\left(\dots \left(\left(\left(\left(\left(\widetilde{\mathcal{M}} + \left(\int_t^{t_1} (\alpha(\tau) + \beta(\tau)) d\tau \right) B \right) \right) \dot{-} V_1 \right) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. + U_1 \right) \dots \right) \dot{-} V_m \right) + U_m,
\end{aligned}$$

то возмущение подынтегральных функций дает не более чем аддитивный вклад в возмущение целевого множества. Поэтому вместо (3.7) запишем

$$h(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M}) \leq \delta, \quad \delta = \widetilde{\delta} + \int_t^{t_1} (\alpha(\tau) + \beta(\tau)) d\tau. \quad (3.14)$$

Будем также считать, что $\widetilde{U}(\tau) = U(\tau)$, $\widetilde{V}(\tau) = V(\tau)$. Докажем включение

$$\gamma_k \widetilde{\mathcal{M}}_k + \Gamma_k \subseteq \mathcal{M}_k, \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1 - \frac{\delta}{r}, \quad \gamma_k = \gamma_{k-1} - r^{-1} C_1 \sigma_{k-1} (1 - \gamma_{k-1}), \\
\Gamma_0 &= \left(\frac{\delta}{r} \right) a_0, \quad \Gamma_k = \Gamma_{k-1} + (\gamma_{k-1} - \gamma_k) a_k, \quad k = 1, \dots, m.
\end{aligned} \quad (3.16)$$

Доказательство будем проводить по индукции, аналогично [25]. Из (3.16), (3.15) следует

$$\mathcal{M}_0 \supseteq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \dot{-} \delta B \supseteq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \dot{-} (\delta/r) (\widetilde{\mathcal{M}}_0 - a_0) = (1 - \delta/r) \widetilde{\mathcal{M}}_0 + (\delta/r) a_0 = \gamma_0 \widetilde{\mathcal{M}}_0 + \Gamma_0.$$

Пусть (3.15) выполнено для $k = i$, тогда с учетом (3.12), (3.15) получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{i+1} &\supseteq ((\mathcal{M}_i \dot{-} \gamma_i V_{i+1}) + \gamma_i U_{i+1}) \dot{-} C_1 \sigma_i (1 - \gamma_i) B \\
&\supseteq ((\gamma_i \widetilde{\mathcal{M}}_i + \Gamma_i) \dot{-} \gamma_i V_{i+1}) + \gamma_i U_{i+1} \dot{-} C_1 \sigma_i (1 - \gamma_i) B \\
&\supseteq \gamma_i \widetilde{\mathcal{M}}_{i+1} \dot{-} C_1 \sigma_i (1 - \gamma_i) r^{-1} (\widetilde{\mathcal{M}}_{i+1} - a_{i+1}) + \Gamma_i \\
&\supseteq \gamma_{i+1} \widetilde{\mathcal{M}}_{i+1} + \Gamma_{i+1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу (3.16)

$$(1 - \gamma_{k+1}) = (1 - \gamma_k)(1 + r^{-1} C_1 \sigma_k) \leq (1 - \gamma_k) \exp(r^{-1} C_1 \sigma_k).$$

Отсюда по индукции $(1 - \gamma_m) \leq J(t)$.

Заметим далее, что из (3.16) вытекает $|\Gamma_k| \leq |\Gamma_{k-1}| + (\gamma_{k-1} - \gamma_k) |a_k|$, тогда

$$\Gamma_m \leq (1 - \gamma_m) \max_{1 \leq i \leq m} |a_i| \leq J(t) \max_{x \in \widetilde{\mathcal{M}}_i} |x| \leq J(t) (C_0 + C_1(t_1 - t)).$$

Поэтому с учетом (3.15) имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}_m &\subseteq \gamma_m^{-1} (\mathcal{M}_m - \Gamma_m) \subseteq \mathcal{M}_m + (\gamma_m^{-1} - 1) \mathcal{M}_m - \gamma_m^{-1} \Gamma_m \\
&\subseteq \mathcal{M}_m + \frac{4J(t)}{1 - J(t)} (C_0 + C_1(t_1 - t)) B \subseteq \mathcal{M}_m + \varepsilon B.
\end{aligned}$$

Обратное включение доказывается заменой $\mathcal{M}_k$ на $\widetilde{\mathcal{M}}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Определим множества

$$\mathcal{P}_i = -\frac{1}{\sigma_i} \int_{[\sigma_i]} \mathcal{P}(\tau) d\tau, \quad \mathcal{Q}_i = \frac{1}{\sigma_i} \int_{[\sigma_i]} \mathcal{Q}(\tau) d\tau.$$

Интегральные суммы записываются формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) &= (\dots ((\mathcal{M} + \sigma_1 \mathcal{P}_1) \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}_1 \dots) + \sigma_i \mathcal{P}_i) \dot{-} \sigma_i \mathcal{Q}_i, \\ \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) &= (\dots ((\mathcal{M} \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}_1) + \sigma_1 \mathcal{P}_1 \dots) \dot{-} \sigma_i \mathcal{Q}_i) + \sigma_i \mathcal{P}_i. \end{aligned}$$

Положим $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \sigma_1 \mathcal{P}_1$, $\widetilde{U}_i = \sigma_{i+1} \mathcal{P}_{i+1}$ ($i < m$), $\widetilde{U}_m = \sigma_m \mathcal{P}_m$, $\widetilde{V}_i = \sigma_i \mathcal{Q}_i$, $U_i = \sigma_i \mathcal{P}_i$, $V_i = \sigma_i \mathcal{Q}_i$ ($i = 1, \dots, m$). В силу непрерывности $\mathcal{P}(\tau)$ справедливо включение $\mathcal{P}_{i+1} \subseteq \mathcal{P}_i + \sigma C B$, где $\sigma = \max_i \sigma_i$, C — некоторая константа. Следовательно, в обозначениях предыдущей леммы

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\sigma}{2} \max_{\tau \in [t, t_1]} \text{diam } \mathcal{P}(\tau), \quad \alpha_i = \sigma^2 C, \quad \beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_m &\subseteq \mathcal{M}_m + O(\sigma) B. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) = \widetilde{\mathcal{M}}_m \dot{-} \sigma \mathcal{P}_m$, $\mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) = \mathcal{M}_m$. Значит,

$$\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) \subseteq \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) + O(\sigma) B + \sigma \mathcal{P}_m \subseteq \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m) + O(\sigma) B$$

и $h(\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m), \mathcal{J}^-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_m)) = O(\sigma)$, что завершает доказательство теоремы.

