Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Александров, Прimitивный идеал и инверсная система Маколея, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 7, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 09:29:59

УДК 512.7+515.17

А. Г. Александров

Примитивный идеал и инверсная система Маколея

С помощью конструкции примитивного идеала дается описание символических степеней однородного радикального идеала в полиномиальном кольце без использования локализации. Вычисляется инверсная система Маколея для примитивного идеала и рассмотрены некоторые приложения в теории деформаций нульмерных особенностей и артиновых алгебр.

Библиография: 18 названий.

Понятие примитивного идеала появилось в современной коммутативной алгебре в конце 70-х годов. Оно было введено в работах [1] и [2], посвященных изучению символической степени простых идеалов и инфинитезимальных расширений коммутативных алгебр. Впоследствии выяснилось, что систематическое использование этого понятия существенно обогащает и некоторые разделы алгебраической и аналитической геометрии, включая теорию неизолированных особенностей (см. [3]), теорию нульмерных особенностей (см. [4]), теорию деформаций артиновых алгебр (см. [5]) и др. В настоящей заметке обсуждаются некоторые интересные применения конструкции примитивного идеала в теории идеалов коммутативных колец и в теории деформаций. Одно из них касается вычисления символической степени идеала. Так, n -я символическая степень $I^{(n)}$, $n \geq 1$, идеала I в кольце полиномов $P = k[x_1, \dots, x_r]$ или в регулярном локальном кольце обычно определяется для простого (см. [6; § 8]), примарного (см. [7; гл. IV, § 12]) или радикального идеала I , и при этом используется операция локализации. Оказывается, что в этих случаях символическую степень однородного идеала можно описать очень естественно и просто без использования локализации, но опираясь на конструкцию примитивного идеала. В заметке так же вычисляется классическая инверсная система Маколея для примитивного идеала и показано, что это дает при изучении деформаций артиновых алгебр и нульмерных особенностей. Здесь важную роль играет простая связь между примитивным идеалом и первой касательной гомологией артиновых алгебр, которая описывает инфинитезимальные расширения первого порядка таких алгебр. Это обстоятельство помогает получить точную формулу для многочлена Пуанкаре первой касательной гомологии ростка объединения прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{C}^3$ и находящихся в достаточно общем положении.

Автор благодарит Математический институт Макса–Планка (Бонн, Германия) за поддержку при подготовке окончательного варианта статьи.

Автор признателен профессору А. А. Иарробино за полезные обсуждения, в результате которых было найдено доказательство теоремы 5.1, а также рецензенту за ценные советы и замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01067).

Далее для краткости (коммутативным) кольцом будем называть унитарное коммутативное нётерово кольцо, через k будем обозначать основное поле, коммутативная конечно порожденная k -алгебра с единицей будет называться k -алгеброй, все k -гомоморфизмы таких k -алгебр будут считаться унитарными.

§ 1. Дифференциалы и дифференцирования

Для k -алгебры A и A -модуля M определены A -модули $\Omega_{A/k}^1$ и $\text{Der}_k(A, M)$. Элементы первого называются k -дифференциалами (первого порядка) или дифференциалами Кэлера, а второго – k -дифференцированиями (первого порядка) на A со значениями в M . Хорошо известно, что на категории A -модулей имеется функториальный изоморфизм

$$\text{Der}_k(A, M) \cong \text{Hom}_k(\Omega_{A/k}^1, M),$$

так что $\text{Der}_k(A, A) = \text{Der}_k A$ состоит из k -дифференцирований k -алгебры A .

Пусть $I \subset A$ – произвольный идеал k -алгебры A и $B = A/I$. Имеется точная последовательность A -модулей

$$I/I^2 \xrightarrow{d} \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k}^1 \rightarrow 0, \quad (1)$$

где B -линейное отображение d задается формулой $d(\bar{f}) = d_A(f) \otimes 1$ для любого элемента $\bar{f}$ конормального модуля I/I^2 и его представителя $f \in I$, а $d_A: A \rightarrow \Omega_{A/k}^1$ – универсальное дифференцирование. Если k -алгебра A порождается некоторым своим подмножеством $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, то A -модуль $\Omega_{A/k}^1$ порождается множеством $\langle da_1, \dots, da_m \rangle$.

