Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве Лебега $L^{p(x)}(-1, 1)$ с переменным показателем $p(x)$, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 1, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4877>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:40:26

УДК 517.518.34

И. И. Шарапудинов

О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве Лебега $L^{p(x)}(-1, 1)$ с переменным показателем $p(x)$

Рассмотрена задача о нахождении условий на переменный показатель $p = p(x)$, при соблюдении которых система ортонормированных полиномов Лежандра $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом нормированного пространства Лебега $L^{p(x)}(-1, 1)$ с нормой

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_{-1}^1 \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Найдены в определенном смысле окончательные условия на $p = p(x)$ при $x \in [-1, 1]$, которые гарантируют базисность системы $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в $L^{p(x)}(-1, 1)$.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: пространство Лебега, переменный показатель, полином Лежандра, базис.

§ 1. Введение

Пусть E – произвольное множество, на котором задана мера Лебега $\mu(A)$, $A \subset E$. Через $L^{p(x)}(E)$ мы обозначим множество измеримых функций $f(x)$, определенных на E и таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} d\mu(x) < \infty,$$

где $p(x)$ – неотрицательная измеримая функция, заданная на E . В случае, если E представляет собой промежуток с концами в точках a и b , где $a < b$, мы полагаем $L^{p(x)}(a, b) = L^{p(x)}(E)$. Если $1 \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$ при $x \in E$, то $L^{p(x)}(E)$ является (см. [1]) нормированным пространством, в котором одну из эквивалентных норм можно определить с помощью равенства

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} d\mu(x) \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

Первое упоминание о пространствах $L^{p(x)}(E)$ мы находим еще в работе Орлича [2], опубликованной в 1931 г., в которой он исследовал неравенства типа Гёльдера для пространства l^{p_i} , состоящего из последовательностей $\{x_i\}$ вещественных чисел x_i , для которых $\sum_i |x_i|^{p_i} < \infty$. В качестве примера более

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00143а).

общих, так называемых модулярных пространств $L^{p(x)}(E)$ встречается в работах японских математиков, относящихся к 1950-м годам (см. [3], [4]). Отметим также, что модулярные пространства функций рассматривались в ряде работ польских математиков (см. [5], [6] и цитированную там литературу). В работе российского математика И. В. Ценова [7] впервые была рассмотрена задача о критерии для полинома $Q_n^*(x)$, который доставляет минимум интегралу

$$\int_a^b |f(x) - Q_n(x)|^{p(x)} dx$$

среди всех полиномов вида $Q_n(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$, где $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ — линейно независимая система непрерывных функций, заданных на $[a, b]$, причем $f(x)$ и $p(x)$ также непрерывны. Систематическое и целенаправленное исследование топологии пространств $L^{p(x)}(E)$ как таковых было дано в работе автора [1], которая уже упоминалась выше. В работах автора [8]–[12] были рассмотрены некоторые вопросы теории приближений в пространствах $L^{p(x)}(E)$. В частности, в работе [9] было доказано, что система Хаара является базисом пространства $L^{p(x)}(0, 1)$ тогда и только тогда, когда переменный показатель $p(x)$ при $x, y \in [0, 1]$ удовлетворяет условию Дини–Липшица

$$|p(x) - p(y)| \left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right| \leq c; \quad (1.2)$$

здесь и далее $c, c(p), c(p, E, \dots, Q)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. В работе [11] было доказано, что тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является базисом пространства $L^{p(x)}(0, 2\pi)$ тогда и только тогда, когда 2π -периодическая функция $p(x) > 1$ удовлетворяет условию Дини–Липшица (1.2) при $x, y \in [0, 2\pi]$. Следует отметить, что в последние годы теория пространств $L^{p(x)}(E)$ получила интенсивное развитие и важные приложения (см. [13]–[20] и цитированную там литературу). При этом заметим, что наиболее важные результаты, полученные в указанных работах, связаны с условием Дини–Липшица (1.2), обнаруженным впервые в работах автора [9] и [10].

§ 2. Обозначения и некоторые факты

Пусть $p = p(x)$ — измеримая существенно ограниченная функция, заданная на множестве E . Положим $\underline{p}(E) = \text{vrai} \min\{p(x) : x \in E\}$, $\overline{p}(E) = \text{vrai} \sup\{p(x) : x \in E\}$,

$$p'(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1} \quad 1 < p(x), \quad x \in E. \quad (2.1)$$

Если $p(x)$ и $q(x)$ — измеримые функции, заданные на E и такие, что $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q}(E) < \infty$, то (см. [1], [8])

$$\|f\|_p(E) \leq r_{p,q} \|f\|_q(E), \quad (2.2)$$

где

$$r_{p,q} = \max \left\{ \frac{1}{\underline{\alpha}(E)} + \frac{\mu(E)}{\underline{\alpha}'(E)}, 1 \right\}, \quad \alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)},$$

$\mu(E)$ – мера множества E . Положим

$$\gamma_p(f) = \int_E |f(x)|^{p(x)} d\mu(x). \quad (2.3)$$

Тогда из (1.1) и (2.3) нетрудно получить

$$\|f\|_p(E) = \inf \{ \alpha > 0 : \gamma_p(f\alpha^{-1}) \leq 1 \}. \quad (2.4)$$

Из результатов, полученных в [1], следует, что величина

$${}_p\|f\|(E) = \sup_{\substack{g \in L^{p'(x)}(E) \\ \|g\|_{p'} \leq 1}} \int_E g(x)f(x) d\mu(x) \quad (2.5)$$

является эквивалентной (2.4) нормой в $L^{p(x)}(E)$. Докажем это. Из неравенства

$$\int_E f(x)g(x) d\mu(x) \leq c(p)\|f\|_p(E)\|g\|_{p'}(E), \quad (2.6)$$

установленного в [1] (см. также [11]), следует, что

$${}_p\|f\|(E) \leq c(p)\|f\|_p(E). \quad (2.7)$$

С другой стороны, легко показать, что

$${}_p\|f\|(E) \geq \|f\|_p(E). \quad (2.8)$$

В самом деле, пусть сначала $\|f\|_p(E) = 1$, тогда

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} d\mu(x) = 1.$$

Положим $g(x) = |f(x)|^{p(x)-1} \operatorname{sign} f(x)$. Тогда $g(x) \in L^{p'(x)}(E)$ и

$$\int_E |g(x)|^{p'(x)} d\mu(x) = \int_E |f(x)|^{p'(x)(p(x)-1)} d\mu(x) = \int_E |f(x)|^{p(x)} d\mu(x) = 1.$$

Следовательно, $\|g\|_{p'}(E) = 1$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_E f(x)g(x) d\mu(x) &= \int_E f(x)|f(x)|^{p(x)-1} \operatorname{sign} f(x) d\mu(x) \\ &= \int_E |f(x)|^{p(x)} d\mu(x) = \|f\|_p(E). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.5) получаем ${}_p\|f\|(E) \geq \|f\|_p(E)$. Если же $0 < \|f\|_p(E) \neq 1$, то для $\tilde{f}(x) = f(x)/\|f\|_p(E)$ будет $\|\tilde{f}\|_p(E) = 1$, и поэтому ${}_p\|\tilde{f}\|(E) \geq \|\tilde{f}\|_p(E)$, или, что то же,

$${}_p\left\| \frac{f}{\|f\|_p(E)} \right\|(E) \geq \left\| \frac{f}{\|f\|_p(E)} \right\|_p(E).$$

Отсюда вытекает (2.8). Из (2.7) и (2.8) вытекают неравенства

$$\|f\|_p(E) \leq {}_p\|f\|(E) \leq c(p)\|f\|_p(E), \quad (2.9)$$

из которых и следует эквивалентность норм $\|f\|_p(E)$ и ${}_p\|f\|(E)$.

Ниже нам понадобится следующее определение, введенное впервые в работе [9]. Будем говорить, что показатель $p(x)$ удовлетворяет на множестве E условию Дини–Липшица порядка α , если имеет место оценка

$$\omega(p, E, \delta) \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^\alpha \leq c, \quad 0 < \delta < 1, \quad (2.10)$$

где

$$\omega(p, E, \delta) = \sup \{ |p(x_1) - p(x_2)| : x_1, x_2 \in E, |x_1 - x_2| \leq \delta \}$$

– модуль непрерывности функции $p(x)$ на E .