§ 4. Решение задачи синтеза

Сформулируем основные результаты.

ТЕОРЕМА 4.1. (i) *Последовательные максимин $V^+(\tau, x)$ и минимакс $V^-(\tau, x)$ равны и совпадают с функцией цены $\mathcal{V}(\tau, x)$, а именно:*

$$V^+(\tau, x) \equiv V^-(\tau, x) \equiv \mathcal{V}(\tau, x).$$

(ii) *Множество разрешимости задачи 1.1 допускает следующие эквивалентные интерпретации:*

$$\mathcal{J}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*[\tau] = \{x : \mathcal{V}(\tau) \leq 0\}, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1. \quad (4.1)$$

Именно, альтернированный интеграл Понтрягина $\mathcal{J}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, сечение $\mathcal{W}^*[\tau]$ моста Красовского и множество уровня определенной нами функции $\mathcal{V}(\tau, x)$ суть одно и то же множество.

Кроме того, функция цены $\mathcal{V}(\tau, x)$ обладает следующими свойствами.

ТЕОРЕМА 4.2. (i) *Справедлив принцип оптимальности*

$$\mathcal{V}(\tau, x | \mathcal{V}(\tau_1, \cdot)) = \mathcal{V}(\tau, x | \mathcal{V}(t, \cdot | \mathcal{V}(t_1, \cdot))), \quad \mathcal{V}(t_1, x) \equiv d^2(x, \mathcal{M}),$$

$$\tau \leq t \leq t_1.$$

(ii) *Если существует непрерывная частная производная $\partial \rho(l | \mathcal{W}[t]) / \partial t$ $\forall l \in \mathbb{R}^n$, то функция $\mathcal{V}(t, x)$ является классическим решением уравнения Г–Я–Б–А*

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0$$

с краевым условием $\mathcal{V}(t_1, x) = h_+^2(x, \mathcal{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку последовательный максимум и последовательный минимум равны между собой, утверждение (i) следует из леммы 2.2 и леммы 3.1.

Докажем вторую часть утверждения. Найдем производную функции $\mathcal{V}(t, x)$ в силу системы (1.3)

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(t, x) = 2h_+(x, t) \frac{d}{dt} h_+(t, x),$$

где

$$h_+(t, x) = h_+(x, \mathcal{W}[t]) = \max\{l, x - \rho(l | \mathcal{W}[t]) : \|l\| \leq 1\} = (l^0, x) - \rho(l^0 | \mathcal{W}[t]).$$

Здесь $l^0 = l^0(t, x) \neq 0$ – единственный максимизатор при условии $h_+(t, x) > 0$ и $h_+(t, x) = 0$ при $l^0(t, x) = 0$. По теореме о дифференцировании максимума [26]

$$\left. \frac{d}{dt} \max_{q \in X} \Phi(q, t) \right|_{t=\tau} = \max_{q \in F} \left. \frac{d\Phi(q, t)}{dt} \right|_{t=\tau},$$

$$F = \operatorname{argmax}\{\Phi(q, \tau) : q \in X\},$$

будем далее иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} d(t, x) + \left(\frac{\partial}{\partial x} d(t, x), \dot{x} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \rho(l^0 | \mathcal{W}[t]) + (l^0, \dot{x}) = (l^0, u + v) - \frac{\partial}{\partial t} \rho(l^0 | \mathcal{W}[t]). \end{aligned}$$

Остается заметить, что $\partial \rho(l^0 | \mathcal{W}[t]) / \partial t$ и $l^0(t, x)$ ограничены, поэтому частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = -2d(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \rho(l^0 | \mathcal{W}[t]), \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = 2d(t, x) l^0(t, x)$$

существуют и непрерывны, и $\mathcal{V}(t, x)$ – функция класса $C^1[t_0, t_1]$.

Теперь докажем, что она удовлетворяет уравнению Г–Я–Б–А. Для функций $V^+(t, x), V^-(t, x)$ при $\sigma > 0$ справедливы неравенства

$$V^+(t - \sigma, x(t - \sigma)) \geq \{\max_v \min_u V^+(t, x) : x(t) = x\},$$

$$V^-(t - \sigma, x(t - \sigma)) \leq \{\min_u \max_v V^-(t, x) : x(t) = x\}.$$

Поскольку частные производные существуют, то, поделив обе части на σ , в пределе при $\sigma \rightarrow 0$ получаем

$$\max_v \min_u \frac{d}{dt} V^+(t, x) \leq 0, \quad \min_u \max_v \frac{d}{dt} V^-(t, x) \geq 0.$$

По теореме 4.1 функции $V^+(t, x)$ и $V^-(t, x)$ совпадают с $\mathcal{V}(t, x)$, и в силу линейности системы (1.3) выполнены условия теоремы о седловой точке (см. [27]). Отсюда имеем

$$\min_u \max_v \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(u + v) = \max_v \min_u \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(u + v),$$

и функция $\mathcal{V}(t, x)$ является решением уравнения Г–Я–Б–А.

Если решение (2.3), (2.4) удастся найти, то гарантирующая стратегия управления находится из соотношения

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \operatorname{argmin} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u \right) : u \in \mathcal{P}(t) \right\} \quad (4.2)$$

(если градиент $\partial \mathcal{V} / \partial x$ существует в точке (t, x)) или в общем случае

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \{u : \max_v \{dh_+^2(x, \mathcal{W}[t]) / dt : v \in \mathcal{Q}(t)\} \leq 0\}. \quad (4.3)$$

Таким образом, для того чтобы найти стратегию управления $\mathcal{U}_*$, достаточно знать лишь сечения $\mathcal{W}[t]$ функции цены $\mathcal{V}(t, x)$ ⁸. Поскольку интегрирование уравнения Гамильтона–Якоби, как правило, требует использования нетривиальных численных методов, будем исследовать и аппроксимировать лишь сечения функции цены $\mathcal{V}(t, x)$ вместо самой функции. Ограничиваясь сечениями функции $\mathcal{V}(t, x)$, удастся избежать интегрирования уравнения Г–Я–Б–А для класса задач, рассматриваемых в данной работе. По этой причине важно уметь находить сечения $\mathcal{W}[t]$, не вычисляя явно $\mathcal{V}(t, x)$. Однако сечение $\mathcal{W}[t] = \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})$ есть в точности значение альтернированного интеграла Понтрягина. Следовательно, задача о нелинейном синтезе управлений будет сведена к задаче о поиске аппроксимаций и точного представления этого интеграла.

