Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 6, 145–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:23:34

УДК 517.51+517.53

А. П. Старовойтов

К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений

Для заданной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных действительных чисел, которая строго убывает к нулю, построена непрерывная 2π -периодическая функция f такая, что $R_n^T(f) = a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $R_n^T(f)$ – наилучшие приближения функции f тригонометрическими рациональными функциями степени не выше n в равномерной норме.

Библиография: 24 названия.

В качестве X будем рассматривать одно из следующих банаховых пространств действительных функций: $C = C[-1, 1]$ – множество всех непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций, $C_{2\pi}$ – пространство 2π -периодических непрерывных на всей числовой прямой функций (в C и $C_{2\pi}$ рассматриваются равномерные нормы) и $L_p = L_p[-1, 1]$, $1 \leq p < \infty$, – пространство Лебега. Обозначим через P_n и P_n^T множества алгебраических и тригонометрических полиномов с действительными коэффициентами, степень которых не выше n . Соответственно R_n и R_n^T – множества всех алгебраических и тригонометрических рациональных функций с действительными коэффициентами степени не выше n .

Для $f \in C_{2\pi}$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ определим

$$E_n^T(f, C_{2\pi}) = \inf \{ \|f - p\| : p \in P_n^T \},$$

$$R_n^T(f, C_{2\pi}) = \inf \{ \|f - r\| : r \in R_n^T \}$$

–наилучшие приближения f в $C_{2\pi}$ множествами P_n^T, R_n^T . Аналогично, если $X = C$ или $X = L_p$, рассмотрим последовательности $\{E_n(f, X)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{R_n(f, X)\}_{n=0}^{\infty}$ наилучших приближений функции f в X множествами P_n и R_n . Для удобства будем считать, что и при $X = C_{2\pi}$ также

$$E_n(f, X) = E_n^T(f, C_{2\pi}), \quad R_n(f, X) = R_n^T(f, C_{2\pi}).$$

Из свойств точной нижней грани и теоремы Вейерштрасса следует, что для любой функции $f \in X$ последовательности $\{E_n(f, X)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{R_n(f, X)\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастают и сходятся к нулю.

Следующие две проблемы связаны с описанием наилучших полиномиальных и рациональных приближений.

А) Какой должна быть последовательность действительных неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, чтобы существовала функция $f \in X$, для которой

$$E_n(f, X) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots?$$

В) Какой должна быть последовательность действительных неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, чтобы существовала функция $f \in X$, для которой

$$R_n(f, X) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots?$$

Проблема А) была поставлена и решена С. Н. Бернштейном в 1938 году (см. [1], [2]). Из описанных свойств наилучших приближений ясно, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, по крайней мере, должна состоять из неотрицательных чисел, не возрастать и сходиться к нулю. С. Н. Бернштейн получил следующий принципиальный результат: для любой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, состоящей из неотрицательных чисел, которая не возрастает и сходится к нулю, существует функция $f \in X$ такая, что

$$E_n(f, X) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Позже этот результат был перенесен на произвольное банахово пространство (см. [3]).

Аналог теоремы С. Н. Бернштейна для рациональных приближений отсутствует даже в классическом случае пространства $C_{2\pi}$, хотя проблема описания всех последовательностей $\{R_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$, $f \in C_{2\pi}$, поставлена давно. В приведенной выше постановке она сформулирована Е. П. Долженко в [4]. В этой работе получен также частичный аналог теоремы С. Н. Бернштейна для рациональных приближений. Именно, для любой невозрастающей последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \geq 0$, $a_n \rightarrow 0$, Е. П. Долженко построил функцию $f \in X = C$ (соответственно, $f \in X = C_{2\pi}$), для которой при $n_k = 9^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, справедливы равенства

$$R_{n_k}(f, X) = E_{n_k}(f, X) = a_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Позже было установлено [5; гл. 7, § 2, равенство (2.12)], что последовательность $n_k = 9^k$ в (1) с помощью метода Е. П. Долженко можно заменить на $n_k = 3^k$.

В связи с этим возник вопрос: “Насколько плотной в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ может быть последовательность $\{n_k\}$, для которой выполняются равенства (1)?”

