Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 1, 81–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4878>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:21:43

УДК 517.538

С. П. Суетин

О сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса

Для многочленов, ортогональных на отрезке $\Delta = [-1, 1]$ относительно комплексного веса, получена формула сильной асимптотики, справедливая в некоторой окрестности Δ . В частности, для “тригонометрического” веса $\rho_0(x) = e^{ix}$, $x \in \Delta$, из этой формулы следует описание асимптотического поведения каждого из n нулей n -го ортогонального многочлена при $n \rightarrow \infty$. Вывод формулы сильной асимптотики основан на использовании сингулярного интегрального уравнения Наттолла.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, ортогональные многочлены, сильная асимптотика.

§ 1. Введение

1.1. Хорошо известно (см. [1; гл. III, п. 3.5], [2; раздел 2]), что общие ортогональные многочлены впервые были рассмотрены П. Л. Чебышёвым [3] в теории непрерывных дробей и естественным образом возникли как знаменатели соответствующих подходящих дробей. Такая связь общих ортогональных многочленов с непрерывными дробями считалась основой одного из возможных подходов к изучению свойств этих многочленов. В частности, уже А. А. Марков [4] рассмотрел случай ортогональности на двух (непересекающихся) отрезках вещественной прямой, а в работе Дюма [5] в связи исследованием сходимости чебышёвской непрерывной дроби для конкретной эллиптической функции возникли полиномы, ортогональные на дугах в комплексной плоскости. Однако со временем от такого подхода к теории ортогональных многочленов практически полностью отказались и в основу этой теории было положено само определение ортогональности (см., например, [1; предисловие]).

Классические результаты Г. Сегё [1; гл. XII] и С. Н. Бернштейна [6] (см. также [1; гл. XII]) об асимптотике ортогональных многочленов были сформулированы и доказаны для случая одного отрезка $\Delta = [-1, 1]$ и веса вида

$$\rho(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\rho_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1.1)$$

где ρ_0 – суммируемая вещественная функция, $\rho_0 > 0$ п.в. на Δ . Функцию ρ_0 Бернштейн [6] предложил называть тригонометрическим весом: хорошо известно (см., например, [1], [7]), что многочлены, ортогональные на отрезке Δ с весом (1.1), тесно связаны с многочленами, ортогональными на единичной окружности с весом $\rho_0(\cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3906.2008.1).

Если ρ_0 – непрерывная положительная на Δ функция, удовлетворяющая условию Дини–Липшица

$$|\rho_0(x) - \rho_0(y)| \leq M |\log |x - y||^\gamma, \quad x, y \in \Delta, \quad (1.2)$$

с некоторыми постоянными $M > 0$ и $\gamma > 1$, то для полиномов Q_n , ортогональных на Δ с весом (1.1) и нормированных условием¹ $\int Q_n^2(x) \rho(x) dx = 2$, при $n \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы Бернштейна (см. [6], [1; гл. XII]):

$$Q_n(z) = \Phi^n(z) D(z; \rho_0) (1 + o(1)), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad (1.3)$$

$$Q_n(x) = 2(\rho_0(x))^{-1/2} \cos(n \arccos x + \theta(x; \rho_0)) + o(1), \quad x \in \Delta. \quad (1.4)$$

Здесь $o(1) = O((\log n)^{1-\gamma})$,

$$D(z; \rho_0) = \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho_0(x)}{x - z} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right\} \quad (1.5)$$

– функция Сегё,

$$\theta(x; \rho_0) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho_0(x) - \log \rho_0(y)}{x - y} dy,$$

$\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная функции Жуковского $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $|\zeta| > 1$, $\Phi(\infty) = \infty$, $\zeta = \Phi(z)$. Соотношение (1.3) выполняется локально равномерно в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, соотношение (1.4) – равномерно на Δ . Случаю $\rho_0 \equiv 1$ соответствуют функция $D(z; \rho_0) \equiv 1$ и классические полиномы Чебышёва первого рода $T_n(z) = \zeta^n + \zeta^{-n}$, нули которых $t_{k,n}$ вычисляются явно: $t_{k,n} = \cos \theta_{k,n}$, где $\theta_{k,n} = \pi/(2n) + \pi k/n$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. В частности, для нулей, ближайших к концам отрезка Δ , имеем

$$t_{0,n} = 1 - \frac{\pi^2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad t_{n-1,n} = -1 + \frac{\pi^2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (1.6)$$

Так как $\rho_0 > 0$, то $\deg Q_n = n$ и все n нулей полинома Q_n лежат на отрезке Δ . Если функция ρ_0 голоморфна на Δ ($\rho_0 \in \mathcal{H}(\Delta)$), то в (1.3)–(1.4) величина $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta \in (0, 1)$ (см. [8]–[10]), и формула (1.4) позволяет приближенно с точностью $O(\delta^n)$ находить нули Q_n как корни уравнения $\cos(n \arccos x + \theta(x; \rho_0)) = 0$.

1.2. В связи с изучением сходимости чебышёвских непрерывных дробей [3] (или, иначе говоря, диагональных аппроксимаций Паде) возникает задача исследования асимптотических свойств многочленов, ортогональных на отрезке Δ относительно комплексного веса $\rho_0: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$. К такой задаче естественным образом приводит разложение в чебышёвскую непрерывную дробь простейших алгебраических функций вида

$$f(z) = r_1(z) + \frac{r_2(z)}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad f \in \mathcal{H}(\infty),$$

¹Такая нормировка связана с представлением (2.1).

где r_1, r_2 – комплексные рациональные функции (см., например, [11], [12]). Отметим, что разложение в чебышёвскую непрерывную дробь гиперэллиптических функций естественным образом приводит к многочленам, ортогональным на нескольких отрезках или дугах в комплексной плоскости (см. [5], [13]–[23]).

Дж. Наттолло (см. [13], [8]) было показано, что результаты С. Н. Бернштейна остаются в силе и для комплексного веса $\rho_0: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если $\rho_0 \in \mathcal{H}(\Delta)$. Точнее, формула (1.3) остается неизменной, а вместо (1.4) имеем

$$Q_n(x) = \Psi_n^+(x) + \Psi_n^-(x) + O(\delta^n), \quad x \in \Delta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.7)$$

где $\delta \in (0, 1)$, $\Psi_n(z) := \Phi(z)^n D(z; \rho_0)$ (здесь и далее знаком “+” обозначено предельное значение соответствующей функции при $z = x + iy \rightarrow x \in \Delta$, $y > 0$; аналогичный смысл придается и знаку “−”). Непосредственно из (1.3) следует, что $\deg Q_n = n$ при $n \geq n_0$, все нули Q_n притягиваются к отрезку Δ и

$$\frac{1}{n} \mu(Q_n) \xrightarrow{*} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $\mu(Q_n)$ – считающая мера для нулей полинома Q_n . Однако для комплексного тригонометрического веса ρ_0 нули Q_n , вообще говоря, не лежат на Δ . Поэтому формула (1.7) оказывается непригодной для приближенного решения уравнения $Q_n(z) = 0$ в отличие от случая $\rho_0 > 0$. Таким образом, формулы типа (1.3)–(1.4), (1.7) не позволяют проследить за асимптотическим поведением каждого из n нулей полинома Q_n при $n \rightarrow \infty$ и, в частности, не дают ответа на вопрос о том, с какой скоростью эти нули притягиваются к отрезку Δ .