В связи с дальнейшим полезно отметить следующий факт.

ЛЕММА 4.1. *Многозначная функция $\mathcal{W}^*[t]$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ является решением эволюционного уравнения*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h_+(\mathcal{W}^*[t - \sigma] + \sigma \mathcal{Q}(t), \mathcal{W}^*[t] - \sigma \mathcal{P}(t)) = 0, \quad \mathcal{W}^*[t_1] = \mathcal{M}. \quad (4.4)$$

*Она является максимальной по включению среди всех решений этого уравнения.*⁹

Функция $\mathcal{W}^*[t]$ является также “стабильным мостом” в соответствии с определением, данным в [2], [28]. Основное свойство решений (4.4) дает следующая

⁸В рамках сделанных нами предположений функция $\mathcal{V}(t, x)$ такова, что производная в (4.2) всегда существует и стратегия $\mathcal{U}_* \in U_{\mathcal{P}}$ всегда является допустимой.

⁹Решение $\mathcal{W}^*[t]$ уравнения (4.4) максимально по включению, если $\mathcal{W}^*[t] \supseteq \widetilde{\mathcal{W}}[t]$, где $\widetilde{\mathcal{W}}[t]$ – любое другое решение этого же уравнения.

ТЕОРЕМА 4.3. Все решения $x(t)$ ДВ

$$\dot{x} \in \mathcal{U}_*(t, x) + v(t), \quad x_\tau = x(\tau) \in \mathcal{W}[t], \quad (4.5)$$

удовлетворяют включению $x(t) \in \mathcal{W}[t]$, $\tau \leq t \leq t_1$, и, следовательно, достигают целевого множества $\mathcal{M} : x(t_1) \in \mathcal{M}$ при любом внешнем возмущении $v(t)$.

Получаемая таким образом стратегия $\mathcal{U}_*$ решает задачу синтеза при неопределенности.¹⁰ В рамках принятых нами предположений 1.1, 3.1 последняя теорема не требует условий одностипности ограничений на u , v (типа $\mathcal{Q}(t) = \alpha \mathcal{P}(t)$, $0 \leq \alpha \leq 1$).

Среди допустимых стратегий $\mathcal{U}(t, x)$, удовлетворяющих включению $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{U}_*(t, x)$ и, следовательно, теореме 4.3, лежит отображение $\mathcal{U}_e(t, x)$ – стратегия, получаемая на основе “экстремального прицеливания” [2], [28]. Эта стратегия определяется соотношением

$$\mathcal{U}_e(t, x) = \partial_l k(t, -l) = \operatorname{argmin}\{l^0, x) : u \in \mathcal{P}(t)\}. \quad (4.6)$$

Здесь $\partial_l k$ обозначает субдифференциал функции $k(t, l) = \rho(l \mid \mathcal{P}(t))$ по переменной l ; $l^0 = l^0(t, x) \neq 0$ – максимизатор

$$h_+(x, \mathcal{W}[t]) = \max\{(l, x) - \rho(l \mid \mathcal{W}[t]) : \|l\| \leq 1\} \quad (4.7)$$

при $h_+(t, x) > 0$. При $h_+(t, x) = 0$ будем полагать $l^0(t, x) = 0$.

Итак, зная трубку $\mathcal{W}^*[\cdot]$, в соответствии с описанными точными решениями получим стратегию управления $\mathcal{U}_*$, вычисление которой, таким образом, достигается в форме алгоритма. В то же время техника эллипсоидального исчисления, излагаемая в следующем параграфе, позволяет синтезировать управление в замкнутой форме, т.е. в виде так называемого “аналитического регулятора”.¹¹

Перейдем к описанию эллипсоидального представления множеств разрешимости $\mathcal{W}^*[t] = \mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})$.

§ 5. Эллипсоидальные аппроксимации

Будем рассматривать систему (1.2), предполагая, что множества $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, X^0 , $\mathcal{M}$ суть эллипсоиды. Невырожденный эллипсоид будем обозначать символом

$$\mathcal{E}(a, K) = \{x : (x - a, K^{-1}(x - a)) \leq 1\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где a – “центр”, $K > 0$ – “матрица” эллипсоида. В терминах включений будем иметь

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad x^0 \in \mathcal{E}(x^*, X_0), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M). \quad (5.1)$$

¹⁰Следует заметить, что отображение $\mathcal{U}_*$, вообще говоря, нелинейно, поэтому ДВ (4.5) также нелинейно.

¹¹Напомним, что возможность представления решений задач синтеза в виде аналитического регулятора имеет серьезное значение для практических реализаций теории.

Здесь непрерывные функции $p(t)$, $q(t)$ и вектор t предполагаются заданными вместе с непрерывными матричными функциями $P(t) > 0$, $Q(t) > 0$ и матрицей $M > 0$.

Как уже отмечалось выше, сечения $\mathcal{W}^*[t] = \mathcal{W}[t]$ функции цены $\mathcal{V}[t]$ изменяются с течением времени в соответствии с эволюционными уравнениями типа (4.4). Поэтому будем аппроксимировать $\mathcal{W}[t]$ при помощи эллипсоидозначных решений этих уравнений, используя формулы для внутренних и внешних эллипсоидальных аппроксимаций геометрической суммы и разности эллипсоидов, выведенные в монографии [7]. Приведем краткую сводку основных результатов, используемых в данной статье.

ТЕОРЕМА 5.1 [7; гл. 2]. Пусть $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(a_1, Q_1)$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(a_2, Q_2)$ – пара невырожденных эллипсоидов, $Q(p)$ – параметрическое семейство матриц

$$Q(p) = (1 + p^{-1})Q_1 + (1 + p)Q_2, \\ p \in \Pi^+ = [\lambda_{\min}^{1/2}, \lambda_{\max}^{1/2}],$$

где $\lambda_{\min} > 0$, $\lambda_{\max} < \infty$ – корни уравнения

$$\det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0$$

(относительные собственные значения пары матриц $\{Q_1, Q_2\}$).

