Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 7, 31–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:34:46

УДК 517.9

В. В. Жиков

Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости

Вводится понятие двухмасштабной сходимости, связанной с данной периодической борелевской мерой μ . В том случае, когда $d\mu = dx$ – мера Лебега на торе, получаем сходимость в смысле Nguetseng–Allaire. Главные свойства двухмасштабной сходимости обнаруживаются при совместном рассмотрении последовательности функций и последовательности их градиентов. Дается приложение двухмасштабной сходимости к усреднению некоторых задач из теории пористых сред (модели double-porosity). Формулируется математическое представление о “параллельных потоках, мягко или слабо связанных между собой”. Строится усредненный оператор, а сам результат о сходимости интерпретируется как “сильная двухмасштабная резольвентная сходимость”. В связи с этим затрагиваются вопросы поведения спектра при усреднении.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

1.1. Моделью усреднения служит задача Дирихле для дивергентного эллиптического уравнения с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon &\in H_0^1(\Omega), \quad \lambda > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $A(y)$ – периодическая измеримая матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности и ограниченности:

$$\alpha I \leq A \leq \alpha^{-1} I, \quad \alpha > 0. \tag{1.2}$$

Впервые теорема об усреднении была доказана в 1973 г. Де Джорджи и Спаньоло [1]. Доказательство было непрямым и довольно сложным. Вскоре Н. С. Бахвалов, а также Ж. Лионс и другие получили прямые доказательства, основанные на применении мощных средств асимптотического анализа, когда решение ищется в виде

$$u(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots, \quad y = \varepsilon^{-1}x, \tag{1.3}$$

где u, u_1 периодичны по y , см. [2], [3]. Асимптотический анализ позволил не только найти усредненное уравнение и доказать собственно усреднение, т.е. сходимость

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00072).

решения u_ε к решению усредненного уравнения, но и оценить разность между точным решением и эффективно строящимся первым приближением. Метод асимптотических разложений остается главным орудием теории усреднения и в настоящее время. Часто его применяют только для формального нахождения усредненного уравнения и первого приближения, а для строгого доказательства сходимости используют метод компенсированной компактности Тартара–Мюра.

В 1989 г. G. Nguetseng [4] высказал интересную идею двухмасштабной сходимости, что фактически дало новый способ обоснования свойств усреднения. Метод двухмасштабной сходимости был далее развит в работах G. Allaire [5]. Этот метод оказался полезным в задачах, имеющих более сложную структуру, чем стандартная модель усреднения. В стандартной модели мы имеем дело с ограниченной в $H_0^1(\Omega)$ последовательностью решений u_ε . Поэтому естественно, что нулевое приближение $u(x, y)$ в (1.3) не зависит от y , $u(x)$ – это сильный L^2 -предел последовательности u_ε . Между тем имеются многочисленные модели, в которых последовательность u_ε ограничена, но не компактна в $L^2(\Omega)$. В этой ситуации слабый L^2 -предел последовательности u_ε нельзя считать удовлетворительным приближением к u_ε при малых ε и предпочтительней иметь дело с *двухмасштабным пределом* – функцией $u(x, y)$ двух переменных x, y , периодичной по y .

Поясним сказанное на простом примере. Рассмотрим задачу Дирихле

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad -\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f(x)a(\varepsilon^{-1}x), \quad (1.4)$$

где $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $a(y)$ – ограниченная периодическая функция, $a \not\equiv \text{const}$. Из интегрального тождества

$$\varepsilon^2 \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx + \int_\Omega u_\varepsilon \psi \, dx = \int_\Omega f(x)a(\varepsilon^{-1}x)\psi(x) \, dx, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.5)$$

видно, что $u_\varepsilon, \varepsilon \nabla u_\varepsilon$ ограничены в $L^2(\Omega)$. Поэтому первое слагаемое в левой части сходится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельный переход в тождестве дает уравнение

$$\overline{u}(x) = \langle a \rangle f(x),$$

в котором $\overline{u}(x)$ – слабый предел $u_\varepsilon(x)$, $\langle a \rangle$ – среднее значение функции $a(y)$.

Можно ли считать, что получено “настоящее” предельное уравнение? Критерием служит свойство сходимости энергий. Энергия, отвечающая допредельному уравнению (1.4), равна

$$E_\varepsilon = \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \int_\Omega u_\varepsilon^2 \, dx = \int_\Omega f(x)a(\varepsilon^{-1}x)u_\varepsilon(x) \, dx.$$

Ниже будет показано, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon > \int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\langle a \rangle \, dx = \langle a \rangle^2 \int_\Omega f^2(x) \, dx, \quad (1.6)$$

т. е. сходимости энергий не наблюдается и слабый предел $\overline{u}(x)$ действительно не является удовлетворительным приближением к u_ε при малых ε .

