Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 6, 101–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:43:57

УДК 513.6

А. В. Пухликов

Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано

Доказано, что общая двойная гиперповерхность V индекса 1 ($\sigma: V \rightarrow Q_m \subset \mathbb{P}^{M+1}$ – двойное накрытие, разветвленное над гладким дивизором $W = W_{2l}^* \subset \mathbb{P}^{M+1}$, $m + l = M + 1 \geq 5$) есть бирационально сверхжесткое многообразие. В частности, V не имеет нетривиальных структур расслоения на унилинейчатые многообразия и потому нерационально. Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают.

Библиография: 16 названий.

Введение

Цель настоящей работы – построить новую серию бирационально жестких многообразий Фано размерности 4 и выше. Напомним [1], [2], что гладкое многообразие Фано V называется *бirationально сверхжестким*, если для любого бирационального отображения $\chi: V \dashrightarrow V'$ на унилинейчатое многообразие той же размерности и линейной системы дивизоров Σ' на V' без неподвижных компонент выполнено условие монотонности

$$c(D, V) \leq c(D', V'),$$

где $D' \in \Sigma'$, $D \in \Sigma = (\chi^{-1})_* \Sigma'$, т.е. Σ – собственный прообраз Σ' относительно χ – линейная система дивизоров на V без неподвижных компонент, а $c(Y, X)$ для неособого в коразмерности 1 многообразия X и дивизора Вейля Y на нем обозначает *порог канонического присоединения*

$$c(Y, X) = \sup \left\{ \frac{b}{a} : b \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, |aY + bK_X| \neq \emptyset \right\}.$$

Бирационально сверхжесткое многообразие V с $\text{Pic } V \cong \mathbb{Z}$ обладает рядом стандартных свойств, в частности,

- (i) оно не имеет нетривиальных структур Фано-расслоения, т.е. не существует такого рационального отображения $\psi: V \dashrightarrow S$, $\dim S \geq 1$ и ψ доминантно, что общий слой $\psi^{-1}(s)$ бирационально эквивалентен многообразию Фано (и даже просто является унилинейчатым многообразием);
- (ii) группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов V совпадают: $\text{Bir } V = \text{Aut } V$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-15-96013, 99-01-01132) и фонда INTAS-OPEN (грант № 97/2072).

(iii) многообразие V не рационально.

Вывод утверждений (i)–(iii) из условия монотонности тривиален, см. [1]–[3]. Большая часть примеров жестких и сверхжестких многообразий относится к размерности три (см. [3]–[7] и др.), однако имеются и многомерные серии [2], [8].

В настоящей работе доказана бирациональная сверхжесткость двойных гиперповерхностей Фано индекса один. Зафиксируем целые числа $M \geq 4$, $m \geq 3$ и $l \geq 1$, удовлетворяющие равенству $m + l = M + 1$. Символом $\mathbb{P}$ обозначим проективное пространство $\mathbb{P}^{M+1}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $Q = Q_m \subset \mathbb{P}$ и $W^* = W_{2l}^* \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхности степеней m и $2l$ соответственно, а $\sigma: V \rightarrow Q$ – двойное накрытие, разветвленное над $W = W^* \cap Q$ (подробно конструкция V описана ниже, в §1). Многообразие V есть многообразие Фано размерности M с группой Пикара $\mathbb{Z}K_V$. Наш основной результат –

ТЕОРЕМА 1. *Общее многообразие V является бирационально сверхжестким.*

Здесь общность понимается как общность гиперповерхностей Q и W^* в алгебро-геометрическом смысле: задающие их многочлены должны содержаться в открытом по Зарисскому подмножестве пространства $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \times H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2l))$. Как и в [2], наше условие общности является конструктивным: мы требуем, чтобы базисные множества некоторых линейных систем в $\mathbb{P}$ имели максимально возможную коразмерность (см. §§1, 2). Разумеется, необходимо проверить, что эти условия общности положения определяют *непустое* открытое по Зарисскому множество. Такая проверка проведена в §4. Она требует некоторых усилий и довольно трудоемких рассуждений. Нет никаких сомнений в том, что утверждение теоремы 1 справедливо для *любого гладкого* V и даже для любого двойного накрытия с умеренными особенностями. К сожалению, наша техника еще недостаточно сильна для этого. Условия общности положения существенно используются в доказательстве: на них опирается техника гиперкасательных систем, введенная в [2] и применяемая в данной работе. Для двойных гиперповерхностей эта техника нуждается в модификации (см. §3).

Доказательство теоремы 1 проводится методом максимальных особенностей в сочетании с техникой гиперкасательных систем. Начало методу положила работа В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерных квартиках [4], значение которой невозможно переоценить. В этой работе впервые предложена эффективно работающая схема исчерпывающего описания бирациональных соответствий трехмерного многообразия, не имеющего глобальных дифференциальных форм. Постепенно сфера применимости метода расширялась: от квартик к другим трехмерным многообразиям Фано [9], затем к расслоениям на коники [10], пучкам поверхностей дель Пеццо [3], многомерным многообразиям Фано (см. [2], [8] и др.). Неоднократно казалось, что возможности метода исчерпаны. Однако всякий раз усиление техники метода резко повышало его эффективность. На сегодняшний день, при всем достигнутом прогрессе метод еще далек от совершенства. В “пограничных” ситуациях таких, как многообразия, не удовлетворяющие условиям общности положения, или двойные пространства $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике (последнее многообразие имеет огромную группу бирациональных автоморфизмов и, конечно, не является бирационально сверхжестким, однако, по всей видимости, оно бирационально жесткое),

техника метода максимальных особенностей иногда отказывается работать. Безусловно, необходимо дальнейшее совершенствование как локальной части метода (описание “минимальных” максимальных особенностей или экстремальных стягиваний в точку заданного вида, как в [11] или [12], [13]), так и глобальной его части (циклы с предписанными особенностями на заданном многообразии).

Работа с двойными накрытиями Фано была начата автором в 1997 г. во время пребывания в Математическом институте Макса Планка в Бонне (Германия). Теорема 1 представляет собой реализацию найденной тогда стратегии рассуждений, позволившей впервые преодолеть “степенной барьер” [2]. Пользуясь случаем, хочу поблагодарить директоров и сотрудников Института за гостеприимство.

§ 1. Двойные гиперповерхности Фано

1.1. Конструкция. Зафиксируем целые числа $m \geq 3$, $l \geq 1$, $M \geq 4$ такие, что $m + l = M + 1$, и пару гиперповерхностей $Q = Q_m \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^{M+1}$ и $W^* = W_{2l}^* \subset \mathbb{P}$ степеней m и $2l$ соответственно, где гиперповерхность Q и полное пересечение $W = W_{m \cdot 2l} = W^* \cap Q$ неособы. Объектом нашего изучения является двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow Q$, разветвленное над гладким дивизором W . Из теоремы Лефшеца следует, что группа Пикара гладкого многообразия V есть $\text{Pic } V = \mathbb{Z}L$, где $L = \sigma^*H$. Здесь $H \in \text{Pic } Q$ – класс гиперплоского сечения Q , порождающий $\text{Pic } Q$. Канонический класс многообразия V есть $K_V = -L$, так что V – многообразие Фано индекса 1 размерности ≥ 4 . Антиканоническая линейная система $|-K_V| = |L|$ при $m \leq M - 1$ задает в точности двойное накрытие σ . При $m = M$, $l = 1$ многообразие V может быть реализовано посредством антиканонической системы $|-K_V|$ как полное пересечение в $\mathbb{P}^{M+2}$ конуса над гиперповерхностью Q и квадрики, не проходящей через его вершину. “Степень” многообразия V есть $(-K_V)^M = 2m$.

В явном виде, пусть

$$A = \text{Spec } \theta_Q(l)[t]$$

– $\mathbb{A}^1$ -расслоение над гиперповерхностью Q , и возьмем сечение $s \in H^0(Q, \theta_Q(2l))$, соответствующее дивизору $W \subset Q$, т.е. $W = \{s = 0\}$. Теперь V реализуется в $(M + 1)$ -мерном многообразии A как гиперповерхность с уравнением $t^2 = s$.

Для произвольной точки $p \in Q$ и системы аффинных координат $(z_1, \dots, z_{M+1})$ на $\mathbb{A}^{M+1} \subset \mathbb{P}$ с центром в p обозначим аффинное уравнение Q через $f = q_1 + \dots + q_m$ и уравнение W^* – через $g = w_0 + \dots + w_{2l}$. Если $p \notin W$, то для удобства будем считать, что $w_0 = 1$. В этом случае σ -прообраз любой локальной системы параметров на Q в точке p будет локальной системой параметров в любой из двух точек $\sigma^{-1}(p) \subset V$.

1.2. Взвешенные полные пересечения. Многообразие V можно реализовать как полное пересечение, т.е. многообразие решений системы уравнений

$$\begin{cases} \tilde{f} = 0, \\ u^2 = \tilde{g}, \end{cases}$$

где $\tilde{f}, \tilde{g}$ – однородные многочлены степеней m и $2l$ на $\mathbb{P}$, соответствующие f и g , во взвешенном проективном пространстве (см. [14], [15])

$$\mathbb{P}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{M+2}, l) = \mathbb{C}^{M+3}/\mathbb{C}^*,$$

где $(1, \dots, 1, l)$ обозначают веса, с которыми $\mathbb{C}^*$ действует на $\mathbb{C}^{M+3}$. Если $(x_0, x_1, \dots, x_{M+1})$ – однородные координаты на $\mathbb{P}$, то $(x_0, x_1, \dots, x_{M+1}, u)$ – однородные координаты на взвешенном пространстве $\mathbb{P}(1, \dots, l)$. Здесь u имеет вес l , т.е. является сечением пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(l)$, индуцирующим сечение $\mathcal{O}_V(l)$. При $l = 1$ получаем вышеупомянутое представление V в виде полного пересечения конуса и квадрики в $\mathbb{P}^{M+2}$.