Так, в алгебраическом случае $P = k[x_1, \dots, x_r]$ – кольцо полиномов от r переменных и $\Omega_{P/k}^1$ как P -модуль порождается дифференциалами $\langle dx_1, \dots, dx_r \rangle$. Аналогично, в аналитическом случае $H = \mathbb{C}\langle\langle z_1, \dots, z_r \rangle\rangle$ – кольцо сходящихся степенных рядов от r переменных и $B = H/I$ – локальная аналитическая $\mathbb{C}$ -алгебра. Тогда $\Omega_{H/k}^1$ как H -модуль порождается множеством дифференциалов $\langle dz_1, \dots, dz_r \rangle$ и $\Omega_{B/k}^1$ называется модулем голоморфных дифференциальных 1-форм аналитической алгебры B . Говорят также, что B соответствует ростку комплексного пространства $X \subset (\mathbb{C}^r, 0)$ с дуальной аналитической $\mathbb{C}$ -алгеброй $B \simeq \mathcal{O}_X$. Элементы модулей $\Omega_{A/\mathbb{C}}^1$ и $\text{Der}_{\mathbb{C}} A$ часто называют голоморфными (эквивалентно, регулярными или пфаффовыми) дифференциальными 1-формами на X и голоморфными векторными полями на X соответственно.

§ 2. Примитивный идеал

Пусть I – идеал k -алгебры A . Обозначим через $\mathcal{D}(I) \subset A$ множество всех элементов $f \in I$ таких, что $v(f) \in I$ для любого дифференцирования $v \in \text{Der}_k A$ кольца A . Ясно, что $\mathcal{D}(I)$ также является идеалом. Как уже отмечалось во введении, этот идеал был рассмотрен в работах [1] и [2]. Следуя [3], будем называть его *примитивным идеалом* и обозначать через $\int I$.

Пусть R – r -мерное регулярное локальное кольцо, которое содержит поле, изоморфное полю вычетов k , $(x_1, \dots, x_r)$ – система образующих максимального идеала R и $I \subset R$ – произвольный идеал. Тогда примитивный идеал $\int I$ можно рассматривать как ядро гомоморфизма

$$d: R \rightarrow \Omega_{R/k}^1 \otimes_R R/I,$$

где

$$d(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r.$$

Таким образом,

$$\int I = \left\{ f \in R : \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r} \right\rangle \subseteq I \right\}.$$

Примитивный идеал для однородного идеала в кольце $P = k[x_1, \dots, x_r]$ определяется точно так же путем замены R на P :

$$\int I = \left\{ f \in P : \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r} \right\rangle \subseteq I \right\}.$$

Очевидно, что если I – однородный или квазиоднородный идеал кольца полиномов P над полем k характеристики нуль, то

$$\int I = \left\{ f \in P : \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r} \right\rangle \subseteq I \right\}.$$

Обозначим через $\int^{(n)} = \int \circ \int \circ \cdots \circ \int$ n -кратную итерацию, $\int^{(0)} = I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [1; § 1]. *Примитивный идеал обладает следующими свойствами:*

- $I^2 \subseteq \int I \subset I$;
- операция $\int$ совместима с операцией пересечения идеалов, т.е. для любых идеалов I, J имеем $\int(I \cap J) = (\int I) \cap (\int J)$;
- если I – примарный идеал, то $\int I$ также примарен, при этом операция $\int$ совместима с локализацией.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для идеала I , задающего полулокальное факторкольцо B , определенный таким образом примитивный идеал не является прямой суммой примитивных идеалов локализаций I .

§ 3. Касательная гомология

Теперь напомним некоторые простейшие свойства касательной гомологии и когомологии k -алгебр. Все необходимые подробности для случая полиномиальных алгебр содержатся, например, в работе [8].