§ 3. Преобразование Гильберта в $L^{p(x)}(E)$

Обозначим через $\mathbb{P}^\alpha(-1, 1)$ множество переменных показателей $p = p(x) > 1$, удовлетворяющих на $E = [-1, 1]$ условию (2.10), и положим $\mathbb{P}(-1, 1) = \mathbb{P}^1(-1, 1)$. Пусть $p = p(x) \in \mathbb{P}(-1, 1)$, $f \in L^{p(x)}(-1, 1)$. Тогда мы можем определить преобразование Гильберта Hf следующего вида ($x \in [-1, 1]$):

$$Hf = Hf(x) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad (3.1)$$

где интеграл в левой части равенства (3.1) понимается в смысле главного значения Коши. Хорошо известно, что функция $Hf(x)$ конечна для почти всех $x \in [-1, 1]$. Более того, в работах [18], [19] доказано, что если $p = p(x) \in \mathbb{P}(-1, 1)$, то

$$\|Hf\|_p(-1, 1) \leq c(p) \|f\|_p(-1, 1). \quad (3.2)$$

§ 4. Некоторые сведения о полиномах Лежандра

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства полиномов Лежандра $P_n(x)$, которые определим с помощью формулы Родрига

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \{(1-x^2)^n\}^{(n)}. \quad (4.1)$$

Соотношение ортогональности для полиномов Лежандра имеет вид

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad (4.2)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера. Хорошо известны следующие свойства полиномов Лежандра (см. [21], [22]):

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4.3)$$

$$(1-x^2)^{1/4} n^{1/2} |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (4.4)$$

$$(1-x^2)^{-1/4} (n+1)^{1/2} |P_n(x) - P_{n+2}(x)| \leq c, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4.5)$$

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \Phi_n(\theta), \quad (4.6)$$

$$|\Phi_n(\theta)| \leq \frac{c}{(n \sin \theta)^{3/2}}, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (4.7)$$

Если функция $f(x)$ задана и интегрируема на $(-1, 1)$, то мы можем сопоставить ей ее ряд Фурье–Лежандра

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(x), \quad (4.8)$$

где

$$f_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt \quad (4.9)$$

– коэффициенты Фурье–Лежандра функции f . Частичная сумма ряда (4.8) имеет вид

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k P_k(x) = \int_{-1}^1 f(t) K_n(x, t) dt, \quad (4.10)$$

где

$$K_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(x) P_k(t) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_{n+1}(t) P_n(x)}{x - t} \quad (4.11)$$

– ядро Кристоффеля–Дарбу.

Имеют место также следующие равенства:

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (4n-2k)!}{k! (2n-k)! (2n-2k)!} x^{2n-2k}, \quad (4.12)$$

$$P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (4n+2-2k)!}{k! (2n+1-k)! (2n+1-2k)!} x^{2n-2k+1}. \quad (4.13)$$

§ 5. О базисности системы полиномов Лежандра в $L^{p(x)}(-1, 1)$

Впервые вопрос о базисности системы полиномов Лежандра в $L^p(-1, 1)$ для $p = \text{const} > 1$ был рассмотрен в работе [23] (см. также [24] и [25]), в которой было доказано, что система ортонормированных полиномов Лежандра

$$\left\{ \hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (5.1)$$

является базисом пространства $L^p(-1, 1)$, если $\frac{4}{3} < p < 4$, и не является таковым, если $p \in [1, \frac{4}{3}] \cup (4, \infty)$. Вопрос о базисности системы полиномов Лежандра при $p = \frac{4}{3}$ и $p = 4$ был рассмотрен в работе [26], в которой показано, что в этих случаях полиномы Лежандра не образуют базиса в $L^p(-1, 1)$. Эта задача получила свое дальнейшее развитие в работах [27]–[29], в которых аналогичная проблема для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита рассматривалась в весовых пространствах

$$L^p_\rho(E) = \left\{ f : \int_E \rho(x) |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

где $\rho(x)$ – некоторая весовая функция, ассоциированная с соответствующими ортогональными полиномами. Здесь также получены исчерпывающие результаты, обзор которых можно найти, например, в работе [30].

Прежде чем перейти к описанию основных результатов настоящей статьи, предпримем попытку проанализировать причины возникновения условия $\frac{4}{3} < p < 4$, при нарушении которого система полиномов Лежандра (5.1) теряет свойство базисности в $L^p(-1, 1)$. Рассмотрим одновременно две функции

$$f^\mu = f^\mu(x) = \frac{1}{(1-x)^\mu}, \quad g^\mu = g^\mu(x) = \frac{1}{|x|^\mu}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (5.2)$$

Обе функции $f^\mu(x)$ и $g^\mu(x)$ либо одновременно принадлежат $L^p(-1, 1)$, либо нет. Точнее, если $p\mu < 1$, то $f^\mu, g^\mu \in L^p(-1, 1)$, а если $p\mu \geq 1$, то $f^\mu, g^\mu \notin L^p(-1, 1)$. Нас интересует поведение рядов Фурье–Лежандра этих функций в том случае, когда они обе принадлежат $L^p(-1, 1)$, т.е. в случае $p\mu < 1$. Пусть

$$f_k^\mu = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^\mu(t) P_k(t) dt, \quad g_k^\mu = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 g^\mu(t) P_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.3)$$

– коэффициенты Фурье–Лежандра указанных функций. Тогда соответствующие ряды Фурье–Лежандра имеют вид

$$f^\mu \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\mu P_k(x), \quad (5.4)$$

$$g^\mu \sim \sum_{k=0}^{\infty} g_k^\mu P_k(x). \quad (5.5)$$

Нетрудно показать (см. [21]), что

$$f_k^\mu \asymp k^{2\mu-1}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.6)$$

Для коэффициентов g_k^μ имеют место (см. [31]) следующие соотношения:

$$g_{2k+1}^\mu = 0, \quad g_{2k}^\mu \asymp k^{\mu-1/2}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

С другой стороны, из (4.4), (4.6) и (4.7) при $1 \leq p < 4$ имеем

$$\begin{aligned} \|P_k\|_p &= \left(\int_{-1}^1 |P_k(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq ck^{-1/2} \left(\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-p/4} dt \right)^{1/p} \leq c(p)k^{-1/2}, \\ \|P_k\|_p &= \left(\int_0^\pi |P_k(\cos \theta)|^p \sin \theta d\theta \right)^{1/p} > \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} |P_k(\cos \theta)|^p \sin \theta d\theta \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \left| \sqrt{\frac{2}{k\pi \sin \theta}} \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \Phi_k(\theta) \right|^p \sin \theta d\theta \right)^{1/p} \asymp k^{-1/2}. \end{aligned}$$

Из этих оценок и равенства (5.1) находим ($k \rightarrow \infty$)

$$\|P_k\|_p \asymp k^{-1/2}, \quad \|\hat{P}_k\|_p \asymp 1, \quad 1 \leq p < 4. \quad (5.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (5.8) следует, что ортонормированная система полиномов Лежандра (5.1) ограничена в $L^p(-1, 1)$ при $1 \leq p < 4$. Если же $p \geq 4$, то из (4.6) и (4.7) нетрудно получить, что $\|\hat{P}_k\|_p \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, другими словами, система (5.1) не ограничена в $L^p(-1, 1)$ при $p \geq 4$.

Сопоставляя (5.6)–(5.8), мы находим при $1 \leq p < 4$ следующие соотношения для общих членов рядов (5.4) и (5.5):

$$\|f_k^\mu P_k\|_p \asymp k^{2\mu-3/2}, \quad (5.9)$$

$$\|g_{2k}^\mu P_{2k}\|_p \asymp k^{\mu-1}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) следует, что при $\mu \geq \frac{3}{4}$ ряд (5.4) не сходится в $L^p(-1, 1)$ ни при каком $p \geq 1$, так как общий член этого ряда не стремится к нулю. Между тем сама функция $f^\mu(x)$ при $\mu = \frac{3}{4}$ принадлежит $L^p(-1, 1)$ для всех таких p , что $1 \leq p < \frac{4}{3}$ (так как в этом случае $\mu p < 1$). Отсюда следует (см. [23]), что система полиномов Лежандра (5.1) не является базисом пространства $L^p(-1, 1)$ при $p \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$.

Теперь обратимся к ряду (5.5). Его общий член, как это следует из (5.10), стремится к нулю в $L^p(-1, 1)$ при любых $0 < \mu < 1$, $1 \leq p < 4$. С другой стороны, при $\mu = \frac{3}{4}$ сама функция $g^\mu(x)$ вместе с $f^\mu(x)$ принадлежит $L^p(-1, 1)$ для всех $1 \leq p < \frac{4}{3}$, и поэтому естественно возникает вопрос о том, сходится ли ряд Фурье–Лежандра функции $g^\mu(x)$ к ней в метрике пространства $L^p(-1, 1)$ при $1 \leq p < \frac{4}{3}$. Вопрос этот не является тривиальным, и ответить на него, пользуясь лишь оценкой (5.10), не представляется возможным. Требуется проведение более глубоких исследований, учитывающих скрытые свойства ряда (5.5) (см. доказательство теоремы 5.1 настоящей работы). Из теоремы 5.1, в частности, вытекает, что ряд (5.5) при $\mu = \frac{3}{4}$ сходится в $L^p(-1, 1)$ для всех p , удовлетворяющих условию $1 \leq p < \frac{4}{3}$.