Единственная особая точка взвешенного пространства $\mathbb{P}(\cdot)$ имеет координаты $(0, \dots, 0, 1)$ и на V не лежит. В одной из стандартных аффинных карт, скажем, $x_0 \neq 0$, имеем систему аффинных координат $(z_1, \dots, z_{M+1}, y)$, где $z_i = x_i/x_0$, $y = u/x_0^l$. Эта карта изоморфна $\mathbb{A}^{M+2}$, и в координатах (z_*, y) многообразие V задается системой уравнений

$$\begin{cases} f = q_1 + \dots + q_m = 0, \\ y^2 = w_0 + \dots + w_{2l}. \end{cases}$$

Здесь y имеет вес 0, т.е. является обычной функцией на V .

1.3. Условие регулярности. По образцу [2] назовем точку $p \in Q$ *регулярной* (как точку на этой гиперповерхности, в отличие от определений ниже), если для некоторой (и, тем самым, любой) системы линейных координат $(z_1, \dots, z_{M+1})$ с центром в точке p последовательность однородных многочленов $q_1, \dots, q_m$ (где $f = q_1 + \dots + q_m$ – уравнение Q) является регулярной в $\mathcal{O}_{p, \mathbb{P}}$. Гиперповерхность Q назовем регулярной, если регулярна каждая ее точка. Счет констант показывает (см. [2]), что при $m \leq M$ общая гиперповерхность Q регулярна. Однако для рассматриваемой техники доказательства теоремы 1 условия регулярности Q недостаточно. Необходимо дополнительное требование общности положения для двойного накрытия.

Пусть $p \in Q \setminus W$. Выберем систему координат $(z_1, \dots, z_{M+1})$ с началом в точке p . Пусть $g = w_0 + w_1 + \dots + w_{2l}$, $w_0 = 1$, – уравнение W^* относительно этой системы координат. Рассмотрим точку $x \in \sigma^{-1}(p) \subset V$. Для определенности считаем, что $y(x) = 1$.

Рассмотрим степенной ряд $(1 + a)^{1/2} = 1 + \sum \gamma_i a^i = 1 + \frac{1}{2}a + \dots$, где a – формальная переменная. Положим

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= (1 + w_1 + \dots + w_{2l})^{1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i (w_1 + \dots + w_{2l})^i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(w_1, \dots, w_{2l}), \end{aligned}$$

где $\Phi_i(w_1(z_*), \dots, w_{2l}(z_*))$ однородны по z_* степени i . Очевидно, $\Phi_i(w_*) = w_i + \dots$ при $i \leq 2l$, где многоточие обозначает многочлен от $w_1, \dots, w_{i-1}$. Положим для $k \geq 1$

$$[\sqrt{g}]_k = 1 + \sum_{i=1}^k \Phi_i(w_*), \quad g^{(k)} = g - [\sqrt{g}]_k^2.$$

Легко видеть, что $g^{(k)}$ начинается с однородной компоненты степени $k+1$ по z_* . Эта компонента при $k+1 \leq 2l$ имеет вид $w_{k+1} + \dots$, где многоточие обозначает многочлен от $w_1, \dots, w_k$. Например,

$$g^{(1)} = w_2 - \frac{1}{4}w_1^2 + \text{слагаемые более высокого порядка по } z_*.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При $l \geq 2$ точка $x \in V$, $p = \sigma(x) \notin W$, называется *регулярной точкой* двойного накрытия V , если набор многочленов

$$q_1, \dots, q_m, g^{(l)}, \dots, g^{(2l-2)} \quad (*)$$

образует регулярную последовательность в $\mathcal{O}_{p, \mathbb{P}}$. При $l = 1$ точка $x \in V$, $p = \sigma(x) \notin W$, регулярна на V , если точка p регулярна на Q и вдобавок на гиперплоскости $q_1 = 0$ квадратичные конусы $q_2 = 0$ и $w_2 - \frac{1}{4}w_1^2 = 0$ не имеют общих неприводимых компонент.

Обратим внимание на *неинвариантность* условия регулярности: относительно другой системы координат последовательность $(*)$ может перестать быть регулярной в своем отрезке $g^{(l)}, \dots, g^{(2l-2)}$. Речь идет, следовательно, о регулярности относительно *некоторой* (и, тем самым, общей) системы координат. Однако эта неинвариантность не приносит дополнительных проблем.

Геометрический смысл условия регулярности при $l \geq 2$ состоит в том, что в окрестности точки $p = \sigma(x)$ система уравнений

$$q_1 = \dots = q_m = g^{(l)} = \dots = g^{(2l-2)} = 0$$

определяет кривую в $\mathbb{P}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка $x \in V$, $\sigma(x) = p \in W$, называется *регулярной точкой* двойного накрытия V , если p — регулярная точка гиперповерхности Q и ограничение квадратичной формы q_2 на плоскость $q_1 = w_1 = 0$ не есть тождественный нуль.

Плоскость $\{q_1 = w_1 = 0\}$ есть касательное пространство к поверхности W в точке p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow Q$ назовем *регулярным*, если любая точка $x \in V$ регулярна в смысле определения 1 или 2.

Теперь мы можем уточнить формулировку теоремы 1.

ТЕОРЕМА 1*. *Регулярное двойное накрытие V есть бирационально сверх-жесткое многообразие.*

Теорема 1 следует из теоремы 1*, потому что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Общая двойная гиперповерхность V регулярна: существует такое непустое открытое по Зарисскому подмножество $U \subset H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \times H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2l))$, что двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow Q = \{\tilde{f} = 0\}$, разветвленное над поверхностью $W = Q \cap \{\tilde{g} = 0\}$, регулярно для любой пары $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in U$.*

Доказательство предложения 1.1 будет дано в § 4.

При доказательстве теоремы 1* (§§ 2, 3) всякий раз, когда рассматривается точка $x \in V$ и используется условие регулярности, мы без специальных оговорок предполагаем, что фиксирована подходящая система координат $(z_1, \dots, z_M)$ и все уравнения $q_i, g^{(j)}$ берутся относительно этой системы координат.

§ 2. Метод максимальных особенностей

В данном параграфе начато доказательство теоремы 1*. В основе рассуждений — метод максимальных особенностей. Схема доказательства и техника метода многократно публиковались с полными деталями (см. [1], [2], [4], [5] и др.), поэтому мы опускаем неравенство Нётера–Фано, локальный анализ максимальной особенности и $4n^2$ -неравенство. Все это изложено в любой из вышеупомянутых работ. Применение метода мы сводим к проверке технического условия на степени и кратности циклов коразмерности 2.

2.1. Условие бирациональной жесткости. Пусть X — гладкое многообразие Фано с $\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X$. Степенью цикла $Y \subset X$ чистой размерности k назовем число $\deg Y = (-1)^k (Y \cdot K_X^k)$.

Следующее предложение можно рассматривать как сводку метода максимальных особенностей для многообразий Фано, не имеющих нетривиальных бирациональных автоморфизмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Допустим, что многообразие X удовлетворяет следующим двум условиям:*

- (i) *для любого неприводимого цикла $Y \subset X$ коразмерности 2 и линейной системы дивизоров $\Sigma \subset |-nK_X|$, свободной от неподвижных компонент, имеет место неравенство*

$$\text{mult}_Y \Sigma \leq n,$$

- (ii) *для любого неприводимого цикла Y коразмерности 2 и любой точки $x \in X$ имеет место неравенство*

$$\text{mult}_x Y \leq \frac{4}{\deg X} \deg Y.$$

Тогда X — бирационально сверхжесткое многообразие Фано.

Согласно данному выше определению степени здесь $\deg X$ есть $(-K_X)^{\dim X} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подробное обоснование см. в [1]–[3]. Схема рассуждений такова. Если X не сверхжесткое, то на X существует подвижная линейная система $\Sigma \subset |-nK_X|$, имеющая максимальную особенность $\nu \in \mathcal{N}(X)$. Если центр дискретного нормирования ν , $Z(V, \nu) \subset X$, есть неприводимый цикл $Y \subset X$ коразмерности 2, то имеет место неравенство $\text{mult}_Y \Sigma > n$, что противоречит условию (i). Если $\text{codim}_Y Z(V, \nu) \geq 3$, то для любой точки $x \in Z(V, \nu)$ имеем $\text{mult}_x Z > 4n^2$, где $Z = (D_1 \circ D_2)$, $D_i \in \Sigma$, есть алгебраический цикл теоретико-схемного пересечения двух общих дивизоров из Σ ([2; appendix B]). Очевидно, $\deg Z = n^2 \deg X$, так что существует неприводимая компонента Y цикла Z , которая удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg Y} > \frac{4}{\deg X}.$$

Но это противоречит условию (ii). Предложение доказано.

Отметим, что если $Y \subset X$ – неприводимый цикл коразмерности 2, удовлетворяющий неравенству $\text{mult}_Y \Sigma > n$, где $\Sigma \subset |-nK_X|$ – подвижная линейная система, то в любом случае $\deg Y \leq \deg X - 1$, так как $\deg Z = n^2 \deg X$, $Z = (D_1 \circ D_2)$, $D_i \in \Sigma$, и Y входит в Z с кратностью, строго большей, чем n^2 .

Наше доказательство теоремы 1* состоит в проверке условий (i) и (ii) предложения 2.1. Условие (i) необходимо проверить для неприводимых циклов коразмерности 2 степени $\leq \deg V - 1 = 2m - 1$. Условие (ii) в рассматриваемом случае принимает вид неравенства

$$\text{mult}_x Y \leq \frac{2}{m} \deg Y.$$

2.2. Максимальные циклы коразмерности 2. Предположим, что подвижная система Σ обладает максимальным циклом $Y \subset V$ коразмерности 2. Тогда $\deg Y \leq 2m - 1$ и для цикла $B = \sigma(Y) \subset Q$ имеются две возможности: либо $\deg B = \deg Y$, т.е. морфизм $\sigma: Y \rightarrow B$ бирационален, либо $2 \deg B = \deg Y$, т.е. $Y = \sigma^{-1}(B)$. Если $\dim V \geq 5$, то, применяя теорему Лефшеца к $B \subset Q$, видим, что $\deg B = m$ и B численно эквивалентен $Q \cap P$, $P \subset \mathbb{P}$ есть подпространство коразмерности два, причем $\deg Y = m$, т.е. двойное накрытие $\sigma^{-1}(B) \rightarrow B$ распадается. Следовательно, пересечение $B \cap W$ имеет особенность в каждой точке. Если $\dim V \geq 6$, то по той же теореме Лефшеца, примененной к полному пересечению W , имеем, что $B \cap W$ – неприводимый цикл и теоретико-схемное пересечение B и W имеет в общей точке кратность 1. Мы получили противоречие, доказывающее условие (i) предложения 2.1 для двойных гиперповерхностей размерности 6 и выше.