Пусть

$$\Pi^- = \Pi^+ \cap (1, \lambda_{\min}),$$

$Q_+[S]$, $Q_-[S]$ – параметрические семейства матриц:

$$Q_+[S] = S^{-1}[(SQ_1S')^{1/2} + (SQ_2S')^{1/2}]^2 S'^{-1}, \\ Q_-[S] = S^{-1}[(SQ_1S')^{1/2} - (SQ_2S')^{1/2}]^2 S'^{-1},$$

где

$$S \in \Sigma = \{S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : S' = S, |S| \neq 0\}.$$

Тогда справедливы следующие включения:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q(p)) \quad \forall p \in \Pi^+, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q_+[S]) \quad \forall S \in \Sigma, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q_-[S]) \quad \forall S \in \Sigma, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q(-p)) \quad \forall p \in \Pi^-. \quad (5.5)$$

Более того, имеют место следующие точные представления:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \bigcap \left\{ \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q(p)) : p \in \Pi^+ \right\}, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \bigcup \left\{ \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q_+[S]) : S \in \Sigma \right\}, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 = \bigcap \left\{ \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q_-[S]) : S \in \Sigma \right\}, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 = \overline{\bigcup \left\{ \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q(-p)) : p \in \Pi^- \right\}}. \quad (5.9)$$

Формулы (5.2)–(5.5) и (5.6)–(5.9) отражают *геометрическую двойственность* взятия операций геометрической суммы и разности эллипсоидов. А именно, семейство *внешних* аппроксимаций (5.2) *геометрических сумм* эллипсоидов превращается заменой знака параметра p в семейство *внутренних* аппроксимаций (5.5) их *геометрической разности*, а семейство *внутренних* аппроксимаций (5.3) *суммы* заменой знака (от $Q + [S]$ к $Q - [S]$) переходит в семейство *внешних* аппроксимаций (5.4) *разности*. Из предыдущей теоремы также следует, что соответствующие семейства аппроксимаций $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2$ являются минимальными и максимальными по включению.

ТЕОРЕМА 5.2 [7; гл. 2]. (i) Пусть $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, тогда существует значение параметра $p \in \Pi^+$ такое, что

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q(p)) \subseteq \mathcal{E}. \quad (5.10)$$

(ii) Пусть $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, тогда существует матрица $S \in \Sigma$ такая, что

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q_+[S]) \subseteq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \quad (5.11)$$

(iii) Пусть $\text{int}(\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2) \neq \emptyset$ и $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2$, тогда существует матрица $S \in \Sigma$ такая, что

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q_-[S]) \subseteq \mathcal{E}. \quad (5.12)$$

(iv) Пусть $\text{int}(\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2) \neq \emptyset$ и $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2$, тогда существует значение $p \in \Pi^-$ такое, что

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q(-p)) \subseteq \mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2. \quad (5.13)$$

Итак, семейство $\{\mathcal{E}(a_1 + a_2, Q(p)), p \in \Pi^+\}$ представляет собой множество наилучших (минимальных по включению) внешних аппроксимаций суммы $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, а семейство $\{\mathcal{E}(a_1 + a_2, Q_+[S]), S \in \Sigma\}$ – множество наилучших (максимальных по включению) внутренних аппроксимаций этой суммы.

Аналогично, наилучшими внешними (минимальными по включению) и наилучшими внутренними (максимальными по включению) аппроксимациями геометрической разности $\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2$ являются $\mathcal{E}(a_1 - a_2, Q_-[S])$ и $\mathcal{E}(a_1 - a_2, Q(-p))$.

Перейдем к аппроксимациям трубки $\mathcal{W}^*[\cdot]$, начиная с внутренних аппроксимаций множества $\mathcal{W}^*[t] = \mathcal{W}[t]$. Отправным пунктом предлагаемой конструкции станет эволюционное уравнение для альтернированного интеграла Понтрягина, сходное с уравнением (4.4); в обозначениях (5.1) оно имеет вид

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} h_+(\mathcal{W}[t - \sigma], \{\mathcal{W}[t] - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))\} \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t))) = 0, \quad \mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}. \quad (5.14)$$

Напомним, что альтернированный интеграл является максимальным по включению решением (5.14). Однако даже в том случае, когда множества $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, X^0, \mathcal{M}$ эллипсоидозначны, сам интеграл, вообще говоря, эллипсоидом не является (см. [24]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Сумма и геометрическая разность двух эллипсоидов является эллипсоидом тогда и только тогда, когда они подобны, т.е. один можно получить из другого путем растяжения и параллельного переноса.*

По этой причине будем искать максимальное по включению эллипсоидальное решение (5.14), а именно: эллипсоидозначную функцию $\mathcal{E}_-[t]$, удовлетворяющую следующим свойствам:

(A1) $\mathcal{E}_-[t]$ удовлетворяет уравнению

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} h_+ (\mathcal{E}[t - \sigma], \{\mathcal{E}[t] - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))\} - \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t))) = 0 \quad (5.15)$$

для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и $\mathcal{E}[t_1] = \mathcal{E}(m, M)$,

(A2) $\mathcal{E}_-[t]$ — максимальное по включению решение уравнения (5.15).

Очевидно, что для функции, удовлетворяющей перечисленным требованиям, верно включение $\mathcal{E}_-[t] \subseteq \mathcal{W}[t]$.

ТЕОРЕМА 5.3. (i) *Эллипсоидозначная функция $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t))$, определяемая дифференциальными уравнениями*

$$\dot{x}^* = p(t) + q(t), \quad (5.16)$$

$$\dot{X}_-(t) = \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)Q(t) - H^{-1}(t)F(H(t), X_-(t), P(t))H'^{-1}(t), \quad (5.17)$$

с краевыми условиями

$$x(t_1) = m, X_-(t_1) = M \quad (5.18)$$

является решением (5.15). Здесь

$$F(H, X_-, P) = (HPH')^{1/2}(HX_-H')^{1/2} + (HX_-H')^{1/2}(HPH')^{1/2},$$

а в качестве параметров выступают измеримая функция $\pi(t) > 0$ и матричная функция $H(t) = H'(t) > 0$.