Непосредственно из того факта, что для вещественнозначной функции f таблица ее наилучших рациональных аппроксимаций, так же, как и таблица аппроксимаций Паде, устроена блочным образом (см., например, [6] и [7]), вытекает,¹ во-первых, что если при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ $R_n(f, X) = E_n(f, X)$, то f есть многочлен и, следовательно, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, начиная с некоторого номера, состоит из нулей (см. также [8]–[10]); во-вторых, что последовательность $n_k = 2^k - 1$ является самой “медленной” последовательностью, для которой могло бы иметь место равенство $R_{n_k}(f, X) = E_{n_k}(f, X)$. Это означает, что решение проблемы В) нельзя получить из теоремы С. Н. Бернштейна, а последовательность $\{n_k\}$ из (1) является некоторым собственным подмножеством $\mathbb{N}$.

Окончательный результат для оценки плотности в множестве $\mathbb{N}$ последовательности $\{n_k\}$, для которой выполняются равенства (1), принадлежит А. А. Пекарскому [11], который, используя теорему С. Н. Бернштейна, построил пример функции $f \in C$ такой, что

$$R_{2^k-1}(f, C) = E_{2^k-1}(f, C) = a_{2^k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

¹Внимание автора на это обстоятельство обратил А. А. Гончар.

Из результатов [4], [9] также следует, что ответ на проблему В) зависит и от пространства X . Действительно, А. Л. Левин [9] доказал, что если $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, и не является рациональной, то последовательность $\{R_n(f, L_p)\}_{n=0}^\infty$ строго убывает. С другой стороны, из сформулированного выше результата Е. П. Долженко следует, что любая невозрастающая последовательность $\{r_k\}_{k=0}^\infty$, $r_k \geq 0$, $r_k \rightarrow 0$, может быть подпоследовательностью последовательности $\{R_n(f, C)\}_{n=0}^\infty$ при $n_k = 9^k$ для некоторой функции $f \in C$. Это означает, что последовательность $\{R_n(f, C)\}_{n=0}^\infty$, вообще говоря, не будет строго монотонной. Сказанное относится и к последовательности $\{R_n^T(f, C_{2\pi})\}_{n=0}^\infty$.

Существенное продвижение в решении проблемы В при приближении рациональными функциями с комплексными коэффициентами связано с работой [12]. При дополнительном условии строгой монотонности последовательности $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ А. А. Пекарский построил комплекснозначную функцию f , непрерывную на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющую условию

$$R_n^*(f, C) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $R_n^*(f, C)$ — наилучшие приближения функции f на отрезке $[-1, 1]$ рациональными функциями степени не выше n с комплексными коэффициентами. Известно [5; гл. 7, § 1, теорема 1.4], что для вещественной функции g справедливы неравенства $\frac{1}{2}R_n(g, C) \leq R_n^*(g, C) \leq R_n(g, C)$ и для каждого $n \geq 3$ существует вещественная функция $g \notin R_n$, для которой $R_n^*(g, C) = \frac{1}{2}R_n(g, C)$.

Для доказательства существования функции f , удовлетворяющей условию (2), А. А. Пекарский применил принцип неподвижной точки Шаудера–Тихонова, а сама конструкция построения функции f основана на свойствах специальным образом подобранных произведений Бляшке. Похожая конструкция позволила М. А. Назаренко [13] получить аналогичный результат в пространстве функций комплексного переменного z , аналитических внутри и непрерывных в замкнутом единичном круге $\{z : |z| \leq 1\}$.

В этой связи заметим, что классическое доказательство С. Н. Бернштейна (см. [1], [2]) основано на принципе компактности Больцано–Вейерштрасса для последовательностей и первоначально было получено в пространстве $C_{2\pi}$, при этом искомая функция f оказалась четной.

Основной целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Для любой строго убывающей к нулю последовательности $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ неотрицательных чисел существует нечетная функция $f \in C_{2\pi}$ такая, что*

$$R_n^T(f, C_{2\pi}) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В основу конструкции искомой функции $f \in C_{2\pi}$ положены алгебраические дроби Чебышёва–Маркова, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы, разбив его на ряд шагов.

