Общероссийский математический портал

Н. И. Дубровин, Формальные суммы и степенные ряды над группой, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 7, 13–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:28:28

УДК 512.8

Н. И. Дубровин

Формальные суммы и степенные ряды над группой

Изучаются формальные суммы над группой как алгебраическая система с покомпонентной операцией сложения и частичной операцией свертки “*”. В случае, когда группа правоупорядочена, определяется и изучается модуль формальных степенных рядов – формальные суммы с вполне упорядоченным носителем. Особое внимание уделяется системам формальных степенных рядов (носитель вполне упорядочен по возрастанию), которые образуют L -базис, т.е. для которых любой другой формальный степенной ряд однозначно разложим по этой системе. L -базисы связаны с автоморфизмами модуля формальных рядов, обладающими естественными свойствами монотонности и σ -линейности. Исследуются также соотношения $\gamma * \beta = 0$ и $\gamma * \beta = 1$. Заметим, что в случае линейно упорядоченной группы система формальных степенных рядов образует тело с нормированием (Мальцев–Нейман, 1948–1949 гг.).

Библиография: 6 названий.

Введение

Пусть F – тело, G – группа, U – подгруппа группы G , а K – кольцо, содержащее групповое кольцо FU в качестве подкольца. Обозначим через $G \setminus U$ множество представителей левых смежных классов gU ($g \in G$). Считаем в дальнейшем, что $1_G \in G \setminus U$. Для любого элемента $g \in G$ через $\bar{g}$ будем обозначать представитель смежного класса gU , принадлежащий $G \setminus U$.

Рассмотрим множество $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$ всех *формальных сумм*:

$$\gamma = \sum'_{h \in G \setminus U} h k_h \quad (k_h \in K). \quad (1)$$

Штрих около знака суммирования указывает, что (1) – именно формальная сумма, т.е. иной способ записи отображения $G \setminus U \rightarrow K$. Без штриха знак суммирования будет употребляться в обычном смысле. Если U – единичная группа, то $G \setminus U = G$, $K = F$ и $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$ обозначаем как $\mathcal{F}(G, F)$. Ясно, что множество формальных сумм $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$ несет на себе структуру $(F - K)$ -бимодуля относительно покомпонентных операций сложения и умножения. Далее, множество формальных сумм $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$ несложно превратить в левый G -модуль и тем самым в $(FG - K)$ -бимодуль. Более того, можно определить частичную операцию свертки

$$\mathcal{F}(G, F) * \mathcal{F}(G \setminus U, K) \rightarrow \mathcal{F}(G \setminus U, K).$$

Работа выполнена при поддержке совместного фонда РФФИ–Германия (грант № 98-01-04110).

Таким образом, мы получаем частичную бинарную операцию на $\mathcal{F}(G, F)$ и очень интересную алгебраическую систему $(\mathcal{F}(G, F), +, *, 0, 1)$. В случае, когда G – линейно упорядоченная группа, эта система содержит тело формальных рядов Мальцева–Неймана (см. [1]) как подсистему.

Работа преследует две цели. Первая – изучение систем формальных сумм в $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$, которые являются базисами в том же смысле, в каком и система элементов $G \setminus U$ (см. разложение (1)). Вторая цель – изучение соотношений $\gamma * \beta = 0$ и $\gamma * \beta = 1$ в $\mathcal{F}(G, F)$ при некоторых ограничениях на формальные суммы γ и β . Эти ограничения будут связаны с наличием в группе G конуса P , т.е. такого подмоноида, что $P \cup P^{-1} = G$. Если же, кроме того, $P \cap P^{-1} = \{1\}$, то P назовем *чистым конусом* (подробнее о конусах см. [2]).

Результаты работы изложены в шести теоремах и их следствиях; основным результатом является теорема 2.

Смысл обозначений F, G, U, P, K сохраняется на протяжении всей работы. Через 1 обозначаем нейтральный элемент относительно умножения в любой алгебраической системе. Если задан конус P , то U всегда обозначает группу его обратимых элементов, а

$$g_1 \geq g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in P, \quad g_1 \geq_r g_2 \iff g_2g_1^{-1} \in P \quad (2)$$

– левый и правый линейные предпорядки, ассоциированные с конусом P . Это значит, что условие $g \leq h$ влечет неравенство $zg \leq zh$, а из $g \leq_r h$ следует $gz \leq_r hz$ для любого $z \in G$. Если P – чистый конус, то $U = \{1\}$ и отношение “ $\leq$ ” превращает G в левую упорядоченную группу. Соответственно отношение “ $\leq_r$ ” превращает G в правую упорядоченную группу (см. [3; гл. 5, §4]). Как правило, мы будем иметь дело с левым предпорядком, и если нет специальной оговорки, то именно этот предпорядок и будет подразумеваться.

§1. Основные определения и свойства

1.1. Суммируемые системы. Прежде всего, договоримся через $(\gamma)_h$ обозначать коэффициент k_h для формальной суммы (1). Множество $\{h \in G \setminus U : k_h \neq 0\}$ назовем *носителем* суммы γ и обозначим его через $\text{supp } \gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\{\gamma_i : i \in I\}$ – семейство формальных сумм. Назовем это семейство *$\mathcal{F}$ -суммируемым*, элемент $\gamma \in \mathcal{F}(G \setminus U, K)$ – *$\mathcal{F}$ -суммой* этого семейства и будем писать $\gamma = \sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \gamma_i$, если имеет место равенство $(\gamma)_g = \sum_{i \in I} (\gamma_i)_g$ в кольце K для любого $g \in G \setminus U$ (в частности, это означает, что последняя сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых).

Достаточно очевидно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система формальных сумм $\{\gamma_i : i \in I\}$ $\mathcal{F}$ -суммируема тогда и только тогда, когда для любой $\mathbb{N}$ -последовательности $i_1, i_2, i_3, \dots$ попарно различных индексов и любого набора элементов $g_j \in \text{supp } \gamma_{i_j}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) найдется пара различных натуральных чисел j, k такая, что $g_j \neq g_k$.

Отметим свойство линейности $\mathcal{F}$ -суммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\{\gamma_i : i \in I\}$ и $\{\delta_i : i \in I\}$ – $\mathcal{F}$ -суммируемые семейства, $a \in F$, $k \in K$ – произвольные элементы. Тогда семейство $\{a\gamma_i k + a\delta_i k : i \in I\}$ также $\mathcal{F}$ -суммируемо и

$$\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} (a\gamma_i k + a\delta_i k) = a \left(\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \gamma_i \right) k + a \left(\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \delta_i \right) k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $h \in G \setminus U$ произволен. Имеем:

$$\sum_{i \in I} (a\gamma_i k + a\delta_i k)_h = a \left(\sum_{i \in I} (\gamma_i)_h \right) k + a \left(\sum_{i \in I} (\delta_i)_h \right) k.$$

В частности, первая сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. Тогда семейство $\{a\gamma_i k + a\delta_i k\}$ будет $\mathcal{F}$ -суммируемым и

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} (a\gamma_i k + a\delta_i k) \right)_h &= \sum_{i \in I} (a\gamma_i k + a\delta_i k)_h = a \left(\sum_{i \in I} (\gamma_i)_h \right) k + a \left(\sum_{i \in I} (\delta_i)_h \right) k \\ &= a \left(\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \gamma_i \right)_h k + a \left(\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \delta_i \right)_h k \\ &= a \left(\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \gamma_i + \sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \delta_i \right)_h k. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $\mathcal{F}$ -сумм.