Таким образом, функции $f^\mu(x)$ и $g^\mu(x)$, обладая совершенно аналогичными свойствами, обеспечивающими их одновременное вхождение (или не вхождение) в $L^p(-1, 1)$, в смысле сходимости в $L^p(-1, 1)$ их рядов Фурье–Лежандра существенно отличаются. В чем здесь причина? Дело заключается в том, что особая точка $x_0 = 1$ функции $f^\mu(x) = 1/(1-x)^\mu$ совпадает с одним из концов отрезка $[-1, 1]$, в которых ортонормированная система полиномов Лежандра (5.1) неограниченно растет по модулю и $\hat{P}_n(1) \asymp n^{1/2}$, $n \rightarrow \infty$. Это обстоятельство отражается в асимптотическом поведении коэффициентов Фурье–Лежандра функции $f^\mu(x)$ и вызывает расходимость в $L^p(-1, 1)$ ряда Фурье–Лежандра (5.4). Что же касается функции $g^\mu(x)$, то ее особая точка $x_0 = 0$ попадает в промежуток $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, $0 < \delta < 1$, на котором ортонормированная система полиномов Лежандра (5.1) равномерно ограничена, и именно из-за этого коэффициенты Фурье–Лежандра g_k^μ функции $g^\mu(x)$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$ со скоростью, указанной в (5.9). А это в свою очередь обеспечивает, как уже отмечалось, сходимость ряда Фурье–Лежандра функции $g^\mu(x)$ в $L^p(-1, 1)$ при $\mu = \frac{3}{4}$ для всех p , удовлетворяющих условию $1 \leq p < \frac{4}{3}$.

Проведенный анализ приводит нас к задаче о выделении в классах $L^p(-1, 1)$ с $p \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$ подклассов таких функций f , для которых их ряды Фурье–Лежандра сходятся в $L^p(-1, 1)$. Пример функции $f^\mu(x)$ показывает, что, оставаясь в шкале пространств $L^p(-1, 1)$ с постоянным на $[-1, 1]$ показателем $p = \text{const}$, решить эту задачу невозможно. Здесь имеется в виду следующее. Если, например, мы предпримем попытку в качестве искомого класса пространства $L^p(-1, 1)$ взять $L^q(-1, 1)$, где $1 < p < q < \frac{4}{3}$, то нельзя утверждать, что для каждой функции $f \in L^q(-1, 1)$ ее ряд Фурье–Лежандра сходится в более слабой топологии пространства $L^p(-1, 1)$. (Напомним, что при $\mu = \frac{3}{4}$ функция $f^\mu(x)$ принадлежит $L^q(-1, 1)$ для любого $q \in [1, \frac{4}{3})$ и в то же время ее ряд

Фурье–Лежандра (5.4) не сходится в $L^p(-1, 1)$ также для любого $p \in [1, \frac{4}{3})$, в том числе и для $p < q$.) Таким образом, оставшись в шкале пространств $L^p(-1, 1)$ с постоянным показателем $1 \leq p < \frac{4}{3}$, мы не имеем возможности накладывать на функцию $f \in L^p(-1, 1)$ локальные условия в окрестностях точек ± 1 , которые бы обеспечили сходимость ее ряда Фурье–Лежандра в $L^p(-1, 1)$. (Вспомним, что именно в окрестностях точек ± 1 ортонормированная система полиномов Лежандра (5.1) неограниченно растет по модулю со скоростью $O(\sqrt{n})$, и это является одной из основных причин, из-за которых полиномы Лежандра не образуют базиса в $L^p(-1, 1)$ при $p \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$.)

Удобным (и естественным) инструментом решения поставленной выше задачи о выделении в пространстве $L^p(-1, 1)$ подпространств функций f , для которых их ряды Фурье–Лежандра сходятся в $L^p(-1, 1)$ при $p \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$, оказались пространства $L^{p(x)}(-1, 1)$ с переменным показателем $p(x) \geq p$. Чтобы объяснить эту идею, мы снова обратимся к примеру функции $g^\mu(x)$ и ее ряду Фурье–Лежандра (5.5). Для $p \in [1, \frac{4}{3})$ выберем переменный показатель $p(x)$, например, следующим способом. Пусть числа δ_{-1} , δ_0 , δ_1 таковы, что $-1 < -1 + \delta_{-1} < -\delta_0 < 0 < \delta_0 < 1 - \delta_1 < 1$. Положим

$$p(x) = \begin{cases} p_{-1}, & \text{если } x \in [-1, -1 + \delta_{-1}], \\ p, & \text{если } |x| \leq \delta_0, \\ p_1, & \text{если } x \in [1 - \delta_1, 1], \end{cases} \quad (5.11)$$

где $\frac{4}{3} < p_{-1}, p_1 < 4$, а на отрезки $[-1 + \delta_{-1}, -\delta_0]$ и $[\delta_0, 1 - \delta_1]$ продолжим $p(x)$ линейно и непрерывно. Очевидно, что если $p \leq \min\{p_{-1}, p_1\}$, то $p(x) \geq p$ при всех $x \in [-1, 1]$, и поэтому $L^{p(x)}(-1, 1)$ является подпространством пространства $L^p(-1, 1)$. С другой стороны, построенный показатель $p(x)$ в силу (5.11) удовлетворяет условиям теоремы 5.1 настоящей работы и, стало быть, система полиномов Лежандра (5.1) является базисом пространства $L^{p(x)}(-1, 1)$, а функция $g^\mu(x)$ при $p\mu < 1$, очевидно, принадлежит $L^{p(x)}(-1, 1)$. Поэтому ряд Фурье–Лежандра функции $g^\mu(x)$ (ряд (5.5)) сходится к функции $g^\mu(x)$ в метрике пространства $L^{p(x)}(-1, 1)$ и, тем более, сходится к $g^\mu(x)$ в $L^p(-1, 1)$.

5.1. Основная теорема. Перейдем к формулировке основного результата настоящей работы. Через $\mathcal{P}(-1, 1)$ мы обозначим класс переменных показателей $p = p(x)$, заданных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

- (А) $p = p(x) > 1$ для всех $x \in [-1, 1]$ и p удовлетворяет условию Дини–Липшица (1.2) при $x, y \in [-1, 1]$;
- (В) для каждого показателя $p = p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$ найдутся такие числа $l = l(p)$, $r = r(p)$, $\delta_1 = \delta_1(p)$ и $\delta_2 = \delta_2(p)$, что $l, r > 1$, $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$,

$$p(x) = \begin{cases} l, & \text{если } x \in [-1, -1 + \delta_1], \\ r, & \text{если } x \in [1 - \delta_2, 1]. \end{cases} \quad (5.12)$$

Особо отметим, что числа $\delta_1 = \delta_1(p)$ и $\delta_2 = \delta_2(p)$, фигурирующие в (5.12), могут оказаться сколь угодно малыми положительными числами.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $p = p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$ и $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3}, 4)$. Тогда ортонормированная система полиномов Лежандра (5.1) является базисом пространства $L^{p(x)}(-1, 1)$.

Доказательству теоремы мы предположим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 5.1 (см. [23]). Для $x \neq y$ ядро Кристоффеля–Дарбу (4.11) допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} K_n(x, y) = & \frac{(n+2)(n+1)}{2(2n+3)} P_{n+1}(x) \frac{P_n(y) - P_{n+2}(y)}{x-y} \\ & + \frac{(n+2)(n+1)}{2(2n+3)} [P_{n+2}(x) - P_n(x)] \frac{P_{n+1}(y)}{x-y} \\ & - \frac{n+1}{2} P_{n+1}(x) P_{n+1}(y). \end{aligned} \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.11) получаем ($x \neq y$)

$$\begin{aligned} K_n(x, y) + K_{n+1}(x, y) = & \frac{n+1}{2} P_{n+1}(x) \frac{P_n(y) - P_{n+2}(y)}{x-y} \\ & + \frac{n+1}{2} [P_{n+2}(x) - P_n(x)] \frac{P_{n+1}(y)}{x-y} \\ & + \frac{1}{2} P_{n+2}(x) \frac{P_{n+1}(y)}{x-y} - \frac{1}{2} P_{n+1}(x) \frac{P_{n+2}(y)}{x-y}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

С другой стороны, из (4.11) получаем

$$(n+2)^{-1} K_{n+1}(x, y) = \frac{1}{2} P_{n+2}(x) \frac{P_{n+1}(y)}{x-y} - \frac{1}{2} P_{n+1}(x) \frac{P_{n+2}(y)}{x-y}. \quad (5.15)$$

Используя (5.15), мы можем переписать (5.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} & K_n(x, y) + \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) K_{n+1}(x, y) \\ & = \frac{n+1}{2} P_{n+1}(x) \frac{P_n(y) - P_{n+2}(y)}{x-y} + \frac{n+1}{2} [P_{n+2}(x) - P_n(x)] \frac{P_{n+1}(y)}{x-y}, \end{aligned}$$

и поскольку $K_{n+1}(x, y) + K_n(x, y) + (n + \frac{3}{2})P_{n+1}(x)P_{n+1}(y)$, то от последнего равенства приходим к равенству (5.13). Лемма 5.1 доказана.