Для заданного набора комплексных чисел $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, положим

$$\Phi_n(y) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k - y), \quad h_{2n}(y) = \prod_{k=1}^n [(\alpha_k - y)^2 + \beta_k^2].$$

Рассмотрим функции, введенные С. Н. Бернштейном (см. [14]) в связи с решением задачи об алгебраических дробях, наименее уклоняющихся от нуля на всей вещественной оси, – синус-дроби Бернштейна $N_n(y) = \sin \Phi_n(y)$. Известно (см. [15; гл. 1, § 1, равенства (1)–(4)]), что

$$N_n(y) = \sin \Phi_n(y) = \frac{1}{2i} \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{z_j - y}{|z_j - y|} - \prod_{j=1}^n \frac{\bar{z}_j - y}{|\bar{z}_j - y|} \right\} = \frac{p_{n-1}^*(y)}{\sqrt{h_{2n}(y)}},$$

где $p_{n-1}^*(y)$ – многочлен с действительными коэффициентами степени $n - 1$, все нули которого простые и вещественные.

Определимся теперь с выбором чисел $\{z_k\}$. При построении функции f будем считать, что $a_0 = 1$. В противном случае следует рассмотреть последовательность

$$1, \quad \frac{a_1}{a_0}, \quad \frac{a_2}{a_0}, \quad \dots$$

и воспользоваться равенством $R_n^T(\lambda f) = |\lambda| R_n^T(f)$. Определим две бесконечно малые последовательности положительных чисел

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n, \quad \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1; \Delta a_2; \dots; \Delta a_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ЛЕММА 1 [12]. *Существует последовательность $\{\beta_j\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям:*

$$1 > \beta_j > \beta_{j+1} > 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\sum_{j=l+1}^\infty \frac{\beta_j}{\beta_l} < \frac{1}{4} \varepsilon_{l+1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\sum_{j=1}^{l-1} \frac{\beta_l}{\beta_j} < \frac{1}{4} \varepsilon_l, \quad l = 2, 3, 4, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужным условиям удовлетворяет последовательность

$$\beta_j = \frac{\varepsilon_1}{5} \frac{\varepsilon_2}{5} \dots \frac{\varepsilon_j}{5}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Лемма доказана.

Теперь для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $z_k = i\beta_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и, взяв каждую точку z_k с кратностью 2, построим синус-дробь Бернштейна

$$\begin{aligned} N_{2n}(y) = \sin \Phi_{2n}(y) &= \frac{1}{2i} \left\{ \prod_{j=1}^n \left(\frac{z_j - y}{|z_j - y|} \right)^2 - \prod_{j=1}^n \left(\frac{\bar{z}_j - y}{|\bar{z}_j - y|} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{y P_{2n-2}(y)}{\prod_{k=1}^n (y^2 + \beta_k^2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $P_{2n-2}(y)$ – четный полином порядка $2n - 2$.

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda_{k,l} = N_{2k}(\beta_l)$. Тогда

$$|\lambda_{k,l}| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \quad \text{при } l > k, \quad (4)$$

$$|\lambda_{k,l} - (-1)^l| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \quad \text{при } l \leq k. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая выбор точек $\{z_j\}_{j=1}^k$, получим, что при $y > 0$

$$\Phi_{2k}(y) = 2 \sum_{j=1}^k \arg(i\beta_j - y) = 2 \sum_{j=1}^k \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{\beta_j} \right) = \pi k + 2 \sum_{j=1}^k \operatorname{arctg} \frac{y}{\beta_j}.$$

Следовательно, если $l > k$, с учетом леммы 1 имеем

$$0 < \Phi_{2k}(\beta_l) - \pi k = 2 \sum_{j=1}^k \operatorname{arctg} \frac{\beta_l}{\beta_j} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{\beta_l}{\beta_j} < \frac{1}{2}\varepsilon_l.$$

Отсюда получим

$$|\lambda_{k,l}| = |\sin \Phi_{2k}(\beta_l)| < \frac{1}{2}\varepsilon_l,$$

и неравенство (4) доказано.

