Общероссийский математический портал

М. А. Чешкова, Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n , *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 6, 155–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:50:09

УДК 514.75

М. А. Чешкова

Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n

В работе рассматривается многомерный аналог циклид Дюпена – дважды каналовые гиперповерхности. Доказана теорема, обобщающая утверждение о множестве центров C_1 и C_2 порождающих гипербол.

Библиография: 5 названий.

Рассмотрим дважды каналовую гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^n – огибающую однопараметрического семейства и $(n-2)$ -параметрического семейства гипербол. Дважды каналовая гиперповерхность есть частный случай циклид Дюпена [1]–[3] – гиперповерхностей, у которых главные кривизны постоянны вдоль соответствующих им главных распределений. У дважды каналовой гиперповерхности кратности главных кривизн равны $n-1$ и 1 . Центры гипербол описывают кривую (C_1) и $(n-2)$ -поверхность (C_2) . Известно, что в E^3 [4; гл. 9, § 111] (C_1) , (C_2) суть кривые второго порядка. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Если M – дважды каналовая гиперповерхность, то (C_1) , (C_2) – конические сечения. Линия центров (C_1) есть сечение 2-плоскости 2-мерного конуса, а $(n-2)$ -поверхность (C_2) – сечение гиперплоскости гиперконуса. Если M – гиперповерхность вращения, то (C_2) – $(n-2)$ -сфера.*

1. Основные формулы. Рассмотрим гладкую гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^n .

Обозначим $F(M)$ R -алгебру дифференцируемых на M функций, T_s^q – F -модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s) , $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M , ∂ – дифференцирование и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в E^n .

Формулы Гаусса–Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [5; гл. 7, § 5]

$$\begin{aligned}\partial_X Y &= \nabla_X Y + \beta(X, Y)n, \\ \partial_X n &= -AX,\end{aligned}\tag{1}$$

где $A \in T_1^1(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, $\beta \in T_2^0(M)$, $\beta(X, Y)$ – вторая фундаментальная форма, A – оператор Вейнгартена, ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$.

Выполняются уравнения Гаусса–Кодацци

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \beta(Y, Z)AX - \beta(X, Z)AY, \\ dA(X, Y) &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ – тензор кривизны связности ∇ , $dA(X, Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y]$ – внешний дифференциал поля A в связности ∇ .

Гиперповерхность M имеет две главные кривизны – k_1 кратности $n - 2$ и k_2 кратности 1.

Определены два инволютивных распределения: $\Delta, \Delta^\perp$, где

$$\Delta(p) = \{X_p \in T_p M : AX_p = k_1 X_p\}, \quad p \in M,$$

и ортогональное ему

$$\Delta^\perp(p) = \{X_p \in T_p M : AX_p = k_2 X_p\},$$

причем

$$Xk_1 = 0, \quad X \in \Delta, \quad Yk_2 = 0, \quad Y \in \Delta^\perp.$$

Интегральные многообразия этих распределений суть $(n-2)$ -сфера S^{n-2} и окружность S^1 соответственно [1].

Положим $V \in \Delta^\perp, \langle V, V \rangle = 1$. Тогда

$$\nabla_Z V \in \Delta, \quad Z \in \chi(M).$$

Рассмотрим

$$dA(X, V) = (Xk_2)V - (Vk_1)X + k_2 \nabla_X V - k_1 \nabla_V X - A[X, V] = 0, \quad X \in \Delta.$$

Разлагая $\nabla_X V, \nabla_V X, [X, V]$ на составляющие $(\cdot)^\top \in \Delta, (\cdot)^\perp \in \Delta^\perp$ и используя равенство $[X, V] = \nabla_X V - \nabla_V X$, получим

$$\begin{aligned} & (Xk_2)V - (Vk_1)X + k_2((\nabla_X V)^\top + (\nabla_X V)^\perp) - k_1((\nabla_V X)^\top + (\nabla_V X)^\perp) \\ & - k_1((\nabla_X V)^\top - (\nabla_V X)^\top) - k_2((\nabla_X V)^\perp - (\nabla_V X)^\perp) = 0, \quad X \in \Delta. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю составляющие, принадлежащие Δ и $\Delta^\perp$, получим

$$\nabla_X V = -aX, \quad (\nabla_V X)^\perp = \varepsilon(X)V, \quad X \in \Delta, \quad (3)$$

$$\varepsilon(X) = \frac{Xk_2}{k_1 - k_2}, \quad a = \frac{Vk_1}{k_1 - k_2}, \quad Xk_1 = 0, \quad Vk_2 = 0, \quad X \in \Delta. \quad (4)$$