Основной результат настоящей работы – формула сильной асимптотики (2.1) для Q_n в окрестности отрезка Δ . В частности, для тригонометрического веса $\rho_0(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (функции Эйлера) из этой формулы следует описание асимптотического поведения каждого нуля $z_{k,n}$ полинома Q_n по отношению к нулям $t_{k,n}$ полинома Чебышёва T_n . Иными словами, при $n \rightarrow \infty$ нули Q_n фактически “нумеруются” нулями T_n .

Автор выражает искреннюю признательность рецензенту за сделанные замечания.

§ 2. Формулировка основных результатов

2.1. Пусть $\mathfrak{R}$ – риманова поверхность, заданная уравнением $w^2 = z^2 - 1$, разветвленная в точках ± 1 и двулистно накрывающая риманову сферу $\overline{\mathbb{C}}$. Точки $z^{(1)}$ первого (открытого) листа $D^{(1)}$ поверхности зададим соотношением $z^{(1)} = (z, \sqrt{z^2 - 1})$, второго листа $D^{(2)}$ – соотношением $z^{(2)} = (z, -\sqrt{z^2 - 1})$; здесь и всюду далее выбрана такая ветвь корня, что $\sqrt{z^2 - 1}/z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Функция w однозначна как функция точки $\mathbf{z} := (z, \pm\sqrt{z^2 - 1})$ поверхности $\mathfrak{R}$: $w(\mathbf{z}) = \pm\sqrt{z^2 - 1}$. Пусть π – каноническая проекция $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, $\pi(\mathbf{z}) = z$, $\mathbf{z}^* = (z, \mp\sqrt{z^2 - 1})$ при $\mathbf{z} = (z, \pm\sqrt{z^2 - 1})$ (“*” – операция инволюции на $\mathfrak{R}$, переставляющая листы). Отрезку Δ соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутый цикл Γ , $\pi(\Gamma) = \Delta$. Функция $\Phi(z)$, функция Грина $g(z, \infty) = \log |\Phi(z)|$ области D и полином $Q_n(z)$ поднимаются на $\mathfrak{R}$ как функции от $\mathbf{z}$; так как $\rho_0 \in \mathcal{H}(\Delta)$, то Ψ_n также голоморфна в некоторой окрестности Γ (подробнее см. пп. 3.2 и 4.2).

ТЕОРЕМА 1. Если $\rho_0 \in \mathcal{H}(\Delta)$, $\rho_0(x) \neq 0$ на Δ , то при некотором $\varepsilon = \varepsilon(\rho_0) > 0$ равномерно по $\mathbf{z}$ таким, что $e^{-\varepsilon} \leq |\Phi(\mathbf{z})| \leq e^\varepsilon$, имеет место равенство

$$Q_n(z) = \Psi_n(\mathbf{z}) + \Psi_n(\mathbf{z}^*) + O(\delta^{2n}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

где величина $\delta = e^{-\varepsilon} \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 1 основано на использовании сингулярного интегрального уравнения Наттолла (см. [8], [9], [24], [25]). Очевидно, что соотношения (1.3)–(1.4), (1.7) являются следствиями соотношения (2.1).

Из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Если $\rho_0(x) = e^{-ibx}$, где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то:

1) при $n \geq n_0$ все нули $z_{k,n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, многочлена Q_n простые, лежат или в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ при $b > 0$, или в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ при $b < 0$ и удовлетворяют неравенствам $c_1/n^2 < g(z_{k,n}, \infty) < c_2/n$, где постоянные $c_1, c_2 > 0$ зависят от b ;

2) равномерно по $k = 0, 1, \dots, n-1$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$z_{k,n} = t_{k,n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + i\left(\frac{b}{2n} \sin^2 \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin^2 \theta_{k,n}}{n^3}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

где $\theta_{k,n} = \pi/(2n) + \pi k/n$ и под “ $O(\cdot)$ ” понимается вещественнозначная функция;

3) для нулей Q_n , ближайших к концам отрезка Δ , имеем (ср. с (1.6))

$$z_{0,n} = t_{0,n} + i\frac{b\pi^2}{8n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad z_{n-1,n} = t_{n-1,n} + i\frac{b\pi^2}{8n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (2.3)$$

Соотношение (2.2) означает, что образы $\zeta_{k,n} = \Phi(z_{k,n})$ нулей Q_n в плоскости переменного $\zeta = \Phi(z)$ асимптотически при $n \rightarrow \infty$ располагаются в корнях $2n$ -й степени из -1 .

2.2. Теорема 1 допускает следующую эквивалентную переформулировку (ср. [8; теорема 2.1]).

ТЕОРЕМА 1'. Если $\rho_0 \in \mathcal{H}(\Delta)$, $\rho_0(x) \neq 0$ на Δ , то при некотором $\varepsilon = \varepsilon(\rho_0) > 0$ равномерно по ζ таким, что $e^{-\varepsilon} \leq |\zeta| \leq e^\varepsilon$, имеет место равенство

$$Q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho_0(z)}} \left\{ \zeta^n A(\zeta; \rho_0) + \frac{1}{\zeta^n A(\zeta; \rho_0)} \right\} + O(\delta^{2n}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

где

$$A(\zeta; \rho_0) = \exp \left\{ \frac{\zeta - 1/\zeta}{4\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho_0(z) - \log \rho_0(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right\},$$

$$z = \frac{\zeta + 1/\zeta}{2}, \quad \delta = e^{-\varepsilon} \in (0, 1).$$

Отметим, что для $\rho_0 > 0$ непосредственно из (2.4) вытекает представление (1.4) с $o(1) = O(\delta^n)$.

Теорема 2 обобщается на случай произвольного тригонометрического веса ρ_0 , удовлетворяющего условиям теоремы 1. Однако в этом общем случае асимптотическое поведение n нулей ортогонального многочлена Q_n оказывается существенно более сложным и не допускает такого же описания, как в частном случае при $\rho_0(x) = e^{-ibx}$. Это ясно уже из самой теоремы 2: для достаточно больших n в зависимости от знака вещественного числа $b \neq 0$ все n нулей полинома Q_n расположены или в верхней, или в нижней полуплоскости. Отсюда вытекает, что в общем случае поведение нулей Q_n зависит от поведения функции $\arg \rho_0(x)$. Аналоги теорем 1 и 2 справедливы и для многочленов $Q_n(z; f)$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функций вида $f = \hat{\rho}_0 + r$, где r – произвольная комплексная рациональная функция, голоморфная на отрезке Δ , $r(\infty) = 0$,

$$\hat{\rho}_0(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho_0(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad z \in D. \quad (2.5)$$

Доказательству соответствующих утверждений автор предполагает посвятить другую работу.