Пусть теперь $l \leq k$. Тогда из представления

$$\Phi_{2k}(y) = 2 \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \arg(-y + i\beta_j) + \arg(-y + i\beta_l) + \sum_{j=l+1}^k \arg(-y + i\beta_j) \right\}$$

имеем, что

$$\begin{aligned} \Phi_{2k}(\beta_l) &= \pi(l-1) + 2 \sum_{j=l}^{l-1} \operatorname{arctg} \frac{\beta_l}{\beta_j} + \frac{3\pi}{2} + 2 \sum_{j=l+1}^k \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\beta_j}{\beta_l} \right) \\ &= \pi(2k-l) + \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{j=1}^{l-1} \operatorname{arctg} \frac{\beta_l}{\beta_j} - 2 \sum_{j=l+1}^k \operatorname{arctg} \frac{\beta_j}{\beta_l}. \end{aligned}$$

Снова применив лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \left| \Phi_{2k}(\beta_l) - \pi(2k-l) - \frac{\pi}{2} \right| &\leq 2 \max \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \operatorname{arctg} \frac{\beta_l}{\beta_j}; \sum_{j=l}^k \operatorname{arctg} \frac{\beta_j}{\beta_l} \right\} \\ &< 2 \max \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\beta_l}{\beta_j}; \sum_{j=l}^k \frac{\beta_j}{\beta_l} \right\} < \frac{1}{2}\varepsilon_l. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (5).

Лемма доказана.

Перейдем теперь от дробей Бернштейна (3) к дробям Чебышёва–Маркова. Заметим, что впервые задачу о построении рациональных дробей с заданным знаменателем, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке $[-1, 1]$, решил П. Л. Чебышёв [16]. А. А. Марков [17] обобщил эту задачу на алгебраические дроби. Названными авторами, а также С. Н. Бернштейном (см. [18; статья 42], [19; статья 51]) была обнаружена далеко идущая аналогия этих дробей с полиномами Чебышёва. С другой стороны, В. Н. Русаком [15; гл. 2, § 1] было установлено, что дроби Чебышёва–Маркова можно получить в качестве частного случая алгебраических дробей Бернштейна. Это обстоятельство, по-видимому, оставалось незамеченным. Во всяком случае в работах С. Н. Бернштейна нигде не отмечается связь между построенными им алгебраическими дробями и алгебраическими дробями Чебышёва–Маркова.

Сделав в (3) замену $x = (1 - y^2)/(1 + y^2)$, получим синус-дробь Чебышёва–Маркова, имеющую следующий вид (см. [15; гл. 2, § 1, равенство (9)])

$$\nu_n(x) = \sin \varphi_{2n}(x) = \sin \Phi_{2n}(y) = \sqrt{1 - x^2} \frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^n (1 - c_j x)}, \quad (6)$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n - 1$ с действительными коэффициентами, а

$$\beta_k = \sqrt{\frac{1 - c_k}{1 + c_k}}, \quad c_k = \frac{1 - \beta_k^2}{1 + \beta_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

ЛЕММА 3. При указанном выборе последовательности $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ получим, что $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots < 1$ и справедливы равенства

$$\nu_k(c_l) = \lambda_{k,l}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l = 1, 2, \dots,$$

где числа $\lambda_{k,l}$ из предыдущей леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства последовательности $\{c_n\}$ следуют из равенств (7). Далее,

$$\lambda_{k,l} = \sin \Phi_{2k}(\beta_l) = \nu_k\left(\frac{1 - \beta_l^2}{1 + \beta_l^2}\right) = \nu_k(c_l).$$

Лемма доказана.

В банаховом пространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ с нормой $\|t\| = \sup\{|t_n| : n = 0, 1, 2, \dots\}$ определим выпуклое компактное множество

$$K = \{t : 0 \leq t_k \leq \varepsilon_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Если $t = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in K$, то полагая $\Delta t_k = t_{k-1} - t_k$, рассмотрим функцию

$$f_t(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)}, \quad (8)$$

где $P_{k-1}(x)$ – многочлен, стоящий в числителе синус-дроби Чебышёва–Маркова $\nu_k(x)$, определяемый равенствами (6), $\theta \in (-\infty, \infty)$. Поскольку ряд (8) равномерно сходится на любом конечном отрезке, то функция $f_t(\theta)$ является непрерывной на всей числовой оси нечетной 2π -периодической функцией аргумента θ .