Введем обозначение

$$\nabla_V V = -bU, \quad (5)$$

где U – орт, а так как $\langle \nabla_V V, V \rangle = 0$, получим $U \perp V$. Дифференцируя $\langle X, V \rangle = 0$ вдоль V и используя (3), (4), получим $\varepsilon(X) - b \langle X, U \rangle = 0$, или

$$b = \varepsilon(U), \quad \varepsilon(X) = 0, \quad Xk_2 = 0, \quad X \perp U, V. \quad (6)$$

В силу (2) $R(X, Y)V = 0$, $X, Y \in \Delta$. Используя (3) и инволютивность Δ , получим

$$\begin{aligned} R(X, Y)V &= \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]}V \\ &= \nabla_X(-aY) - \nabla_Y(-aX) - a[X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$Xa = 0, \quad X \in \Delta. \quad (7)$$

Рассмотрим равенство $R(X, V)V = k_1 k_2 X$, $X \in \Delta$. Имеем

$$\nabla_X \nabla_V V - \nabla_V \nabla_X V - \nabla_{[X, V]}V = k_1 k_2 X.$$

Так как

$$[X, V] = \nabla_X V - \nabla_V X = -aX - (\nabla_V X)^\top - \varepsilon(X)V,$$

то в силу (5), (9) получим

$$\nabla_X(-bU) - \nabla_V(-aX) + \nabla_{(\nabla_V X)^\top}V + a\nabla_X V + \varepsilon(X)\nabla_V V = k_1 k_2 X,$$

или

$$\begin{aligned} - (Xb)U - b\nabla_X U + (Va)X + a((\nabla_V X)^\top + \varepsilon(X)V) \\ - a^2 X - a(\nabla_V X)^\top - b\varepsilon(X)U = k_1 k_2 X. \end{aligned}$$

Полагаем $X = U$. Так как $\nabla_U U \perp U$, получим

$$-Ub + Va - a^2 - b^2 = k_1 k_2, \quad (8)$$

$$b(-\nabla_U U + aV) = 0. \quad (9)$$

Полагая $X \perp U, V$, получим

$$Xb = 0, \quad X \perp U, V, \quad (10)$$

$$b\nabla_X U = (Va - a^2 - k_1 k_2)X = (Ub + b^2)X, \quad X \perp U, V. \quad (11)$$

Если $b \neq 0$, то

$$\nabla_U U = aV, \quad (12)$$

$$\nabla_X U = \left(\frac{Ub}{b} + b \right) X, \quad X \perp U, V. \quad (13)$$

Докажем равенство

$$Vb = 0.$$

По определению скобки имеем $VUk_2 - UVk_2 - [V, U]k_2 = 0$. Так как $Vk_2 = 0$, получим

$$VUk_2 - \nabla_V Uk_2 + \nabla_U Vk_2 = VUk_2 - (\nabla_V U)^\top k_2 - bVk_2 + aUk_2 = 0.$$

Так как $(\nabla_V U)^\top \perp U$, то в силу (3), (4), (6) получим

$$VUk_2 = ab(k_1 - k_2), \quad Vb = \frac{VUk_2}{k_1 - k_2} - ab = 0.$$

Таким образом, функции a, b, k_1, k_2 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} Xk_1 &= 0, \quad Uk_1 = 0, \quad Vk_1 = a(k_1 - k_2), \\ Xk_2 &= 0, \quad Vk_2 = 0, \quad Uk_2 = b(k_1 - k_2), \\ Xa &= 0, \quad Ua = 0, \quad Xb = 0, \quad Vb = 0, \quad X \perp U, V, \end{aligned} \quad (14)$$

а Va, Ub удовлетворяют (8).