Пусть $B = P/I$, а $T_i(B/k, M)$ и $T^i(B/k, M)$, $i \geq 0$, – касательная гомология и когомология k -алгебры B со значениями в B -модуле M . По определению существуют канонические изоморфизмы B -модулей

$$T_0(B/k, M) \cong \Omega_{B/k}^1 \otimes_B M, \quad T^0(B/k, M) \cong \text{Der}_k(B, M)$$

и точные последовательности B -модулей

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T_1(B/k, M) \longrightarrow I/I^2 \otimes_B M \xrightarrow{d \otimes 1|_M} \Omega_{P/k}^1 \otimes_P M \longrightarrow T_0(B/k, M) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow T^0(B/k, M) \longrightarrow \text{Hom}(\Omega_{P/k}^1 \otimes_P B, M) \longrightarrow \text{Hom}(I/I^2, M) \longrightarrow T^1(B/k, M) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

При этом первая точная последовательность получается тензорным умножением последовательности (1) на $\otimes_B M$, а вторая – результат применения к (1) функтора $\text{Hom}_B(\cdot, M)$. Далее B -модули $T_i(B/k, B)$ и $T^i(B/k, B)$ будем обозначать через $T_i(B)$ и $T^i(B)$ соответственно. Следовательно,

$$T_0(B) \cong \Omega_{B/k}^1, \quad T^0(B) \cong \text{Der}_k B, \quad T_1(B) \cong \text{Ker } d.$$

Отметим, что если кольцо $B = B_{\text{red}}$ приведено и у B -модуля M нет *вложенных* ассоциированных компонент, то существует изоморфизм (см. [9; 1.4.3])

$$T^1(B/k, M) \cong \text{Ext}_B^1(\Omega_{B/k}^1, M).$$

На самом деле такой изоморфизм имеется также и в некоторых других важных случаях. Например, если аналитическая $\mathbb{C}$ -алгебра B соответствует ростку $X \subset (\mathbb{C}^r, 0)$, который имеет положительную *глубину* вдоль подмногообразия особенностей $\text{Sing } X \subset X$. В частности, это так, если $X = X_{\text{red}}$ и $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 1$.

Теперь поясним, как примитивный идеал определяется с помощью отображения d из точной последовательности (1).

ЛЕММА 3.1. Пусть I – идеал k -алгебры A и $B = A/I$. Тогда существует точная последовательность B -модулей

$$0 \rightarrow \int I/I^2 \rightarrow I/I^2 \xrightarrow{d} \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k}^1 \rightarrow 0. \quad (2)$$

В частности, имеют место изоморфизмы B -модулей

$$\text{Ker } d \cong \int I/I^2 \cong T_1(B)$$

и последовательность (1) точна слева тогда и только тогда, когда $\int I = I^2$, что эквивалентно равенству $T_1(B) = 0$, т.е. тривиальности первой касательной гомологии.

Доказательство следует из определений.

ТЕОРЕМА 3.2 [2; 4.1]. Пусть k – совершенное поле. Первая касательная гомология k -алгебры B тривиальна, т.е. $T_1(B) = 0$, тогда и только тогда, когда кольцо B приведено и примарное разложение идеала I^2 не имеет ассоциированных вложенных простых компонент.

Например, если $I = (f)$ – главный идеал, порожденный элементом без кратных множителей, то $T_1(B) = 0$. Отметим, что k -алгебра $B = R/I$, для которой $\int I = I^2$, называется L -алгеброй (см. [2; 1.1, 2.2]). Поскольку $T_1(B) = 0$, то любое инфинитезимальное расширение такой алгебры можно вложить в *тривиальное*.

Напомним, что локальная k -алгебра $B = R/I$ (в аналитическом случае соответствующий росток $X \subset (\mathbb{C}^r, 0)$) – *полное пересечение*, если идеал I порождается *регулярной* R -последовательностью функций $f_1, \dots, f_m$ из максимального идеала R , т.е. f_0 – не делитель нуля в R и f_j – не делитель нуля в $R/(f_1, \dots, f_{j-1})$ для каждого $j = 2, \dots, m$. Хорошо известно, что в этом случае $T_i(B) = T^i(B) = 0$ для всех $i \geq 2$ (см. [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Предположим, что идеал I , задающий локальную k -алгебру $B = R/I$, порождается регулярной последовательностью функций и алгебра $B = B_{\text{red}}$ приведена. Тогда $T_1(B) = 0$, что эквивалентно равенству $\int I = I^2$ и точности последовательности (1) слева.*

Доказательство следует из леммы 3.1 и теоремы 3.2 (см. [2; § 4, пример (1)]).