Соотношения (2.2) представляют собой (в условиях теоремы 2) утверждения о сильной асимптотике нулей ортогональных полиномов $Q_n = Q(z; \hat{\rho}_0)$ – полюсов диагональных аппроксимаций Паде функций вида (2.5). Первый результат о сильной асимптотике m полюсов диагональных аппроксимаций Паде функции вида $f = \hat{\rho}_0 + r$ в малой окрестности m -кратного полюса r получен в [9; § 2, п. 3, теорема 3]: *асимптотически эти полюсы располагаются в вершинах правильного m -угольника*.

Отметим, что так как для $\rho_0(x) = e^{-ibx}$ имеем $|\rho_0(x)| \equiv 1$ при $x \in \Delta$, то для этого частного случая вес (1.1) можно рассматривать как “мультипликативное возмущение” классического чебышёвского веса $(1 - x^2)^{-1/2}/\pi$.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [26].

§ 3. Интегральное уравнение Наттолла

3.1. Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} \quad (3.1)$$

– произвольный сходящийся в окрестности точки $z = \infty$ степенной ряд, $[n/n]_f$, $n = 0, 1, \dots$, – последовательность диагональных аппроксимаций Паде ряда (3.1). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ имеем $[n/n]_f := P_n/Q_n$, где полиномы P_n и Q_n , $\deg P_n \leq n - 1$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \neq 0$, определяются (неоднозначно) из соотношения

$$(Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Функция

$$R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) \quad (3.3)$$

называется *функцией остатка*; в теории аппроксимаций Паде она играет важную роль (см., например, [8], [9], [13], [24], [25], а также § 3, формула (3.11) и § 4 настоящей работы).²

²В теории ортогональных многочленов P_n называется *многочленом второго рода*, а R_n – *функцией второго рода*.

Нетрудно видеть, что при $f = \hat{\rho}_0$ (см. (2.5)) выполняется следующее равенство:

$$R_n^+(x) - R_n^-(x) = \frac{2Q_n(x)\rho_0(x)}{w^+(x)}, \quad x \in (-1, 1). \quad (3.4)$$

Если $\rho_0 > 0$, то $\deg Q_n = n$, $\deg P_n = n - 1$, полиномы Q_n ортогональны с тригонометрическим весом ρ_0 . При этом аппроксимация Паде $[n/n]_f$ совпадает с n -й подходящей дробью к чебышёвской непрерывной дроби для функции $\hat{\rho}_0$:

$$\hat{\rho}_0(z) = \frac{1}{A_1 z + B_1} + \frac{1}{A_2 z + B_2} + \cdots + \frac{1}{A_n z + B_n} + \cdots, \quad (3.5)$$

где все $A_n \neq 0$ (см. [3]).

Хорошо известно (см., например, [11], [13], [15]–[17]), что для широких классов аналитических функций асимптотические свойства ортогональных многочленов лежат в основе изучения сходимости диагональных аппроксимаций Паде. При этом задача об асимптотике ортогональных многочленов рассматривается как вполне самостоятельная проблема, выделенная из теории сходимости аппроксимаций Паде в отдельную независимую задачу, при формулировке и изучении которой понятие аппроксимаций Паде не используется.

Однако существует и другой подход к изучению асимптотики ортогональных многочленов, предложенный Дж. Наттолом [8], основанный непосредственно на соотношении (3.2) и не использующий в явном виде свойства ортогональности полиномов Q_n .³ Основой этого подхода служит сингулярное интегральное уравнение Наттолла (3.14) (см. [8]–[10], [24], [25]), связывающее между собой полиномы Q_n , функцию остатка R_n и так называемую Ψ -функцию (зависящую от n); см. (3.11). Именно этот подход и используется в настоящей работе.

3.2. Приведем необходимые определения и обозначения, связанные с простейшими и хорошо известными конструкциями (см., например, [27], [28]).

Пусть $\mathfrak{R}$ – риманова поверхность рода $g = 0$, заданная уравнением $w^2 = z^2 - 1$. Будем считать, что $\mathfrak{R}$ реализована как двулистное разветвленное в точках $z = \pm 1$ покрытие расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$; $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $w = (\zeta - 1/\zeta)/2$, $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, – параметрическое задание (униформизация) $\mathfrak{R}$. Два листа $\mathfrak{R}$ – это два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных по отрезку Δ и “склеенных” затем так, что верхнему берегу одного отрезка соответствует нижний берег другого. Таким образом, над каждой точкой $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением точек ветвления $z = \pm 1$ лежат ровно две точки римановой поверхности, а отрезку Δ соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутый цикл Γ . Будем считать, что в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ выбрана ветвь корня $\sqrt{z^2 - 1}$, удовлетворяющая условию $\sqrt{z^2 - 1}/z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Функция w , где $w^2 = z^2 - 1$, однозначна на $\mathfrak{R}$. Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности $\mathfrak{R}$ будем считать тот, на котором $w = \sqrt{z^2 - 1}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем $w = -\sqrt{z^2 - 1}$. Для точек римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем использовать обозначение $\mathbf{z} = (z, \pm\sqrt{z^2 - 1})$; при этом для точек первого листа $z^{(1)} = (z, \sqrt{z^2 - 1})$, а для точек второго – $z^{(2)} = (z, -\sqrt{z^2 - 1})$. Область $D^{(1)}$ будем отождествлять с “физической” областью D . Пусть $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная к функции Жуковского $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $|\zeta| > 1$. Тогда $\zeta = \Phi(z)$ однозначна в D и продолжается на всю риманову поверхность $\mathfrak{R}$ как

³Нетрудно видеть, что для функций $f = \hat{\rho}_0$ свойство ортогональности Q_n эквивалентно соотношению (3.2).

однозначная мероморфная⁴ функция, $\Phi(\mathbf{z}) = z + w \in \mathbb{C}(z, w)$, с дивизором $(\Phi) = \infty^{(2)} - \infty^{(1)}$.

Функции Грина $g(z, \infty) = \log |\Phi(z)|$ области D соответствует комплексная функция Грина $G(z, \infty) = g(z, \infty) + i\tilde{g}(z, \infty)$, где $\tilde{g}(z, \infty)$ – гармонически сопряженная к $g(z, \infty)$ функция. Функция $G(z) := G(z, \infty)$ имеет в бесконечно удаленной точке ветвление логарифмического характера, однозначна по модулю $2\pi i$ и представляется в виде

$$G(z) = \log \Phi(z) = \int_{-1}^z \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad z \in D,$$

где интеграл берется по любому пути, лежащему в D .