Попробуем найти приближение к u_ε в форме $u_\varepsilon^0(x) = u(x, y)$, $y = \varepsilon^{-1}x$. Имеем:

$$-\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon^0 + u_\varepsilon^0 = -\Delta_y u - \varepsilon \operatorname{div}_y \nabla_x u - \varepsilon \operatorname{div}_x \nabla_y u - \varepsilon^2 \Delta_x u + u.$$

Члены порядка ε^0 приравняем к $f(x)a(x)$:

$$-\Delta_y u(x, y) + u(x, y) = f(x)a(y). \quad (1.7)$$

Это – периодическая задача относительно y , в которой x играет роль параметра. Видим, что $u(x, y) = f(x)b(y)$, где b – решение периодической задачи $-\Delta b + b = a$. Для разности $z_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)$ имеем

$$z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + z_\varepsilon = 2\varepsilon \nabla f \cdot \nabla b + \varepsilon^2 b \Delta f = g_\varepsilon.$$

Так как $|z_\varepsilon| \leq c$, то

$$\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla z_\varepsilon|^2 dx + \int_\Omega z_\varepsilon^2 dx = \int_\Omega g_\varepsilon z_\varepsilon dx \leq c_1 \varepsilon,$$

в частности,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx = 0. \quad (1.8)$$

Не будем давать сейчас точного определения двухмасштабного предела, а только заметим, что соотношение (1.8) является достаточным (и весьма близким к необходимому) условием двухмасштабной сходимости $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x, y)$. Предельным уравнением следует считать уравнение (1.7) для u как функции $2N$ переменных. Сходимость энергий теперь следует из (1.8), так как

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f(x)a(\varepsilon^{-1}x)u(x, \varepsilon^{-1}x) dx \\ &= \int_\Omega \int_\square f(x)a(y)u(x, y) dx dy = \langle ab \rangle \int_\Omega f^2 dx \end{aligned}$$

по свойству среднего значения. Из уравнения $-\Delta b + b = a$ имеем $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, $\langle ab \rangle > \langle b^2 \rangle > \langle b \rangle^2 = \langle a \rangle^2$, и неравенство (1.6) доказано.

Соотношение (1.8) соответствует “сильной” двухмасштабной сходимости. Слабая двухмасштабная сходимость $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ означает по определению

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)b(\varepsilon^{-1}x)\varphi(x) dx &= \int_\Omega \int_\square u(x, y)b(y)\varphi(x) dy dx, \\ \varphi &\in C_0^\infty(\Omega), \quad b \in C_{\text{per}}^\infty, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $C_{\text{per}}^\infty = C_{\text{per}}^\infty(\square)$ – пространство бесконечно дифференцируемых периодических функций, $\square = [0, 1)^N$ – ячейка периодичности.

Относительно слабой двухмасштабной сходимости доказан целый ряд свойств, позволяющих переходить к пределу в интегральных тождествах. Одно из них состоит в следующем: если $u_\varepsilon, \varepsilon \nabla u_\varepsilon$ ограничены в $L^2(\Omega)$, то (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} u(x, y) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1), \\ \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} \nabla_y u(x, y), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $H_{\text{per}}^1 = H_{\text{per}}^1(\square)$ – соболевское пространство периодических функций. Посмотрим, как с помощью этого свойства вывести предельное уравнение (1.7).

Возьмем в тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi(x) = \psi_\varepsilon(x) = \varphi(x)w(y), \quad \text{где } y = \varepsilon^{-1}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad w \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla_y w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) w(\varepsilon^{-1}x) dx \\ + \int_\Omega u_\varepsilon(x) \varphi(x) w(\varepsilon^{-1}x) dx = \int_\Omega f(x) a(\varepsilon^{-1}x) w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Второе слагаемое слева сходится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а пределы остальных вычислим согласно (1.9), (1.10). В результате

$$\int_\Omega \int_\square \nabla_y u \cdot \nabla_y w \varphi dy dx + \int_\Omega \int_\square u w \varphi dy dx = \int_\Omega \int_\square f a w \varphi dy dx.$$

Поскольку φ, w произвольны, отсюда получаем предельное уравнение (1.7).

1.2. За последние годы наряду с активностью в области двухмасштабной сходимости наблюдалось развитие техники усреднения и в другом направлении – геометрическом. Чтобы описать геометрическую сторону дела, удобно дать общую постановку задачи усреднения в терминах периодической меры.