Элемент g группы G можно записать в виде $g = \bar{g}(\bar{g}^{-1}g)$. В связи с этим формальную сумму, у которой коэффициент $k_{\bar{g}}$ равен $\bar{g}^{-1}g \in U \subseteq K$, а остальные коэффициенты – нули, будем обозначать также символом g . Из определения 1 следует, что система формальных сумм $\gamma_h = h$ ($h \in G \setminus U$) $\mathcal{F}$ -суммируема. Более того, для любого $g \in G$ и для любого набора коэффициентов $k_h \in K$ система $\{(gh)k_h : h \in G \setminus U\}$ также будет $\mathcal{F}$ -суммируемой. Действительно, если $h_1, h_2 \in G \setminus U$ – разные элементы, то $h_1 U \neq h_2 U$, откуда $gh_1 U \neq gh_2 U$, т.е. $\overline{gh_1} \neq \overline{gh_2}$, и остается применить предложение 1. Это позволяет ввести на множестве формальных сумм *структуру левого G -модуля*:

$$g \left(\sum'_{h \in G \setminus U} h k_h \right) = \sum_{h \in G \setminus U}^{\mathcal{F}} (gh) k_h \quad (k_h \in K). \quad (3)$$

Легко проверяются аксиомы G -модуля:

$$g(\gamma_1 + \gamma_2) = g\gamma_1 + g\gamma_2, \quad (g_1 g_2)\gamma = g_1(g_2\gamma)$$

для любых $g, g_1, g_2 \in G$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}(G \setminus U, K)$. Кроме того, $g(\gamma k) = (g\gamma)k$ для любого $k \in K$. Следовательно, $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$ – $(G - K)$ -модуль. По линейности распространим операцию (3) на элементы из группового кольца FG . Для этого ненулевой элемент $r \in FG$ запишем в виде

$$r = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_n g_n \in FG, \quad (4)$$

где все $a_i \in F$ ненулевые, $g_i \in G$ и $g_i \neq g_j$ при $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n$). Тогда по определению

$$r\gamma = \sum_{i=1}^n a_i g_i \gamma.$$

Тем самым, $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$ превращается в $(FG - K)$ -бимодуль. Усилим свойство линейности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\{\gamma_i : i \in I\}$ — $\mathcal{F}$ -суммируемое семейство, а $r \in FG$, то семейство $\{r\gamma_i\}$ также $\mathcal{F}$ -суммируемо и

$$r \sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \gamma_i = \sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} r\gamma_i. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $r = g \in G$. Для любого элемента $h \in G \setminus U$ имеет место равенство $(g\gamma_i)_h = (\gamma_i)_{g^{-1}h}$. Следовательно, сумма $\sum_{i \in I} (g\gamma_i)_h$ определена, и поэтому система $\{g\gamma_i\}$ суммируема. Равенство (5) проверяется непосредственно.

Пусть теперь элемент r задан как в (4). Тогда, применяя предложение 2, получаем:

$$\sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} r\gamma_i = \sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \sum_{k=1}^n a_k g_k \gamma_i = \sum_{k=1}^n a_k g_k \sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \gamma_i = r \sum_{i \in I}^{\mathcal{F}} \gamma_i.$$

Обозначим через $1_{\mathcal{F}}$ формальную сумму из $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$, у которой коэффициент при $1 \in G \setminus U$ равен единице, а остальные коэффициенты — нули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Отображение $r \rightarrow r \cdot 1_{\mathcal{F}}$ ($r \in FG$) задает вложение $(FG - FU)$ -бимодуля FG в $(FG - FU)$ -бимодуль $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$. В частности, $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$ — точный левый FG -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in FG$ имеет вид (4). Тогда

$$r \cdot 1_{\mathcal{F}} = \sum'_{h \in G \setminus U} h \left(\sum_{1 \leq i \leq n; \bar{g}_i = h} a_i h^{-1} g_i \right).$$

Сумма в круглых скобках не равна нулю, например, для $h = \bar{g}_1$. Отсюда $r \cdot 1_{\mathcal{F}} \neq 0$ и инъективность доказана.

Теперь предположим, что в группе G имеется конус P и U — группа его обратимых элементов. Легко проверяется

ЛЕММА 1. Пусть $g_1, g_2 \in G$. Тогда

- а) отношение “ $\leq$ ” — линейный порядок на множестве $G \setminus U$;
- б) если $g_1 \leq g_2$, то $\bar{g}_1 \leq \bar{g}_2$;
- в) если $g_1 \leq g_2$, то $gg_1 \leq gg_2$ для любого $g \in G$, то же верно для строгих неравенств;
- г) $\overline{g_1 g_2} = \bar{g}_1 \bar{g}_2$.

Пусть, как и ранее, $\gamma = \sum'_{h \in G \setminus U} h k_h$. Может так случиться, что носитель этой суммы имеет наименьший элемент h_0 . Тогда h_0 назовем *нормой* суммы γ и обозначим ее через $v(\gamma)$. Однородное слагаемое $h_0 k_{h_0}$ суммы γ обозначаем в этом случае через $\partial\gamma$. Ясно, что это однородное слагаемое характеризуется свойством $\text{supp}(\gamma - \partial\gamma) > v(\gamma)$. Неравенство $S_1 > S_2$ для подмножеств S_1, S_2 какого-либо линейно упорядоченного множества здесь и далее будем использовать в том смысле, что любой элемент из левой части строго больше любого элемента из правой части. К линейно упорядоченному множеству $G \setminus U$ присоединим символ ∞ , считая, что $h < \infty$ для любого $h \in G \setminus U$ и $v(0) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формальную сумму γ назовем *формальным степенным рядом*, если множество $\text{supp } \gamma$ вполне упорядочено по возрастанию, т.е. любое подмножество этого множества имеет наименьший элемент. Множество всех формальных степенных рядов обозначим через L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Множество L является $(FG - K)$ -подбимодулем бимодуля $\mathcal{F}(G \setminus U, K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из соотношений, справедливых для любых формальных сумм $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ и для любых элементов $h \in G, k \in K$:

$$\begin{aligned} \text{supp}(\gamma_1 + \gamma_2) &\subseteq \text{supp } \gamma_1 \cup \text{supp } \gamma_2, \\ \text{supp}(g\gamma) &= \{\overline{gh} : h \in \text{supp } \gamma\}, \quad \text{supp}(\gamma k) \subseteq \text{supp } \gamma. \end{aligned}$$

Предположим, что мы имеем систему формальных степенных рядов $\{\gamma_i \in L : i \in I\}$. На первый взгляд кажется, что суммируемость этой системы в L следует определить как $\mathcal{F}$ -суммируемость плюс принадлежность $\mathcal{F}$ -суммы подбимодулю L . Это определение страдало бы по крайней мере одним существенным недостатком: для набора элементов $k_i \in K$ система $\{\gamma_i k_i\}$ могла быть уже не суммируемой в L . Действительно, если $h^2 < h$ для некоторого $h \in G$, то система $\{h^n - h^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{F}$ -суммируема и $\mathcal{F}$ -сумма, равная h , принадлежит L . Однако система $\{(h^n - h^{n+1})(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ имеет сумму $-h + 2h^2 - 2h^3 + 2h^4 - \dots$, не принадлежащую L (считаем $2 \neq 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Систему $\{\gamma_i \in L : i \in I\}$ формальных степенных рядов назовем *L -суммируемой* и формальный степенной ряд γ назовем ее *L -суммой*, если, во-первых, $\gamma = \sum_{i \in I} \gamma_i$, а во-вторых, объединение $\bigcup_{i \in I} \text{supp } \gamma_i$ — вполне упорядоченное множество. В этом случае пишем $\gamma = \sum_{i \in I}^L \gamma_i$.