Теорема 3.2 показывает, что $\int I \neq I^2$ и последовательность (1.1) *неточна* слева в таких случаях:

- 1) идеал I – главный и порожден элементом с кратными множителями (так что соответствующая подсхема $\text{Spec } B$ или росток $(X, 0)$ *неприведены*);
- 2) кольцо B – артинова k -алгебра (так что соответствующая подсхема $\text{Spec } B$ или росток $(X, 0)$ *нульмерны*, т.е. задают конечное множество *кратных* точек).

Таким образом, получаем два простейших примера k -алгебр с нетривиальной первой касательной гомологией, у которых $T_i(B) = T^i(B) = 0$ для всех $i \geq 2$. В первом случае примитивный идеал легко вычислить. Так, если $f = \prod g_i^{e_i}$, $e_i \geq 1$, $i = 1, \dots, h$, причем g_i попарно не имеют общих множителей и $(g_i)B$ – простые идеалы, то $\int(f) = \prod g_i^{e_i+1}B$ (см. [2; 3.3] или [3; 1.3]) и, следовательно, $T_1(B)$ – свободный B -модуль с одной образующей. Полезно отметить, что для полного пересечения, заданного идеалом $I = (f_1, \dots, f_m)$, B -модуль $T_1(B)$ *проективен* (см. [10]) и его ранг равен m , так что $\int I$ имеет не менее m образующих. Для артиновых алгебр полных пересечений $m = r$, и можно доказать (см. [5]), что $\dim_k \int I / I^2 \geq r + 1$, если $\dim_k B > 2$.

§ 4. Символическая степень идеала

Пусть A – коммутативное кольцо, $\wp$ – простой идеал, $\wp \neq A$, $A_\wp$ – локализация A в $\wp$ и $\pi: A \rightarrow A_\wp$ – канонический гомоморфизм локализации. *Символическая степень* $\wp^{(n)}$ простого идеала $\wp$ определяется следующим образом (см. [7; гл. IV, § 12] или [6]):

$$\wp^{(n)} = \pi^{-1}(\wp^n A_\wp).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 [1; 3.2]. *Пусть $\text{char } k = 0$ и $\wp$ – простой идеал k -алгебры A . Тогда $\int^{(n)} \wp = \wp^{(n+1)}$, если и только если $A_\wp$ – регулярное локальное кольцо.*

Аналогично (см. [7; гл. IV, § 12]), *символической степенью* примарного идеала q , принадлежащего простому идеалу $\wp = \sqrt{q}$, называется $q^{(n)} = \pi^{-1}(q^n A_\wp)$. Можно доказать, что для любого $n \geq 1$ идеал $q^{(n)}$ является $\wp$ -примарным ([7; теорема 23]) и при этом $q^{(n)} \subseteq \int^{(n-1)} q$ (см. [1; 1.5]). Далее, символическая степень идеала $I \subset A$, обладающего несократимым примарным разложением без *вложенных* компонент, определяется так. Пусть $\wp_1, \dots, \wp_\ell$ – ассоциированные простые идеалы, $S = A \setminus \wp_1 \cup \dots \cup \wp_\ell$ – замкнутая мультипликативная система и $\pi_S: A \rightarrow A_S$ – канонический гомоморфизм. Тогда по определению

$$I^{(n)} = \pi_S^{-1}(I^n A_S),$$

так что $I^{(n)} = \{a \in A : \exists s \in S, sa \in I^n\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2 [11], [12]. Пусть $I = \wp_1 \cap \dots \cap \wp_\ell$ – радикальный идеал в кольце полиномов или в регулярном локальном кольце, т.е. $I = \sqrt{I}$, и при этом все идеалы $\wp_i$, $i = 1, \dots, \ell$, – максимальные. Тогда