В случае размерности 5 $B \sim Q \cap P$. Если $B = Q \cap P$, то получаем противоречие: $B \cap W = P \cap W \cap Q$ и по лемме 3.4.2 из [5; гл. 3, § 4] цикл $B \cap W$ может иметь не более чем кривую особых точек. Оставшиеся возможности легко исключаются методом “пробной линейной системы”, обсуждаемым ниже для размерности 4 (случай C)), с учетом равенства $\deg B = m$. Это несложное упражнение оставляем читателю.

Осталось рассмотреть четырехмерный случай. Здесь имеются две возможности: $m = 4$ (двойная квартика Q с ветвлением в $W = W_2^* \cap Q$) и $m = 3$ (двойная кубика Q с ветвлением в $W = W_4^* \cap Q$). На общей квартике и общей кубике классы циклов коразмерности 2 приходят с $\mathbb{P}$, так что приведенное выше рассуждение для

$M \geq 5$ работает и тут. Однако, чтобы не вводить дополнительные условия общности положения, мы докажем (i) непосредственно, предполагая лишь регулярность гиперповерхности Q . Будем использовать три типа рассуждений:

А) “метод конусов” [2] для исключения следующей возможности: $\sigma^{-1}(B) = Y \rightarrow B$ – нераспадающееся двойное накрытие;

В) “метод обратной матрицы к таблице умножения” [7] для исключения следующей возможности: $B \subset \mathbb{P}^+$, $\mathbb{P}^+$ – 3-плоскость в $\mathbb{P}$, и $\sigma: Y \rightarrow B$ – бирациональный морфизм;

С) “метод пробной линейной системы” [4] для исключения остальных возможностей.

Нет ничего удивительного в том, что проблема, тривиальная в высших размерностях, требует перебора большого количества случаев и достаточно утомительных рассуждений в размерности 4. В размерностях 2–4 бирациональная геометрия, по-видимому, наиболее запутанна. Возможно, это как раз и связано с богатством алгебраических циклов на многообразиях малой размерности (отсутствие теоремы Лефшеца).

2.3. Метод конусов. Пусть $x \in \mathbb{P} \setminus Q$ – точка общего положения, $C(x)$ – конус в $\mathbb{P}$ с вершиной x и базой B^* , где $B^* \subset B$ – произвольная кривая общего положения, т.е. двойное накрытие $Y^* = \sigma^{-1}(B^*) \rightarrow B^*$ не распадается. Как показано в [1], [2], численно кривая $B^* \subset C(x)$ эквивалентна гиперплоскому сечению. В частности, $C(x) \cap Q = B^* \cup R(x)$, где $R(x)$ – вычетная кривая, и $R(x)$ пересекает B^* ровно в $\deg R(x)$ различных точках общего положения ($B^* \not\subset W$ и поэтому можно считать, что $B^* \cap R(x) \cap W = \emptyset$). Следовательно, кривая $R^*(x) = \sigma^{-1}R(x) \subset V$ пересекает Y^* ровно в $\deg R^*(x) = 2 \deg R(x)$ различных точках. Поскольку $\text{mult}_Y \Sigma > n$, имеем $R(x) \subset \text{Bs } \Sigma$. Но кривые $R(x)$ заматают все многообразие V , что дает противоречие.

Итак, морфизм $\sigma: Y \rightarrow B$ бирационален.

2.4. Метод обратной таблицы умножения. Пусть $\langle B \rangle = \mathbb{P}^+ - 3$ -плоскость в $\mathbb{P}$. В этом случае мы воспользуемся техникой, развитой в [7; лемма 4.2] (“лемма о плоском сечении”). Ее применение основано на следующем простом замечании.

ЛЕММА 2.1. Пусть S – гладкая поверхность, H – гиперплоское сечение, C_i , $i \in I$, – набор неприводимых кривых на S такой, что $\sum_{i \in I} C_i = H$. Пусть $\Lambda \subset |nH|$ – линейная система кривых, имеющая C_i ν_i -кратной неподвижной компонентой и не имеющая компонент вне $\bigcup_{i \in I} C_i$. Предположим, что матрица формы пересечения

$$\Pi = \|(C_i \cdot C_j)\|_{i,j \in I}$$

обратима и для некоторого $i \in I$ все элементы θ_{ij} в i -й строке обратной матрицы $\Theta = \Pi^{-1} = \|\theta_{ij}\|$ неотрицательны, $\theta_{ij} \geq 0$. Тогда $\nu_i \leq n$ для данного $i \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из невырожденности матрицы Π следует, что $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}C_i \subset \text{Pic } S$. Запишем класс подвижной части линейной системы Λ :

$$\gamma = \sum_{i \in I} \alpha_i C_i = \sum_{i \in I} (n - \nu_i) C_i.$$

Поскольку класс γ неотрицателен, $(\gamma \cdot C_j) \geq 0$ для всех $j \in I$. Однако γ восстанавливается по своим индексам пересечения с C_j :

$$\gamma = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I} \theta_{ij} (\gamma \cdot C_j) \right) C_i.$$

Если для данного i все $\theta_{ij} \geq 0$, то и $\alpha_i \geq 0$, т.е. $\nu_i \leq n$, что и требовалось доказать.

Мы будем применять лемму к исключению максимальных поверхностей Y следующим образом. Пусть $P \subset \mathbb{P}$ — общая 3-плоскость, пересекающая $\mathbb{P}^+$ по 2-плоскости, т.е. $\langle P, \mathbb{P}^+ \rangle$ — 4-плоскость в $\mathbb{P}$. Пусть $Q_P = Q \cap P$ — гладкая поверхность в $P = \mathbb{P}^3$, $V_P = \sigma^{-1}(Q_P)$ — гладкая поверхность в V . Имеем: $\mathbb{P}^+ \cap Q = \sum_{i \in I} B_i$ — набор поверхностей, $P \cap \mathbb{P}^+ \cap Q = \sum_{i \in I} C_i$ — набор кривых. Отметим, что все поверхности в представлении $(\mathbb{P}^+ \circ Q) = \sum_{i \in I} B_i$ имеют кратность 1 по той же лемме 3.4.2 из [5]: поверхность $\mathbb{P}^+ \cap Q$ может иметь не более чем кривую особых точек. Очевидно, $\sum_{i \in I} C_i$ есть плоское сечение поверхности Q_P . Пусть $E_i^\pm$ — компоненты кривой $\sigma^{-1}(C_i)$, если накрытие $\sigma^{-1}(C_i) \rightarrow C_i$ распадается (эти индексы соберем в подмножество $I^! \subset I$), и $E_i^* = \sigma^{-1}(C_i)$ в противном случае (соответствующим индексам $i \in I^* = I \setminus I^!$). Пусть $L_P = L|_{V_P}$ — гиперплоское сечение. Очевидно,

$$L_P = \sum_{i \in I^!} (E_i^+ + E_i^-) + \sum_{i \in I^*} E_i^* \in \Gamma = \bigoplus_{i \in I^!} (\mathbb{Z}E_i^+ \oplus \mathbb{Z}E_i^-) \oplus \bigoplus_{i \in I^*} E_i^*.$$

Если матрица $\Pi = \|(E_i^? \cdot E_j^?)\|_{i,j \in I}$, где $?$ есть либо $+$, либо $-$, либо $*$, является невырожденной и ее обратная матрица $\Theta = \Pi^{-1} = \|\theta_{ij}^{??}\|$ имеет неотрицательные элементы в $(?, i)$ -й строке, соответствующей кривой $Y \cap V_P$, то по лемме 2.1 поверхность Y не может быть максимальной. Прямая проверка (вычисление Π и Θ) достаточно утомительна, но это, по-видимому, единственный метод, успешно работающий в такого рода ситуациях.

Конкретную конфигурацию поверхностей $\sigma^{-1}(\mathbb{P}^+ \cap Q)$ мы будем обозначать символом $(d_i, i \in I^!, d_i^*, i \in I^*)$, где $d_i = \deg B_i$ и символ $*$ указывает на то, что соответствующее накрытие $\sigma^{-1}(B_i) \rightarrow B_i$ не распадается. Например, если $m = 4$ и $\mathbb{P}^+ \cap Q$ — пара квадратик, то имеются две возможности: $(2, 2)$ и $(2, 2^*)$.

Случай $m = 4$. В силу условия регулярности на Q нет нетривиальных конусов. Поэтому $Q \cap \mathbb{P}^+$ есть либо пара гладких квадратик, либо неприводимая квартика: имеются возможности $(2, 2)$, $(2, 2^*)$ и (4) .

$(2, 2^*)$: решетка Γ трехмерна, матрицы Π и Θ имеют вид

$$2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Этим максимальная поверхность исключена.

$(2, 2)$: решетка Γ четырехмерна, Π и Θ суть

$$2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все коэффициенты Θ неотрицательны: максимальных поверхностей нет.

(4): решетка Γ двумерна, Π и Θ суть

$$4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось.

Отметим, что этот метод эффективно работает и в том случае, когда условие регулярности не выполнено и Q может содержать конусы (в частности, плоскости): максимальные поверхности Y такие, что $\langle B \rangle = \mathbb{P}^+ = \mathbb{P}^3$ или $\mathbb{P}^2$, не могут существовать. Проверка оставляется читателю.