Это определение технически легче проверять с помощью следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Система формальных степенных рядов $\gamma_i \in L$ ($i \in I$) L -суммируема тогда и только тогда, когда для любой $\mathbb{N}$ -последовательности $i_1, i_2, i_3, \dots$ попарно различных индексов и любого набора элементов $g_j \in \text{supp } \gamma_{i_j}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) найдется пара натуральных чисел $j < k$ такая, что $g_j < g_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом предложения 1, а также того факта, что каждый из носителей $\text{supp } \gamma_i$ — вполне упорядоченное множество, нам надо лишь проверить, что объединение $M = \bigcup_{i \in I} \text{supp } \gamma_i$ является вполне упорядоченным множеством тогда и только тогда, когда для любой $\mathbb{N}$ -последовательности $i_1, i_2, i_3, \dots$ попарно различных индексов и любого набора элементов $g_j \in \text{supp } \gamma_{i_j}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) найдется пара $j, k \in \mathbb{N}$ и $j < k$ такая, что $g_j < g_k$. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем импликацию $\Leftarrow$. Предположим, что существует $\mathbb{N}$ -последовательность попарно различных индексов $i_1, i_2, i_3, \dots$ такая, что для некоторого набора элементов $g_j \in \text{supp } \gamma_{i_j}$ имеет место бесконечная цепочка неравенств $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots$. В силу $\mathcal{F}$ -суммируемости системы $\{\gamma_i\}$ можно считать, что все неравенства здесь строгие. Но тогда объединение M не может быть вполне упорядоченным множеством.

Имеет место аналог предложения 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\{\gamma_i : i \in I\}$ — L -суммируемое семейство, а $r \in FG$, $k \in K$, то семейства $\{r\gamma_i\}$, $\{\gamma_i k\}$ также L -суммируемы и

$$r \sum_{i \in I}^L \gamma_i = \sum_{i \in I}^L r\gamma_i, \quad \left(\sum_{i \in I}^L \gamma_i \right) k = \sum_{i \in I}^L \gamma_i k.$$

Доказательство следует из предложения 3.

1.2. Свертка. С помощью понятия $\mathcal{F}$ -суммы операция *свертки* или, иначе, **-произведения* $\beta * \gamma$ для $\beta = \sum'_{g \in G} gb_g$ из $\mathcal{F}(G, F)$ и формальной суммы $\gamma \in \mathcal{F}(G \setminus U, K)$ определяется просто и естественно:

$$\beta * \gamma = \sum_{g \in G}^{\mathcal{F}} (gb_g \gamma). \quad (6)$$

Разумеется, $\mathcal{F}$ -сумма в правой части (6), а значит, и свертка $\beta * \gamma$ не обязаны существовать. Тем самым, свертка — частичная операция. Если $\gamma = \sum_{g \in G} gk_g \in \mathcal{F}(G, F)$, то легко подсчитать коэффициент при $g \in G$:

$$(\beta * \gamma)_g = \sum_{g_1, g_2 \in G; g_1 g_2 = g} b_{g_1} k_{g_2}.$$

Для бимодуля $\mathcal{F}(G, F)$ нетрудно определить свертку любого конечного числа формальных сумм. Ограничимся случаем трех сомножителей. Пусть $\gamma \in \mathcal{F}(G \setminus U, K)$, β — как и выше, а кроме того, дана сумма $\alpha = \sum'_{g \in G} ga_g$ из $\mathcal{F}(G, F)$. Тогда по определению

$$\alpha * \beta * \gamma = \sum_{(g, h) \in G \times G}^{\mathcal{F}} (ga_g hb_h \gamma).$$

Отметим без доказательства три стандартных свойства свертки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 (ассоциативность). *Предположим, что $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$. Если свертка $\alpha * \beta * \gamma$ определена, то *-произведения $(\alpha * \beta) * \gamma$ и $\alpha * (\beta * \gamma)$ определены и совпадают с $\alpha * \beta * \gamma$. В частности, если определены все три *-произведения, то они совпадают.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 (дистрибутивность). Если $*$ -произведения $\beta * \gamma_1$ и $\beta * \gamma_2$ для $\beta \in \mathcal{F}(G, F)$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}(G \setminus U, K)$ определены, то определена и свертка $\beta * (\gamma_1 + \gamma_2)$, причем верно равенство:

$$\beta * (\gamma_1 + \gamma_2) = \beta * \gamma_1 + \beta * \gamma_2.$$

Аналогично, если $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{F}(G, F)$ и $\gamma \in \mathcal{F}(G \setminus U, K)$ таковы, что свертки $\beta_1 * \gamma, \beta_2 * \gamma$ существуют, то существует свертка $(\beta_1 + \beta_2) * \gamma$, причем имеет место равенство:

$$(\beta_1 + \beta_2) * \gamma = \beta_1 * \gamma + \beta_2 * \gamma.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Групповое кольцо FG является подсистемой алгебраической системы $(\mathcal{F}(G, F), +, *, 0, 1)$, при этом для любого элемента $r \in FG$ и для любых формальных сумм $\gamma \in \mathcal{F}(G \setminus U, K)$, $\beta \in \mathcal{F}(G, F)$ имеют место равенства: $r * \gamma = r\gamma$, $\beta * r = \beta r$.

§ 2. L -базисы

Семейство элементов $\{g : g \in G \setminus U\}$, рассматриваемое как семейство формальных степенных рядов, обладает тем свойством, что через него в виде бесконечной линейной комбинации может быть записан любой другой ряд из L . В этом параграфе доказывается, что существуют и другие, естественным образом возникающие семейства формальных степенных рядов, обладающие таким же базисным свойством.

Пусть $\{\gamma_i : i \in I\}$ – семейство формальных степенных рядов. Скажем, что это семейство σ -суммируемо, если для любого вполне упорядоченного подмножества $M \subseteq G \setminus U$ подсемейство $\{\gamma_i : v(\gamma_i) \in M\}$ L -суммируемо. Далее, назовем семейство $\{\gamma_i : i \in I\}$ локально полным, если для любого $h \in G \setminus U$ найдется γ_i с нормой равной h . Это же семейство назовем монотонным, если неравенство индексов $i \neq k$ влечет неравенство норм $v(\gamma_i) \neq v(\gamma_k)$. В случае монотонности семейства можно считать, что множество индексов I – подмножество линейно упорядоченного множества $G \setminus U$, причем переиндексацией можно добиться того, что большему индексу соответствует большая норма.

Семейство $\{\gamma_i : i \in I\}$ назовем σ -линейно независимым, если для любого вполне упорядоченного подмножества $M \subseteq G \setminus U$ и для любого набора коэффициентов $\{k_i \in K : i \in I\}$ имеет место импликация:

$$\sum_{v(\gamma_i) \in M}^L \gamma_i k_i = 0 \implies (\forall i \in I \implies k_i = 0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Если K – область целостности, то монотонность влечет σ -линейную независимость.

Далее до конца работы считаем, что K – тело. По поводу аналога следующей теоремы см. [4] и [5].

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\{\gamma_i : i \in I\}$ – σ -суммируемое и локально полное семейство формальных степенных рядов. Тогда для любого $\gamma \in L$ найдутся коэффициенты $k_i \in K$ ($i \in I$) такие, что*

$$\gamma = \sum_{i \in I}^L \gamma_i k_i. \quad (7)$$

Если, кроме того, семейство $\{\gamma_i : i \in I\}$ σ -линейно независимо, то коэффициенты k_i в разложении (7) единственны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вторая часть теоремы – тривиальность. Доказываем первую часть теоремы в предположении, что $\gamma \neq 0$.