Для $-1 \leq x, y \leq 1$, $x \neq y$ положим

$$K(x, y) = \frac{1}{|x-y|} \left| \left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} - 1 \right|, \quad (5.16)$$

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_1(x) = \int_{-1}^1 K(x, y) |f(y)| dy, \quad \tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(x) = \int_{-1}^1 K(y, x) |f(y)| dy. \quad (5.17)$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 5.2. Пусть $p = p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$, $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3}, 4)$ и $f \in L^{p(x)}(-1, 1)$. Тогда $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in L^{p(x)}(-1, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$|a^{1/4} - 1| = \frac{|a - 1|}{a^{3/4} + a^{1/2} + a^{1/4} + 1},$$

то для $a = \frac{1-x^2}{1-y^2}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} - 1 \right| &= \frac{\left| \frac{1-y^2}{1-x^2} - 1 \right|}{\left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{3/4} + \left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} + 1} \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{(1-y^2)^{3/4}(1-x^2)^{1/4} + (1-y^2)^{1/2}(1-x^2)^{1/2} + (1-y^2)^{1/4}(1-x^2)^{3/4} + (1-x^2)} \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{(1-x^2)^{1/4} (1-y^2)^{3/4} + (1-y^2)^{1/2} (1-x^2)^{1/4} + (1-y^2)^{1/4} (1-x^2)^{1/2} + (1-x^2)^{3/4}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из (5.16) и (5.18) получаем

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}} \\ &\times \frac{|x+y|}{(1-y^2)^{3/4} + (1-y^2)^{1/2}(1-x^2)^{1/4} + (1-y^2)^{1/4}(1-x^2)^{1/2} + (1-x^2)^{3/4}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки для ядра $K(x, y)$, которые вытекают из равенства (5.19). Рассмотрим два случая: $1 - x^2 > 1 - y^2$ и $1 - x^2 < 1 - y^2$. В первом из них

$$K(x, y) \geq \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}} \frac{|x+y|}{(1-y^2)^{3/4} + 3(1-x^2)^{3/4}},$$

а во втором случае

$$K(x, y) \geq \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}} \frac{|x+y|}{3(1-y^2)^{3/4} + (1-x^2)^{3/4}}.$$

Из этих оценок выводим

$$K(x, y) \geq \frac{1}{3(1-x^2)^{1/4}} \frac{|x+y|}{(1-y^2)^{3/4} + (1-x^2)^{3/4}}.$$

Отсюда и из (5.18) получаем

$$\frac{1}{3} \bar{K}(x, y) \leq K(x, y) \leq \bar{K}(x, y), \quad (5.20)$$

где

$$\bar{K}(x, y) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}} \frac{|x+y|}{(1-y^2)^{3/4} + (1-x^2)^{3/4}}. \quad (5.21)$$

Из (5.17) и (5.20) получаем

$$\tilde{f}_1(x) \leq \int_{-1}^1 \bar{K}(x, y) |f(y)| dy = g(x). \quad (5.22)$$

Чтобы доказать лемму 5.2, нам достаточно показать, что интеграл в неравенстве (5.22) представляет собой некоторую функцию $g(x) \in L^{p(x)}(-1, 1)$. По условию леммы 5.2 $p = p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$ и, в частности, этот показатель удовлетворяет условию (B) (см. (5.12)), согласно которому найдутся два таких числа $1 > \delta_1 = \delta_1(p) > 0$ и $1 > \delta_2 = \delta_2(p) > 0$, что в сегментах $[-1, -1 + \delta_1]$ и $[1 - \delta_2, 1]$ показатель $p(x)$ сохраняет постоянные значения, равные соответственно l и r . Чтобы оценить интеграл в (5.22), разобьем его по следующей схеме:

$$\int_{-1}^1 = \int_{-1}^{-1+\delta_1} + \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} + \int_{1-\delta_2}^1,$$

и тогда мы можем в силу неравенства (5.22) записать

$$\tilde{f}_1(x) \leq f_{11}(x) + f_{12}(x) + f_{13}(x), \quad (5.23)$$

где

$$f_{11}(x) = \int_{-1}^{-1+\delta_1} \overline{K}(x, y) |f(y)| dy, \quad (5.24)$$

$$f_{12}(x) = \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \overline{K}(x, y) |f(y)| dy, \quad (5.25)$$

$$f_{13}(x) = \int_{1-\delta_2}^1 \overline{K}(x, y) |f(y)| dy. \quad (5.26)$$

Пусть $p = p(x)$, $\bar{p} = \sup_{-1 \leq x \leq 1} p(x)$, $g \in L^{p(x)}(-1, 1)$,

$$\rho_{E,p}(g) = \left(\int_E |g(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}}, \quad \rho_p(g) = \rho_{[-1,1],p}(g).$$

Нетрудно проверить (см. [1]), что $\rho_{E,p}(g)$ является метрикой в пространстве $L^{p(x)}(E)$. Поэтому из (5.23)–(5.26) получаем

$$\rho_p(\tilde{f}_1) \leq \rho_p(f_{11}) + \rho_p(f_{12}) + \rho_p(f_{13}). \quad (5.27)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \rho_p(f_{11}) &= \left(\int_{-1}^1 |f_{11}(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &= \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} |f_{11}(x)|^{p(x)} dx + \int_{-1+\delta_1}^1 |f_{11}(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &\leq \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} |f_{11}(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} + \left(\int_{-1+\delta_1}^1 |f_{11}(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &= I_{111} + I_{112}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \rho_p(f_{13}) &= \left(\int_{-1}^{1-\delta_2} |f_{13}(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} + \left(\int_{1-\delta_2}^1 |f_{13}(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &= I_{131} + I_{132}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Оценим сначала I_{112} , I_{131} и $\rho_p(f_{12})$. С этой целью заметим, что если

$$(x, y) \in [-1, 1]^2 \setminus \{[-1, -1 + \delta_1]^2 \cup [1 - \delta_2, 1]^2\},$$

то

$$\frac{|x + y|}{(1 - x^2)^{3/4} + (1 - y^2)^{3/4}} \leq c(\delta_1, \delta_2). \quad (5.30)$$

В самом деле, справедливость неравенства (5.30) в прямоугольниках

$$\begin{aligned} \{(x, y) : -1 + \delta_1 \leq x \leq 1 - \delta_2, -1 \leq y \leq 1\}, \\ \{(x, y) : -1 + \delta_1 \leq y \leq 1 - \delta_2, -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

очевидна (в первом из них $1 - x^2 > \min\{1 - (-1 + \delta_1)^2, 1 - (1 - \delta_2)^2\}$, а во втором $1 - y^2 > \min\{1 - (-1 + \delta_1)^2, 1 - (1 - \delta_2)^2\}$). Если же $(x, y) \in [-1, -1 + \delta_1] \times [1 - \delta_2, 1]$ или $(x, y) \in [1 - \delta_2, 1] \times [-1, -1 + \delta_1]$, то соответственно имеем

$$\frac{|x + y|}{(1 - x^2)^{3/4} + (1 - y^2)^{3/4}} \leq \frac{|1 + x| + |1 - y|}{(1 - x^2)^{3/4} + (1 - y^2)^{3/4}} \leq (1 + x)^{1/4} + (1 - y)^{1/4},$$

или

$$\frac{|x + y|}{(1 - x^2)^{3/4} + (1 - y^2)^{3/4}} \leq (1 - x)^{1/4} + (1 + y)^{1/4}.$$

Из (5.21), (5.30), (5.28) и (5.24) получаем

$$\begin{aligned} I_{112} &= \left(\int_{-1+\delta_1}^1 \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) |f(y)| dy \right)^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &\leq \left(\int_{-1+\delta_1}^1 \frac{c(\delta_1, \delta_2)^{p(x)} dx}{(1 - x^2)^{p(x)/4}} \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} |f(y)| dy \right)^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (2.2), отсюда находим

$$I_{112} \leq c(p) \left(\int_{-1+\delta_1}^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{p(x)/4}} (\|f\|_p(-1, -1 + \delta_1))^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}}. \quad (5.31)$$

При доказательстве леммы 5.2, не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$\|f\|_p(-1, 1) \leq 1. \quad (5.32)$$