Случай $m = 3$. Прежде всего покажем, что поверхность B не есть плоскость. Предположим, что это так. Пусть $P \supset B$ — общая 3-плоскость, $Q \cap P = B \cup Q_P$, $C = B \cap Q_P$ — неособая коника. Поверхность Q_P есть неособая квадрика, $W \cap Q_P$ — гладкая кривая, а $V_P = \sigma^{-1}(Q_P)$ — поверхность типа $K3$. Линейная система кривых $\Sigma_P = \Sigma|_{V_P} \subset |nL_P|$ имеет, самое большее, две неподвижные компоненты — кривые $E^+ = Y \cap V_P$ и E^- , $E^+ \cup E^- = \sigma^{-1}(C)$. Для решетки $\Gamma = \mathbb{Z}E^+ \oplus \mathbb{Z}E^-$ матрицы Π и Θ имеют вид

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Поскольку $E^+ + E^- = L_P$, то по лемме 2.1 случай, когда B есть плоскость, исключен.

Итак, $\deg B \geq 2$. В принятых выше обозначениях имеются три возможности: $(2, 1)$, $(2, 1^*)$ и (3) . Рассмотрим их по порядку.

$(2, 1)$: здесь решетка $\Gamma = \mathbb{Z}E_1^+ \oplus \mathbb{Z}E_1^- \oplus \mathbb{Z}E_2^+ \oplus \mathbb{Z}E_2^-$ четырехмерна, а матрица Π может быть двух видов, в зависимости от конфигурации кривых $E_i^\pm$ (обе конфигурации реализуются):

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Здесь первые две строки (и первые два столбца) соответствуют кривым $E_1^\pm$, накрывающим конику $B \cap P$, а $E_2^\pm$ накрывают прямую. Отметим, что канонический класс поверхности V_P есть гиперплоское сечение L_P . Обратные матрицы суть

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 10 & -4 & 4 \\ 10 & 8 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{80} \begin{pmatrix} 5 & 15 & 20 & 20 \\ 15 & 5 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & -8 & 8 \\ 20 & 20 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первые две строки (столбца) состоят из неотрицательных чисел, поверхность Y , накрывающая квадрику, не может быть максимальной. Обратим внимание на любопытный факт: в нижних строках есть отрицательные элементы. Они соответствуют поверхностям, накрывающим плоскости. Такие поверхности

исключаются единственным способом (приведенным выше). Никакая другая техника не позволяет получить противоречие! Это весьма странное обстоятельство, когда для исключения некоторых типов максимальных особенностей требуется техника, которая работает для них и только для них, в то время как все другие способы не достигают цели, проявляется весьма часто (см. [5] или [6]), где это видно на многочисленных примерах гиперповерхностей Фано во взвешенном проективном пространстве.

(2, 1*): здесь решетка $\Gamma = \mathbb{Z}E^+ \oplus \mathbb{Z}E^- \oplus \mathbb{Z}E^*$ трехмерна, матрицы Π и Θ имеют вид

$$2 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

что исключает данную возможность.

Наконец, в случае (3) решетка Γ двумерна, а матрицы Π и Θ суть

$$3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы исключили случай В): если Y – максимальная поверхность, то линейная оболочка $\langle B \rangle$ есть либо $\mathbb{P}$, либо гиперплоскость в $\mathbb{P}$.

2.5. Пробная линейная система. Стратегия пробной линейной системы (впервые предложенная в [4] и затем успешно работавшая в бесчисленном количестве случаев) состоит в следующем. Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – общая гиперплоскость, $Q_P = Q \cap P$ и $V_P = \sigma^{-1}(Q_P)$ – гладкое трехмерное многообразие с тривиальным каноническим классом, $c_1(V_P) = 0$. Линейная система $\Sigma_P = \Sigma|_{V_P}$ есть линейная система поверхностей без неподвижных компонент, имеющая базисную кривую $C = V_P \cap Y$ кратности $\nu_C > n$ и, возможно, еще какие-то базисные кривые. Пусть $\tilde{V} \rightarrow V_P$ – последовательность раздутий особых точек кривой C ,

$$\tilde{V} = V_N \xrightarrow{\varphi_{N,N-1}} V_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow V_0 = V_P$$

(возможно, C неособа; тогда $N = 0$ и $\tilde{V} = V_P$), $\varphi_{i,i-1}$ раздувает точку $x_{i-1} \in V_{i-1}$, $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(x_{i-1}) \subset V_i$ – исключительный дивизор $\cong \mathbb{P}^2$, $\varphi: V^* \rightarrow \tilde{V}$ – раздутие гладкой кривой $\tilde{C} \subset \tilde{V}$ – собственного прообраза кривой C на $\tilde{V}$, $E = \varphi^{-1}(\tilde{C})$ – исключительный дивизор (линейчатая поверхность над $\tilde{C}$). Положим

$$\nu_i = \text{mult}_{x_{i-1}} \Sigma_P^{i-1},$$

где Σ_P^{i-1} – собственный прообраз линейной системы Σ_P на V_{i-1} , $\tilde{\Sigma}_P = \Sigma_P^N$ и Σ^* – собственный прообраз Σ_P на V^* . Очевидно,

$$\Sigma^* \subset |nL_P - \nu_1 E_1 - \dots - \nu_N E_N - \nu_C E|,$$

так что последняя линейная система не имеет неподвижных компонент. В частности, численный класс

$$(nL_P - \nu_1 E_1 - \dots - \nu_N E_N - \nu_C E)^2 \in A^2 V^*$$

есть класс эффективной кривой на V^* . Стало быть, если для некоторых $k, k_1, \dots, k_N \geq 1$ численный класс дивизора на V^*

$$(kL_P - k_1E_1 - \dots - k_NE_N - E)$$

неотрицателен, то имеет место неравенство

$$((kL_P - k_1E_1 - \dots - k_NE_N - E) \cdot (nL_P - \nu_1E_1 - \dots - \nu_NE_N - \nu_CE)^2) \geq 0.$$

Произведение слева нетрудно вычислить. Полагая $d = \deg C = (C \cdot L_P)$, $\mu_i = \text{mult}_{x_{i-1}} C^{i-1} \geq 2$, получаем следующее неравенство:

$$2mkn^2 - 2dn\nu_C + (2g - 2 - kd)\nu_C^2 + \sum_{i=1}^N (-k_i\nu_i^2 + 2\mu_i\nu_i\nu + (k_i - 2)\mu_i\nu^2) \geq 0.$$

Мы воспользовались тем, что $E^3 = -\deg \det \mathcal{N}_{\tilde{C}/\tilde{V}} = (K_{\tilde{V}} \cdot \tilde{C}) + 2 - 2g$, где $K_{\tilde{V}} = 2 \sum_{i=1}^N E_i$. Для того чтобы исключить максимальную поверхность Y , необходимо подобрать $k, k_1, \dots, k_N$ таким образом, чтобы левая часть последнего неравенства была отрицательна. Линейная система $|kL_P - k_1E_1 - \dots - k_NE_N - E|$ называется *пробной линейной системой*, а ее класс в A^1V^* — *пробным классом* (это классическая терминология [4]).

Пробная система, дающая необходимое противоречие, всегда существует (если $\dim(B) \geq 4$ и $Y \rightarrow B$ — бирациональный морфизм). Мы продемонстрируем это на одном примере, когда $\deg Y = 7$ и поверхность Y имеет лишь изолированные особенности. В остальных (очень многочисленных) случаях рассуждения полностью аналогичны; более того, с понижением степени или появлением одномерных особенностей на Y рассуждения упрощаются, так как особенности понижают род g кривой C .

Итак, пусть $m = 4$, $d = 7$, C неособа и $N = 0$. Пусть, далее, B_P порождает $P = \mathbb{P}^4$. Проецируя $B_P \rightarrow \mathbb{P}^2$ из общей хорды $\langle p, q \rangle$, $p, q \in B_P$, мы получаем кривую степени 5 в $\mathbb{P}^2$. Легко видеть, что теоретико-множественно B_P высекается гиперповерхностями степени 5 в P . Отсюда выводим, что базисное множество линейной системы $|5L_P - E|$ содержится в $E \cup \tilde{C}^*$, где C^* — вторая компонента приводимой кривой $\sigma^{-1}(B_P)$. Более точно, на E базисное множество $Bs |5L_P - E|$ нульмерно. Наконец,

$$((5L_P - E) \cdot \tilde{C}^*) = 35 - 7 > 0$$

(кривые C и C^* пересекаются, считая кратности, в 7 точках, соответствующих $B_P \cap W$), так что класс $5L_P - E$ неотрицателен на V^* . Отсюда получаем неравенство

$$40n^2 - 14n\nu_C + (2g - 37)\nu_C^2 \geq 0.$$

Оценим род кривой C . Проекция из хорды $\langle p, q \rangle$ есть бирациональный морфизм C на плоскую кривую степени 5. Если бы последняя кривая была неособа, проекция была бы изоморфизмом гладких кривых. Такого не может быть.

В самом деле, пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая плоская кривая степени 5, l_Γ — линейный ряд, высекаемый на Γ прямыми в $\mathbb{P}^2$; для любых точек $p, q \in \Gamma$ рассмотрим линейный ряд $l_\Gamma + p + q$ степени 7. Канонический класс кривой Γ есть $K_\Gamma = 2l_\Gamma$, так что по теореме Римана–Роха получаем

$$h^0(l_\Gamma + p + q) = h^0(l_\Gamma - p - q) + 2.$$

Если $p, q \in \Gamma$ — различные точки, то $h^0(l_\Gamma + p + q) = 3$, в то время как по построению эта размерность равна 5.

Итак, проекция из общей хорды дает плоскую квинтику с особой точкой. Значит, $g \leq 5$ и $40n^2 - 14n\nu_C - 27\nu_C^2 \geq 0$, откуда получаем противоречие с предположением $\nu_C > n$.

Если кривая B_P порождает $\mathbb{P}^3$, т.е. $\dim\langle B \rangle = 4$, то мы можем спроецировать $B_P \rightarrow \mathbb{P}^2$ из общей точки $p \in B_P$. В результате получаем плоскую кривую Γ степени 6. В качестве пробной системы возьмем $|6L_P - E|$. Ее неотрицательность очевидна. Однако, чтобы получить противоречие, необходимо снова получить оценку на род кривой C : нужно показать, что $g \leq 5$. В этом случае недостаточно просто удостовериться, что образ $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ имеет особенности, так как арифметический род $p_a(\Gamma) = 10$.