Трансфинитной индукцией по λ будем выбирать индекс $i(\lambda) \in I$ и коэффициент k_λ так, что для любых ординалов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda$, имеют место соотношения:

$$v(\gamma_{i(\lambda_1)}) < v(\gamma_{i(\lambda_2)}), \quad (8)$$

$$\{\gamma_{i(\mu)} : \mu < \lambda_2\} \text{ – } L\text{-суммируемо и } v\left(\gamma - \sum_{\mu < \lambda_2}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu\right) = v(\gamma_{i(\lambda_2)}). \quad (9)$$

Основание индукции ($\lambda = 1$). Пользуясь полнотой, для нормы $v(\gamma)$ найдем индекс $i(1)$ такой, что $v(\gamma_{i(1)}) = v(\gamma)$. Тогда $\partial(\gamma_{i(1)} k_1) = \partial\gamma$ для подходящего $k_1 \in K$, учитывая, что K – тело.

Индукционный переход. Предположим, что для всех ординалов μ , меньших λ , индексы $i(\mu)$ и коэффициенты k_μ , удовлетворяющие (8) и (9) для $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \mu$, выбраны.

Прежде всего убедимся, что семейство $\{\gamma_{i(\mu)} : \mu < \lambda\}$ L -суммируемо. Если λ – непредельный ординал, то это следствие общего факта: если к L -суммируемому семейству присовокупить конечное множество формальных степенных рядов, то получим снова L -суммируемое семейство. Если же λ – предельный ординал, то (8) верно для любых $\lambda_1 < \lambda_2$, поэтому L -суммируемость семейства $\{\gamma_{i(\mu)} : \mu < \lambda\}$ вытекает из σ -суммируемости семейства $\{\gamma_i\}$.

Если $\gamma = \sum_{\mu < \lambda}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu$, то первое утверждение теоремы доказано и индукционное построение завершено. Предположим, что

$$\beta = \gamma - \sum_{\mu < \lambda}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu \neq 0.$$

Тогда, как и выше, находим индекс $i(\lambda) \in I$ и элемент $k_\lambda \in K$ с условием

$$\partial(\gamma_{i(\lambda)} k_\lambda) = \partial\beta.$$

Следовательно, равенство (9) для $\lambda_2 = \lambda$, а значит, и для всех $\lambda_2 \leq \lambda$ имеет место. Остается проверить неравенство (8) лишь в частном случае $\lambda_2 = \lambda$.

Случай 1. λ – предельный ординал. Обозначим $\tau = \lambda_1 + 1$ и заметим, что этот ординал также меньше λ . Имеем:

$$\beta = \gamma - \sum_{\mu < \lambda}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu = \left(\gamma - \sum_{\mu < \tau}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu \right) - \sum_{\tau \leq \mu < \lambda}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu. \quad (10)$$

Разность, стоящая в скобках в правой части (10), имеет норму равную $v(\gamma_{i(\tau)})$ (см. (9)), что строго больше чем $v(\gamma_{i(\lambda_1)})$. Каждое из слагаемых во второй сумме в (10) также имеет норму большую чем $v(\gamma_{i(\lambda_1)})$ (опять используем (8)). Следовательно, $v(\gamma_{i(\lambda)}) = v(\beta) > v(\gamma_{i(\lambda_1)})$.

Случай 2. $\lambda = \tau + 1$ — неопределенный ординал. Тогда

$$v(\gamma_{i(\lambda)}) = v(\beta) = v\left(\gamma - \sum_{\mu < \tau}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu - \gamma_{i(\tau)} k_\tau\right) > v(\gamma_{i(\tau)} k_\tau) = v(\gamma_{i(\tau)}),$$

ибо

$$\partial\left(\gamma - \sum_{\mu < \tau}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu\right) = \partial\gamma_{i(\tau)} k_\tau$$

и, значит, разность этих двух формальных степенных рядов имеет большую норму. Итак, мы проверили (8).

Продолжая индукционный процесс, рано или поздно мы придем к ординалу λ такому, что $\gamma = \sum_{\mu < \lambda}^L \gamma_{i(\mu)} k_\mu$. Это следует из ограниченности сверху порядковых типов вполне упорядоченных подмножеств любого фиксированного линейно упорядоченного множества.

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Систему формальных степенных рядов $\{\gamma_h : h \in G \setminus U\}$ назовем *L-базисом*, если она монотонна, полна и σ -суммируема.

Без ограничения общности можно считать, что для *L*-базиса неравенство $h_1 < h_2$ влечет неравенство $v(\gamma_{h_1}) < v(\gamma_{h_2})$. Такого рода условие монотонности и будет предполагаться в дальнейшем. Пример *L*-базисов доставляет следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Для любого ненулевого элемента $r \in FG$ система $\{r \cdot h : h \in G \setminus U\}$ будет *L-базисом*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагаем, что r имеет вид (4). Для любого $g \in G$ справедливо равенство:

$$v(r \cdot g) = \min\{\overline{g_1 g}, \dots, \overline{g_k g}\}. \quad (11)$$

Докажем полноту семейства $\{rh\}$. Пусть элемент $h \in G \setminus U$ произволен. Выберем в множестве $\{g_1^{-1}h, \dots, g_k^{-1}h\}$ максимальный элемент. Без ограничения общности можно предполагать, что этим элементом будет $g = g_1^{-1}h$. Утверждается, что $\overline{g}$ — искомый элемент, т.е. $v(r \cdot \overline{g}) = h$. Действительно, $v(r \cdot \overline{g}) = v(r \cdot g)$ (см. лемму 1, г)). Но $g_i g \geq g_1 g = h$, ибо $g = g_1^{-1}h \geq g_i^{-1}h$ для любого i . Отсюда вытекает полнота.

Условие σ -суммируемости следует из предложения 7.

Докажем теперь монотонность. Пусть $h_1 < h_2$ — элементы из $G \setminus U$ и $v(r \cdot h_1) = \overline{g_i h_1}$, а $v(r \cdot h_2) = \overline{g_j h_2}$. Тогда

$$\overline{g_i h_1} \leq \overline{g_j h_1} < \overline{g_j h_2}$$

в силу (11) и того, что порядок “ $<$ ” выдерживает умножение слева (лемма 1, в)).

Заметим, что формальный степенной ряд (1) мы можем записать и так: $\gamma = \sum_{h \in G \setminus U}^L h k_h$. То же самое верно для любого L -базиса $\{\gamma_h : h \in G \setminus U\}$. А именно в силу теоремы 1 получаем, что тот же степенной ряд γ может быть единственным образом представлен в виде $\gamma = \sum_{h \in G \setminus U}^L \gamma_h k_h$ ($k_h \in K$). Конечно же, понятие L -базиса связано с автоморфизмами линейного пространства L_K , обладающими соответствующими свойствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Линейный оператор $q : L_K \rightarrow L_K$ назовем *локально монотонным*, если для любых $g, h \in G \setminus U$ неравенство $g < h$ влечет неравенство норм: $v(q[g]) < v(q[h])$. Этот же оператор назовем *σ -линейным*, если образы $q[\beta_i]$, $i \in I$, любой L -суммируемой системы формальных степенных рядов $\{\beta_i \in L : i \in I\}$ составляют также L -суммируемую систему, причем

$$q \left[\sum_{i \in I}^L \beta_i \right] = \sum_{i \in I}^L q[\beta_i].$$

Эндоморфизм q назовем *локально сюръективным*, если для любого $h \in G \setminus U$ найдется элемент $g \in G \setminus U$ такой, что $v(q[g]) = h$.

Если q одновременно локально монотонен, локально сюръективен и σ -линеен, то будем говорить, что q — *L -автоморфизм*.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2.