$$I^{(n)} = \wp_1^n \cap \dots \cap \wp_\ell^n.$$

В случае, когда $I = \wp$ – простой идеал, утверждение следующей теоремы доказано в работе [1; 3.3]. Кроме того, если $\text{char } k > 0$, то это утверждение справедливо для символических степеней $\wp^{(n)}$ простого идеала $\wp$ при всех $n < \text{char } k$ (см. [13]).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\text{char } k = 0$, A – кольцо полиномов или регулярное локальное кольцо и I – радикальный идеал. Тогда

$$I^{(n)} = \left\{ f \in A : \frac{\partial^{|\mathfrak{S}|} f}{\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_r} x_r} \in I \text{ для всех } |\mathfrak{S}| < n \right\},$$

где через $\mathfrak{S}$ обозначается мультииндекс $(i_1, \dots, i_r)$ длины $|\mathfrak{S}| = \sum_{j=1}^r i_j$.

Доказательство непосредственно следует из аналогичного результата для простого идеала $I = \wp$ (ср. с [3]).

СЛЕДСТВИЕ 4.4. В условиях теоремы 4.3 выполняется тождество $\int I = I^{(2)}$ и, следовательно, $\int^{(n)} I = I^{(n+1)}$ для всех $n \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Таким образом, опираясь на понятие примитивного идеала, можно определить символическую степень однородного радикального идеала в кольце полиномов P без использования операции локализации в отличие от традиционного и общепринятого подхода, излагаемого во всех руководствах по коммутативной алгебре (см., например, [6], [7]). Аналогично с помощью $\int^{(n)} I$ вводятся высшие символические степени идеала I .

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Предположим, что в условиях теоремы 4.3 радикальный идеал k -алгебры A обладает примарным разложением $I = \wp_1 \cap \dots \cap \wp_\ell$. Если $A_{\wp_i}$, $i = 1, \dots, \ell$, – регулярные локальные кольца, то

$$I^{(n)} = \wp_1^{(n)} \cap \dots \cap \wp_\ell^{(n)}$$

– примарное разложение n -й символической степени идеала I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку символические степени $\wp_i^{(n)}$ простого идеала $\wp_i$ -примарны, то все следует из свойства совместимости операции $\int$ с локализацией и из предложения 4.1.

§ 5. Инверсная система Маколея

Установим еще одно замечательное свойство примитивного идеала, а именно вычислим для него *инверсную систему* в смысле Маколея [14].

Пусть k – бесконечное поле, $P = k[x_1, \dots, x_r]$ – кольцо полиномов и $\mathfrak{R} = k[[X_1, \dots, X_r]]$ – кольцо формальных степенных рядов. Рассмотрим *аполярное* действие P на $\mathfrak{R}$, определенное гомоморфизмом $\psi: P \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, который задан следующим образом (см. [12]):

$$\psi(f, h) = f \circ h = f\left(\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_r}\right) \circ h, \quad f \in P, \quad h \in \mathfrak{R}.$$

Заметим, что если $P_j, \mathfrak{R}_j$ – векторные пространства, состоящие из однородных элементов степени j колец $P, \mathfrak{R}$ соответственно, то отображение $\varphi_j = \psi|_{P_j \times \mathfrak{R}_j}$, заданное как

$$\varphi_j: P_j \times \mathfrak{R}_j \rightarrow \mathfrak{R}_0 = k, \quad \varphi_j(f, h) = f \circ h,$$

– *точное* (совершенное) спаривание. Определим гомоморфизм $\psi^\wedge: P \times \mathfrak{R} \rightarrow P$ аналогичным образом:

$$\psi^\wedge(f, h) = h \circ f = h\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right) \circ f.$$

Подобно указанному выше положим $\varphi_j^\wedge = \psi^\wedge|_{P_j \times \mathfrak{R}_j}$, так что значения $\varphi_j^\wedge$ лежат в основном поле k . Заметим, что

$$\varphi_j^\wedge(f, h) = \varphi_j(h(x_1, \dots, x_r), f(X_1, \dots, X_r))$$

и мы имеем равенство $\varphi_j^\wedge = \varphi_j$. Если $V \subset \mathfrak{R}_j$ – векторное подпространство, то полагаем, что

$$V^\perp = \{f \in P : \varphi(f, h) = 0 \text{ для всех } h \in V\}$$

– это φ -ортогональное к V подпространство, содержащееся в P_j . Для $U \subset P_j$ аналогично определяем $U^\perp \subset \mathfrak{R}_j$.