Пусть функция F такова, что $F \in \mathcal{H}(\mathfrak{R} \setminus \Gamma)$ и для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$ существуют

$$\lim_{D^{(1)} \ni \xi^{(1)} \rightarrow \mathbf{x}} F(\xi^{(1)}) =: F^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \lim_{D^{(2)} \ni \xi^{(2)} \rightarrow \mathbf{x}} F(\xi^{(2)}) =: F^{(2)}(\mathbf{x}),$$

при этом на кривой Γ

$$F^{(1)}(\mathbf{x}) - F^{(2)}(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.6)$$

где функция H голоморфна на Γ . При этих условиях F стандартным образом (см. [27], [9; § 2, формула (26)]) восстанавливается в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ по граничным условиям (3.6) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} H(\xi) d\Omega(\xi; \mathbf{z}) + C, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (3.7)$$

где $C = C(F)$ – некоторая постоянная,

$$d\Omega(\xi; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\xi) + w(\mathbf{z})}{\xi - z} \frac{d\xi}{w(\xi)} \quad (3.8)$$

– мероморфный на $\mathfrak{R}$ абелев дифференциал (“типа Коши”), который имеет полюсы только в точках $\mathbf{z}$, $\infty^{(1)}$, $\infty^{(2)}$ с вычетами, равными 1, $-1/2$, $-1/2$ соответственно, а контур Γ^+ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$, т.е. область остается слева при обходе ее по контуру.

Отметим следующее свойство дифференциала (3.8):

$$d\Omega(\xi^{(2)}; z^{(1)}) = d\Omega(\xi^{(1)}; z^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{w(\xi) - w(z)}{\xi - z} \frac{d\xi}{w(\xi)}, \quad z, \xi \notin \Delta. \quad (3.9)$$

Следовательно, при фиксированном $\xi^{(1)} \in D^{(1)}$ это – голоморфный по переменной $z^{(2)}$ в области $D^{(2)}$ дифференциал. Более того, дифференциал $d\Omega(\xi^{(1)}; \mathbf{z})$ – голоморфный по $\mathbf{z}$ на компакте $D^{(2)} \sqcup \Gamma$ при любом фиксированном $\xi^{(1)} \in D^{(1)}$, $\xi^{(1)} \neq \infty^{(1)}$.

⁴ Аналитичность, мероморфность и гармоничность функций, заданных на $\mathfrak{R}$, понимаются стандартным образом в терминах локального параметра на $\mathfrak{R}$ (см. [27], [28]).

3.3. Используемый в настоящей работе подход к изучению асимптотических свойств ортогональных многочленов Q_n основан на свойствах Ψ -функции, являющейся решением специальной краевой задачи Римана на двулистной римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Такой подход впервые был предложен в работах Н. И. Ахиезера (см. библиографию в [24]), а затем был развит в работах Дж. Наттолла (см. [8], [13]) и автора (см. [24], [25]), прежде всего – с целью изучения сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций и их естественных обобщений.

Пусть $\rho_0 \in \mathcal{H}(\Delta)$ и $\rho_0(x) \neq 0$ на Δ . Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

Задача ($\mathcal{R}$). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1) Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2) дивизор $(\Psi) = n\infty^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3) на Γ выполнено краевое условие: $\rho_0(x)\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \Psi^{(2)}(\mathbf{x})$.

Так как род $\mathfrak{R}$ равен нулю и $\deg(\Psi) = 0$, то задача ($\mathcal{R}$) распадается на две независимые задачи, соответствующие свойствам 2) и 3). Стандартными методами (см., например, [9]) доказывается, что такая функция $\Psi = \Psi_n$ всегда существует и определяется однозначно с точностью до мультипликативной постоянной. Нетрудно найти и явный вид этой функции при $\mathbf{z} = z^{(1)}$:

$$\Psi_n(z) = \Phi(z)^n D(z; \rho_0) = e^{nG(z)} D(z; \rho_0), \quad (3.10)$$

где $D(z; \rho_0)$ – функция Серё. Непосредственно из свойств 1)–3) Ψ -функции вытекает, что $\Psi_n(z^{(1)})\Psi_n(z^{(2)}) \equiv \text{const} \neq 0$ при $z \in D$. Поэтому это произведение продолжается как постоянная функция на всю комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Нам удобно ввести следующую нормировку⁵: $\Psi_n(z^{(1)})\Psi_n(z^{(2)}) \equiv 1$, $z \in D$. Это соотношение в совокупности с (3.10) и (1.5) приводит к явной формуле для Ψ -функции и при $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$.

При подходящей нормировке (подробнее см. § 4, п. 4.2) ортогональных полиномов Q_n – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции $f = \widehat{\rho}_0$ – их сильная асимптотика в окрестности отрезка Δ полностью описывается в терминах Ψ -функции.

3.4. Выведем сингулярное интегральное уравнение Наттолла (см. [8], [9], [24]). При этом в отличие от оригинальной работы Наттолла [8] мы получим для этого уравнения такое универсальное представление, которое с небольшим изменением, учитывающим род поверхности, оказывается пригодным и для произвольной гиперэллиптической римановой поверхности (см. [24], [25]).

Пусть Ψ_n – решение задачи ($\mathcal{R}$) при некотором $n \in \mathbb{N}$, полином Q_n , $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$, удовлетворяет соотношению (3.2), R_n – функция остатка (3.3). Определим на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ функцию F_n следующим образом:

$$F_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}, \\ 2Q_n(z), & \mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Тогда F_n – (кусочно) голоморфная функция в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$.

⁵Таким условием Ψ -функция определяется однозначно с точностью до знака $\pm$.

Используя свойства Ψ -функции как решения задачи $(\mathcal{R})$ и свойство (3.4) функции остатка R_n , получаем следующее краевое условие для F_n на кривой Γ :

$$F_n^{(1)}(\xi) - F_n^{(2)}(\xi) = \chi_n^{(2)}(\xi) \frac{1}{\rho_0(\xi)}, \quad \xi \in \Gamma, \quad (3.12)$$

где функция

$$\chi_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}) R_n(z) w(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in D^{(2)}, \quad (3.13)$$

голоморфна на втором листе. Более того, как нетрудно видеть из (3.13), функция $\chi_n(\mathbf{z})$ голоморфно продолжается в некоторую окрестность Γ на первый лист $D^{(1)}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. При этих условиях F_n стандартным образом (см. п. 3.2) восстанавливается в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ по граничным условиям (3.12) интегралом типа Коши (3.7), а именно,

$$F_n(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \chi_n^{(2)}(\xi) \frac{1}{\rho_0(\xi)} d\Omega(\xi; \mathbf{z}) + C_n, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (3.14)$$

где C_n – некоторая постоянная. Интегральное представление (3.14) называется *сингулярным интегральным уравнением Натолла* (для случая $g = 0$) и лежит в основе наших дальнейших рассуждений.