1. Всякий L -автоморфизм является автоморфизмом пространства L_K и переводит любой L -базис в L -базис.
2. Обратное отображение к L -автоморфизму также будет L -автоморфизмом. Более того, множество всех L -автоморфизмов составляет подгруппу в группе автоморфизмов $\text{Aut } L_K$.
3. Если $\{\beta_h : h \in G \setminus U\}$ и $\{\gamma_h : h \in G \setminus U\}$ — два L -базиса, то отображение $q : L \rightarrow L$, заданное формулой

$$\sum_{h \in G \setminus U}^L \beta_h k_h \rightarrow \sum_{h \in G \setminus U}^L \gamma_h k_h, \quad (12)$$

будет L -автоморфизмом.

Сначала докажем две леммы.

ЛЕММА 2. Пусть отображение $q : L \rightarrow L$ таково, что для любого вполне упорядоченного подмножества $M \subseteq G \setminus U$ система формальных степенных рядов $\{q[h] : h \in M\}$ L -суммируема и выполняется равенство

$$q \left[\sum'_{h \in M} h k_h \right] = \sum_{h \in M}^L q[h] k_h$$

для любого набора коэффициентов $k_h \in K$. Тогда q — σ -линейный эндоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\gamma_i \in L : i \in I\}$ – L -суммируемое семейство. Тогда $N = \bigcup_{i \in I} \text{supp } \gamma_i$ будет вполне упорядоченным множеством. Из условия вытекает, что и $M = \bigcup_{h \in N} \text{supp } q[h]$ также будет вполне упорядоченным множеством. Пусть

$$\gamma_i = \sum'_{h \in N} h k_h^i \quad (i \in I), \quad q[h] = \sum'_{g \in M} g k_g^h \quad (h \in N).$$

Тогда

$$q[\gamma_i] = \sum_{h \in N}^L q[h] k_h^i = \sum'_{g \in M} g \left(\sum_{h \in N} k_g^h k_h^i \right)$$

по определению L -суммы. Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I}^L \gamma_i &= \sum'_{h \in N} h \left(\sum_{i \in I} k_h^i \right); \\ q \left[\sum_{i \in I}^L \gamma_i \right] &= \sum_{h \in N}^L q[h] \left(\sum_{i \in I} k_h^i \right) = \sum'_{g \in M} g \left(\sum_{h \in N} k_g^h \sum_{i \in I} k_h^i \right). \end{aligned}$$

Для фиксированного $g \in M$ почти все произведения $k_g^h k_h^i$ равны нулю. Действительно, найдется лишь конечное число $h \in N$ таких, что $k_g^h \neq 0$; это следует из L -суммируемости $\{q[h] : h \in N\}$. Для каждого из таких h найдется лишь конечное число индексов i с условием $k_h^i \neq 0$ – это следствие L -суммируемости $\{\gamma_i\}$. Тогда

$$\sum_{h \in N, i \in I} k_g^h k_h^i = \sum_{h \in N} k_g^h \sum_{i \in I} k_h^i = \sum_{i \in I} \left(\sum_{h \in N} k_g^h k_h^i \right).$$

Кроме того, $\bigcup_{i \in I} \text{supp } q[\gamma_i]$ – подмножество вполне упорядоченного множества M , а значит, оно само вполне упорядочено. Следовательно, система $\{q[\gamma_i]\}$ L -суммируема и

$$\sum_{i \in I}^L q[\gamma_i] = \sum'_{g \in M} g \left(\sum_{i \in I} \left(\sum_{h \in N} k_g^h k_h^i \right) \right) = \sum'_{g \in M} g \left(\sum_{h \in N} k_g^h \sum_{i \in I} k_h^i \right) = q \left[\sum_{i \in I}^L \gamma_i \right].$$

Из определения отображения q вытекает сразу его однородность: $q[\gamma k] = q[\gamma] k$ для любых $\gamma \in L, k \in K$.

Тем самым, лемма полностью доказана.

Обозначим через $\widehat{\Gamma}$ дедекиндово замыкание линейно упорядоченного множества $G \setminus U$. В множестве $\widehat{\Gamma} \cup \{\infty\}$ любое подмножество имеет точную верхнюю грань. Если $\gamma \in L$, а $\varepsilon \in \widehat{\Gamma} \cup \{\infty\}$, то обозначим через $(\gamma)_{<\varepsilon}$ ε -начало ряда γ , т.е. такой формальный степенной ряд β , что $\text{supp } \beta < \varepsilon$ и $v(\gamma - \beta) \geq \varepsilon$. Если положить

$$\gamma = (\gamma)_{<\varepsilon} + \delta, \tag{13}$$

то $\text{supp}(\gamma)_{<\varepsilon} < \varepsilon \leq \text{supp } \delta$. Разложение (13) назовем ε -сечением ряда γ .

ЛЕММА 3. Если q – монотонный и σ -линейный автоморфизм, то q^{-1} также σ -линеен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что q^{-1} не является σ -линейным эндоморфизмом. Тогда согласно лемме 2 найдется вполне упорядоченное подмножество $M \subseteq G \setminus U$ такое, что система $\{\gamma_h = q^{-1}[h] : h \in M\}$ не L -суммируема. Действительно, если бы система $\{\gamma_h = q^{-1}[h] : h \in M\}$ была L -суммируема, то равенство $q^{-1}[\sum_{h \in M}^L \gamma_h] = \sum_{h \in M}^L q^{-1}[\gamma_h]$ выполнялось бы автоматически, ибо оно эквивалентно равенству

$$\sum_{h \in M}^L \gamma_h = q \left[\sum_{h \in M}^L q^{-1}[\gamma_h] \right],$$

справедливому в силу σ -линейности q .

Обозначим

$$\nu = \sup \{ \varepsilon \in \hat{\Gamma} \cup \{\infty\} : \text{система } \{(\gamma_h)_{<\varepsilon} : h \in M\} \text{ } L\text{-суммируема} \}.$$

Так как $((\gamma)_{<\varepsilon})_{<\rho} = (\gamma)_{<\rho}$ для любых $\varepsilon, \rho \in \hat{\Gamma} \cup \{\infty\}$, $\rho \leq \varepsilon$, то нетрудно видеть, что для любого $\rho \in \hat{\Gamma} \cup \{\infty\}$, строго меньшего чем ν , система $\{(\gamma_h)_{<\rho} : h \in M\}$ будет суммируемой.

Более того, утверждаем, что система $\{(\gamma_h)_{<\nu} : h \in M\}$ L -суммируема. Действительно, пусть $h_1 < h_2 < h_3 < \dots$ — $\mathbb{N}$ -последовательность элементов из M и элементы $z_i \in \text{supp}(\gamma_{h_i})_{<\nu}$ ($i \in \mathbb{N}$) выбраны произвольно. Допустим, что элемент $z = z_1$ строго больше всех остальных z_i , $i > 1$. Так как $z \in \text{supp}(\gamma_{h_1})_{<\nu}$, то $z < \nu$. Следовательно, система $\{(\gamma_h)_{<z} : h \in M\}$ L -суммируема. Но $z_i \in \text{supp}(\gamma_{h_i})_{<z}$ для $i > 1$, ибо $z_i < z$. Тогда $z_i < z_j$ для какой-либо пары натуральных чисел $i < j$ (см. предложение 6). Если же z не является максимальным элементом, то $z_1 < z_i$ для подходящего $i \in \mathbb{N}$. Мы показали, что выполнены условия предложения 6; отсюда следует, что система $\{(\gamma_h)_{<\nu} : h \in M\}$ L -суммируема.