Если теперь I – *однородный* идеал кольца полиномов P , то *инверсная система* I^{-1} в $\mathfrak{R}$ – это P -подмодуль $\text{Ann } I \subset \mathfrak{R}$. Другими словами, I^{-1} – это ядро действия I на $\mathfrak{R}$, индуцированное гомоморфизмом ψ (см. [14; с. 65]):

$$I^{-1} = \text{Ann } I = \{h \in \mathfrak{R} : \psi(f, h) = 0 \text{ для всех } f \in I\}.$$

Если K – P -подмодуль $\mathfrak{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\mathfrak{R}_n K$ определяется так:

$$\mathfrak{R}_n K = \langle \{\psi(g, h) : g \in P_n, h \in K\} \rangle.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $I \subset P$ – *однородный идеал* и $J = \int^{(n)} I$, где $n \geq 1$. Тогда *инверсные системы* J^{-1} и I^{-1} связаны следующим образом:

$$J^{-1} = \mathfrak{R}_n I^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно доказать утверждение в случае $n = 1$. Сначала заметим, что

$$\mathfrak{R}_1 I^{-1} \subseteq J^{-1}.$$

Действительно, предположим, что $\ell \in \mathfrak{R}_1$, $h \in [I^{-1}]_j$ и $f \in J_{j+1}$, где $J = \int I$. Тогда

$$\varphi(f, \ell h) = \varphi^\wedge(f, \ell h) = \varphi^\wedge(\ell \circ f, h) = 0,$$

так как по определению $\ell \circ f \in I$. Итак, $\mathfrak{R}_1 I^{-1} \subseteq J^{-1}$.

Далее покажем, что

$$J^{-1} \subseteq \mathfrak{R}_1 I^{-1}.$$

Ввиду точности спаривания φ_{j+1} достаточно доказать, что

$$([J^{-1}]_{j+1})^\perp \supseteq ([\mathfrak{R}_1 I^{-1}]_{j+1})^\perp. \quad (3)$$

Левая часть этого включения равна J_{j+1} благодаря точности φ_{j+1} . Предположим теперь, что $w \in ([\Re_1 I^{-1}]_{j+1})^\perp$. Тогда

$$\varphi(w, \Re_1 I^{-1}) = 0.$$

Таким образом, если $h \in [I^{-1}]_j$, то

$$\varphi_j\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}, h\right) = \psi\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}, h\right) = \psi^\wedge\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}, h\right) = \psi^\wedge(w, x_i h) = \varphi_{j+1}(w, x_i h) = 0.$$

Отсюда следует, что $w \in J_{j+1}$ — это и завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В частном случае, когда Z — гладкая схема, состоящая из s различных точек $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}^{r-1}$, и $I = \mathfrak{m}_{p_1} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{p_s}$ — однородный идеал в P , образованный полиномами, которые обращаются в нуль в каждой точке Z , то $[I^{-1}]_j = \langle L_{p_1}^j, \dots, L_{p_s}^j \rangle$, где $L_p = a_1 X_1 + \dots + a_r X_r$ и $p = (a_1 : \dots : a_r)$ (см. [12]). Пользуясь этим отождествлением множества I^{-1} , равенством $I^{(n)} = \int^{(n-1)} I$ для приведенного идеала I и теоремой 5.1, получаем основное утверждение теоремы 1 из работы [12]:

$$[(I^{(n)})^{-1}]_j = \Re_{n-1} \langle L_{p_1}^{j-(n-1)}, \dots, L_{p_s}^{j-(n-1)} \rangle.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Доказательство теоремы 5.1 основано лишь на том, что I_j — векторное пространство, а структура и свойства I как идеала не используются вовсе.