(ii) *Для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ существует такая пара $\pi(\cdot), H(\cdot)$, что*

$$\rho(l | \mathcal{W}[t]) = \rho(l | \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t | \pi(\cdot), H(\cdot))))$$

(построенный эллипсоид $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^, X_-(t))$ является максимальным по включению решением уравнения (5.15)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (5.15) эквивалентно включению

$$\mathcal{E}[t - \sigma] \subseteq \{\mathcal{E}[t] - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))\} - \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) + o(\sigma)B. \quad (5.19)$$

Построение функции $\mathcal{E}_-[\cdot]$ проводится в попятном времени, а именно: по известному $\mathcal{E}_-[t]$ конструируем $\mathcal{E}_-[t - \sigma]$, последовательно аппроксимируя изнутри сумму и геометрическую разность эллипсоидов в правой части включения. В соответствии с формулами, приведенными в теореме 5.1, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t)) - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t)) &\supseteq \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma p(t), H^{-1}(t)[(H(t)X_-(t)H'(t))^{1/2} \\ &\quad + \sigma(H(t)P(t)H'(t))^{1/2}]^2 H'^{-1}(t)). \end{aligned}$$

Обозначим $H^{-1}(t)[(H(t)X_-(t)H'(t))^{1/2} + \sigma(H(t)P(t)H'(t))^{1/2}]^2 H'^{-1}(t)$ через $Y(t)$, тогда

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{E}[t] - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))\} \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \\ & \supseteq \mathcal{E}(x^*(t) - p(t) - q(t), (1 - \sigma \pi(t))Y(t) + \sigma^2(1 - (\sigma \pi(t))^{-1})Q(t)). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Значение $\mathcal{E}_-[t - \sigma] = \mathcal{E}(x(t - \sigma), X_-(t - \sigma))$ определяется членами, линейными по σ :

$$\begin{aligned} x(t - \sigma) &= x^*(t) - \sigma p(t) - \sigma q(t), \\ X_-(t - \sigma) &= (1 - \sigma \pi(t))X_-(t) - \sigma \pi^{-1}(t)Q(t) \\ &+ \sigma H^{-1}(t)[(H(t)X_-(t)H'(t))^{1/2} (H(t)P(t)H'(t))^{1/2} \\ &+ (H(t)P(t)H'(t))^{1/2} (H(t)X_-(t)H'(t))^{1/2}] H'^{-1}(t). \end{aligned}$$

Поделив обе части на σ , получаем в пределе при $\sigma \rightarrow 0$ дифференциальные уравнения (5.16) и (5.17).

Докажем вторую часть теоремы. Фиксируем $l \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим разбиение Σ_m отрезка $[t, t_1]$. По уже доказанному

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_-[t_1 - \sigma_1] &\subseteq \mathcal{W}[t_1 - \sigma_1] \\ &\subseteq \{\mathcal{E}(m, M) - \sigma_1 \mathcal{E}(p(t_1), P(t_1))\} \dot{-} \sigma_1 \mathcal{E}(q(t_1), Q(t_1)) + o(\sigma_1)B, \end{aligned}$$

или в терминах опорных функций

$$\begin{aligned} \rho(l | \mathcal{E}_-[t_1 - \sigma_1]) &\leq \rho(l | \mathcal{W}[t_1 - \sigma_1]) \\ &\leq \rho(l | \{\mathcal{E}(m, M) - \sigma_1 \mathcal{E}(p(t_1), P(t_1))\} \dot{-} \sigma_1 \mathcal{E}(q(t_1), Q(t_1))) + o(\sigma_1, l). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Положив

$$\pi(t) = (X_-(t)l, l)^{-1/2} (Q(t)l, l)^{1/2},$$

функцию $H(t)$ зададим соотношением

$$\begin{aligned} & (X_-(t)l, l)^{-1/2} ((H(t)P(t)H(t))^{1/2} H^{-1}l, (H(t)X_-(t)H(t))^{1/2} H^{-1}l) \\ & = -(l, P(t)l)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда (см. [7; гл. 2])

$$\rho(l | \mathcal{E}_-[t_1 - \sigma_1]) = \rho(l | \{\mathcal{E}(m, M) - \sigma_1 \mathcal{E}(p(t_1), P(t_1))\} \dot{-} \sigma_1 \mathcal{E}(q(t_1), Q(t_1))).$$

Отсюда с учетом (5.21) находим

$$\rho(l | \mathcal{E}_-[t_1 - \sigma_1]) = \rho(l | \mathcal{W}[t_1 - \sigma_1]) + o(\sigma_1, l).$$

Далее, используя включение

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_-[t_1 - \sigma_1 - \sigma_2] &\subseteq \mathcal{W}[t_1 - \sigma_1 - \sigma_2] \subseteq \{\mathcal{E}_-[t_1 - \sigma_1] - \sigma_2 \mathcal{E}(p(t_1 - \sigma_1), P(t_1 - \sigma_1))\} \\ &\dot{-} \sigma_2 \mathcal{E}(q(t_1 - \sigma_1), Q(t_1 - \sigma_1)) + o(\sigma_1, \sigma_2)B, \end{aligned}$$

получаем

$$\rho(l \mid \mathcal{E}_-[t_1 - \sigma_1 - \sigma_2]) = \rho(l \mid \mathcal{W}[t_1 - \sigma_1 - \sigma_2]) + o(\sigma_1, \sigma_2, l).$$

Таким образом, для $t = t_1 - \sum_{i=1}^m \sigma_i$ будем иметь

$$\rho(l \mid \mathcal{E}_-[t]) = \rho(l \mid \mathcal{W}[t]) + \gamma(\sigma, l),$$

где $\gamma(\sigma, l) \rightarrow 0$ при $\max |\sigma_i| \rightarrow 0$. Значит, для произвольного $l \in \mathbb{R}^n$ можно так выбрать функции $\pi(\cdot)$ и $H(\cdot)$, что будет выполняться равенство

$$\rho(l \mid \mathcal{E}_-[t]) = \rho(l \mid \mathcal{W}[t]), \quad t \in [t_0, t_1].$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\rho(l \mid \mathcal{W}[t]) = \sup \rho(l \mid \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t \mid \pi(t), H(t)))), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Кроме того, справедливо представление

$$\mathcal{W}[t] = \overline{\bigcup \{ \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t \mid \pi(\cdot), H(\cdot))) : \pi(\cdot), H(\cdot) \}},$$

где $\pi(t) > 0$ и $H(t) = H'(t) > 0$ — измеримые функции. (Черта сверху здесь означает замыкание соответствующего множества.)

Следующий шаг — построение внешних аппроксимаций множества разрешимости. Для этого найдем эллипсоид $\tilde{\mathcal{E}}_+[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t))$, содержащий правую часть включения (5.1).