Тогда из (5.31) и (5.32) находим

$$\begin{aligned} I_{112} &\leq c(p) \left(\int_{-1+\delta_1}^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{p(x)/4}} \right)^{1/\bar{p}} \\ &= c(p) \left(\int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \frac{dx}{(1 - x^2)^{p(x)/4}} + \int_{1-\delta_2}^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{r(p)/4}} \right)^{1/\bar{p}} \leq c(p). \end{aligned} \quad (5.33)$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $p \in \mathcal{P}(-1, 1)$, следовательно, $p(x) = r(p) < 4$ при $1 - \delta_2 \leq x \leq 1$.) Совершенно аналогично доказывается, что

$$I_{131} \leq c(p), \quad \rho_p(f_{12}) \leq c(p). \quad (5.34)$$

Остается оценить I_{111} и I_{132} . Из (5.29) и (5.24) получаем

$$\begin{aligned} I_{111} &= \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} dx \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) |f(y)| dy \right)^{p(x)} \right)^{1/\bar{p}} \\ &= \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} dx \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) |f(y)| dy \right)^l \right)^{(1/l)(l/\bar{p})}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где $l = l(p)$ – число из свойства (B) для $p = p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} &\left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} dx \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) |f(y)| dy \right)^l \right)^{1/l} \\ &= \sup_{\substack{g \in L^{l'}(-1, -1+\delta_1) \\ \|g\|_{l'} \leq 1}} \int_{-1}^{-1+\delta_1} g(x) dx \int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) |f(y)| dy, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где $l' = l/(l-1)$ – сопряженный показатель. Чтобы оценить это выражение, положим

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{-1+\delta_1} g(x) dx \int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) |f(y)| dy \\ &= \int_{-1}^{-1+\delta_1} \int_{-1}^{-1+\delta_1} |f(y)| \bar{K}^{1/l}(x, y) \left(\frac{1+y}{1+x} \right)^{1/(l')} g(x) \\ &\quad \bar{K}^{1/l'}(x, y) \left(\frac{1+y}{1+x} \right)^{-1/(l')} dx dy. \end{aligned}$$

Последний интеграл оценим с помощью неравенства Гёльдера. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} J &\leq \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} |g(x)|^{l'} dx \int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) \left(\frac{1+x}{1+y} \right)^{1/l} \right)^{1/l'} \\ &\quad \times \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} |f(y)|^l dy \int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) \left(\frac{1+y}{1+x} \right)^{1/l'} dx \right)^{1/l} = J_1^{1/l'} J_2^{1/l}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Покажем, что функции

$$S_1(x) = \int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) \left(\frac{1+x}{1+y} \right)^{1/l} dy, \quad S_2(y) = \int_{-1}^{-1+\delta_1} \bar{K}(x, y) \left(\frac{1+y}{1+x} \right)^{1/l'} dx$$

представляют собой ограниченные функции, заданные на $(-1, -1+\delta_1)$. Имеем

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \int_{-1}^{-1+\delta_1} \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}} \frac{|x+y| \left(\frac{1+x}{1+y} \right)^{1/l}}{(1-x^2)^{3/4} + (1-y^2)^{3/4}} dy \\ &\leq c \int_{-1}^{-1+\delta_1} \frac{1}{(1+x)^{1/4}} \frac{\left(\frac{1+x}{1+y} \right)^{1/l}}{(1+x)^{3/4} + (1+y)^{3/4}} dy \\ &= c \int_{-1}^{-1+\delta_1} \frac{1}{1+x} \left(\frac{1+y}{1+x} \right)^{-1/l} \frac{dy}{1 + \left(\frac{1+y}{1+x} \right)^{3/4}}. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных, полагая $t = \frac{1+y}{1+x}$. Тогда $dy = dt(1+x)$ и, стало быть,

$$S_1(x) \leq c \int_0^{\delta_1/(1+x)} \frac{dt}{(1+t^{3/4})t^{1/l}} \leq c \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^{3/4})t^{1/l}}. \quad (5.38)$$

По условию леммы 5.2 имеем $\frac{4}{3} < l < 4$ и, стало быть, $\frac{4}{3} < l' < 4$, а отсюда следует, что $\frac{3}{4} + \frac{1}{l} > \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = 1$. Но тогда интеграл в (5.38) сходится, а это значит, что функция $S_1(x)$ ограничена на $(-1, -1 + \delta_1)$.

Аналогично, для $S_2(y)$ имеем

$$\begin{aligned} S_2(y) &\leq c \int_{-1}^{-1+\delta_1} \frac{1}{(1+x)^{1/4}} \frac{1}{(1+x)^{3/4} + (1+y)^{3/4}} \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^{1/l'}} dx \\ &\leq c \int_{-1}^{-1+\delta_1} \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^{1/4+1/l'}} \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^{3/4} + 1} \frac{1}{(1+y)^{1/2}} dx \\ &= \int_0^{\delta_1/(1+y)} t^{-1/l'-1/4} \frac{(1+y)^{1/2}}{t^{3/4} + 1} dt \leq c(1+y)^{1/2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1/l'+1/4}(1+t^{3/4})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $S_2(y)$ также ограничена на $(-1, -1 + \delta_1)$. Из того, что функции $S_1(x)$ и $S_2(y)$ ограничены, и из (5.37) получаем

$$J \leq c \|g\|_{l'}(-1, -1 + \delta_1) \|f\|_l(-1, -1 + \delta_1) \leq c(p),$$

а отсюда и из (5.36) и (5.35) находим

$$I_{111} \leq c(p). \quad (5.39)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$I_{132} \leq c(p). \quad (5.40)$$

Собирая оценки (5.27), (5.33), (5.34), (5.39), (5.40) и сопоставляя их с (5.28) и (5.29), мы заключаем, что $\rho_p(\tilde{f}_1) \leq c(p)$ и, следовательно, $\tilde{f}_1 \in L^{p(x)}(-1, 1)$.

Теперь покажем, что $\tilde{f}_2(x)$ также принадлежит $L^{p(x)}(-1, 1)$. С этой целью воспользуемся нормой (2.5). Тогда

$$\begin{aligned} {}_p\|\tilde{f}_2\|(-1, 1) &= \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int_{-1}^1 g(x) dx \int_{-1}^1 K(y, x) f(y) dy \\ &= \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int_{-1}^1 f(y) dy \int_{-1}^1 K(y, x) g(x) dx = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int_{-1}^1 f(y) \tilde{g}_1(y) dy. \end{aligned}$$

Но функция $p'(x)$ вместе с $p(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5.2, поэтому $\tilde{g}_1(y) \in L^{p'(x)}(-1, 1)$. Кроме того, как было показано выше, найдется такое положительное число $c(p')$, что $\rho_{p'}(\tilde{g}_1) \leq c(p')$, если $\|g\|_{p'}(-1, 1) \leq 1$. А отсюда в свою очередь следует, что найдется некоторое (вообще говоря, другое) число $c(p')$, для которого $\|\tilde{g}_1\|_{p'}(-1, 1) \leq c(p')$. Поэтому в силу неравенств (2.6) и (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_2\|_p(-1, 1) &\leq {}_p\|\tilde{f}_2\|(-1, 1) \leq \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} c(p) \|f\|_p(-1, 1) \|\tilde{g}_1\|_{p'}(-1, 1) \\ &\leq c(p) c(p') \|f\|_p(-1, 1) \leq c(p). \end{aligned}$$

(Здесь мы учли предположение (5.32).) Лемма 5.2 полностью доказана.

Вернемся теперь к частичным суммам Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$. Из (4.9), (4.10) и леммы 5.1 получаем

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{n+2}{2n+3} \frac{n+1}{2} P_{n+1}(x) \int_{-1}^1 \frac{P_n(y) - P_{n+2}(y)}{x-y} f(y) dy \\ &\quad + \frac{n+2}{2n+3} \frac{n+1}{2} [P_{n+2}(x) - P_n(x)] \int_{-1}^1 \frac{P_{n+1}(y)}{x-y} f(y) dy \\ &\quad + \frac{n+1}{2} P_{n+1}(x) \int_{-1}^1 P_{n+1}(y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Первые два интеграла в правой части этого равенства существуют для почти всех $x \in [-1, 1]$ в смысле главного значения Коши. Имея в виду (4.4) и (4.5), мы получаем

$$\begin{aligned} |S_n(f, x)| &\leq c(n+1)^{1/2}(1-x^2)^{-1/4} \left| \int_{-1}^1 \frac{P_n(y) - P_{n+2}(y)}{x-y} f(y) dy \right| \\ &\quad + c(n+1)^{1/2}(1-x^2)^{1/4} \left| \int_{-1}^1 \frac{P_{n+1}(y)}{x-y} f(y) dy \right| \\ &\quad + c(n+1)^{1/2}(1-x^2)^{-1/4} \left| \int_{-1}^1 P_{n+1}(y) f(y) dy \right| \\ &= Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Оценим $\int_{-1}^1 (Q_3(x))^{p(x)} dx$. Воспользовавшись оценкой (4.4) и неравенством (2.6), мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 P_{n+1}(y) f(y) dy \right| &\leq c(n+1)^{-1/2} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{-1/4} |f(y)| dy \\ &\leq c(n+1)^{-1/2} \|f\|_p(-1, 1) \|(1-y^2)^{-1/4}\|_{p'(-1, 1)}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Если $p = p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$, то для $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ найдутся такие числа $\delta_1 = \delta(p')$, $\delta_2 = \delta_2(p')$, что $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$ и

$$\begin{aligned} p'(x) &= \begin{cases} l(p'), & \text{если } x \in (-1, -1 + \delta_1), \\ r(p'), & \text{если } x \in (1 - \delta_2, 1), \end{cases} \\ l(p') &= \frac{l(p)}{l(p) - 1}, \quad r(p') = \frac{r(p)}{r(p) - 1}. \end{aligned}$$