В заключение этого раздела отметим, что известны весьма эффективные алгоритмы вычисления инверсной системы Маколея (см., например, [15]).

§ 6. Нульмерные особенности

Далее будем предполагать, что основное поле $k = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Пусть Z — замкнутая подсхема проективного пространства $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$, $U = \mathbb{C}^r \setminus \{0\}$ и $p: U \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$ — каноническая проекция. Схемное замыкание $\mathcal{C}(Z)$ прообраза $p^{-1}(Z)$ в $\mathbb{C}^r$ называется *аффинным конусом* над Z , а точка $\{o\} \subset \mathcal{C}(Z)$ — *вершиной* конуса $\mathcal{C}(Z)$.

Рассмотрим случай, когда Z состоит из точек (возможно, кратных) проективного пространства $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$. Пусть $I = \mathcal{I}_Z$, а через $B = P/I$ обозначим однородное координатное кольцо Z . Тогда аффинный конус $\mathcal{C}(Z)$ есть не что иное, как объединение прямых (возможно, кратных), проходящих через начало координат аффинного пространства $\mathbb{C}^r$, а локальное кольцо $\mathcal{B}$ в вершине конуса $\{o\} \in \mathcal{C}(Z)$ — это локализация кольца B в максимальном идеале $(x_1, \dots, x_r)$, при этом $\mathcal{B}$ — одномерное локальное кольцо Коэна–Маколея. Имеется тесная связь между примитивным идеалом $\int \mathcal{I}_Z$ и деформациями $\mathcal{C}(Z)$, по крайней мере для *горештейновых* подсхем Z .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть Z — нульмерная подсхема в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$. Тогда

$$T_1(\mathcal{B}) \cong (\Re_1 I^{-1})^\perp / I^2.$$

Предположим дополнительно, что Z — приведенная горештейнова схема. Тогда

$$T^1(\mathcal{B}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}((\Re_1 I^{-1})^\perp / I^2, \mathbb{C}),$$

где через $T^1(\mathcal{B})$ обозначено конечномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство инфинитезимальных деформаций первого порядка особенности в вершине конуса $\mathcal{C}(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = P/\mathcal{I}_Z$ – координатное кольцо нульмерной схемы Z . Согласно лемме 3.1 имеется изоморфизм $T_1(B) \cong \int I/I^2$, и из теоремы 5.1 следует нужное утверждение. В горнштейновом случае первая касательная гомология и когомология k -двойственны как конечномерные векторные пространства (см. [4]):

$$T_1(B) \cong T^1(B)^*.$$

Если Z приведена, то у конуса $\mathcal{C}(Z)$ есть всего одна изолированная особенность в вершине. Пользуясь свойствами локализации в максимальном идеале кольца B (см. [16; 3.14]), получаем естественный изоморфизм $T^1(B) \cong T^1(\mathcal{B})$. Это завершает доказательство.

Следующее утверждение касается вычисления касательной гомологии нульмерной *приведенной* подсхемы плоскости, т.е. конечного множества точек на плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2 [17; следствие 4.9]. Пусть Z – приведенная схема, состоящая из s точек в $\mathbb{P}^2$, находящихся в общем положении, и $r_i = \dim_k P_i = \binom{i+r}{r}$, $i \geq 0$. Предположим, что $r_{\nu-1} \leq s < r_\nu$ и $s = r_{\nu-1} + a$. Тогда для i -й компоненты функции Гильберта $H(I^{(2)}/I^2)$ имеем

$$H(I^{(2)}/I^2)_i = r_i - \min(r_i, 3s), \quad 0 \leq i \leq 2\nu - 1,$$

так что

$$H(I^{(2)}/I^2) = (0, \dots, r_i - \min(r_i, 3s), \dots, r_{2\nu} - \binom{\nu+2-a}{2} - 3s, \binom{a}{2}, 0, \dots),$$

за исключением случая $(\nu, s, a, \nu + 1 - a) = (2, 5, 2, 1)$, в котором однородная составляющая $H(I^{(2)}/I^2)_{2\nu}$ равна нулю.