В соответствии с (5.2), (5.4) для $\tilde{\mathcal{E}}_+[t]$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t)) - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t)) \\ & \subseteq \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma p(t), (1 + \sigma \pi(t)) X_+(t) + \sigma^2 (1 + (\sigma \pi(t))^{-1}) P(t)) \\ & = \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma p(t), Y(t)), \\ & \{ \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t)) - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t)) \} \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \\ & \subseteq \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma p(t), Y(t)) \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \subseteq \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma p(t) - \sigma q(t), Z(t)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z(t) &= H^{-1}(t) [(H(t)Y(t)H'(t))^{1/2} - \sigma(H(t)Q(t)H'(t))^{1/2}]^2 H'^{-1}(t) \\ &= Y(t) + \sigma^2 Q(t) - \sigma H^{-1}(t) [(H(t)Y(t)H'(t))^{1/2} (H(t)Q(t)H'(t))^{1/2} \\ &\quad + (H(t)Q(t)H'(t))^{1/2} (H(t)Y(t)H'(t))^{1/2}] H'^{-1}(t). \end{aligned}$$

Значение $\tilde{\mathcal{E}}_+[t - \sigma] = \tilde{\mathcal{E}}(x(t - \sigma), X_+(t - \sigma))$ определяется членами, линейными по σ :

$$\begin{aligned} x(t - \sigma) &= x^*(t) - \sigma p(t) - \sigma q(t), \\ X_+(t - \sigma) &= Y(t) - \sigma H^{-1}(t) [(H(t)Y(t)H'(t))^{1/2} (H(t)Q(t)H'(t))^{1/2} \\ &\quad + (H(t)Q(t)H'(t))^{1/2} (H(t)Y(t)H'(t))^{1/2}] H'^{-1}(t) \\ &= (1 + \sigma \pi(t)) X_+(t) + \sigma \pi^{-1}(t) P(t) \\ &\quad - \sigma H^{-1}(t) [(H(t)X_+(t)H'(t))^{1/2} (H(t)Q(t)H'(t))^{1/2} \\ &\quad + (H(t)Q(t)H'(t))^{1/2} (H(t)X_+(t)H'(t))^{1/2}] H'^{-1}(t). \end{aligned}$$

Поделив обе части на σ в пределе при $\sigma \rightarrow 0$, получаем дифференциальные уравнения

$$\dot{x}^* = p(t) + q(t), \quad (5.22)$$

$$\dot{X}_+(t) = -\pi(t)X_+(t) - \pi^{-1}(t)P(t) + H^{-1}(t)F(H(t), Q(t), X_+(t))H'^{-1}(t), \quad (5.23)$$

которые следует дополнить краевыми условиями $x(t_1) = m$, $X_+(t_1) = M$.

Для доказательства включения $\tilde{\mathcal{E}}_+[t] \supseteq \mathcal{W}[t]$ потребуются две леммы.

ЛЕММА 5.1. Для произвольного вектора $l \in \mathbb{R}^n$ верно условие

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(l | \tilde{\mathcal{E}}_+[t]) \leq (l, p + q) - (l, P(t)l)^{1/2} + (l, Q(t)l)^{1/2}. \quad (5.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя опорную функцию $\rho(l | \tilde{\mathcal{E}}_+[t])$ по t , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(l | \tilde{\mathcal{E}}_+[t]) = \frac{1}{2}(\dot{X}^+(t)l, l)(X_+(t)l, l)^{-1/2} + (l, p + q).$$

С учетом (5.23) отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(l | \tilde{\mathcal{E}}_+[t]) &= (l, p + q) - \frac{1}{2}(P(t)l, l)^{1/2}((X_+(t)l, l)^{1/2}\pi(t)(P(t)l, l)^{-1/2} \\ &\quad + \pi^{-1}(t)(P(t)l, l)^{1/2}(X_+(t)l, l)^{-1/2}) \\ &\quad + (X_+(t)l, l)^{-1/2}((H(t)Q(t)H(t))^{1/2}H^{-1}l, (H(t)X_+(t)H(t))^{1/2}H^{-1}l). \end{aligned}$$

Используя неравенство $a + a^{-1} \geq 2$ и неравенство Коши-Буняковского для произвольного $l \in \mathbb{R}^n$, получим (5.24).

ЛЕММА 5.2. Для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ верно условие

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(l | \mathcal{W}[t]) \geq (l, p + q) - (l, P(t)l)^{1/2} + (l, Q(t)l)^{1/2}. \quad (5.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем эволюционное уравнение (5.14) в форме включения

$$\mathcal{W}[t - \sigma] \subseteq \{\mathcal{W}[t] - \sigma \mathcal{P}(t)\} - \sigma \mathcal{Q}(t) + o(\sigma)B,$$

или иначе

$$\mathcal{W}[t - \sigma] + \sigma \mathcal{Q}(t) \subseteq \mathcal{W}[t] - \sigma \mathcal{P}(t) + o(\sigma)B.$$

Переходя к опорным функциям, имеем

$$\begin{aligned} \rho(l | \mathcal{W}[t - \sigma]) + \sigma \rho(l | \mathcal{Q}(t)) &\leq \rho(l | \mathcal{W}[t]) + \sigma \rho(-l | \mathcal{P}(t)) + o(1)(l, l)^{1/2}, \\ \sigma^{-1}(\rho(l | \mathcal{W}[t]) - \rho(l | \mathcal{W}[t - \sigma])) &\geq \rho(l | \mathcal{Q}(t)) - \rho(-l | \mathcal{P}(t)) + o(1)(l, l)^{1/2}. \end{aligned}$$

Требуемое неравенство получается путем предельного перехода при $\sigma \rightarrow 0$.

Из двух предыдущих лемм следует неравенство

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\rho(l | \mathcal{W}[t]) - \rho(l | \tilde{\mathcal{E}}_+[t])) \leq 0.$$

Интегрируя его с учетом условия $\mathcal{W}[t_1] = \mathcal{E}(m, M) = \tilde{\mathcal{E}}_+[t_1]$, будем иметь

$$\begin{aligned} \rho(l | \mathcal{W}[t]) &\leq \rho(l | \tilde{\mathcal{E}}_+[t]) \quad \forall l \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ \mathcal{W}[t] &\subseteq \bigcap \tilde{\mathcal{E}}_+(x^*(t), X_+(t) | \pi(t), H(t)). \end{aligned}$$

Для того чтобы получить *точное* представление множества разрешимости в виде пересечения эллипсоидов, воспользуемся эволюционным уравнением для альтернированного интеграла второго рода

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} h_- (\mathcal{W}^-[t-\sigma], \{ \mathcal{W}^-[t] \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \} - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))) = 0.$$

Будем искать многозначную функцию $\mathcal{E}_+[t]$ такую, что:

(B1) $\mathcal{E}_+[t]$ удовлетворяет уравнению

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} h_- (\mathcal{E}[t-\sigma], \{ \mathcal{E}[t] \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \} - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))) = 0 \quad (5.26)$$

почти всюду и $\mathcal{E}_+[t_1] = \mathcal{E}(m, M)$,

(B2) $\mathcal{E}_+[t]$ – минимальное по включению решение уравнения (5.26).