Поскольку по условию (B) $r(p), l(p) \in (\frac{4}{3}, 4)$, то $r(p'), l(p') \in (\frac{4}{3}, 4)$. Поэтому интеграл $\int_{-1}^1 (1-y^2)^{-p'(x)/4} dx$, а вместе с ним и норма $\|(1-y^2)^{-1/4}\|_{p'(-1, 1)}$ конечны. Тогда из (5.41) и (5.42) находим

$$Q_3(x) \leq c(p)(1-x^2)^{-1/4}, \quad -1 < x < 1,$$

и, как следствие,

$$\int_{-1}^1 Q_3(x)^{p(x)} dx \leq c(p). \quad (5.43)$$

Оценим $\int_{-1}^1 Q_1(x)^{p(x)} dx$. С этой целью мы положим

$$A_n(y) = (n+1)^{1/2}(1-y^2)^{-1/4}[P_n(y) - P_{n+2}(y)].$$

Из оценки (4.5) следует, что последовательность $\{A_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на $(-1, 1)$, т.е.

$$\sup_{-1 < x < 1} |A_n(y)| \leq c, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

Далее, из (5.41) получаем

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \left| \int_{-1}^1 \left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} \frac{A_n(y)f(y)}{x-y} dy \right| \\ &= \left| \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} - 1 + 1 \right] \frac{A_n(y)f(y)}{x-y} dy \right| \\ &\leq \left| \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} - 1 \right] \frac{A_n(y)f(y)}{x-y} dy \right| + \left| \int_{-1}^1 \frac{A_n(y)f(y)}{x-y} dy \right| \\ &= Q_{11}(x) + Q_{12}(x). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Чтобы оценить интеграл $\int_{-1}^1 Q_{12}(x)^{p(x)} dx$, обратимся к результатам § 3, согласно которым преобразование Гильберта (3.1) представляет собой ограниченный линейный оператор, действующий в пространстве $L^{p(x)}(-1, 1)$, если $p = p(x) \in \mathbb{P}(-1, 1)$. Но $\mathcal{P}(-1, 1) \subset \mathbb{P}(-1, 1)$, а по условию теоремы $p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$, следовательно, $p = p(x) \in \mathbb{P}(-1, 1)$ и, как следствие, преобразование Гильберта (3.1) непрерывно в $L^{p(x)}(-1, 1)$ для любого $p(x) \in \mathcal{P}(-1, 1)$. С другой стороны, как было показано выше, функция $A_n(y)$ ограничена на $[-1, 1]$, поэтому произведение $A_n(y)f(y)$ вместе с $f(x)$ принадлежит пространству $L^{p(x)}(-1, 1)$. Следовательно,

$$\|Q_{12}\|_p(-1, 1) \leq \|A_n f\|_p(-1, 1)$$

и в силу (5.44)

$$\|A_n f\|_p(-1, 1) \leq c \|f\|_p(-1, 1).$$

Из этих оценок выводим

$$\|Q_{12}\|_p(-1, 1) \leq c(p) \|f\|_p(-1, 1). \quad (5.46)$$

Не умаляя в общности, мы можем ограничиться условием (5.32). Из (5.32) и (5.46) получаем $\|Q_{12}\|_p(-1, 1) \leq c(p)$, но это равносильно оценке

$$\int_{-1}^1 |Q_{12}(x)|^{p(x)} dx \leq c(p). \quad (5.47)$$

Займемся интегралом $Q_{11}(x)$. В силу (5.16), (5.44) и (5.17) имеем

$$|Q_{11}(x)| \leq \int_{-1}^1 |A_n(y)K(x, y)f(y)| dy \leq c \int_{-1}^1 K(x, y)|f(y)| dy = c \tilde{f}_1(x).$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 5.2, заключаем, что

$$\int_{-1}^1 |Q_{11}(x)|^{p(x)} dx \leq c(p). \quad (5.48)$$

Сопоставляя (5.45), (5.47) и (5.48), получаем

$$\int_{-1}^1 |Q_1(x)|^{p(x)} dx \leq c(p). \quad (5.49)$$

Остается оценить $\int_{-1}^1 |Q_2(x)|^{p(x)} dx$. Для этого положим

$$B_n(y) = (n+1)^{1/2}(1-y^2)^{1/4}P_{n+1}(y).$$

Тогда из (5.41) получаем

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= c \left| \int_{-1}^1 B_n(y) \left\{ \left(\frac{1-x^2}{1-y^2} \right)^{1/4} - 1 \right\} \frac{f(y) dy}{x-y} + \int_{-1}^1 \frac{B_n(y)f(y)}{x-y} dy \right| \\ &\leq Q_{21}(x) + Q_{22}(x), \end{aligned} \quad (5.50)$$

где

$$Q_{21}(x) = c \int_{-1}^1 |B_n(y)f(y)|K(x, y) dy, \quad (5.51)$$

$$Q_{22}(x) = c \left| \int_{-1}^1 \frac{B_n(y)f(y)}{x-y} dy \right|. \quad (5.52)$$

Используя соотношения (5.50)–(5.52) и повторяя почти дословно рассуждения, проведенные при доказательстве оценки (5.49), мы выводим

$$\int_{-1}^1 |Q_2(x)|^{p(x)} dx \leq c(p). \quad (5.53)$$

Оценки (5.43), (5.49), (5.53) вместе с неравенством (5.41) для $\|f\|_p(-1, 1) \leq 1$ дают

$$\int_{-1}^1 |S_n(f, x)|^{p(x)} dx \leq c(p),$$

а отсюда в свою очередь следует, что при $\|f\|_p(-1, 1) \leq 1$ справедлива оценка

$$\|S_n(f)\|_p(-1, 1) \leq c(p).$$

Это означает, что последовательность частичных сумм Фурье–Лежандра $\{S_n(f)\}_{n=0}^\infty$ ограничена в $L^{p(x)}(-1, 1)$ для любой функции $f \in L^{p(x)}(-1, 1)$. С другой стороны, множество алгебраических полиномов, очевидно, всюду плотно в $L^{p(x)}(-1, 1)$, а $S_n(f)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов степени не выше n . Следовательно, $\|S_n(f) - f\|_p(-1, 1) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, для произвольной функции $a \in L^{p(x)}(-1, 1)$.

Теорема 5.1 полностью доказана.

5.2. Об окончательности условий основной теоремы. Теорема 5.1 содержит два условия: 1) переменный показатель $p = p(x)$ принадлежит $\mathcal{P}(-1, 1)$; 2) $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3}, 4)$. Как уже отмечалось выше, необходимость условия 2) следует из результатов работ [23], [26]. Что касается условия 1), то мы покажем ниже, что в определенном смысле оно также является окончательным. Прежде чем сформулировать более точное утверждение, мы введем следующий класс переменных показателей. Через $\mathcal{P}^\alpha(-1, 1)$ обозначим множество всех переменных показателей $p = p(x) > 1$, удовлетворяющих на $E = [-1, 1]$ условиям (2.10) и (B) (см. (5.12)). При $\alpha = 1$ мы получим уже встречавшийся выше класс $\mathcal{P}(-1, 1)$, т.е. $\mathcal{P}^1(-1, 1) = \mathcal{P}(-1, 1)$. Пусть $\widetilde{\mathcal{P}}^\alpha(-1, 1)$ означает подкласс класса $\mathcal{P}^\alpha(-1, 1)$, состоящий из переменных показателей $p = p(x)$, для которых $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3}, 4)$. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.2. Система полиномов Лежандра (5.1) является базисом пространства $L^{p(x)}(-1, 1)$ с произвольным показателем $p = p(x) \in \widetilde{\mathcal{P}}^\alpha(-1, 1)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 1$.