Предположим, что Γ имеет r двойных точек $a_1, \dots, a_r$, включая бесконечно близкие, $r \leq 4$. Тогда $g = 10 - r \geq 6$ и канонический линейный ряд $K_{\tilde{\Gamma}} = 3\pi^*l_\Gamma - \sum \pi^{-1}(a_i)$, где $\pi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ — десингуляризация кривой Γ . Отметим, что если $r = 4$, то четыре точки $a_1, \dots, a_4$ не могут лежать на одной прямой. Для некоторой точки $p \in \tilde{\Gamma}$ имеем

$$h^0(\tilde{\Gamma}, \pi^*l_\Gamma + p) = h^0\left(\tilde{\Gamma}, 2\pi^*l_\Gamma - \sum \pi^{-1}(a_i) - p\right) + r - 2.$$

Сравнивая размерности, мы видим, что канонический дивизор высекается кубическими кривыми в $\mathbb{P}^2$. Отсюда легко вывести, что и линейный ряд $|2\pi^*l_\Gamma - \sum \pi^{-1}(a_i)|$ высекается кониками в $\mathbb{P}^2$. Если среди точек a_i три лежат на одной прямой $R \subset \mathbb{P}^2$, то $p \notin R$. В итоге получаем: $h^0(\tilde{\Gamma}, \pi^*l_\Gamma + p) = 3$ — противоречие.

Если Γ имеет тройную точку, рассуждаем аналогичным образом.

Итак, $g \leq 5$. Неравенство $((6L_P - E) \cdot (nL_P - \nu_C E))^2 \geq 0$ дает следующую оценку: $48n^2 - 14n\nu_C - 34\nu_C^2 \geq 0$, откуда $\nu_C \leq n$, что и требовалось.

Остальные возможности рассматриваются аналогично (с упрощениями).

Свойство (i) для двойной гиперповерхности Фано V доказано.

§ 3. Особенности циклов коразмерности 2

Докажем, что двойная гиперповерхность V , удовлетворяющая условию регулярности, обладает свойством (ii) предложения 2.1.

3.1. Гиперкасательные линейные системы. Зафиксируем неприводимый цикл $Y \subset V$ коразмерности 2 и точку $x \in Y$. Необходимо показать, что имеет место неравенство

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} \leq \frac{2}{m}. \quad (1)$$

Случай 1: $\sigma(x) \notin W$.

Предположим сначала, что $l \geq 2$.

Набор многочленов $q_1, \dots, q_m, g^{(l)}, \dots, g^{(2l-2)}$ можно расположить в виде одной (и только одной) из трех следующих диаграмм: при $m < l$

$$\begin{array}{ccccccc} q_1, & \dots, & q_m, & & & & \\ & & & & g^{(l)}, & \dots, & g^{(2l-2)} \end{array}$$

(эту ситуацию назовем $\vee$ -случаем); при $l \leq m < 2l - 2$

$$\begin{array}{cccccccc} q_1, & \dots, & q_l, & q_{l+1}, & \dots, & q_m, & & \\ & & g^{(l)}, & g^{(l+1)}, & \dots, & g^{(m)}, & g^{(m+1)}, & \dots, & g^{(2l-2)} \end{array}$$

(эту ситуацию назовем $\cap$ -случаем); при $2l - 2 \leq m$

$$\begin{array}{cccccccc} q_1, & \dots, & q_l, & q_{l+1}, & \dots, & q_{2l-2}, & \dots, & q_m \\ & & g^{(l)}, & g^{(l+1)}, & \dots, & g^{(2l-2)}, & & \end{array}$$

(эту ситуацию назовем $\subset$ -случаем).

В каждом из этих случаев построим семейство *гиперкасательных линейных систем* следующим образом. Пусть s_k обозначает произвольный однородный многочлен степени k от переменных $z_1, \dots, z_{M+1}$, а для $k \leq m$ символ f_k обозначает оборванное уравнение Q , $f_k = q_1 + \dots + q_k$. Построим сначала некоторые линейные пространства Π_k многочленов от z_*, y . Для удобства обозначений и определений, которые несколько различаются в $\vee$ -, $\cap$ - и $\subset$ -случаях, введем два множества индексов:

$$\mathcal{M} = \{k : 1 \leq k \leq m - 1\} \text{ и } \mathcal{L} = \{k : l \leq k \leq 2l - 2\}.$$

Пространства Π_k индексируются числами $k \in \mathcal{M} \cup \mathcal{L}$. Положим

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \left\{ \sum_{i=1}^{\min\{k; m-1\}} f_i s_{k-i} \right\} && \text{для } k \geq 1, \\ \Gamma_k &= \left\{ \sum_{i=l}^{\min\{k; 2l-2\}} (y - [\sqrt{g}]_i) s_{k-i} \right\} && \text{для } k \geq l. \end{aligned}$$

Теперь при $k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$ положим $\Pi_k = \Phi_k$, при любом другом $k \in \mathcal{M} \cup \mathcal{L}$ положим $\Pi_k = \Phi_k + \Gamma_k$.

Пусть $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ — раздутие точки $x \in V$, $E = \varphi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{M-1}$ — исключительный дивизор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. k -й *гиперкасательной линейной системой* в точке x назовем линейную систему Λ_k дивизоров на V , собственный прообраз $\tilde{\Lambda}_k$ которой на $\tilde{V}$ есть $|k(\varphi^* L) - (k+1)E|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Имеет место включение*

$$\Pi_k|_V \subset \Lambda_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в [2], при $k \leq m - 1$ многочлен f_k имеет степень k и $\text{mult}_x \sigma^*(f_k|_Q) \geq k + 1$. Для $k \in \mathcal{L}$ имеем: $(y - [\sqrt{g}]_k)$ представляет сечение пучка $\sigma^*\mathcal{O}_Q(k)$ (потому что u имеет степень $l \leq k$) и формальный ряд $y - \sqrt{g}$ тождественно обращается в нуль, в то время как $[\sqrt{g}]_k$ совпадает с $\sqrt{g}$ в компонентах степени $\leq k$, откуда $\text{mult}_x(y - [\sqrt{g}]_k) \geq k + 1$, что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Имеют место оценки:*

$$\text{codim}_V \text{Bs } \Lambda_k \geq \min\{k; m - 1\}$$

при $k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$,

$$\text{codim}_V \text{Bs } \Lambda_k \geq \min\{k; m - 1\} + \min\{k; 2l - 2\} + 1 - l$$

при всех остальных $k \in \mathcal{M} \cup \mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau \in \text{Aut } V$ — инволюция Галуа, переставляющая листы двойного накрытия $\sigma: V \rightarrow Q$. Очевидно,

$$\tau^*(y - [\sqrt{g}]_k) = -y - [\sqrt{g}]_k,$$

так что образ дивизора $y = [\sqrt{g}]_k$ на V относительно σ задается на Q уравнением $g^{(k)} = 0$. Положим

$$\Gamma'_k = \left\{ \sum_{i=l}^{\min\{k; 2l-2\}} g^{(i)} s_{k-i} \right\}$$

для $k \geq l$. Так как σ — конечный морфизм, достаточно доказать, что

$$\text{codim}_Q \text{Bs}(\Phi_k) \geq \min\{k; m - 1\}$$

при $k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$,

$$\text{codim}_Q \text{Bs}(\Phi_k + \Gamma'_k) \geq \min\{k; m - 1\} + \min\{k; 2l - 2\} + 1 - l$$

при всех остальных $k \in \mathcal{M} \cup \mathcal{L}$. На самом деле в обоих случаях имеют место равенства. Докажем их.

Система уравнений $f_1 = \dots = f_k = 0$ эквивалентна системе $q_1 = \dots = q_k = 0$. Последняя определяет набор конусов коразмерности k в $\mathbb{P}$. Если $k \leq m - 1$, то ни один из этих конусов не может лежать на Q , так как в противном случае все многочлены $q_{k+1}, \dots, q_m$ занулялись бы на нем, что невозможно в силу условия регулярности последовательности $q_1, \dots, q_m$. Этим первое неравенство (для $k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$) доказано.

Подчеркнем, что единственный нетривиальный момент в нашем доказательстве — это тот факт, что коразмерность базисного множества не подсказывает на единицу при ограничении с $\mathbb{P}$ на Q . Вообще говоря, при ограничении на подмногообразие коразмерности $a \geq 1$ коразмерность базисного множества может подсказывать на $0 \leq i \leq a$. В нашем случае этого не происходит из-за присутствия q_m в условии регулярности.

Пусть $k \geq l$. Базисное множество системы $\Phi_k + \Gamma'_k$ есть множество нулей системы многочленов

$$\mathcal{P}_k = \{q_i : 1 \leq i \leq \min\{k; m-1\}\} \cup \{g^{(i)} : l \leq i \leq \min\{k; 2l-2\}\}.$$

Если какая-то неприводимая компонента $T \subset \text{Bs}(\Phi_k + \Gamma'_k)$ целиком содержится в Q , то на T обращается в нуль “остаточный” многочлен

$$r = \sum_{i=\min\{k; m-1\}+1}^m q_i.$$

Если в r содержится только одно слагаемое q_m , то получаем противоречие: система функций $\mathcal{P}_k \cup \{q_m\}$ не образует регулярной последовательности. Если в $r = q_{k+1} + \dots + q_m$ более двух слагаемых, то система функций

$$\mathcal{P}_k \cup \{r\} \cup \{q_{k+1}, \dots, q_{m-1}\}$$

не образует регулярной последовательности, откуда следует, что и

$$\mathcal{P}_k \cup \{q_{k+1}, \dots, q_m\}$$

не есть регулярная последовательность. Снова противоречие. Этим предложение 3.2 полностью доказано.