Пусть μ – периодическая борелевская мера на $\mathbb{R}^N$, $\square = [0, 1)^N$ – ячейка или тор периодичности, $\int_\square d\mu = 1$. Введем меру μ_ε равенством

$$\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}B) \quad \text{для любого борелевского } B \subset \mathbb{R}^N. \quad (1.11)$$

Мера μ_ε имеет период ε и

$$\int_{\varepsilon\square} d\mu_\varepsilon = \varepsilon^N \int_\square d\mu = \varepsilon^N.$$

Отсюда следует, что μ_ε слабо сходится к мере Лебега: $d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

С мерой μ_ε свяжем соболевское пространство $H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, которое определим следующим образом. Пусть $W = W_\varepsilon$ — замыкание множества всех пар $\{u, \nabla u : u \in C_0^\infty(\Omega)\}$ в произведении $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon) \times L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)^N$. Элементами W служат пары u, z . Условимся вектор z обозначать через ∇u и называть градиентом u : $z = \nabla u$. Совокупность первых компонент образует соболевское пространство $H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. При таком определении градиент функции определен неоднозначно, но это особых проблем не вызывает.

Теперь можно ввести модель усреднения в классической форме:

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon), \quad -\operatorname{div}(A_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad (1.12)$$

где $A_\varepsilon(x) = A(\varepsilon^{-1}x)$, $A(y)$ — периодическая μ -измеримая матрица, удовлетворяющая условию (1.2). По определению $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ есть решение этого уравнения, если выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega [A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi + \lambda u_\varepsilon \psi] d\mu_\varepsilon = \int_\Omega f_\varepsilon \psi d\mu_\varepsilon, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.13)$$

в котором ∇u_ε — *некоторый* градиент u_ε . Существование и единственность решения как пары $u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$ следует из теоремы Рисса о представлении (подробнее см. §3).

Очевидно, что модель (1.12) переходит в классическую модель (1.1), если в качестве меры μ взять меру Лебега на торе. Подходящим выбором меры μ получаются и другие известные из физической и математической литературы модели: усреднения в перфорированных областях, диффузии на периодических решетках и поверхностях, эффективной проводимости электрических цепей, усреднения на фракталах и др. Смысл усреднения в том, что решение u_ε задачи (1.12) в *определенном смысле* сходится к решению усредненной задачи, связанной уже с мерой Лебега, поскольку $d\mu_\varepsilon \rightarrow dx$. Здесь требуется пояснить, что означает сама сходимость последовательности $u_\varepsilon \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ к функции $u \in L^2(\Omega, dx) = L^2(\Omega)$.

Будем считать, что последовательность u_ε ограничена:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon < \infty. \quad (1.14)$$

Тогда *слабая сходимость* $u_\varepsilon \rightharpoonup u \in L^2(\Omega)$ означает по определению, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_\Omega \varphi u dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Сильная сходимость $u_\varepsilon \rightarrow u$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_\Omega uv dx, \quad \text{как только } v_\varepsilon \rightarrow v.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Всякая ограниченная последовательность компактна относительно слабой сходимости. Кроме того, сильная сходимост $u_\varepsilon \rightarrow u$ складывается из слабой сходимости $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ и соотношения*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Эти свойства, доказанные в [6], легко следуют из аналогичных свойств двух-масштабной сходимости, которые будут установлены в § 2.

В работах [7], [8] показано, что для обоснования усреднения требуется лишь одно свойство меры μ – *связность* или *эргодичность*. По определению мера μ связна (на торе периодичности) или эргодична, если $u \equiv \text{const}$ μ -п.в., как только найдутся $u_n \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\square} |u_n - u|^2 d\mu = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\square} |\nabla u_n|^2 d\mu = 0. \quad (1.15)$$

Мера Лебега dx , очевидно, эргодична: функция u из (1.15) принадлежит соболевскому пространству $H_{\text{per}}^1(\square)$ на торе, имеет нулевой градиент и поэтому является константой п.в. В общем случае эргодичность меры μ означает, что функция u есть константа, если она принадлежит соболевскому пространству $H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$ и обладает нулевым “градиентом”, см. § 3. Во многих случаях эргодичность меры легко устанавливается. Достаточным признаком эргодичности служит выполнение неравенства Пуанкаре

$$\int_{\square} \varphi^2 d\mu \leq C \left\{ \left(\int_{\square} \varphi d\mu \right)^2 + \int_{\square} |\nabla \varphi|^2 d\mu \right\}, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square). \quad (1.16)$$

Свойство эргодичности всегда обеспечивает усреднение, но при этом усредненная матрица не обязательно положительно определена.

Рассмотрим некоторые примеры эргодических мер.

1°. *Вырождающиеся эллиптические операторы.* Пусть μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на торе, $d\mu = \rho dx$. Мера μ будет эргодичной, а усредненная матрица – невырожденной, если $\int_{\square} \rho^{-1} dx < \infty$, см. [7], [8].