Доказательству этой теоремы мы предположим некоторые вспомогательные утверждения. Пусть μ – произвольное действительное число,

$$\varphi^\mu(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^{-\mu}, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (5.54)$$

При $\mu < 1$ функция $\varphi^\mu(x)$ интегрируема на $[-1, 1]$, и ее ряд Фурье–Лежандра имеет вид

$$\varphi^\mu \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^\mu P_n(x), \quad (5.55)$$

где

$$\varphi_n^\mu = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 t^{-\mu} P_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.56)$$

– коэффициенты Фурье–Лежандра функции $\varphi^\mu(x)$. Прежде всего найдем явные выражения для коэффициентов φ_n^μ , для чего требуется вычислить интеграл (5.56). Мы рассмотрим отдельно два случая: $n = 2k$ и $n = 2k-1$. В случае $n = 2k-1$ мы перепишем формулу (4.13) в следующем виде:

$$P_{2k-1}(x) = b_1 t + b_2 t^3 + \dots + b_k t^{2k-1},$$

и подставим это выражение в (5.56), что дает

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1}^\mu &= \frac{4k-1}{2} \int_0^1 t^{-\mu} P_{2k-1}(t) dt = \frac{4k-1}{2} \sum_{l=1}^k b_l \int_0^1 t^{2l-1-\mu} dt \\ &= \frac{4k-1}{2} \sum_{l=1}^k \frac{b_l}{2l-\mu} = \frac{4k-1}{2} \frac{Q_{k-1}(\mu)}{(2-\mu)(4-\mu)\dots(2k-\mu)}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

где $Q_{k-1}(x)$ – полином степени $k-1$. Заметим, что если мы последовательно положим $\mu = -2l+1$, $l = 1, 2, \dots, k-1$, то в силу ортогональности полинома Лежандра $P_{2k-1}(t)$ к степенной функции t^{2l-1} , $l < k$, будем иметь

$$\int_0^1 t^{-\mu} P_{2k-1}(t) dt = \int_0^1 t^{2l-1} P_{2k-1}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^{2l-1} P_{2k-1}(t) dt = 0.$$

Поэтому из (5.57) находим $Q_{k-1}(\mu) = 0$ при всех $\mu = -(2l-1)$, $l = 1, \dots, k-1$. Следовательно, $Q_{k-1}(\mu)$ допускает следующее представление:

$$Q_{k-1}(\mu) = B_k(\mu+1)(\mu+3)\cdots(\mu+2k-3), \quad (5.58)$$

где B_k – старший коэффициент полинома $Q_{k-1}(\mu)$. Чтобы найти B_k , положим в (5.57) $\mu = -(2k-1)$. Тогда с учетом (5.56) и (4.13) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1}^{-(2k-1)} &= \frac{4k-1}{2} \int_0^1 t^{2k-1} P_{2k-1}(t) dt = \frac{4k-1}{4} \int_{-1}^1 t^{2k-1} P_{2k-1}(t) dt \\ &= \frac{4k-1}{4b_k} \int_{-1}^1 P_{2k-1}^2(t) dt = \frac{4k-1}{4} \frac{2^{2k-1}(2k-1)!^2}{(4k-2)!} \frac{2}{4k-1} \\ &= \frac{2^{2k-2}(2k-1)!^2}{(4k-2)!}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Из (5.57)–(5.59) получаем

$$\frac{4k-1}{2} \frac{(-2k+2)(-2k+4)\cdots(-2)}{(2k+1)(2k+3)\cdots(4k-1)} B_k = \frac{2^{2k-2}(2k-1)!^2}{(4k-2)!},$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k-1}2^{k-2}(k-1)!}{(2k+1)(2k+3)\cdots(4k-3)} B_k &= \frac{2^{2k-2}(2k-1)!^2}{(4k-2)!} \\ &= \frac{2^{2k-2}(2k-1)!}{2k(2k+1)\cdots(4k-3)(4k-2)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(-1)^{k-1}2^{k-2}(k-1)! B_k = \frac{2^{2k-2}(2k-1)!}{2^k k(k+1)\cdots(2k-1)},$$

или $B_k = (-1)^{k-1}$. Поэтому из (5.57) и (5.58) мы находим

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1}^\mu &= \frac{(\mu+1)(\mu+3)\cdots(\mu+2k-3)}{(2-\mu)(4-\mu)\cdots(2k-\mu)} \frac{(-1)^{k-1}(4k-1)}{2} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{4k-1}{4} \frac{\frac{\mu+1}{2}(\frac{\mu+1}{2}+1)\cdots(\frac{\mu+1}{2}+k-2)}{(-\frac{\mu}{2}+1)(-\frac{\mu}{2}+2)\cdots(-\frac{\mu}{2}+k)} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{4k-1}{4} \frac{(\frac{\mu+1}{2})_{k-1}}{(-\frac{\mu}{2}+1)_k} = (-1)^{k-1} \frac{4k-1}{4} \frac{\Gamma(\frac{\mu+1}{2}+k-1)\Gamma(\frac{2-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\mu+1}{2})\Gamma(\frac{2-\mu}{2}+k)}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Совершенно аналогично находим

$$\varphi_{2k}^\mu = (-1)^k \frac{4k+1}{4} \frac{\Gamma(\frac{\mu}{2}+k)\Gamma(\frac{1-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2})\Gamma(\frac{1-\mu}{2}+k+1)}. \quad (5.61)$$

Итак, мы нашли ряд Фурье–Лежандра функции $\varphi^\mu(x)$, определяемой равенством (5.54), а именно, в силу (5.60) и (5.61) он имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^\mu(x) \sim & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\frac{1-\mu}{2})\Gamma(\frac{\mu}{2}+k)}{\Gamma(\frac{\mu}{2})\Gamma(\frac{1-\mu}{2}+k+1)} \frac{4k+1}{4} P_{2k}(x) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(\frac{2-\mu}{2})\Gamma(\frac{\mu+1}{2}+k-1)}{\Gamma(\frac{\mu+1}{2})\Gamma(\frac{2-\mu}{2}+k)} \frac{4k-1}{4} P_{2k-1}(x). \end{aligned} \quad (5.62)$$

В частности, при $\mu = \frac{1}{2}$ находим

$$\varphi^{1/2}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [P_{2k}(x) + P_{2k+1}(x)]. \quad (5.63)$$

Пусть

$$S_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k [P_{2k}(x) + P_{2k+1}(x)] \quad (5.64)$$

– частичная сумма ряда (5.63). Нам понадобится следующая

ЛЕММА 5.3. Пусть $-\frac{1}{8n} \leq x \leq 0$. Тогда

$$S_{2n+1}(x) \geq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{n}{\pi}} + O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $x = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ и рассмотрим выражение $v_m = \cos[(m + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}]$, которое встречается в асимптотической формуле (4.6) для полиномов Лежандра. Имеем

$$v_m = \cos m\theta \cos \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin m\theta \sin \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.65)$$

Если $-\frac{1}{8n} \leq x = \cos \theta \leq 0$, то

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \arccos\left(-\frac{1}{8n}\right) < \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{8n}\right).$$

Отсюда $0 \leq \theta - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{16n}$ и, стало быть,

$$0 \leq \sin \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{32n}, \quad (5.66)$$

кроме того,

$$\cos \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} > \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{32n}\right)^2}. \quad (5.67)$$

Далее, если $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{8n}\right)$ и $0 \leq k \leq n$, то

$$\begin{aligned} k\pi \leq 2k\theta & < k\pi\left(1 + \frac{1}{8n}\right) = k\pi + \frac{k\pi}{8n}, \\ (2k+1)\frac{\pi}{2} & \leq (2k+1)\theta < (2k+1)\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{8n}\right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} |\cos k\pi - \cos 2k\theta| &< \left| \cos k\pi - \cos \left(k\pi + \frac{k\pi}{8n} \right) \right| = \left| (-1)^k - (-1)^k \cos \frac{k\pi}{8n} \right| \\ &= 1 - \cos \frac{k\pi}{8n} < 1 - \cos \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\cos 2k\theta = (-1)^k + r_k(\theta), \quad |r_k(\theta)| \leq 1 - \cos \frac{\pi}{8}. \quad (5.68)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \cos(2k+1)\theta &= \cos \left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + (2k+1)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= -\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} \sin(2k+1)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \sin(2k+1)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.69)$$

причем

$$\left| \sin(2k+1)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right| < \frac{2k+1}{16n} \pi \leq \frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{8n} \leq \frac{3\pi}{16}. \quad (5.70)$$

Сопоставляя (5.65)–(5.70), мы замечаем, что

$$\begin{aligned} v_{2k} + v_{2k+1} &= \cos \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) [\cos 2k\theta + \cos(2k+1)\theta] + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= (-1)^k \cos \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \left[1 + r_k(\theta) - \sin(2k+1)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (5.71)$$

где

$$\left| r_k(\theta) - \sin(2k+1)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1 - \cos \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{16} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} < \frac{2}{3}. \quad (5.72)$$