3.2. От циклов коразмерности два к кривым. Для $i \in \mathcal{M}$ выберем в линейной системе Λ_i дивизор D_i и для $j \in \mathcal{L}$ выберем дивизор $D_j^* \in \Lambda_j$, так что для $i \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ в линейной системе Λ_i выбираются два дивизора. Формально говоря, мы задаем отображение

$$\beta: \mathcal{L} \vee \mathcal{M} \rightarrow \prod_{i \in \mathcal{L}} \Lambda_i \times \prod_{i \in \mathcal{M}} \Lambda_i$$

из дизъюнктного объединения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в произведение соответствующих линейных систем. Предположим, что $m \geq 4$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для общего набора $(D_i, i \in \mathcal{M}, D_j^*, j \in \mathcal{L})$ теоретико-множественное пересечение*

$$Y \cap \left(\bigcap_{i=3}^{m-1} D_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=l}^{2l-2} D_i^* \right)$$

одномерно в окрестности точки x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого индекса $i \in \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, $i \geq \min\{3; l\}$, положим

$$Y_i = Y \cap \left(\bigcap_{j=3}^{\min\{i; m-1\}} D_j \right) \cap \left(\bigcap_{j=l}^{\min\{i; 2l-2\}} D_j^* \right).$$

Возрастающей индукцией по $i \in \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ докажем, что

(а) для общего набора

$$(D_j, 1 \leq j \leq \min\{i; m-1\}, D_j^*, l \leq j \leq \min\{i; 2l-2\})$$

алгебраическое множество Y_i в окрестности точки x имеет коразмерность

$$\begin{aligned} \min\{i; m-1\} & \quad \text{при } i < l, \\ \min\{i; m-1\} + \min\{i; 2l-2\} + 1 - l & \quad \text{при } i \geq l. \end{aligned}$$

Если $i = \max\{j \in \mathcal{M} \cup \mathcal{L}\}$, то получаем в точности утверждение нашего предложения.

Докажем, что (а) выполнено для минимального индекса $i = \min\{3; l\}$. Возможны три следующих случая.

1) $i = l = 2$. Здесь $\text{codim Bs } \Lambda_2 \geq 3$ (коразмерности $\text{Bs } \Lambda_i$ берутся относительно V) и потому $Y \not\subset D_2$ для общего дивизора $D_2 \in \Lambda_2$. Значит, $\text{codim } Y_2 = 3$, что и требуется.

2) $i = l = 3$. Здесь $\text{codim Bs } \Lambda_3 \geq 4$ и для общей пары дивизоров $D_3, D_3^* \in \Lambda_3$ имеем $Y \not\subset D_3$ и $Y \cap D_3 \not\subset D_3^*$. Отсюда $\text{codim } Y_3 = 4$.

3) $l \geq 4$. Здесь $\text{codim Bs } \Lambda_3 \geq 3$, $Y \not\subset D_3$ и $\text{codim } Y_3 = 3$.

Прежде чем осуществлять шаг индукции, сделаем одно замечание. Во множестве натуральных чисел $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ может быть “дырка”: если имеет место $\vee$ -случай, $l \geq (m-1) + 2$.

Итак, пусть (а) доказано для $i \leq k$, и пусть $b \geq k+1$ — следующий индекс в $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, т.е.

$$b = \min\{j \in \mathcal{L} \cup \mathcal{M}, j \geq k+1\}.$$

Как было отмечено, может случиться, что $b \neq k+1$. Возможны два случая: А) $b \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$, В) $b \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{M}$ или $b \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$. Рассмотрим их по отдельности.

А) Здесь $b \leq m-1$ и $l \leq b \leq 2l-2$, так что имеет место оценка

$$\text{codim Bs } \Lambda_b \geq \text{codim } Y_k + 2.$$

Значит, линейная система $\Lambda_b|_{Y_k}$ не имеет неподвижных компонент (в окрестности точки x) и потому для общей пары дивизоров $D_b, D_b^* \in \Lambda_b$ имеем

$$\text{codim}(Y_k \cap D_b \cap D_b^*) = \text{codim } Y_k + 2,$$

что и требуется.

В) Пусть, например, $b \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{M}$ (симметричный случай $b \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$ полностью аналогичен). Здесь $b \geq m$, так что имеет место оценка

$$\text{codim Bs } \Lambda_b \geq \text{codim } Y_k + 1.$$

Поэтому общий дивизор $D_b^* \in \Lambda_b$ не содержит Y_k и, значит, $\text{codim } Y_b = \text{codim } Y_k + 1$.

Доказательство предложения 3.3 закончено.

Докажем, наконец, неравенство (1).

Для неприводимого цикла C произвольной коразмерности $k \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\beta(C) = \frac{\text{mult}_x C}{\deg C}.$$

Пусть $\beta(C) > 0$ и Λ_a — гиперкасательная система, удовлетворяющая требованию $\text{codim Bs } \Lambda_a \geq k + 1$ вблизи точки x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Алгебраический цикл $(C \circ T)$ теоретико-схемного пересечения C и общего дивизора $T \in \Lambda_a$ есть эффективный цикл коразмерности $k + 1$ на V , имеющий компоненту C_1 такую, что выполнено неравенство*

$$\beta(C_1) \geq \frac{a + 1}{a} \beta(C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно вытекает из свойств гиперкасательных систем и теории пересечений [16].

Построим последовательность неприводимых циклов $C_i \subset V$, $i = 2, \dots, M - 1$, коразмерности $\text{codim}_V C_i = i$ следующим образом. Положим $C_2 = Y$. Далее, для $j = 3, \dots, m - 1$ по индукции полагаем: C_j — некоторая неприводимая компонента цикла $(C_{j-1} \circ D_j)$, удовлетворяющая неравенству

$$\beta(C_j) \geq \frac{j + 1}{j} \beta(C_{j-1}).$$

Для $j = l, \dots, 2l - 2$ полагаем по индукции: C_{m-l+j} есть такая неприводимая компонента цикла $(C_{m-l+j-1} \circ D_j)$, для которой выполнено неравенство

$$\beta(C_{m-l+j}) \geq \frac{j + 1}{j} \beta(C_{m-l+j-1}).$$

Предложения 3.3 и 3.4 обеспечивают возможность такого построения. Цикл $C_{M-1} \subset V$ — неприводимая кривая. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\text{mult}_x C_{M-1}}{\deg C_{M-1}} &\geq \frac{\text{mult}_x Y}{\deg Y} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{m}{m-1} \cdot \frac{l+1}{l} \cdots \frac{2l-1}{2l-2} \\ &= \frac{\text{mult}_x Y}{\deg Y} \cdot \frac{m}{3} \cdot \frac{2l-1}{l}. \end{aligned}$$

Линейная система $|L - E|$ на $\tilde{V}$ свободна, поэтому отношение $(\text{mult}_x / \deg)(\cdot)$ не превосходит единицы. Следовательно,

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg Y} \leq \frac{3l}{m(2l-1)} < \frac{2}{m},$$

что и требовалось доказать.

3.3. Завершение доказательства теоремы 1*. По ходу рассуждений мы исключили из рассмотрения случай $m = 3$. В этом случае вместо предложения 3.3 нужно использовать его модификацию: теоретико-множественное пересечение

$$Y \cap \left(\bigcap_{i=l}^{2l-2} D_i^* \right)$$

одномерно в окрестности точки x . Остальные рассуждения полностью аналогичны общему случаю. Окончательная оценка имеет вид

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} \leq \frac{l}{2l-1} < \frac{2}{3}.$$

Рассмотрим, наконец, исключительный случай $l = 1$, $m = M$. В этом случае линейная система $|L - 2E|$ двумерна (V реализуется как полное пересечение в $\mathbb{P}^{M+2}$ и поэтому имеет в каждой точке две касательные гиперплоскости). Из условия регулярности следует, что цикл $(D_1 \circ D_1^*)$, $D_1, D_1^* \in |L - 2E|$, имеет в точке x кратность ровно 4. Очевидно, что цикл $(D_1 \circ D_1^*)$ неприводим. Поэтому если $\beta(Y) > 2/M$, то один из дивизоров D_1, D_1^* не содержит Y . Пусть это будет D_1 . Тогда цикл $(Y \circ D_1)$ содержит компоненту Y^* такую, что $\beta(Y^*) > 4/M$. Применяя описанную выше процедуру к набору общих дивизоров $D_4, \dots, D_{M-1}$ и циклу Y^* коразмерности 3, получим кривую $Y_{M-1} \subset V$, для которой $\text{mult}_x / \deg$ строго больше единицы. Противоречие. Случай $\sigma(x) \notin W$ полностью рассмотрен.

Случай 2: $\sigma(x) \in W$.

В этом случае наши рассуждения почти дословно повторяют только что данное доказательство для $\sigma(x) \notin W$, $l = 1$. В самом деле, линейная система $|L - 2E|$ на $\tilde{V}$ двумерна (здесь $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ — раздутие точки x , $E = \varphi^{-1}(x)$), ибо прообраз гиперплоского сечения $T \subset Q$, касательного к W в точке $\sigma(x)$, имеет в точке x особенность. Снова условие регулярности (определение 2) гарантирует, что кратность цикла $(D_1 \circ D_1^*)$, где $\tilde{D}_1, \tilde{D}_1^* \in |L - 2E|$, в точке x есть ровно 4. Легко видеть, что $(D_1 \circ D_1^*) = \sigma^{-1}(T_x W \cap Q)$ — неприводимый цикл и потому если $(\text{mult}_x / \deg)Y > 2/m$, то Y не содержится, например, в D_1 . Теперь существует компонента Y^* цикла $(Y \circ D_1)$ коразмерности 3 с $\text{mult}_x / \deg > 4/m$. Далее дословно повторяем доказательство для $l = 1$.

Свойство (ii) доказано для регулярной двойной гиперповерхности V в полном объеме.