Покажем, что среди функций построенного семейства $(f_t(\theta))_{t \in K}$ найдется функция f с нужными свойствами.

ЛЕММА 4. Пусть $\theta_k = \arccos c_k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $0 < \theta_k < \pi/2$ и при всех $t \in K$ справедливы неравенства

$$(-1)^l f_t(\theta_l) \geq a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)} = \nu_k(\cos \theta).$$

С учетом этого равенства и леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} f_t(\theta_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \nu_k(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} (\Delta a_k + \Delta t_k) \lambda_{k,l} + \sum_{k=l}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) (\lambda_{k,l} - (-1)^l). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in K$, то $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$. Следовательно, используя лемму 2, получим

$$|f_t(\theta_k) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1})| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l (a_0 + t_0) < \varepsilon_l.$$

Отсюда следует (9).

Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Для этого заметим, что при любом $t \in K$ функция f_t подчинена условиям

$$a_n + t_n - \varepsilon_{n+1} \leq R_n^T(f_t) \leq a_n + t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Действительно, так как $|\nu_k(x)| = |\sin \varphi_{2k}(x)| \leq 1$ и $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \left| f_t(\theta) - \sum_{k=1}^n (\Delta a_k + \Delta t_k) \sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) |\nu_k(\cos \theta)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) = a_n + t_n. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка сверху в (10) доказана. Для доказательства оценки снизу воспользуемся следующим аналогом теоремы Валле-Пуссена (см. [20; гл. 2, §31 и §40]) для периодического случая.

ЛЕММА 5. Если $f \in C_{2\pi}$ и принимает в последовательных точках $u_1 < u_2 < \dots < u_N$ промежутка $(-\pi, \pi]$ отличные от нуля значения

$$\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{N-1} \lambda_N$$

с чередующимися знаками (все λ_i имеют одинаковый знак; для определенности можно принять, что $\lambda_i > 0$), причем $N \geq 2n + 2$, то

$$R_n^T(f, C_{2\pi}) \geq \min\{\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_N\}.$$

На промежутке $(-\pi, \pi]$ с учетом нечетности функции $f_t(\theta)$ имеется $2n + 2$ точек

$$\begin{aligned} u_1 = \theta_1, u_2 = \theta_2, \dots, u_{n+1} = \theta_{n+1}, \\ u_{n+2} = -\theta_{n+1}, u_{n+3} = -\theta_n, \dots, u_{2n+2} = -\theta_1, \end{aligned}$$

в которых согласно (9) функция f_t принимает значения с чередующимися знаками. Поэтому

$$R_n^T(f_t) \geq \min\{a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l : l = 1, 2, \dots, n+1\} = a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Таким образом, оценка снизу в (10) доказана.

Неравенства (10) означают, что отображение $\Pi: \mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_0$, определяемое равенством

$$\Pi(t) = \{a_n + t_n - R_n(f_t)\}_{n=0}^\infty,$$

действует из K в себя.

ЛЕММА 6. Отображение $t \mapsto f_t(\theta)$ банахова пространства $\mathbf{c}_0$ в $C_{2\pi}$ равномерно непрерывно на K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t', t'' \in K$. Тогда с учетом (8) будем иметь, что

$$\begin{aligned} & \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f_{t''}(\theta) - f_{t'}(\theta)| \\ & \leq \sum_{k=1}^N |\Delta t_k'' - \Delta t_k'| + \sum_{k=N+1}^\infty (\Delta a_k + \Delta t_k'') + \sum_{k=N+1}^\infty (\Delta a_k + \Delta t_k') \\ & \leq 2N \max_{0 \leq k \leq N} |t_k'' - t_k'| + 2a_N + t_N'' + t_N'. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $f, g \in C_{2\pi}$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ верно неравенство $\|f - g\| < \varepsilon$. Тогда

$$|R_n(f) - R_n(g)| < \varepsilon \quad \text{для } n = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r_n^f и r_n^g — тригонометрические рациональные функции наилучшего приближения f и g степени не выше n . Тогда из условия леммы следует, что

$$\|f - r_n^g\| < R_n(g) + \varepsilon, \quad \|g - r_n^f\| < R_n(f) + \varepsilon,$$