Из (5.64) с учетом асимптотической формулы (4.6) и оценок (5.71) и (5.72) имеем для $-\frac{1}{8n} \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(x) &= 1 + x + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(\sin \theta)^{1/2}} \left[\sqrt{\frac{1}{k\pi}} v_{2k} + \sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}} v_{2k+1} \right] \\ &\quad + O\left(\sum_{k=0}^n (k+1)^{-3/2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(\sin \theta)^{1/2}} \sqrt{\frac{1}{k\pi}} [v_{2k} + v_{2k+1}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(\sin \theta)^{1/2}} \left[\sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}} - \sqrt{\frac{1}{k\pi}} \right] v_{2k+1} + O(1) \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\pi \sin \theta}} \sum_{k=1}^n \frac{1 + r_k(\theta) - \sin(2k+1)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{k}} + O(1) \\ &> \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{32n}\right)^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3\sqrt{k}} + O(1) \geq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{n}{\pi}} + O(1). \end{aligned}$$

Лемма 5.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Достаточность условий теоремы 5.2 непосредственно вытекает из теоремы 5.1. Докажем необходимость. Пусть $0 < \alpha < 1$. Покажем, что в классе $\widetilde{\mathcal{P}}^\alpha(-1, 1)$ найдется показатель $p_\alpha(x)$, для которого система полиномов Лежандра (5.1) не является базисом пространства $L^{p_\alpha(x)}(-1, 1)$. Положим для $0 < \alpha < 1$

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{|\ln|x||^\alpha} & \text{при } -\frac{e}{3} \leq x \leq 0, \\ 2 - \frac{1}{|\ln|x||^\alpha} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{e}{3}, \\ 2, & \text{при } x = \pm 1 \end{cases}$$

и продолжим $p_\alpha(x)$ на отрезки $[-1, -\frac{e}{3}]$ и $[\frac{e}{3}, 1]$ линейно и непрерывно. Нетрудно проверить, что $p_\alpha(x) \in \widetilde{\mathcal{P}}^\alpha(-1, 1)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{-1}^1 (\varphi^{1/2}(x))^{p_\alpha(x)} dx \right)^{1/2} &= \left(\int_0^1 (\varphi^{1/2}(x))^{p_\alpha(x)} dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^{e/3} x^{-p_\alpha(x)/2} dx \right)^{1/2} + \left(\int_{e/3}^1 x^{-p_\alpha(x)/2} dx \right)^{1/2} \\ &< \left(\int_0^{e/3} x^{-1+1/(2|\ln|x|^\alpha)} dx \right)^{1/2} + \left(\int_{e/3}^1 x^{-p_\alpha(1)/2} dx \right)^{1/2} \leq c(\alpha), \end{aligned}$$

стало быть, $\varphi^{1/2}(x) \in L^{p_\alpha(x)}(-1, 1)$. Нам остается показать, что последовательность частичных сумм Фурье–Лежандра $S_{2n+1}(x)$ функции $\varphi^{1/2}(x)$ не ограничена в топологии пространства $L^{p_\alpha(x)}(-1, 1)$. В силу леммы 5.3 мы можем записать

$$\begin{aligned} \left(\int_{-1}^1 |S_{2n+1}(x)|^{p_\alpha(x)} dx \right)^{1/3} &> \left(\int_{-1/(8n)}^0 |S_{2n+1}(x)|^{p_\alpha(x)} dx \right)^{1/3} \\ &\geq \left(\int_{-1/(8n)}^0 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{n}{\pi} \right)^{1/2} + O(1) \right]^{p_\alpha(x)} dx \right)^{1/3} \\ &\geq \left(\int_{-1/(8n)}^0 \left(\frac{4n}{9\pi} \right)^{p_\alpha(x)/2} dx \right)^{1/3} - \left(\int_{-1/(8n)}^0 [O(1)]^{p_\alpha(x)} dx \right)^{1/3} \\ &\geq \left(\int_{-1/(8n)}^0 \left(\frac{4n}{9\pi} \right)^{1+1/(2|\ln|x|^\alpha)} dx \right)^{1/3} - c(\alpha) \\ &= \left(\frac{4n}{9\pi} \right)^{1/3} \left(\int_{-1/(8n)}^0 \left(\frac{4n}{9\pi} \right)^{1/(2|\ln|x|^\alpha)} dx \right)^{1/3} - c(\alpha). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\int_{-1}^1 |S_{2n+1}(x)|^{p_\alpha(x)} dx \right)^{1/3} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда в свою очередь получаем

$$\|S_{2n+1}(\varphi^{1/2})\|_{L^{p_\alpha(x)}(-1, 1)} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 5.2 доказана.

Список литературы

- [1] И. И. Шарапудинов, “О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(x)}([0, 1])$ ”, *Матем. заметки*, **26**:4 (1979), 613–632; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Topology of the space $\mathcal{L}^{p(x)}([0, 1])$ ”, *Math. Notes*, **26**:4 (1979), 796–806.
- [2] W. Orlicz, “Über konjugierte Exponentenfolgen”, *Studia Math.*, **3** (1931), 200–211.
- [3] H. Nakano, *Modulated semi-ordered linear spaces*, Maruzen, Tokyo, 1950.
- [4] H. Nakano, *Topology and topological linear spaces*, Maruzen, Tokyo, 1951.
- [5] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Math., **1034**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [6] J. Musielak, W. Orlicz, “On modular spaces”, *Studia Math.*, **18** (1959), 49–65.
- [7] I. V. Tsenov, “Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s ”, *Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ.*, **7** (1961), 25–37.
- [8] И. И. Шарапудинов, “Приближение функций в метрике пространства $\mathcal{L}^{p(x)}([a, b])$ и квадратурные формулы”, *Constructive function theory*, Proceedings of the international conference (Varna, 1981), Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1983, 189–193.
- [9] И. И. Шарапудинов, “О базисности системы Хаара в пространстве $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 275–283; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “On the basis property of the Haar system in the space $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ and the principle of localization in the mean”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 279–287.
- [10] И. И. Шарапудинов, “О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 291–302; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Uniform boundedness in L^p ($p = p(x)$) of some families of convolution operators”, *Math. Notes*, **59**:2 (1996), 205–212.
- [11] И. И. Шарапудинов, “Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}(E)$ ”, *Anal. Math.*, **33**:2 (2007), 135–153.
- [12] I. I. Sharapudinov, “Several questions of the approximation theory of functions in spaces $L^{p(x)}(E)$ ”, *Abstracts of 6th International ISAAC Congress* (Metu University, Ankara, Turkey, 2007), 85.
- [13] В. В. Жиков, “Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 675–710; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:1 (1987), 33–66.
- [14] В. В. Жиков, “Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса”, *Дифференц. уравнения*, **33**:1 (1997), 107–114; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system”, *Differential Equations*, **33**:1 (1997), 108–115.
- [15] V. V. Zhikov, “On some variational problems”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:1 (1997), 105–116.
- [16] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности”, *Матем. сб.*, **199**:12 (2008), 19–52.
- [17] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О теореме Троттера–Като в переменном пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **41**:4 (2007), 22–29; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On the Trotter–Kato theorem in a variable space”, *Funct. Anal. Appl.*, **41**:4 (2007), 264–270.
- [18] L. Diening, M. Růžička, “Calderón–Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics”, *J. Reine Angew. Math.*, **563** (2003), 197–220.
- [19] V. Kokilashvili, S. Samko, “Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent”, *Georgian Math. J.*, **10**:1 (2003), 145–156.

- [20] L. Diening, P. Hästö, A. Nekvinda, “Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces”, *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*, Proceedings of the Conference held in Milovy (Bohemian–Moravian Uplands, 2004), Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, Praha.
- [21] Г. Церё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [22] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства средних типа Валле–Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 452–471.
- [23] H. Pollard, “The mean convergence of orthogonal series. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62**:3 (1947), 387–403.
- [24] H. Pollard, “The mean convergence of orthogonal series. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63**:2 (1948), 355–367.
- [25] H. Pollard, “The mean convergence of orthogonal series. III”, *Duke Math. J.*, **16**:1 (1949), 189–191.
- [26] J. Newman, W. Rudin, “Mean convergence of orthogonal series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**:2 (1952), 219–222.
- [27] B. Muckenhoupt, “Mean convergence of Jacobi series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23**:2 (1969), 306–310.
- [28] B. Muckenhoupt, “Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **147**:2 (1970), 419–431.
- [29] B. Muckenhoupt, “Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **147**:2 (1970), 433–460.
- [30] В. М. Бадков, “Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам”, *УМН*, **33**:4 (1978), 51–106; англ. пер.: V. M. Badkov, “Approximation properties of fourier series in orthogonal polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **33**:4 (1978), 53–117.
- [31] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 2007.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН;

Владикавказский научный центр РАН

и Правительства Республики Северная Осетия – Алания

E-mail: sharapud@iwt.ru

Поступила в редакцию

17.03.2008 и 30.11.2008