Доказательство теоремы 1* завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод гиперкасательных систем позволяет оценить отношение $\text{mult}_x / \deg$ для циклов произвольной коразмерности. Пусть Y — неприводимый цикл коразмерности $k \geq 1$ и индекс $a = a(k)$ удовлетворяет условиям

$$\text{codim Bs } \Lambda_a \geq k + 1, \quad \text{codim Bs } \Lambda_{a-1} \leq k.$$

Тогда дословное повторение проведенных выше рассуждений дает такую оценку (в предположении, что $\sigma(x) \notin W$):

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} \leq \frac{(\min\{a, m\})! (\max\{\min\{a, 2l-1\}; l\})!}{m! (2l-1)!}.$$

Для дивизоров эта оценка не является точной. Ее можно улучшить следующим образом. Пусть $Y \subset V$ — неприводимый дивизор Вейля, $x \in Y$, $p = \sigma(x) \notin W$. Если $\sigma(Y) = Q \cap T_p Q$, то двойное накрытие $Y \rightarrow \sigma(Y)$ не распадается и поэтому $\text{mult}_x / \deg(Y) = 1/m$. В противном случае $(Y \circ D_1)$ — эффективный цикл коразмерности 2. Применяя к нему полученную выше оценку, имеем

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} Y \leq \frac{3l}{2m(2l-1)} \approx \frac{3}{4m} \quad \text{при } l \gg 0.$$

§ 4. Регулярные двойные гиперповерхности

Доказано, что общая (в смысле Зарисского) двойная гиперповерхность является регулярной.

4.1. Стратегия доказательства предложения 1.1. Положим

$$\Pi = (H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \setminus \{0\}) \times (H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2l)) \setminus \{0\})$$

и обозначим через $V_{f,g}$ двойное накрытие, соответствующее паре многочленов $(f, g) \in \Pi$. Зафиксируем точку $p \in \mathbb{P}$, систему линейных координат $(z_1, \dots, z_{M+1})$ с началом в точке p и запишем

$$f = q_0 + q_1 + \dots + q_m, \quad g = w_0 + w_1 + \dots + w_{2l}.$$

Рассмотрим множества $I = \{(f, g) \in \Pi : q_0 = 0, w_0 = 1\}$ и

$$J = \{(f, g) \in I : \text{последовательность } q_1, \dots, q_m, g^{(l)}, \dots, g^{(2l-2)} \text{ не регулярна}\}.$$

Мы будем доказывать предложение 1.1 в следующей форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1*. *Имеет место оценка*

$$\text{codim}_I J \geq M + 1.$$

Прежде всего выведем предложение 1.1 из 1.1*. В самом деле, согласно приведенной выше оценке множество пар $(f, g) \in \Pi$ таких, что хотя бы одна точка $x \in V_{f,g}$, $p = \sigma(x) \in Q_f \setminus W_g^*$, не регулярна, имеет коразмерность 1 в Π . Поэтому для общей двойной гиперповерхности $V_{f,g}$ все точки вне дивизора ветвления регулярны. Далее, дословное повторение рассуждений [2] показывает, что общая гиперповерхность $Q_f = \{f = 0\}$ регулярна в каждой своей точке. Наконец, условие

$$q_2|_{\{q_1=w_1=0\}} \equiv 0$$

дает высокую коразмерность для (f, g) . Поэтому общая двойная гиперповерхность $V_{f,g}$ регулярна всюду.

Хотя условие регулярности не зависит от порядка на множестве многочленов $q_*, g^{(*)}$, естественный порядок упрощает доказательство. Мы будем брать эти многочлены в следующей последовательности (и соответственно обозначать через $\beta_1, \dots, \beta_M$):

в $\vee$ -случае

$$q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow \dots \rightarrow q_m \rightarrow g^{(l)} \rightarrow \dots \rightarrow g^{(2l-2)},$$

в $\sqcap$ -случае

$$\begin{array}{ccccccc} q_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & q_l & & q_{l+1} & & \dots & & q_m \\ & & & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \dots & \nearrow & \downarrow \\ & & & & g^{(l)} & & g^{(l+1)} & & \dots & & g^{(m)} \end{array} \rightarrow g^{(m+1)} \rightarrow \dots \rightarrow g^{(2l-2)},$$

в $\subset$ -случае

$$\begin{array}{ccccccc} q_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & q_l & & q_{l+1} & & \dots & & q_{2l-2} & & q_{2l-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & q_m \\ & & & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \dots & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & & & & \\ & & & & g^{(l)} & & g^{(l+1)} & & \dots & & g^{(2l-2)} & & & & & & \end{array}$$

Рассмотрим подмножество $J_k \subset J$, состоящее из таких пар (f, g) , что регулярность последовательности β_* впервые нарушена в k -м члене. Например, $J_1 = \{(f, g) : \beta_1 = q_1 \equiv 0\}$; очевидно, $J = J_1 \cup \dots \cup J_M$, так что для доказательства предложения 1.1* достаточно проверить, что $\text{codim}_I J_k \geq M + 1$ для любого $k = 1, \dots, M$. Легко видеть, что $\text{codim}_I J_1 = M + 1$. Коразмерность множеств J_k , $k \geq 2$, значительно выше, но нам это не понадобится.

Геометрически условие $(f, g) \in J_k$ означает, что система уравнений $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0$ локально задает множество чистой коразмерности $k - 1$ и β_k обращается в нуль на одной из неприводимых компонент этого множества. Основное отличие рассматриваемой задачи от [2] состоит в том, что сейчас многочлены β_* не являются независимыми друг от друга. Варьируя многочлен β_k , мы автоматически изменяем множество $\{\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0\}$.

Опишем основные способы оценки коразмерности J_k .

4.2. Методы оценки коразмерности. Рассмотрим сначала случай $\beta_k = q_i$, $2 \leq i \leq m$. Пусть $Y \ni p$ — та компонента коразмерности $k - 1$ алгебраического множества $\{\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0\}$, на которой q_i обращается в нуль. Возможны два варианта:

Q1) Y — не конус с вершиной p ,

Q2) Y — конус с вершиной p .

В случае Q1) многочлен q_i обращается в нуль на конусе с вершиной p и базой Y , имеющем коразмерность $k - 2$. Проективизируя, получаем: $q_i \in H^0(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(i))$ обращается в нуль на неприводимом проективном многообразии $\bar{Y}$ размерности $M - k + 2$. Отметим, что q_i не участвует в уравнениях β_j , $1 \leq j \leq k - 1$. Проектируя $\bar{Y}$ линейно на общую $(M - k + 2)$ -плоскость, получаем (см. [2]) оценку:

$$\text{codim}_I J_k \geq \binom{M - k + 2 + i}{i}.$$

Здесь и далее символ $\text{codim}_I J_k$ обозначает коразмерность того подмножества множества J_k , о котором идет речь.

В случае Q2) многообразие $\bar{Y}$ имеет размерность на единицу меньше, так что получаем

$$\text{codim}_I J_k \geq \binom{M - k + 1 + i}{i}.$$

Этого может оказаться недостаточно (см. [2]) в предельном случае $\dim \bar{Y} = 1$. В этом случае поступаем так: разобьем Q2) на две возможности:

Q2.1) $\bar{Y}$ — прямая,

Q2.2) $\deg \bar{Y} \geq 2$.

Заметим, что если $\dim \bar{Y} = 1$, то $k = M$: речь идет о последнем звене последовательности, $\beta_M = q_m$. Если реализуется Q2.1), то все многочлены $q_1, \dots, q_{m-1}, g^{(l)}, \dots, g^{(2l-2)}$ должны обращаться в нуль на плоскости Y . Это дает $(m+2) \times (m-1)/2$ условий на q_* .

Далее, очевидно, что многочлены $g^{(j)}$ имеют вид

$$g^{(j)} = w_{j+1} + \dots + w_{2l} + P_j(w_1, \dots, w_j). \quad (2)$$

Если $g^{(l)}$ обращается в нуль на Y , то, фиксируя $w_1, \dots, w_l$, получаем $(l+2) + \dots + (2l+1) = 3l(l+1)/2$ независимых условий на w_* . Обращение в нуль $q_m|_{\bar{Y}}$ дает еще $m+1$ условие. Поскольку имеется $2(M-1)$ -мерное семейство плоскостей $Y \ni p$, получаем окончательно

$$\text{codim}_I J_M \geq \frac{m(m+3)}{2} + \frac{3l(l+1)}{2} + 2 - 2M.$$

Эта оценка уже достаточно сильная для наших целей.

Если реализуется Q2.2), то спроектируем $\bar{Y}$ линейно на общую плоскость $\mathbb{P}^2$. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ — ее образ, кривая степени ≥ 2 . Можно построить $\geq (2m+1)$ -мерное пространство $\mathcal{P}$ однородных многочленов степени m на $\mathbb{P}^2$ такое, что

$$\text{Ker}(\text{res}: \mathcal{P} \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(m))) = \{0\}.$$

Следовательно, получаем оценку

$$\text{codim}_I J_M \geq 2m + 1.$$

Поскольку q_m — последний член последовательности β_* , реализуется $\subset$ -случай. Легко видеть, что $m \geq 2l-2$ и потому $m \geq 2M/3$, откуда $\text{codim}_I J_M \geq 4M/3 + 1 > M+1$, так что случай Q2.2) в дальнейшем можно не рассматривать.

Обратимся теперь к более трудному случаю $\beta_k = g^{(i)}, l \leq i \leq 2l-2$. Будем считать, что среди $\beta_j, 1 \leq j \leq k-1$, есть по крайней мере два уравнения вида $g^{(r)}$, т.е. $i \geq l+2$. Если $i = l+1$ или $i = l$, то приводимые ниже рассуждения проходят с существенными упрощениями. Уравнения $\beta_j = q_r, 1 \leq j \leq k-1$, независимы от $g^{(i)}$. Предположим, что $g^{(i)}$ обращается в нуль на неприводимой компоненте $Y \ni x$ множества $\{\beta_j = 0 : 1 \leq j \leq k-1\}$. Заменим теперь в последовательности β_j все многочлены $g^{(j)}, l \leq j \leq i-2$, на

$$g^{(j)} - g^{(i-1)} = w_{j+1} + \dots + w_{i-1} + P_j(w_1, \dots, w_j) - P_{i-1}(w_1, \dots, w_{i-1})$$

(см. (2)). Новую последовательность обозначим через $\beta'_j, 1 \leq j \leq k-1$. Она регулярна и имеет то же множество нулей, что и исходная последовательность β_* . В частности, Y — одна из неприводимых компонент этого множества.