Обозначим $\alpha_h = (\gamma_h)_{<\nu}$, и пусть $\gamma_h = \alpha_h + \beta_h$ будет ν -сечением. Так как система $\{\gamma_h\}$ не является L -суммируемой по предположению, а система $\{\alpha_h\}$ L -суммируема по доказанному выше, то система $\{\beta_h\}$ не будет L -суммируемой. Более того, множество норм $\{v(\beta_h) : h \in M\}$ не будет вполне упорядоченным, иначе нашелся бы элемент $g \in \bigcup_{h \in M} \text{supp } \beta_h$, а он заведомо больше ν , такой, что система $\{(\beta_h)_{<g} : h \in M\}$, а значит, и система $\{(\gamma_h)_{<g} = \alpha_h + (\beta_h)_{<g} : h \in M\}$ L -суммируемы, что противоречит максимальнойности элемента ν .

Итак, множество $\{v(\beta_h) : h \in M\}$, а значит, и множество $\{v(q[\beta_h]) : h \in M\}$ не являются вполне упорядоченными (пользуемся монотонностью автоморфизма q). С другой стороны,

$$q[\beta_h] = q[\gamma_h] - q[\alpha_h] = h - q[\alpha_h],$$

где системы $\{h : h \in M\}$ и $\{q[\alpha_h] : h \in M\}$ будут L -суммируемы, причем вторая система L -суммируема в силу σ -линейности автоморфизма q . Значит, и их разность должна быть L -суммируемой. Полученное противоречие показывает, что наше первоначальное допущение было неверным. Следовательно, автоморфизм q^{-1} σ -линеен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1. Пусть q — L -автоморфизм. Тогда система формальных степенных рядов $\{q[h] : h \in G \setminus U\}$ будет L -базисом, ибо монотонность и полнота этой системы есть в точности локальная монотонность и локальная сюръективность эндоморфизма q , а σ -суммируемость системы вытекает из σ -линейности q , если положить в определении 5 $I = G \setminus U$ и $\beta_g = g$. Более того,

$$q \left[\sum'_{h \in G \setminus U} h k_h \right] = \sum_{h \in G \setminus U}^L q[h] k_h \quad (14)$$

для любого формального степенного ряда $\gamma = \sum_{h \in G \setminus U}^L h k_h$. Из (14) получаем мономорфность q , а именно из равенства $q[\gamma] = 0$ вытекает, что $k_h = 0$ для всех $h \in G \setminus U$. Эпиморфность q получается также из (14), если применить теорему 1 к системе формальных степенных рядов $\gamma_h = q[h]$ ($h \in G \setminus U$).

Далее, пусть $\{\beta_h : h \in G \setminus U\}$ — L -базис. Тогда система $\{q[\beta_h] : h \in G \setminus U\}$ σ -суммируема, ибо эндоморфизм q по условию σ -линеен. Монотонность и полнота этой системы следуют из локальной монотонности и локальной сюръективности q , если учесть равенство

$$v(q[\gamma]) = v(q[v(\gamma)]), \quad (15)$$

верное для любого формального степенного ряда γ и для любого локально монотонного и σ -линейного эндоморфизма. Докажем это утверждение. Можно считать $\gamma \neq 0$. Тогда $\gamma = \partial\gamma + \delta$, где $\text{supp } \delta > \text{supp } (\partial\gamma) = \{v(\gamma)\}$. Из локальной монотонности q вытекает, что $v(q[g]) > v(q[\partial\gamma])$ для любого $g \in \text{supp } \delta$. Тогда σ -линейность эндоморфизма q дает неравенство $v(q[\delta]) > v(q[\partial\gamma])$. Так как $q[\gamma] = q[\partial\gamma] + q[\delta]$, то получаем

$$v(q[\gamma]) = v(q[\partial\gamma]) = v(q[v(\gamma)]),$$

ибо $\partial\gamma = v(\gamma)k$ для некоторого ненулевого $k \in K$.

2. Пусть q — L -автоморфизм. Тогда q^{-1} локально монотонен, так как неравенство $v(q^{-1}[g]) \geq v(q^{-1}[h])$ для $g, h \in G \setminus U$ влечет $g \geq h$ в силу (15). По лемме 3 автоморфизм q^{-1} σ -линеен. Далее, q^{-1} локально сюръективен. Действительно, для любого $h \in G \setminus U$ верно равенство

$$h = v(q^{-1}[q[h]]) = v(q^{-1}[v(q[h])])$$

(см. (15); необходимо учесть также, что q^{-1} σ -линеен и локально монотонен). Значит, $g = v(q[h])$ — искомый элемент из $G \setminus U$, т.е. $v(q^{-1}[g]) = h$.

Осталось показать, что композиция двух L -автоморфизмов будет снова L -автоморфизмом. Из первого утверждения теоремы вытекает, что эта композиция будет переводить стандартный L -базис $G \setminus U$ в L -базис. По лемме 2 композиция будет σ -линейной. Локальная монотонность и локальная сюръективность снова легко получаются с применением равенств типа (15). Следовательно, композиция будет L -автоморфизмом.

3. Разложим отображение (12) в композицию двух: $q = s \circ p^{-1}$, где

$$p \left[\sum'_{g \in G \setminus U} g k_g \right] = \sum_{g \in G \setminus U}^L \beta_g k_g; \quad s \left[\sum'_{g \in G \setminus U} g k_g \right] = \sum_{g \in G \setminus U}^L \gamma_g k_g.$$

Каждое из r и s будет L -автоморфизмом в силу леммы 2, поэтому остается применить второе утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 завершено.

СЛЕДСТВИЕ (см. [4]). Пусть $r \in FG$ – ненулевой элемент. Тогда умножение слева на элемент r – L -автоморфизм и система $\{r^{-1}[g] : g \in G \setminus U\}$, состоящая из формальных степенных рядов $r^{-1}[g]$ таких, что $r \cdot r^{-1}[g] = g$, будет L -базисом.

Более того, для любого формального степенного ряда γ вида (1) определен формальный степенной ряд

$$r^{-1}[\gamma] = \sum_{h \in G}^L r^{-1}[h] k_h,$$

являющийся единственным решением уравнения $r \cdot X = \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 12 система $\{r \cdot h : h \in G \setminus U\}$ будет L -базисом. Остается применить теорему 2.

§ 3. Случай чистого конуса

В этом параграфе предполагается, что P – чистый конус в группе G и тем самым $K = F$; как и ранее, L – $(FG - F)$ -бимодуль формальных степенных рядов, а R – $(F - FG)$ -бимодуль формальных степенных рядов относительно правого порядка “ $\leq_r$ ” (см. (2)).

ТЕОРЕМА 3. Для любых формальных степенных рядов $\gamma \in L$ и $\beta \in R$ свертка $\gamma * \beta$ определена. Кроме того, если носитель $\text{supp } \beta$ лежит в нормализаторе $N(P)$ конуса P , то $\gamma * \beta \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенумеруем элементы носителя $\text{supp } \beta$ в возрастающем порядке относительно отношения “ $\leq_r$ ”:

$$\text{supp } \beta = \{h_1, h_2, h_3, \dots\}, \quad h_1 <_r h_2 <_r h_3 <_r \dots$$

Пусть элемент $g \in G$ произволен. Тогда

$$(\gamma * \beta)_g = \sum_i (\gamma)_{gh_i^{-1}} (\beta)_{h_i}. \quad (16)$$

Неравенство $h_i <_r h_{i+1}$ дает $h_{i+1}h_i^{-1} \in P$, следовательно, $h_i^{-1} > h_{i+1}^{-1}$, значит, $gh_i^{-1} > gh_{i+1}^{-1}$. Так как $\gamma \in L$, то пересечение множества $\{gh_i^{-1}\}$ с носителем $\text{supp } \gamma$ конечно, откуда вытекает, что сумма (16) конечна и определена.