Доказательство опирается на теорему 2 из работы [18].

Напомним, что полином Пуанкаре конечномерной градуированной k -алгебры $A = \sum_{\nu \geq 0} A_\nu$ определяется так:

$$P(A; t) = \sum_{\nu \geq 0} \dim_k A_\nu t^\nu.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.3. В условиях предложения 6.2 полином Пуанкаре первой касательной гомологии изолированной особенности в вершине конуса $\mathcal{C}(Z)$ имеет следующий вид:

$$P(T_1(\mathcal{B}); t) = \sum_{\nu \geq 0} H(I^{(2)}/I^2)_\nu t^\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При наших предположениях

$$T_1(\mathcal{B}) \cong \int I/I^2 \cong I^{(2)}/I^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В работах [4], [5] изучаются полиномы Пуанкаре касательной гомологии и когомологии *неприведенных* 0-мерных схем – кратных точек.

Список литературы

1. *Seibt P.* Differential filtrations and symbolic powers of regular primes // *Math. Z.* 1979. V. 166. №2. P. 146–150.
2. *Seibt P.* Infinitesimal extensions of commutative algebras // *J. Pure Appl. Algebra.* 1980. V. 16. №2. P. 197–206.
3. *Pellikaan R.* Finite determinacy of functions with non-isolated singularities // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1988. V. 57. P. 357–382.
4. *Aleksandrov A. G.* Duality, derivations and deformations of zero-dimensional singularities // *Zero-dimensional schemes* / ed. F. Orecchia, L. Chiantini. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. P. 11–31.
5. *Aleksandrov A. G.* Derivations and deformations of zero-dimensional rings and algebras // *Zero-dimensional commutative rings* / ed. D. Anderson, D. Dobbs. New York: Marcel Dekker, Inc., 1995. P. 81–93.
6. *Matsumura H.* Commutative algebra. New York: Benjamin, 1970.
7. *Zariski O., Samuel P.* Commutative algebra. V. 1. New York: Springer-Verlag, 1975.
8. *Lichtenbaum S., Schlessinger M.* The cotangent complex of a morphism // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1967. V. 128. №1. P. 41–70.
9. *Kleiman S. L., Landolfi J.* Geometry and deformations of special Schubert varieties // *Algebraic geometry, Oslo 1970, Proc. 5th Nordic Summer-School Math.* Groningen: Wolters-Noordhoff Publ., 1972. P. 97–124.
10. *Ferrand D.* Suite régulière et intersection complète // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.* 1967. V. 264. P. 427–428.
11. *Eisenbud D., Hochster A.* Nullstellensatz with nilpotents and Zariski's main lemma on holomorphic functions // *J. Algebra.* 1979. V. 58. №1. P. 137–141.
12. *Emsalem J., Iarrobino A.* Inverse system of a symbolic power. I // *J. Algebra.* 1995. V. 174. №3. P. 1080–1090.
13. *Ionescu C.* Symbolic powers of prime ideals in polynomial rings // *Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie. Tagungsbericht 22/1992.* Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, 1992. P. 9.
14. *Macaulay F. H. S.* The algebraic theory of modular systems. London: Cambridge Univ. Press, 1916.
15. *Mourrain B.* Isolated points, duality and residues // *J. Pure Appl. Algebra.* 1997. №117 & 118. P. 469–493.
16. *Rim D. S.* Formal deformation theory // *Sem. Geom. algebrique Bois-Marie.* 1967–1969, SGA 7 I, №6. *Lecture Notes in Math.*, V. 288, 1972. P. 32–132.
17. *Iarrobino A., Kanev V.* The length of a homogeneous form, determinantal loci of catalecticants and Gorenstein algebras // *Preprint.* Boston: North-Eastern Univ., 1998.
18. *Alexander J., Hirschowitz A.* Polynomial interpolation in several variables // *J. Algebraic Geom.* 1995. V. 4. №1. P. 201–222.