§ 4. Доказательство теоремы 1

4.1. Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы функции χ_n (см. (3.13)) и $1/\rho_0$ были бы голоморфны в окрестности $\mathbf{U}_{4\varepsilon} := \{\mathbf{z} \in \mathfrak{R} : e^{-4\varepsilon} < |\Phi(\mathbf{z})| < e^{4\varepsilon}\} = \{\mathbf{z} : -4\varepsilon < g(\mathbf{z}, \infty) < 4\varepsilon\}$ кривой Γ .

Пусть $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$. Тогда в интегральном представлении (3.14) контур Γ можно заменить на контур $\Gamma_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| = R\}$, $R = e^{3\varepsilon} > 1$, целиком лежащий на втором листе $D^{(2)}$. Так как $\Psi_n(z^{(1)})\Psi_n(z^{(2)}) \equiv 1$, то

$$\chi_n(z^{(2)}) = \Psi_n(z^{(2)}) R_n(z) w(z^{(2)}) = -F_n(z^{(1)}) \frac{\Psi_n(z^{(2)})}{\Psi_n(z^{(1)})} = -\frac{F_n(z^{(1)})}{\Psi_n(z^{(1)})^2}. \quad (4.1)$$

Воспользуемся равенствами (4.1) и (3.9). Тогда из (3.14) получаем следующее представление для функции F_n :

$$\begin{aligned} F_n(z^{(1)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi_n(\xi^{(2)}) \frac{1}{\rho_0(\xi)} d\Omega(\xi^{(2)}; z^{(1)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F_n(\xi^{(1)})}{\Psi_n(\xi^{(1)})^2 \rho_0(\xi)} d\Omega(\xi^{(1)}; z^{(2)}) + C_n, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\Gamma_R^{(1)} = \{\xi^{(1)} : |\Phi(\xi)| = R\}$. При $\xi^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$, $z^{(2)} \in D^{(2)}$ дифференциал (3.8) – голоморфный по переменной $z^{(2)}$. Более того, дифференциал $d\Omega(\xi^{(1)}; \mathbf{z})$ – голоморфный по $\mathbf{z}$ на компакте $D^{(2)} \cup \overline{\mathbf{U}}_{2\varepsilon}$ при $\xi^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$. Поэтому представление (4.2) справедливо при $\mathbf{z} \in \mathbf{K}_{2\varepsilon} := D^{(1)} \cup \overline{\mathbf{U}}_{2\varepsilon}$, т.е.

$$F_n(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F_n(\xi^{(1)})}{\Psi_n(\xi^{(1)})^2 \rho_0(\xi)} d\Omega(\xi^{(1)}; \mathbf{z}^*) + C_n. \quad (4.3)$$

Интегральная формула (4.3) задает аналитическое продолжение функции $F_n(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, определенной в (3.11), через контур Γ на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R}$ вплоть до контура $\Gamma_R^{(2)}$. (Для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией $F_n(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной в (3.11).) Из (4.2) получаем, что равномерно на компакте $\mathbf{K}_{2\varepsilon}$

$$|F_n(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \max_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{1}{|\Psi_n(\xi^{(1)})|^2} \cdot O(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

где $M_n = \max_{\xi \in \mathbf{K}_{2\varepsilon}} |F_n(\xi)|$. Следовательно, равномерно по $\mathbf{z} \in \mathbf{K}_{2\varepsilon}$

$$|F_n(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \cdot O(\delta^{6n}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

где $\delta = e^{-\varepsilon} < 1$. Так как $F_n(z^{(1)}) \not\equiv 0$ (см. (3.11)), то $M_n \neq 0$, и поэтому из (4.5) при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$M_n = |C_n|(1 + O(\delta^{6n})), \quad (4.6)$$

$$F_n(\mathbf{z}) = C_n(1 + O(\delta^{6n})) \quad \text{равномерно по } \mathbf{z} \in \mathbf{K}_{2\varepsilon}. \quad (4.7)$$

Из (4.6) вытекает, что постоянная $C_n \neq 0$ при достаточно больших n . Положим⁶ $C_n = 2$. Тогда из (4.7) получаем

$$F_n(\mathbf{z}) = 2(1 + O(\delta^{6n})) = 2 + O(\delta^{6n}), \quad \delta = e^{-\varepsilon} \in (0, 1). \quad (4.8)$$

4.2. Так как $\rho_0, 1/\rho_0 \in \mathcal{H}(\mathbf{U}_{3\varepsilon})$, то при $z \in U_{2\varepsilon} \setminus \Delta$, где $U_{2\varepsilon} := \{z : g(z, \infty) < 2\varepsilon\} = \{z : |\Phi(z)| < e^{2\varepsilon}\}$, имеем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho_0(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\rho_0(z)}{\sqrt{z^2-1}} - \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho_0(z) - \rho_0(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\rho_0(z)}{w(z)} - I(z), \quad z \in U_{2\varepsilon} \setminus \Delta, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$I(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho_0(z) - \rho_0(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I \in \mathcal{H}(U_{2\varepsilon}). \quad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10) вытекает, что для функции $(\hat{\rho}_0 w)(z) = \rho_0(z) + I(z)w(z)$, $z \in U_{2\varepsilon}$, имеем: функция $(\hat{\rho}_0 w)(\mathbf{z}) := \rho_0(z) + I(z)w(\mathbf{z})$ определена и голоморфна на компакте $\bar{\mathbf{U}}_{\varepsilon}$.

Аналогично для функции Сегё (1.5) получаем

$$\begin{aligned} D(z; \rho_0) &= \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho_0(x)}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{\log \rho_0(z)}{2} + \frac{w(z)}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho_0(z) - \log \rho_0(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0(z)}} \exp \{w(z)J(z)\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$J(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho_0(z) - \log \rho_0(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad J \in \mathcal{H}(U_{2\varepsilon}). \quad (4.12)$$

⁶Такая нормировка связана с тем, что $\text{cap } \Delta = 1/2$ и $\Psi_n(z^{(1)})\Psi_n(z^{(2)}) \equiv 1$.