ТЕОРЕМА 5.4. (i) *Дифференциальные уравнения (5.22), (5.23) с краевыми условиями $x(t_1) = m$, $X_+(t_1) = M$ задают семейство внешних аппроксимаций $\mathcal{E}_+[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t) | \pi(\cdot), H(\cdot))$, где в качестве параметров выступают измеримые функции $\pi(t) > 0$ и матричная функция $H(t) = H'(t) > 0$.*

(ii) *Для любого вектора l существует такая пара $\pi(\cdot)$, $H(\cdot)$, что*

$$\rho(l | \mathcal{W}^-[t]) = \rho(l | \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t) | \pi(\cdot), H(\cdot))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (5.26) эквивалентно включению

$$\mathcal{E}[t-\sigma] \supseteq \{ \mathcal{E}[t] \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \} - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t)) + o(\sigma)B. \quad (5.27)$$

Используя формулы для внешних аппроксимаций суммы и геометрической разности, запишем далее

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t)) \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) &\subseteq \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma q(t), H^{-1}(t)[(H(t)X_+(t)H'(t))^{1/2} \\ &\quad - \sigma(H(t)Q(t)H'(t))^{1/2}]^2 H'^{-1}(t)) = \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma q(t), Y(t)), \\ \{ \mathcal{E}[t] \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \} - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t)) &\subseteq \mathcal{E}(x^*(t) - \sigma p(t) - \sigma q(t), Z(t)), \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} Z(t) &= X_+(t) + \sigma \pi(t) X_+(t) + \sigma \pi(t)^{-1} P(t) \\ &\quad - \sigma H^{-1}(t) F(H(t), Q(t), X_+(t)) H'^{-1}(t). \end{aligned}$$

В пределе при $\sigma \rightarrow 0$ вновь получаем уравнения (5.22) и (5.23).

Более того, для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ функция $\pi(\cdot)$ может быть выбрана исходя из условия

$$\pi(t) = (X_+(t)l, l)^{-1/2} (P(t)l, l)^{1/2},$$

а функция $H(t)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} (X_+(t)l, l)^{-1/2} ((H(t)Q(t)H'(t))^{1/2} H^{-1}l, (H(t)X_+(t)H'(t))^{1/2} H^{-1}l) \\ = -(l, Q(t)l)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда достигается равенство опорных функций

$$\rho(l | \mathcal{W}^-[t]) = \rho(l | \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t) | \pi(\cdot), H(\cdot))).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Для произвольного вектора $l \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\rho(l | \mathcal{W}^-[t]) = \inf \{ \rho(l | \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t | \pi(\cdot), H(\cdot))) : \pi(t), H(t)) \}.$$

Более того,

$$\mathcal{W}^-[t] = \overline{\bigcup \{ \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t | \pi(\cdot), H(\cdot))) : \pi(\cdot), H(\cdot) \}},$$

где черта сверху означает замыкание соответствующего множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Отметим, что дифференциальные уравнения (5.22), (5.23), определяющие точные внешние аппроксимации альтернированных интегралов первого и второго рода, совпадают, поэтому $\mathcal{W}[t] \subseteq \mathcal{W}^-[t]$. Обратное включение следует из определения альтернированных интегралов. Таким образом, опираясь на эллипсоидальное исчисление, получено независимое доказательство теоремы 3.1 о совпадении двух альтернированных интегралов.

Для заданной пары функций $\pi(t)$, $H(t)$ и граничных значений m , M в момент времени τ обозначим

$$\begin{aligned} E_+(t, \tau, \mathcal{E}(m, M)) &= \mathcal{E}(x^*(t, \tau, m), X_+(t, \tau, M)), \\ E_-(t, \tau, \mathcal{E}(m, M)) &= \mathcal{E}(x^*(t, \tau, m), X_-(t, \tau, M)). \end{aligned}$$

При этом ясно, что $E_-(t, \tau, \mathcal{E}(m, M)) \subseteq \mathcal{W}[t] \subseteq E_+(t, \tau, \mathcal{E}(m, M))$.

ЛЕММА 5.3. При $t \leq \tau \leq t_1$ выполнены следующие соотношения

$$E_-(t, \tau, E_-(\tau, t_1, \mathcal{E}(m, M))) \equiv E_-(t, \tau, \mathcal{E}(m, M)), \quad (5.29)$$

$$E_+(t, t_1, \mathcal{E}(m, M)) \equiv E_+(t, \tau, E_+(\tau, t_1, \mathcal{E}(m, M))). \quad (5.30)$$

Формулы (5.29), (5.30) определяют в попятном времени “нижнюю” и “верхнюю” полугруппы многозначных отображений.

Еще раз подчеркнем, что $\mathcal{E}_-[t]$ является внутренним приближением для альтернированного интеграла Понтрягина $\mathcal{J}(t, t_1, \mathcal{M})$, а $\mathcal{E}_+[t]$ – внешним приближением для альтернированного интеграла второго рода. Из последней теоремы также следует, что $\mathcal{E}_+[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t | \pi(\cdot), H(\cdot)))$ и $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t | \pi(\cdot), H(\cdot)))$ являются соответственно минимальными и максимальными по включению аппроксимациями множества $\mathcal{W}^*[t]$.

В отсутствии неопределенности, когда функция $v(t)$ известна, соответствующие внешние и внутренние аппроксимации могут быть получены “автоматически” при $\mathcal{Q}(t) \equiv 0$ или же при $\pi(t) = 0$, $\pi^{-1}(t)\mathcal{Q}(t) = 0$.

§ 6. Эллипсоидальный синтез управлений

Вернемся к исходной задаче синтеза управлений. Для вычисления стратегии “экстремального прицеливания” $\mathcal{U}_e(t, x)$ требовалось вначале найти $\mathcal{W}^*[\cdot]$, затем для каждого t определить значение функции цены $\mathcal{V}(t, x) = h_+^2(x(t), \mathcal{W}^*(t))$ и ее градиента и, наконец, решить экстремальную задачу типа (4.7). Сказанное доставляет *алгоритм* для расчета искомой стратегии $\mathcal{U}_e(t, x)$.