Повторно продифференцируем равенства $Xa = 0, X \in \Delta, Xb = 0, X \perp U, V, Vb = 0$ и применим для них операцию скобки $VX - XV = [V, X] = \nabla_V X - \nabla_X V$. Используя (3), (13), имеем

$$\begin{aligned} VXa &= XVa + (\nabla_V X - \nabla_X V)a \\ &= XVa + (\nabla_V X - \nabla_X V)^\top a + (\nabla_V X - \nabla_X V)^\perp a \\ &= XVa + (\nabla_V X - \nabla_X V)^\perp a = XVa + \varepsilon(X)Va = 0, \quad X \in \Delta, \end{aligned}$$

или в силу (6) $XVa = 0, UVa + bVa = 0, X \perp U, V$,

$$UXb = XUb + (\nabla_U X - \nabla_X U)b = XUb + (\nabla_U X)b = 0.$$

Замечаем, что для $Z \in \Xi(M)$

$$Z = Z^1 + \langle Z, U \rangle U + \langle Z, V \rangle V, \quad Z^1 \perp U, V.$$

Кроме того, из равенств $\langle U, U \rangle = 1, \langle U, V \rangle = 0, \langle X, U \rangle = 0, \langle X, V \rangle = 0, X \perp U, V$, в силу (3), (12), (13) имеем

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Z U, U \rangle &= 0, \quad \langle \nabla_X U, V \rangle = 0, \quad \langle \nabla_U X, U \rangle = 0, \\ \langle \nabla_U X, V \rangle &= 0, \quad X \perp U, V, \quad \forall Z \in \Xi(M). \end{aligned}$$

Имеем

$$XUb + (\nabla_U X)b = XUb + \langle \nabla_U X, U \rangle Ub + \langle \nabla_U X, V \rangle Vb = XUb = 0.$$

Аналогично, используя (3), (10), получим

$$\begin{aligned} UVb &= VUb + (\nabla_U V - \nabla_V U)b = UVb - aUb - (\nabla_V U)b \\ &= UVb - aUb - \langle \nabla_V U, U \rangle Ub = UVb - aUb = 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$XVa = 0, \quad UVa = -bVa, \quad X \perp U, V, \quad (15)$$

$$XUb = 0, \quad VUb = aUb, \quad X \perp U, V. \quad (16)$$

Кроме того, дифференцируя равенство (8) вдоль U и V , в силу (14)–(16) получим

$$UUb = -b(a^2 + b^2 + 3Ub + k_1^2), \quad (17)$$

$$VVa = -a(a^2 + b^2 + 3Va + k_2^2). \quad (18)$$

2. Доказательство теоремы. Обозначим через r радиус-вектор точки $p \in M$. Гиперповерхность M есть огибающая однопараметрического семейства гипербол радиуса ρ_1 , центры которых имеют вид

$$C_1 = r + \rho_1 n, \quad \rho_1 = \left| \frac{1}{k_1} \right|,$$

и огибающая $(n-2)$ -параметрического семейства гипербол радиуса ρ_2 с центром в точке

$$C_2 = r + \rho_2 n, \quad \rho_2 = \left| \frac{1}{k_2} \right|.$$

Рассмотрим линию центров (C_1) . Так как $\partial_V C_2 = 0$, то нормали гиперповерхности M вдоль S^1 (интегральной кривой векторного поля V) проходят через неподвижную точку C_2 . Следовательно, линия центров (C_1) расположена на конусе. Покажем, что она плоская.

Исследуем соприкасающуюся плоскость линии (C_1) . Имеем

$$\partial_V C_1 = \partial_V r - \frac{V k_1}{k_1^2} n + \frac{1}{k_1} \partial_V n = \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) V - \frac{a(k_1 - k_2)}{k_1^2} n = \frac{k_1 - k_2}{k_1^2} t,$$

где $t = k_1 V - a n$ — касательный вектор линии центров (C_1) . В силу (4), (5), (8) и равенства $\beta(V, V) = g(AV, V) = k_2$ имеем

$$\partial_V t = (V k_1) V + k_1 (\nabla_V V + \beta(V, V) n) - (V a) n + a k_2 V = at - k_1 b U - (U b + b^2) n.$$

Положим $b \neq 0$.

Так как окружность S^1 принадлежит плоскости π , определяемой векторами V_p , $\partial_V V|_p = -bU + k_2 n|_p$, $p \in S^1$, то $\partial_V \partial_V V|_p = -b \nabla_V U - k_2^2 V|_p \in \pi$. Таким образом, $\langle \nabla_V U, X \rangle = 0$, $X \perp U, V$. А так как $\langle \nabla_V U, U \rangle = 0$, то в силу (3), (6) получим

$$\nabla_V U = bV. \quad (19)$$

Соприкасающаяся плоскость линии (C_1) определяется векторами t , $\partial_V t$. Обозначим $T = k_1 b U + (U b + b^2) n$. Тогда

$$\partial_V t = at - T.$$

Так как в силу (4), (16), (19)

$$\partial_V T = a \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) T + \left(b^1 - \frac{k_2}{k_1} (U b + b^2) \right) t,$$

заключаем, что соприкасающаяся 2-плоскость $\Pi_2 = \{t, T\}$ к линии центров (C_1) постоянна и (C_1) есть сечение 2-конуса 2-плоскостью Π_2 .