Из (4.11) и (4.12) вытекает, что для функции Сегё $D(z; \rho_0)$, $z \in D$, имеем: функция $D(\mathbf{z}; \rho_0)$ определена и голоморфна на компакте $\overline{U}_\varepsilon$,

$$D(\mathbf{z}; \rho_0) = \frac{1}{\sqrt{\rho_0(z)}} \exp\{w(\mathbf{z})J(z)\} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0(z)}} \exp\left\{\frac{\zeta - 1/\zeta}{2} J(z)\right\}, \quad (4.13)$$

где $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $w = (\zeta - 1/\zeta)/2$. Отсюда следует, что для функции $\Psi_n(z) = \Phi(z)^n D(z; \rho_0)$, $z \in D$, имеем: функция $\Psi_n(\mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{z})^n D(\mathbf{z}; \rho_0)$ определена и голоморфна на компакте $\overline{U}_\varepsilon$,

$$\Psi_n(\mathbf{z}) = \zeta^n \frac{1}{\sqrt{\rho_0(z)}} \exp\{w(\mathbf{z})J(z)\} = \zeta^n \frac{1}{\sqrt{\rho_0(z)}} \exp\left\{\frac{\zeta - 1/\zeta}{2} J(z)\right\}. \quad (4.14)$$

4.3. Так как функция $F_n(z^{(2)})$, $z^{(2)} \in D^{(2)}$, определенная в (3.11), и функция $\Psi_n(z^{(2)})$, $z^{(2)} \in D^{(2)}$, в дальнейшем нам не понадобятся, то через $F_n(\mathbf{z})$ и $\Psi_n(\mathbf{z})$ всюду ниже будем обозначать соответствующие аналитические продолжения функций $F_n(z^{(1)})$, $z^{(1)} \in D^{(1)}$, и $\Psi_n(z^{(1)})$, $z^{(1)} \in D^{(1)}$, определенные на компакте $\overline{U}_\varepsilon$. Поэтому в соответствии с (3.11) получаем

$$F_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z})(R_n w)(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z})(Q_n(z)(\widehat{\rho}_0 w)(\mathbf{z}) - P_n(z)w(\mathbf{z})), \quad \mathbf{z} \in \overline{U}_\varepsilon. \quad (4.15)$$

Следовательно, при $\mathbf{z} \in \overline{U}_\varepsilon$ имеем

$$\frac{F_n(\mathbf{z})}{\Psi_n(\mathbf{z})} = Q_n(z)(\widehat{\rho}_0 w)(\mathbf{z}) - P_n(z)w(\mathbf{z}), \quad (4.16)$$

$$\frac{F_n(\mathbf{z}^*)}{\Psi_n(\mathbf{z}^*)} = Q_n(z)(\widehat{\rho}_0 w)(\mathbf{z}^*) - P_n(z)w(\mathbf{z}^*). \quad (4.17)$$

Складывая равенства (4.16) и (4.17) и учитывая асимптотическое соотношение (4.8), представление (3.10), неравенство $\rho_0(z) \neq 0$ при $z \in \overline{U}_\varepsilon$, а также легко проверяемые равенства $w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}^*) = 0$,

$$(\widehat{\rho}_0 w)(\mathbf{z}) + (\widehat{\rho}_0 w)(\mathbf{z}^*) = 2\rho_0(z), \quad \Psi_n(\mathbf{z})\Psi_n(\mathbf{z}^*) = \frac{1}{\rho_0(z)}, \quad (4.18)$$

получаем, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\mathbf{z} \in \overline{U}_\varepsilon$

$$Q_n(z) = \Psi_n(\mathbf{z}) + \Psi_n(\mathbf{z}^*) + O(\delta^{5n}), \quad \delta = e^{-\varepsilon} \in (0, 1). \quad (4.19)$$

Теорема 1 доказана.

Наконец, полагая

$$A(\zeta; \rho_0) := \zeta^n \frac{1}{\sqrt{\rho_0(z)}} \exp\left\{\frac{\zeta - 1/\zeta}{2} J(z)\right\},$$

непосредственно из (4.19) получаем (2.4). Таким образом, доказана и теорема 1'.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что полученное в (4.18) равенство $\Psi_n(\mathbf{z})\Psi_n(\mathbf{z}^*) = 1/\rho_0(z)$ не противоречит принятому в качестве нормировки соотношению $\Psi_n(z^{(1)})\Psi_n(z^{(2)}) \equiv 1$ при $z \in D$, так как в первом равенстве речь идет об аналитическом продолжении функции $\Psi(z^{(1)})$, $z^{(1)} \in D^{(1)}$, на второй лист $D^{(2)}$, которое совпадает с функцией $\Psi(z^{(2)})$ только при $\rho_0 \equiv 1$.

§ 5. Доказательство теоремы 2

5.1. Из соотношения (2.1) легко вытекает, что равномерно вне отрезка Δ

$$Q_n(z) = \Psi_n(z)(1 + O(\delta^n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

Следовательно, $\deg Q_n = n$ для всех достаточно больших n и все нули Q_n притягиваются к отрезку Δ . Поэтому для $n \geq n_0$ все нули Q_n принадлежат множеству $U_\varepsilon := \{z : g(z, \infty) < \varepsilon\}$. В дальнейшем предполагается, что $n \geq n_0$.

В силу (2.1) уравнение

$$Q_n(z) = 0, \quad z \in U_\varepsilon, \quad (5.2)$$

эквивалентно уравнению

$$\Psi_n(\mathbf{z}) + \Psi_n(\mathbf{z}^*) + O(\delta^{2n}) = 0, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{U}_\varepsilon, \quad \delta = e^{-\varepsilon}, \quad (5.3)$$

но при этом каждому корню $z_{k,n}$ уравнения (5.2), отличному от чисел $z = \pm 1$, соответствуют два корня $\mathbf{z}_{k,n}$ и $\mathbf{z}_{k,n}^*$ уравнения (5.3), $\pi(\mathbf{z}_{k,n}) = \pi(\mathbf{z}_{k,n}^*) = z_{k,n}$. Таким образом, если мы покажем, что уравнение (5.3) имеет ровно $2n$ простых корней, отличных от чисел ± 1 , и найдем их асимптотическое поведение, то как следствие найдем и асимптотику всех корней $z_{k,n}$ уравнения (5.1).

Так как в области $\mathbf{U}_\varepsilon$ в силу (4.14) справедливо неравенство $C_1 e^{-n\varepsilon} \leq |\Psi_n(\mathbf{z})| \leq C_2 e^{n\varepsilon}$, $C_1, C_2 > 0$, то (5.3) эквивалентно уравнению

$$\frac{\Psi_n(\mathbf{z})}{\Psi_n(\mathbf{z}^*)} = -1 + O(\delta^n), \quad \mathbf{z} \in \mathbf{U}_\varepsilon, \quad \delta = e^{-\varepsilon} < 1. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) будем рассматривать как возмущенный вариант уравнения

$$\frac{\Psi_n(\mathbf{z})}{\Psi_n(\mathbf{z}^*)} = -1, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{U}_\varepsilon. \quad (5.5)$$

Далее мы исследуем уравнение (5.5). Будет доказано, что оно имеет ровно $2n$ корней, причем все они простые и отличны от чисел ± 1 . Кроме того, будет показано, что эти корни асимптотически близки к корням уравнения

$$\Phi^{2n}(\mathbf{z}) = -1 \quad (\text{или эквивалентного ему уравнения } \zeta^{2n} = -1), \quad (5.6)$$

т.е. к корням $2n$ -й степени из -1 , равным $\tilde{\zeta}_k := \exp\{i\pi/(2n) + i\pi k/n\}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ (напомним, что $t_{k,n} = (\tilde{\zeta}_k + 1/\tilde{\zeta}_k)/2 = \cos \theta_{k,n}$ — нули полиномов Чебышёва, $\theta_{k,n} = \pi/(2n) + \pi k/n$). Асимптотическая близость корней (5.5) и (5.6) будет доказана с точностью до степенного порядка относительно $1/n$ (см. (5.16)), поэтому переход от (5.6) к возмущенному на величину порядка δ^n уравнению (5.4) не изменит характера этой асимптотической близости. Тем самым утверждения теоремы 2 будут доказаны.