поэтому

$$R_n(f) < R_n(g) + \varepsilon, \quad R_n(g) < R_n(f) + \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Из лемм 6 и 7 следует, что отображение $\Pi(t)$ непрерывно на K . По теореме Шаудера (см. [21]) существует точка $t^* = (t_0^*, t_1^*, t_2^*, \dots) \in K$, для которой $\Pi(t^*) = t^*$, т.е.

$$R_n(f_{t^*}) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, функция $f(\theta) = f_{t^*}(\theta)$ является искомой. Теорема доказана.

Отметим также, что приведенное доказательство теоремы в сравнении с доказательством С. Н. Бернштейна является более конструктивным. В частности, задав нужную скорость убывания к нулю последовательности $\{a_k\}_{k=0}^\infty$, можно изучать различные свойства всего семейства функций $(f_t(\theta))_{t \in K}$, которому принадлежит искомая функция. Данное обстоятельство имеет важное значение как при доказательстве точности прямых теорем рациональной аппроксимации, так и при получении обратных теорем.

Основные результаты статьи докладывались на Международной конференции по теории аппроксимации, посвященной В. К. Дзядыку (Киев, 1999 год) и анонсированы в [22]–[24].

В заключение выражаю благодарность А. А. Пекарскому и В. Н. Русаку за полезные обсуждения полученных результатов и внимание к работе.

Список литературы

1. Bernstein S. Sur le problème inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues // C. R. Acad. Sci. Paris. 1938. V. 206. P. 1520–1523.
2. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
3. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
4. Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. №3. С. 313–320.
5. Lorentz G., v. Golitschek M., Makavoz Y. Constructive approximation: advanced problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
6. Hayashi E., Trefethen L., Gutknecht M. The CF table // Constr. Approx. 1990. V. 6. №2. P. 195–223.
7. Trefethen L. Square blocks and equioscillation in the Pade, Walsh and CF tables // Rational approximation and interpolation. Proc. Conf. (Tampa/Fla, 1983), 1984. P. 170–181. (Lect. Notes in Math., V. 1105.)
8. Левин А. Л., Тихомиров В. М. О приближении аналитических функций рациональными // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. №2. С. 279–282.
9. Левин А. Л. Приближение рациональными функциями в комплексной области // Матем. заметки. 1971. Т. 9. №2. С. 121–130.
10. Boehm B. Functions, whose best rational Chebyshev approximations are polynomials // Numer. Math. 1964. V. 6. №3. P. 235–242.

11. Пекарский А. А. О случаях совпадения наилучших равномерных полиномиальных и рациональных приближений // J. Tech. Univ. at Plovdiv. 1996. V. 2. Fund. Sci. and Appl. P. 41–44.
12. Пекарский А. А. Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 1994. № 1. С. 23–26.
13. Назаренко М. А. Существование функции с заданными рациональными приближениями в пространстве $C(A)$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 4. С. 20–22.
14. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
15. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979.
16. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
17. Марков А. А. Избранные труды. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
18. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
19. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
20. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
21. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
22. Старовойтов А. П. Об одной проблеме Бернштейна–Долженко // International conference on approximation theory and its applications dedicated to the memory of V. K. Dzjaduk. Abstracts. Kyiv: Institute of Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 1999. P. 78.
23. Старовойтов А. П. Описание последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тез. докл. междунар. конф. (Беларусь, Минск, 14–18 сентября 1999 г.). Минск: БГУ, 1999. С. 213–214.
24. Старовойтов А. П. К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 23–25.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Белоруссия
E-mail: Svoitov@gsu.unibel.by

Поступила в редакцию
01.02.1999