Теперь предположим, что $h_i P = Ph_i$ для любого ординала i . Пусть $g_1 > g_2 > g_3 > \dots$ – бесконечная цепочка элементов из группы G . Легко доказывается

ЛЕММА 4. Если $a \geq b$ в G и $hP = Ph$, то $ah \geq bh$.

Пользуясь этой леммой, получаем:

$$\begin{array}{ccccccc}
 g_1 h_1^{-1} & \longrightarrow & g_1 h_2^{-1} & \longrightarrow & g_1 h_3^{-1} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 g_2 h_1^{-1} & \longrightarrow & g_2 h_2^{-1} & \longrightarrow & g_2 h_3^{-1} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
 \end{array} \quad (17)$$

Здесь стрелки заменяют знак неравенства “ $>$ ”. Из системы неравенств (17) вытекает, что пересечение $\{g_j h_i^{-1}\} \cap \text{supp } \gamma$ конечно. Следовательно, $\text{supp } (\gamma * \beta)$ не может содержать бесконечно убывающей цепочки элементов по отношению к “ $<$ ”.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\gamma = 1 - m \in L$, $\text{supp } m > 1$ и все элементы из $\text{supp } m$ лежат в нормализаторе $N(P)$, то набор степеней $\{m^i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ будет как L -суммируемой, так и R -суммируемой системой, и сумма $\delta = 1 + m + m^2 + m^3 + \dots$, принадлежащая $L \cap R$, удовлетворяет соотношению $\gamma\delta = \delta\gamma = 1$. Это достаточно просто следует из результата А.И. Мальцева [1]. Действительно, обозначим через G_0 подгруппу группы G , порожденную элементами из носителя $\text{supp } m$. Тогда $P_0 = P \cap G_0$ будет чистым инвариантным конусом в G_0 . Тем самым, он будет задавать линейный порядок, и применим результат Мальцева, утверждающий, что в этом случае $L_0 = R_0$ – тело относительно свертки и покомпонентного сложения.

В следующей лемме фигурирует оператор ∂_r . Он определяется точно так же, как и ∂ , но относительно правого порядка “ $\leq_r$ ”.

ЛЕММА 5. Пусть $\gamma \in L$, $\beta \in R$; $\partial\gamma = ah$, $\partial_r(\beta) = kg$; $a, k \in K$, $h, g \in G$. Тогда

$$(\gamma * \beta)_{hg} = akhg.$$

В частности, $\gamma * \beta \neq 0$. Кроме того, если $g = 1$, то $\partial(\gamma * \beta) = (ak)h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g' \in \text{supp } \beta$, $h' \in \text{supp } \gamma$. Тогда $g' \geq_r g$ и $h' \geq h$. Следовательно, $g'g^{-1}, h^{-1}h' \in P$. Если $g' \neq g$ или $h' \neq h$, то $h^{-1}h'g'g^{-1} > 1$ и, значит, $h'g' \neq hg$. Отсюда получаем равенство $(\gamma * \beta)_{hg} = (ak)hg$.

Предположим, что $g = 1$, а $g' \neq 1$ – как и выше. Тогда $g' > 1$, откуда $h'g' > h' \geq h$ и последнее утверждение леммы доказано.

Теперь ответим на вопрос: когда *-произведение не равно нулю?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть α и γ – две формальные суммы, для которых существует *-произведение $\alpha * \gamma$. Предположим, что по крайней мере одно из следующих предположений верно:

- 1) существуют нормы $g = v(\gamma)$ и $v(\alpha \cdot g)$;
- 2) существует норма $w(\gamma)$ относительно правого порядка “ $\leq_r$ ”, а также существует $v(\alpha)$.

Тогда $\alpha * \gamma \neq 0$. Более того, в первом случае имеет место равенство $v(\alpha * \gamma) = v(\alpha g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что верно первое предположение. Тогда $\gamma = g(a + \delta_1)$, где $a \in K^*$ и $\text{supp } \delta > 1$. Аналогично, $\alpha g = h(b + \delta_2)$, где $b \in K^*$, $h = v(\alpha g)$ и $\text{supp } \delta_2 > 1$. Тогда

$$\alpha * \gamma = (\alpha g) * (a + \delta_1) = h(b + \delta_2) * (a + \delta_1) = h(ba + \delta_2 a + b\delta_1 + \delta_2 * \delta_1).$$

Так как носители $\text{supp}(\delta_2 a)$, $\text{supp}(b\delta_1)$, $\text{supp}(\delta_2 * \delta_1)$ больше единичного элемента 1_G и $ba \neq 0$, то $\alpha * \gamma \neq 0$.

В случае, когда верно второе предположение, достаточно применить лемму 5.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\gamma \in L$ и $\beta \in R$ — ненулевые степенные ряды, то свертка $\gamma * \beta$ существует и также не равна нулю.

ПРИМЕР. Приведем пример уравнения $Xr = 1$ с ненулевым $r \in FG$, которое не имеет решений в L . Пусть $G = \{x, y : xy^2x = y\}$ — группа трилистника, где подмоноид $P = \text{semi}gr\{x, y\}$ является чистым конусом (см. [6]). Возьмем $r = 1 - x + y$. Предположим, что $\gamma \in L$ — решение уравнения

$$X(1 - x + y) = 1. \quad (18)$$

Тогда $1 = \partial(\gamma(1 - x - y)) = \partial\gamma$ по лемме 5. Так как подполугруппа $J = \text{semi}gr\{x^n y : n \in \mathbb{Z}\}$ — двусторонний идеал в конусе P , а $P \setminus J = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, получаем $\gamma_J(1 - x) = 1$, где γ_J — начало ряда γ , содержащее все слагаемые вида kx^i ($k \in F$). Отсюда легко получаем $\gamma_J = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Кроме того, $\gamma = \gamma_J + \delta$, где $v(\delta) \in J$. Но

$$1 = \gamma(1 - x + y) = (\gamma_J + \delta)(1 - x + y) = 1 + y + xy + x^2y + x^3y + \dots + \delta - \delta x + \delta y.$$

Отсюда: $y + xy + x^2y + x^3y + \dots = \delta x - \delta y - \delta$. Для любого натурального n элемент $x^n y \notin \text{supp}(\delta \cdot y)$, иначе $x^n \in \text{supp } \delta$, что невозможно в силу $v(\delta) \in J$. Таким образом, $\delta y = 0$ и $\delta = 0$, откуда $y + xy + x^2y + \dots = 0$ — противоречие. Противоречие показывает, что уравнение (18) не имеет решения в L .

Что же касается решения уравнения $(1 - x + y)X = 1$, то оно выглядит так:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} y^{3n} (1 - x)^{-1} (x(1 - yx)^{-1} (1 - x)^{-1})^{n+1} [1_{\mathcal{F}}].$$

Заметим, что $(1 - kh)^{-1}[g]$ для $h, g \in G$; $k \in F^*$ имеет вид либо $g + khg + k^2h^2g + \dots$ в случае $g < hg$, либо $-k^{-1}h^{-1}g - k^{-2}h^{-2}g - \dots$ в случае $g > hg$.