5.2. В условиях теоремы 2 имеем

$$\Psi_n(\mathbf{z}) = \zeta^n e^{-ibw/2} e^{ibz/2}, \quad w = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Следовательно, уравнение (5.5) принимает вид

$$\zeta^{2n} e^{-ibw} = -1, \quad w = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad e^{-\varepsilon} \leq |\zeta| \leq e^{\varepsilon}. \quad (5.7)$$

Положим $\gamma = b/2$, $\zeta = R e^{i\varphi}$. Тогда

$$ibw = i\gamma \left(R e^{i\varphi} - \frac{1}{R e^{i\varphi}} \right) = i\gamma \left(R - \frac{1}{R} \right) \cos \varphi - \gamma \left(R + \frac{1}{R} \right) \sin \varphi.$$

Корни $\zeta_k = R_k e^{i\varphi_k}$ уравнения (5.7) удовлетворяют соотношению

$$2n \log R_k + i2n\varphi_k - i\gamma \left(R_k - \frac{1}{R_k} \right) \cos \varphi_k + \gamma \left(R_k + \frac{1}{R_k} \right) \sin \varphi_k = i\pi + i2\pi k,$$

$k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$. Отсюда следует, что

$$2n \log R_k = \gamma \left(R_k + \frac{1}{R_k} \right) \sin \varphi_k, \quad (5.8)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi k}{n} + \frac{\gamma}{2n} \left(R_k - \frac{1}{R_k} \right) \cos \varphi_k. \quad (5.9)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на итерационном использовании пары соотношений (5.8)–(5.9).

Так как $R_k \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, то из (5.8) вытекает, что

$$R_k = 1 + \frac{v_k}{n} + \frac{v_k^2}{2n^2} + O\left(\frac{v_k^3}{n^3}\right), \quad \frac{1}{R_k} = 1 - \frac{v_k}{n} + \frac{v_k^2}{2n^2} + O\left(\frac{v_k^3}{n^3}\right), \quad (5.10)$$

где

$$v_k = \frac{\gamma}{2} \left(R_k + \frac{1}{R_k} \right) \sin \varphi_k = O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$R_k - \frac{1}{R_k} = \frac{2v_k}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad R_k + \frac{1}{R_k} = 2 + \frac{v_k^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Полагая $\theta_{k,n} = \pi/(2n) + \pi k/n$, из (5.8)–(5.10) последовательно получаем

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \theta_{k,n} + \frac{\gamma}{2n} \left(R_k - \frac{1}{R_k} \right) \cos \varphi_k = \theta_{k,n} + \frac{\gamma v_k}{n^2} \cos \varphi_k + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \theta_{k,n} + \frac{\gamma^2}{2n^2} \sin 2\varphi_k + O\left(\frac{1}{n^4}\right) = \theta_{k,n} + \frac{\gamma^2}{2n^2} \sin 2\theta_{k,n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$v_k = \gamma \sin \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin \theta_{k,n}}{n^2}\right), \quad (5.12)$$

$$\sin \varphi_k = \sin \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin \theta_{k,n}}{n^2}\right), \quad \cos \varphi_k = \cos \theta_{k,n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} R_k &= 1 + \frac{\gamma}{n} \sin \theta_{k,n} + \frac{\gamma^2}{2n^2} \sin^2 \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin^3 \theta_{k,n}}{n^3}\right), \\ \frac{1}{R_k} &= 1 - \frac{\gamma}{n} \sin \theta_{k,n} + \frac{\gamma^2}{2n^2} \sin^2 \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin^3 \theta_{k,n}}{n^3}\right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_k - \frac{1}{R_k} &= \frac{2\gamma}{n} \sin \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin \theta_{k,n}}{n^3}\right), \\ R_k + \frac{1}{R_k} &= 2 + \frac{\gamma^2}{n^2} \sin^2 \theta_{k,n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.3. Из (5.11) и (5.14) находим, что

$$\zeta_k = R_k e^{i\varphi_k} = \left\{ 1 + \frac{\gamma}{n} \sin \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin \theta_{k,n}}{n^2}\right) \right\} e^{i\theta_{k,n}(1+O(1/n^2))}, \quad (5.16)$$

где $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ и “ $O(\cdot)$ ” означает вещественнозначную функцию. Непосредственно из соотношения (5.16) вытекает, что сдвиг аргументов точек ζ_k относительно аргументов $\theta_{k,n} = \pi/(2n) + \pi k/n$ чисел $\tilde{\zeta}_{k,n}$ является величиной порядка $O(1/n^2)$. Следовательно, уравнение (5.7) имеет ровно $2n$ простых корней ζ_k , $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, которые отличны от чисел ± 1 и расположены в непересекающихся окрестностях точек $\tilde{\zeta}_{k,n} = \exp(i\theta_{k,n})$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, – корнях $2n$ -й степени из -1 . Направление сдвига точек $\zeta_k = \zeta_{k,n}$ (внутрь или во внешность единичного круга) полностью определяется знаком γ (напомним, что $\gamma = b/2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), а величина этого сдвига – порядка $\sin \theta_{k,n}/n$ по радиусу и порядка $\theta_{k,n}/n^2$ – по аргументу. Если $\gamma > 0$, то $R_k = R_{k,n} > 1$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $R_k = R_{k,n} < 1$ для $k = n, n+1, \dots, 2n-1$. Если $\gamma < 0$, то $R_k = R_{k,n} < 1$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $R_k = R_{k,n} > 1$ для $k = n, n+1, \dots, 2n-1$.

Для нулей $z_{k,n} = x_{k,n} + iy_{k,n}$ полинома Q_n из (5.4) имеем

$$z_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\zeta_{k,n} + \frac{1}{\zeta_{k,n}} \right) + O(\delta^n), & k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ при } \gamma > 0, \\ \frac{1}{2} \left(\zeta_{k,n} + \frac{1}{\zeta_{k,n}} \right) + O(\delta^n), & k = n, n+1, \dots, 2n-1 \text{ при } \gamma < 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Следовательно, из (5.12), (5.13), (5.15) и (5.17) находим

$$\begin{aligned} x_{k,n} &= \cos \theta_{k,n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = t_{k,n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ y_{k,n} &= \frac{\gamma}{n} \sin^2 \theta_{k,n} + O\left(\frac{\sin^2 \theta_{k,n}}{n^3}\right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$. Так как $\gamma = b/2$, то из (5.18) получаем представление (2.2).