Из равенства $\partial_X C_1 = 0$, $X \in \Delta$, следует, что нормали гиперповерхности M вдоль интегрального многообразия S^{n-2} распределения Δ проходят через неподвижную точку C_1 .

Таким образом, нормали вдоль S^{n-2} образуют гиперконус. Точка C_2 опишет $(n-2)$ -поверхность (C_2) , лежащую на гиперконусе. Покажем, что (C_2) принадлежит гиперплоскости.

Определим касательную $(n-2)$ -плоскость к (C_2) . Имеем

$$\partial_X C_2 = \frac{k_2 - k_1}{k_2^2} (k_2 X + \varepsilon(X)n), \quad X \in \Delta.$$

Так как $\varepsilon(X) = 0$, $X \perp U$, $\varepsilon(U) = b$, то касательная $(n-2)$ -плоскость к (C_2) в точке $p \in (C_2)$ определяется векторами X_p , $\bar{t}_p = (k_2 U + bn)_p$, $X_p \perp U_p$, V_p . Определим соприкасающееся пространство к (C_2) . Так как в силу (7), (13)–(19)

$$\begin{aligned} \partial_X Y &= (\nabla_X Y)^1 + g(X, Y)\bar{T}, \quad \partial_U Y = (\partial_U Y)^1, \\ \bar{T} &= -\left(\frac{Ub}{b} + b\right)U + aV + k_1 n, \quad \partial_X \bar{t} = \left(\left(\frac{Ub}{b} + b\right) - bk_1\right)X, \\ \partial_U \bar{t} &= k_2 \bar{T} + \frac{Ub}{b}\bar{t}, \quad (\cdot)^1, X, Y \perp U, V, \end{aligned}$$

то это гиперплоскость $\bar{\Pi}_{n-1}$, определяемая векторами $X_p \in \Delta(p) \perp U_p$, $\bar{t}_p$, $\bar{T}_p$. Покажем, что она постоянна. Имеем $\partial_X Y \in \bar{\Pi}_{n-1}$, $\partial_U Y \in \bar{\Pi}_{n-1}$, $\partial_X \bar{t} \in \bar{\Pi}_{n-1}$, $\partial_U \bar{t} \in \bar{\Pi}_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \partial_X \bar{T} &= -\left(\left(\frac{Ub}{b} + b\right)^2 + a^2 + k_1^2\right)X \in \bar{\Pi}_{n-1}, \\ \partial_U \bar{T} &= -\left(\frac{Ub}{b} + b\right)\bar{T} \in \bar{\Pi}_{n-1}, \quad X, Y \perp U, V. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{\Pi}_{n-1}$ постоянна и $(C_2) \subset \bar{\Pi}_{n-1}$ и гиперконусу.

Рассмотрим случай $b = 0$. Имеем $\partial_V t = at$, т.е. линия центров (C_1) – прямая. Гиперповерхность M есть огибающая однопараметрического семейства гиперсфер, центры которых описывают прямую, т.е. M – гиперповерхность вращения. Из (4), (6) следует $k_2 = \text{const}$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_X C_2 &= \frac{k_2 - k_1}{k_2} X, \quad X \in \Delta, \\ \partial_X C_1 &= 0, \quad \partial_X |C_2 - C_1| = \partial_X \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} \right| = 0, \quad X \in \Delta, \end{aligned}$$

т.е. (C_2) принадлежит гиперсфере с центром C_1 . А так как (C_2) принадлежит также гиперконусу с вершиной в точке C_1 , то (C_2) – $(n-2)$ -сфера.

Список литературы

1. Лумисте Ю. Г. Конструкция Кэли–Каталана для некоторых гиперповерхностей Дюпена // Уч. записки Тартусского ун-та. 1986. С. 36–49.
2. Вяльяс М. Э., Лумисте Ю. Г. Изотермические гиперповерхности и трехмерные гиперциклиды Дюпена–Мангейма // Матем. заметки. 1987. Т. 41. №5. С. 731–740.
3. Cecil T. E., Ryan P. J. Conformal geometry and cyclides Dupin // Can. J. Math. 1980. V. 32. №4. P. 767–782.
4. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: ГИФМЛ, 1963.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.