Основная идея эллипсоидального синтеза состоит в том, чтобы заменить $\mathcal{W}^*[t]$ на одну из “внутренних” эллипсоидальных аппроксимаций $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X(t))$ и далее скопировать общую схему, применяя ее к $\mathcal{E}_-[t]$, а не к $\mathcal{W}^*[t]$.

Приступим к этой процедуре. Положим

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases} \quad (6.1)$$

где $l^0 = l^0(t, x) = \partial d(x, \mathcal{E}_-[t]) / \partial x$ — максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{E}_-[t]) = \max\{(l, x) - \rho(l | \mathcal{E}_-[t]) : \|l\| \leq 1\}. \quad (6.2)$$

Справедлива следующая гипотеза: *если аппроксимирующий эллипсоид $\mathcal{E}_-[t]$ выбран в соответствии с формулами (5.16)–(5.18) при фиксированных $\pi(t)$ и $H(t)$, то стратегия $\mathcal{U}_-(t, x)$ является синтезирующей, а именно: для любого решения $x(t)$ ДВ*

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{U}_-(t, x(t)) + v(t), \quad \tau \leq t \leq t_1, \quad x[\tau] = x_\tau \in \mathcal{E}_-[\tau] \quad (6.3)$$

будет выполнено включение $x(t) \in \mathcal{E}_-[t]$, $\tau \leq t \leq t_1$, а значит, и $x(t_1) \in \mathcal{E}(m, M) = \mathcal{M} = \mathcal{E}_-[t_1]$, каково бы ни было возмущение $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Действительно, можно заметить, что (6.2) совпадает с (4.6), если заменить $\mathcal{W}[t]$ на $\mathcal{E}_-[t]$. Однако теперь задача максимизации (6.2) может быть решена более подробно, чем (4.6). А именно, если

$$s^0 = \operatorname{argmin}\{\|x - s\| : s \in \mathcal{E}_-[t], x = x(t)\}, \quad (6.4)$$

то в (6.2) можно положить $l^0 = k(x(t) - s^0)$, $k > 0$, так что вектор l^0 будет градиентом функции $h_+(x, \mathcal{E}_-[t])$ при фиксированном t (проверяется дифференцированием (6.2) или (6.4) по x).

ЛЕММА 6.1. *Градиент*

$$l^0 = \frac{\partial}{\partial x} h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X))$$

функции $h_+(x, \mathcal{E}_-[t])$ равен

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*, \quad (6.5)$$

где лагранжесв множитель $\lambda > 0$ — единственный корень уравнения $f(\lambda) = 0$,

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*))^{-1} - 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.1. При заданных значениях параметров x^* , X множитель λ однозначно выражается как функция $\lambda = \lambda(x)$.

Из (4.6) с учетом $\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t))$ следует условие

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \operatorname{argmin}\{(l, u) : u \in \mathcal{E}(p(t), P(t))\}. \quad (6.6)$$

Формула (6.1) теперь является простым следствием следующего факта.

ЛЕММА 6.2. Минимизатор u^* задачи

$$(l, u^*) = \operatorname{argmin}\{(l, u) : u \in \mathcal{E}(p(t), P(t))\}$$

равен $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$.

Таким образом, эллипсоидальный синтез ставит в соответствие каждому “внутреннему” эллипсоиду $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t) | \pi(t), H(t))$ разрешающую стратегию $\mathcal{U}_-(t, x)$. Причем, если $x \notin \mathcal{E}_-[t]$, то функция $\mathcal{U}_-(t, x)$ определяется однозначно, если же $x \in \mathcal{E}_-[t]$, то следует положить $\mathcal{U}_-(t, x) \equiv \mathcal{E}(p(t), P(t))$. Здесь функция $\mathcal{U}_-(t, x)$ будет полунепрерывной сверху по x и измеримой по t . Следовательно, решение ДВ (6.3) будет существовать. По теореме 5.1 каждый вектор $x \in \operatorname{int} \mathcal{W}^*[t]$ принадлежит одному из эллипсоидов $\mathcal{E}_-[t]$, а значит, может быть переведен во множество $\mathcal{M}$ посредством “эллипсоидальной” стратегии управления, если только выполнено предположение 1.1. Из формулы (6.1) теперь нетрудно усмотреть, что $\mathcal{U}_-(t, x)$ может быть вычислена заранее как функция параметров $x^*(t)$, $X(t)$, которые также можно вычислить заранее. Поэтому синтезированная стратегия управления $\mathcal{U}_-(t, x)$ представляет собой “аналитический регулятор”.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх I, II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. №6. С. 679–773; Т. 175. №4. С. 910–912.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
3. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
4. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games // SIAM J. Control Optim. 1969. V. 7. №1. P. 142–157.
5. Мищенко Е. Ф. Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. Т. 5. С. 3–9.
6. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.
7. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Ser. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1996.
8. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1986.
9. Куржанский А. Б., Никонов О. И. О задаче синтеза стратегий управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. №4. С. 788–793.
10. Куржанский А. Б., Никонов О. И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Докл. РАН. 1993. Т. 333. №5. С. 578–581.
11. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). №3(7). С. 307–330.
12. Никольский М. С. О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Матем. сб. 1985. Т. 128(170). №1(9). С. 35–49.

13. Пономарев А. П., Розов Н. Х. О дифференцируемости опорной функции альтернированного интеграла // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 6. С. 865–870.
14. *Chernousko F. L.* State estimation for dynamic systems. New York: CRC Press, 1994.
15. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. P. 1–42.
16. *Subbotin A. I.* Generalized solutions of first-order PDE's: the dynamic optimization perspective. Ser. SC. Boston: Birkhäuser, 1995.
17. *Lions P.-L., Souganidis P. E.* Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaac's equations // SIAM J. Control Optim. 1995. V. 23. P. 566–583.
18. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solutions. New York: Springer-Verlag, 1993.
19. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997.
20. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантий в задачах управления. М.: Наука, 1981.
21. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
22. Fan Ky. Minmax theorems // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1953. V. 39. № 1. P. 42–47.
23. Куржанский А. Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управления // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
24. *Schneider R.* Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
25. Половинкин Е. С., Иванов Г. Е. О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1641–1648.
26. Демьянов В. Ф. Минимакс: производные по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
27. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
28. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: kurzhan@sa640.cs.msu.su, melnikov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
24.06.1999