ЛЕММА 6. Пусть элемент $r \in FG$ записан в виде (4), а элемент h взят из носителя какого-либо формального степенного ряда γ . Выберем индекс i_* , для которого $g_{i_*}h = \min\{g_1h, \dots, g_mh\}$, и предположим, что $g_{i_*}h \notin \text{supp}(r\gamma)$. Тогда найдется элемент $h' \in \text{supp } \gamma$ такой, что $h' < h$ и $g_jh' = g_{i_*}h$ для некоторого j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предположить, что $i_* = 1$. Так как $r\gamma = a_1g_1\gamma + a_2g_2\gamma + \dots + a_mg_m\gamma$ и $g_1h \in \text{supp}(g_1\gamma)$, но $g_1h \notin \text{supp}(r\gamma)$, то $g_1h \in \text{supp}(a_jg_j\gamma)$ для некоторого $j \geq 2$. В этом случае $g_1h = g_jh'$ для подходящего $h' \in \text{supp } \gamma$. В силу того что $g_1h < g_jh$ согласно выбору g_1 , получаем: $g_jh > g_jh'$. Таким образом, $h > h'$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4. Пусть элемент $r \in FG$ записан в виде (4), а $\gamma \in L$ – решение уравнения $rX = 1$. Тогда каждый элемент $h \in \text{supp } \gamma$ имеет вид:

$$h = g_{i_1}^{-1}g_{j_1}g_{i_2}^{-1}g_{j_2} \cdots g_{i_k}^{-1}g_{j_k}g_j^{-1}, \quad (19)$$

где

$$g_j^{-1} < g_{i_k}^{-1}g_{j_k}g_j^{-1} < g_{i_{k-1}}^{-1}g_{j_{k-1}}g_{i_k}^{-1}g_{j_k}g_j^{-1} < \dots < h,$$

причем все элементы этой цепочки принадлежат носителю $\text{supp } \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_{i_1}h = \min_{1 \leq i \leq m} \{g_ih\}$. Если $g_{i_1}h = 1$, то $j = i_1$, $h = g_j^{-1}$ и доказательство завершено. В противном случае $g_{i_1}h \notin \text{supp}(r\gamma)$. Поэтому, используя лемму 6, можно найти элемент $h' \in \text{supp } \gamma$, для которого $h' < h$ и $g_{j_1}h' = g_{i_1}h$ при некотором j_1 ($1 \leq j_1 \leq m$). Это дает: $h = g_{i_1}^{-1}g_{j_1}h'$. Далее применяем трансфинитную индукцию по вполне упорядоченному множеству $\text{supp } \gamma$ и записываем h' в виде $h' = g_{i_2}^{-1}g_{j_2} \cdots g_{i_k}^{-1}g_{j_k}g_j^{-1}$, причем

$$g_j^{-1} < g_{i_k}^{-1}g_{j_k}g_j^{-1} < g_{i_{k-1}}^{-1}g_{j_{k-1}}g_{i_k}^{-1}g_{j_k}g_j^{-1} < \dots < h' = g_{i_2}^{-1}g_{j_2} \cdots g_{i_k}^{-1}g_{j_k}g_j^{-1}$$

и каждое звено этой цепочки принадлежит $\text{supp } \gamma$. Вместе с последним неравенством $h' < h$ получаем требуемую цепочку элементов из $\text{supp } \gamma$.

Обоснуем теперь основание индукции. Обозначим $\partial\gamma = h_0a$ ($a \in K^*$). Так как $r\gamma = 1$ и $h_0 = v(\gamma)$, то имеем $g_jh_0 = 1$ для некоторого j . (Иначе по лемме 6 найдется $h' \in \text{supp } \gamma$, для которого $h' < h_0$.) Таким образом, мы получаем равенство $h_0 = g_j^{-1}$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что $r \in FG$, $r \neq 0$ и формальные суммы $\gamma, \beta \in \mathcal{F}(G, F)$ таковы, что $r\gamma = r\beta$. Если $\gamma_1, \beta_1 \in L$ являются начальными членами относительно левого порядка сумм γ и β соответственно, то либо γ_1 – начало β_1 , либо, наоборот, β_1 – начало γ_1 . В частности, если $\gamma, \beta \in L$, то $\gamma = \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сечения $\gamma = \gamma_1 + \delta_1$, $\beta = \beta_1 + \delta_2$. Так как $r(\gamma - \beta) = 0$, то либо $\gamma - \beta = 0$, либо разность $\gamma - \beta$ не имеет нормы (см. предположение 13). В первом случае утверждение настоящей теоремы очевидно. Разберем второй случай. Заметим сначала, что $\gamma - \beta = \gamma_1 - \beta_1 + \delta_1 - \delta_2$. Предположим, что $v(\gamma_1 - \beta_1)$ не больше ни $\text{supp } \gamma_1$, ни $\text{supp } \beta_1$. Но $\text{supp } \gamma_1 < \text{supp } \delta_1$ и $\text{supp } \beta_1 < \text{supp } \delta_2$. Отсюда следует, что существует элемент $h \in G$, для которого $v(\gamma_1 - \beta_1) \leq h < \text{supp } \delta_1 \cup \text{supp } \delta_2$. Тогда норма $v(\gamma - \beta)$ существует и совпадает с нормой $v(\gamma_1 - \beta_1)$. Получаем противоречие с предположением второго случая. Следовательно, на самом деле норма $v(\gamma_1 - \beta_1)$ больше либо $\text{supp } \gamma_1$, либо $\text{supp } \beta_1$. Если норма $v(\gamma_1 - \beta_1)$ больше $\text{supp } \gamma_1$, то γ_1 – начало ряда β_1 , а если $v(\gamma_1 - \beta_1) > \text{supp } \beta_1$, то β_1 – начало ряда γ_1 .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $r\gamma = 1$ и $r\beta = \delta$ для некоторых $\gamma, \beta \in L$. Предположим, что $*$ -произведение $\gamma * \delta$ существует (это так, например, в случае $\delta \in FG$). Если $\alpha \in L$ — начало $\gamma * \delta$, то $\alpha \prec \beta$. Кроме того, если $\gamma * \delta \in L$, то $\beta = \gamma * \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь ассоциативностью $*$ -произведения, получаем: $r(\gamma * \delta) = r\beta$. По теореме 5 либо α — начало ряда β , либо β — собственное начало ряда α . Вторая возможность исключается. Действительно, в этом случае $v(\gamma * \delta - \beta) = v(\alpha - \beta) \neq \infty$ и $r(\gamma * \delta - \beta) = 0$; применение предложения 13 приводит к противоречию.

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что $\gamma \in L \cap R$ — такой степенной ряд, что $r\gamma = 1$. Тогда $\gamma r = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma r = 1 + \delta$. Суммы γr и $\delta = \gamma r - 1$ принадлежат R , так как $\gamma \in R$. Следовательно,

$$r = (r\gamma)r = r(\gamma r) = r(1 + \delta) = r + r\delta,$$

откуда вытекает равенство $r\delta = 0$. Далее, $\delta = 0$ согласно предложению 13.

Список литературы

1. Мальцев А. И. О включении групповых алгебр в алгебры с делением // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. №9. С. 1499–1501.
2. Дубровина Т. В., Дубровин Н. И. Конусы в группах // Матем. сб. 1996. Т. 187. №7. С. 59–74.
3. Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
4. Дубровин Н. И. Обратимость группового кольца правоупорядоченной группы над телом // Матем. заметки. 1987. Т. 42. №4. С. 508–518.
5. Дубровин Н. И. Рациональные замыкания групповых колец левоупорядоченных групп // Матем. сб. 1993. Т. 184. №7. С. 3–48.
6. Дубровин Н. И. Пример цепного первичного кольца с нильпотентными элементами // Матем. сб. 1983. Т. 120 (162). №3. С. 441–447.

Владимирский государственный университет

Поступила в редакцию
24.03.1999