Непосредственно из (5.16) для нулей $z_{k,n}$ полинома Q_n получаем соотношение $c_1/n^2 < g(z_{k,n}, \infty) < c_2/n$, где постоянные $c_1, c_2 > 0$ зависят от b . Первая и вторая части теоремы 2 доказаны.

Для нулей Q_n , ближайших к концам ± 1 отрезка Δ , из (5.17) имеем

$$z_{0,n} = \frac{1}{2} \left(\zeta_{0,n} + \frac{1}{\zeta_{0,n}} \right) + O(\delta^n), \quad z_{n-1,n} = \frac{1}{2} \left(\zeta_{n-1,n} + \frac{1}{\zeta_{n-1,n}} \right) + O(\delta^n). \quad (5.19)$$

Так как

$$\begin{aligned} R_{0,n} + \frac{1}{R_{0,n}} &= 2 + \frac{\gamma^2 \pi^2}{4n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right), & R_{0,n} - \frac{1}{R_{0,n}} &= \frac{\gamma \pi}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^6}\right), \\ \cos \varphi_{0,n} &= 1 - \frac{\pi^2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), & \sin \varphi_{0,n} &= \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

то из (1.6) и (5.19) с учетом того, что $\gamma = b/2$, получаем первое из соотношений (2.3). Второе соотношение получается аналогично.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] Г. Cегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [2] Н. И. Ахиезер, “Чебышёвское направление в теории функций”, *Математика XIX века*, Наука, М., 1987, 9–79; англ. пер.: N. I. Akhiezer, “Function theory according to Chebyshev”, *Mathematics of the 19th century*, Birkhäuser, Basel, 1998, 1–81.
- [3] П. Л. Чебышёв, “О непрерывных дробях”, *Ученые записки Импер. Академии Наук*, **III** (1855), 636–664; Р. Tchébycheff, “Sur les fractions continues”, *Journ. de Math. Pures et Appl. Sér. 2*, **3** (1858), 289–323; “О непрерывных дробях”, *Полное собрание сочинений*, т. II, Изд-во АН СССР, М., Л., 1947, 103–126.
- [4] А. А. Марков, “О распределении корней некоторых уравнений”, *Сообщ. и протоколы засед. матем. о-ва при Харьковском ун-те*, сер. 2, № 2, 1886, 89–98; *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющиеся от нуля*, Гостехиздат, М.–Л., 1948, 33–43.
- [5] S. Dumas, *Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues*, Thèse, Zürich, 1908.
- [6] С. Н. Бернштейн, *О многочленах, ортогональных в конечном интервале*, ОНТИ, Харьков, 1937; “О многочленах, ортогональных на конечном отрезке”, *Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1931–1953]*, Изд-во АН СССР, М., 1954, 7–79.
- [7] Я. Л. Геронимус, *Теория ортогональных многочленов*, Обзор достижений отечественной математики, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [8] J. Nuttall, “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation”, *Constr. Approx.*, **6:2** (1990), 157–166.
- [9] А. А. Гончар, С. П. Суетин, *Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа*, Совр. пробл. матем., **5**, МИАН, М., 2004.
- [10] A. I. Aptekarev, V. Van Assche, “Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight”, *J. Approx. Theory*, **129:2** (2004), 129–166.
- [11] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139):4(8)** (1975), 607–629; англ. пер.: A. A. Gončar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26:4** (1975), 555–575.
- [12] A. P. Magnus, “Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Padé approximants”, *J. Comput. Appl. Math.*, **19:1** (1987), 23–38.
- [13] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42:4** (1984), 299–386.
- [14] А. И. Аптекарев, “Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Toda”, *Матем. сб.*, **125(167):2(10)** (1984), 231–258; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotic properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices”, *Math. USSR-Sb.*, **53:1** (1986), 233–260.
- [15] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex-valued weight function, I”, *Constr. Approx.*, **2:1** (1986), 225–240.
- [16] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex-valued weight function, II”, *Constr. Approx.*, **2:1** (1986), 241–251.

- [17] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [18] А. Л. Лукашов, “Обобщение классических ортогональных многочленов на случай двух промежутков”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:4 (1999), 1103–1110.
- [19] А. Л. Лукашов, “Круговые параметры многочленов, ортогональных на нескольких дугах единичной окружности”, *Матем. сб.*, **195**:11 (2004), 95–118; англ. пер.: A. L. Lukashov, “Circular parameters of polynomials orthogonal on several arcs of the unit circle”, *Sb. Math.*, **195**:11 (2004), 1639–1663.
- [20] F. Peherstorfer, “Zeros of polynomials orthogonal on several intervals”, *Int. Math. Res. Not.*, 2003, № 7, 361–385.
- [21] Л. А. Книжнерман, “Квадратура Гаусса–Арнольди для функции $\langle (zI - A)^{-1}\varphi, \varphi \rangle$ и Паде-подобная рациональная аппроксимация функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 27–48; англ. пер.: L. A. Knizhnerman, “The Gauss–Arnoldi quadrature for the function $\langle (zI - A)^{-1}\varphi, \varphi \rangle$ and Padé-like rational approximation of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **199**:2 (2008), 185–206.
- [22] А. А. Гончар, “Об особых точках мероморфных функций, заданных своим разложением в C -дробь”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 3–14; англ. пер.: A. A. Gonchar, “Singular points of meromorphic functions defined by their expansion in a C -fraction”, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1405–1416.
- [23] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, “Аппроксимации Паде функций Миттаг–Леффлера”, *Матем. сб.*, **198**:7 (2007), 109–122; англ. пер.: A. P. Starovoitov, N. A. Starovoitova, “Padé approximants of the Mittag–Leffler functions”, *Sb. Math.*, **198**:7 (2007), 1011–1023.
- [24] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 43–141.
- [25] С. П. Суетин, “О формулах следов для некоторого класса операторов Якоби”, *Матем. сб.*, **198**:6 (2007), 107–138; англ. пер.: S. P. Suetin, “Trace formulae for a class of Jacobi operators”, *Sb. Math.*, **198**:6 (2007), 857–885.
- [26] С. П. Суетин, “Сильная асимптотика нулей многочленов, ортогональных относительно комплексного веса”, *УМН*, **62**:4 (2007), 177–178; англ. пер.: S. P. Suetin, “Strong asymptotics of zeros of polynomials orthogonal with respect to a complex-valued weight”, *Russian Math. Surveys*, **62**:4 (2007), 823–825.
- [27] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1 (1971), 113–179; англ. пер.: E. I. Zverovich, “Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **26**:1 (1971), 117–192.
- [28] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980; пер. с нем.: O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher, **184**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

19.03.2008