Наконец, в наборе β'_j заменим $g^{(i-1)}$ на

$$g^{(i-1)} - g^{(i)} = w_i + P_{i-1}(w_1, \dots, w_{i-1}) - P_i(w_1, \dots, w_i) \quad (3)$$

и обозначим новую последовательность через β_j^* . Имеются две возможности:

G1) последовательность $\beta_1^*, \dots, \beta_{k-1}^*$ остается регулярной,

G2) последовательность $\beta_1^*, \dots, \beta_{k-1}^*$ регулярной уже не является.

Если реализуется вариант G1), то Y — одна из неприводимых компонент алгебраического множества

$$\{\beta_1^* = \dots = \beta_{k-1}^* = 0\}$$

и $g^{(i)} = w_{i+1} + \dots + w_{2l} + P_i(w_1, \dots, w_i)$ обращается на Y в нуль. Преимущество новой последовательности β_j^* состоит в том, что ни один из этих многочленов не зависит от $w_{i+1}, \dots, w_{2l}$. Случай G1) разбивается на два подслучая:

G1.1) Y — не конус с вершиной p ,

G1.2) Y — конус с вершиной p .

В условиях подслучая G1.1) зафиксируем $w_1, \dots, w_{2l-1}$ и рассмотрим $g^{(i)}$ как линейный по w_{2l} многочлен. Если два разных многочлена $g_1^{(i)}|_Y \equiv g_2^{(i)}|_Y \equiv 0$, то их разность есть однородный многочлен степени $2l$ от z_* , тождественно обращающийся на Y в нуль. Как и в случае Q1), это дает оценку

$$\text{codim}_I J_k \geq \binom{M - k + 2 + 2l}{2l},$$

достаточную для наших целей.

В условиях подслучая G1.2) зафиксируем $w_1, \dots, w_i$. Обращение в нуль многочлена на конусе влечет обращение в нуль каждой из его однородных компонент. Имеем $i + 1 \leq 2l - 1$, так что этих компонент по меньшей мере две (для разности $g_1^{(i)} - g_2^{(i)}$ при фиксированных $w_j, 1 \leq j \leq i$). Отсюда получаем

$$\text{codim}_I J_k \geq \binom{M - k + 1 + 2l}{2l} + \binom{M - k + 2l}{2l - 1}.$$

Рассмотрим вариант G2). Здесь набор многочленов $\beta_j^* = \beta'_j, 1 \leq j \leq k - 2$, образует регулярную последовательность, но многочлен $g^{(i-1)} - g^{(i)}$ обращается в нуль на некоторой неприводимой компоненте Y^* замкнутого алгебраического множества

$$\{\beta_1^* = \dots = \beta_{k-2}^* = 0\}.$$

Существенно, что $\beta_1^*, \dots, \beta_{k-2}^*$ зависят только от $w_1, \dots, w_{i-1}$. Чтобы понять, сколько условий на w_i при фиксированных $w_j, 1 \leq j \leq i - 1$, накладывает требование $(g^{(i-1)} - g^{(i)})|_{Y^*} \equiv 0$, необходимо уточнить структуру многочлена (3) по w_i . Нетрудно проверить, что в силу определения многочленов $g^{(j)}$

$$g^{(i-1)} - g^{(i)} = A_i(w_1, \dots, w_{i-1}) + w_i(1 + B_i(w_1, \dots, w_{i-1})) - \frac{1}{4}w_i^2.$$

Зафиксируем $w_1, \dots, w_{i-1}$, и пусть w_i^+, w_i^- — произвольные многочлены, а $(g_{\pm}^{(i-1)} - g_{\pm}^{(i)})$ — результат их подстановки в (3). Если многочлены $(g_{\pm}^{(i-1)} - g_{\pm}^{(i)})$

обращаются в нуль на Y^* , то на Y^* обращается в нуль их разность, которая имеет вид

$$(w_i^+ - w_i^-)(1 - B_i(w_1, \dots, w_{i-1}) - w_i^+ - w_i^-).$$

Отсюда легко получить, что условие $(g^{(i-1)} - g^{(i)})|_{Y^*} \equiv 0$ дает для w_i коразмерность такую же, как и условие $w_i|_{Y^*} \equiv 0$. Отсюда получаем оценку

$$\text{codim}_I J_k \geq \binom{M - k + 2 + i}{i}.$$

Это завершает список технических приемов, которые мы используем для доказательства предложения 1.1*. Отметим, что наибольшие трудности всегда возникают в конце последовательности, т.е. в элементе β_M .

4.3. Вычисления. Считаем, что регулярность впервые нарушена в β_k , $k \geq 2$. Мы будем опускать символ $\text{codim}_I J_k$ и приводить оценку снизу для этой коразмерности в каждом случае.

$\vee$ -случай. Если $\beta_k = q_i$, то метод Q2) дает оценку

$$\binom{M + 1}{2},$$

что явно лучше, чем $M + 1$. Если $\beta_k = g^{(l)}$, то имеем оценку

$$\binom{3l - 1}{l - 1};$$

если $\beta_k = g^{(l+1)}$, то в ситуациях G1) и G2) имеем оценки

$$\binom{3l - 2}{l - 2} \quad \text{и} \quad \binom{2l}{l - 1}$$

соответственно. Если $\beta_k = g^{(l+i)}$, $i \geq 2$, то в случае G1) получаем оценку

$$\binom{3l - i - 1}{l - i - 1}.$$

Минимум этой функции от $i \in \{2, \dots, l - 2\}$ достигается при $i = l - 2$ и равен $M + 2$. В случае G2) получаем оценку

$$\binom{2l}{l - i} \geq \binom{2l}{2} = l(2l - 1).$$

Очевидно, в каждом из этих случаев оценка лучше, чем $M + 1$. Этим предложение 1.1* в $\vee$ -случае доказано.

$\cap$ -случай. Если $\beta_k = q_i$, $i \leq l$, то рассуждаем, как выше. При $i \geq l + 1$ техника Q1) и Q2) дает оценки

$$\binom{M + l + 2 - i}{i} \quad \text{и} \quad \binom{M + l + 1 - i}{i}$$

соответственно. Это больше, чем $M + 1$, во всех случаях, за исключением одного, когда $M + l + 1 - i = i + 1$. Легко проверить, что это возможно лишь при $m = 2l - 1$, т.е. q_m — последний элемент последовательности β_j . В этом случае метод Q2.1) дает оценку

$$\frac{1}{18}(7M^2 + 7M + 76) \geq M + 2,$$

что и требовалось.

Если $\beta_k = g^{(i)}$, $i \leq m$, то в случае G1.1) имеем оценку

$$\binom{M + 3l - 2i + 1}{2l} \geq \binom{2l + 1}{2} = M + 2,$$

так как $l \geq (M + 3)/3$ в $\cap$ -случае. В ситуации G1.2) имеем оценку

$$\binom{4l - m - 1}{2l - m - 1} + \binom{4l - m - 2}{2l - m - 1} \geq 4l + 1 \geq \frac{4}{3}M + 5.$$

Наконец, если реализуется G2), то имеем оценку

$$\binom{M + l + 1 - i}{i}.$$

Если $i \leq (M + l + 1)/3$, то это не меньше, чем $(M + l + 1)(2M + 2l - 1)/9$. В противном случае это не меньше, чем $l(2l - 1)$. В обоих случаях это $\geq M + 2$, что и требовалось.

Наконец, если $\beta_k = g^{(i)}$, $i \geq m + 1$, то оценки G1) и G2) имеют вид

$$(2l + 1)(l + 1) \text{ и } l(2l - 1)$$

соответственно. Предложение 1.1* в $\cap$ -случае доказано.

$\subset$ -случай. Здесь $2l \leq m$, $m \geq (2M + 2)/3$, $l \leq (M + 1)/3$. Рассуждения полностью аналогичны предыдущим случаям. Если $\beta_k = q_i$, то наиболее капризный вариант — это $k = M$, $i = m$. Здесь оценка по методу Q2.1) дает нижнюю грань

$$\frac{1}{2}(4m^2 - 6m(M + 1) + 3M^2 + 5M + 10).$$

Несложные вычисления показывают, что последнее число не меньше, чем $M + 3$. При меньших i оценки гораздо сильнее.

Если $\beta_k = g^{(i)}$, то в случае G1.1) имеем, подставляя максимальное значение $k = 3l - 3$, такую нижнюю грань:

$$\binom{m + 4}{2l} \geq \binom{m + 4}{4}.$$

Это гораздо больше, чем нам нужно. В случае G1.2) имеем оценку

$$\binom{m + 3}{3} + \binom{m + 2}{3},$$

что обеспечивает предложение 1.1*.

В случае G2) наши методы дают оценку

$$\binom{m + 2}{4}.$$

Этим перебор возможных нарушений регулярности завершен и предложение 1.1* полностью доказано. Отметим, что во всех случаях, кроме $\beta_1 = q_1 \equiv 0$, нарушение регулярности дает коразмерность $\geq M + 2$.

Список литературы

1. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities // Warwick Preprint. 1996; to appear in "Birational Geometry of Threefolds". № 31.
2. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. № 2. P. 401–426.
3. *Пушликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
4. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные кватрики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
5. *Iskovskikh V. A., Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of multi-dimensional algebraic varieties // J. Math. Sci. 1996. V. 82. P. 3528–3613.
6. *Corti A., Pukhlikov A., Reid M.* Fano 3-fold hypersurfaces // Warwick Preprint. 1999; to appear in "Birational Geometry of Threefolds". № 10.
7. *Пушликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной кватрики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). № 4. С. 472–496.
8. *Пушликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной кватрики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 1. С. 229–239.
9. *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–236.
10. *Саркисов В. Г.* О структурах расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 371–408.
11. *Kawamata Y.* Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher dimensional complex varieties. Berlin, 1996. P. 241–245.
12. *Kollár J., et al.* Flips and abundance for algebraic threefolds // Asterisque. 1993. V. 211.
13. *Corti A.* Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // to appear in "Birational Geometry of Threefolds".
14. *Dolgachev I. V.* Weighted projective spaces // Group actions and vector fields. Lecture Notes in Math. 1981. V. 956. P. 34–71.
15. *Fletcher A. R.* Working with weighted complete intersections // Warwick Preprint, 1989.
16. *Fulton W.* Intersection Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1984. (Русский перевод: Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
28.06.1999