2°. *Перфорированные области.* Пусть F – открытое периодическое множество в $\mathbb{R}^N$ и

$$d\mu = \rho dx, \quad \rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\square \cap F|} & \text{в } F, \\ 0 & \text{вне } F. \end{cases}$$

В данном случае $d\mu_\varepsilon = \rho(\varepsilon^{-1}x) dx$ и интегрирование в (1.13) ведется только по $\Omega_\varepsilon = \varepsilon F \cap \Omega$ – “перфорированной области”. Само решение u_ε задачи (1.12) определено, очевидно, только в перфорированной области. Усреднению в перфорированных областях посвящена обширная литература, см. [9]–[11]. Классический подход основан на идее продолжения решения с перфорированной области Ω_ε на исходную область Ω с сохранением энергетических оценок, что требовало существенных ограничений на структуру периодического множества F (условие “сильной связности” по Хруслову). Так, давний вопрос об обосновании усреднения в

случае, когда F просто *связно* в $\mathbb{R}^N$, не поддавался решению классическими методами.

Между тем обычная связность F в $\mathbb{R}^N$ (или даже только на торе) влечет эргодичность меры μ , как это непосредственно ясно из (1.15). Построены также примеры открытых, но не связных множеств F , для которых соответствующая мера эргодична и усредненная матрица положительно определена [7].

3°. *Фрактальные меры*. Пусть $N = 2$ и периодическая мера μ имеет структуру

$$d\mu = \frac{d\mu_0(x_1) \times dx_2 + dx_1 \times d\mu_0(x_2)}{2},$$

где μ_0 – некоторая нормированная мера на отрезке $[0, 1]$. В частности, в качестве μ_0 можно взять естественную меру, сосредоточенную на канторовом множестве $C \subset [0, 1]$. Мера μ будет сосредоточена на множестве

$$C \times [0, 1] \cup [0, 1] \times C \text{ – “странной канторовой сетке”}.$$

Для этих мер доказано неравенство Пуанкаре (1.16), и поэтому они эргодичны.

4°. *Периодические графы*. Рассмотрим на плоскости периодический связный граф, например обычную квадратную сетку. Мера μ определим как сумму линейных мер звеньев, взятых с некоторыми положительными весами. Тогда мера μ будет эргодической и невырожденной.

1.3. В рассмотренной выше модели (1.12) матрица проводимости имеет специальную структуру $A_\varepsilon(x) = A(\varepsilon^{-1}x)$. В приложениях существуют многочисленные задачи с более сложным вхождением малого параметра. Сейчас мы рассмотрим некоторые модели усреднения, встречающиеся в теории пористых сред.

Представим себе, что пространство $\mathbb{R}^N$ разбито на две периодические части $F^\varepsilon = \varepsilon F$ и $F_0^\varepsilon = \varepsilon F_0$, имеющие период ε . Каждая из этих частей есть отдельная пористая среда (со своей внутренней структурой, обеспечивающей фильтрацию), но коэффициент проницаемости в F^ε имеет порядок 1, а в F_0^ε – порядок ε^2 . Тогда получаем модель *double-porosity*. Закон Дарси, описывающий фильтрацию в такой композитной системе, приводит к дивергентному параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \nabla u), \quad a_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{в } F^\varepsilon, \\ \varepsilon^2 & \text{в } F_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (1.17)$$

Вместо него можно изучать соответствующее резольвентное эллиптическое уравнение. Часто “жесткая” фаза F^ε является связной в $\mathbb{R}^N$. Если же она состоит, скажем, из двух связных компонент, то мы имеем два “параллельных потока” в жестких фазах, связь между которыми осуществляется через “мягкую” фазу F_0^ε .

Вот некоторые примеры.

1. *Модель двух параллельных слабо связанных потоков*, см. рис. 1. Здесь $d\mu = dx$ – мера Лебега, F_1, F_2 – две непересекающиеся периодические решетки в $\mathbb{R}^3$, $F_0 = \mathbb{R}^3 \setminus F_1 \cup F_2$. Коэффициент проницаемости равен единице на каждой из жестких фаз $F_1^\varepsilon = \varepsilon F_1$, $F_2^\varepsilon = \varepsilon F_2$ и ε^2 на мягкой фазе F_0^ε .

2. *Простейшая модель double-porosity*. Здесь $d\mu = dx$ – мера Лебега, F_0 – периодическая система шаров. При $N \geq 3$ шары могут иметь радиус $\frac{1}{2}$. Тогда F_0

– это плотная кубическая упаковка шаров. Коэффициент проницаемости равен ε^2 на F_0^ε и единице на дополнении к F_0^ε .

3. *Сеточная модель double-porosity*. Здесь μ – линейная мера на периодическом графе. Сам граф и его жесткая и мягкая компоненты изображены на рис. 2.

Коэффициент проницаемости, как и в предыдущем примере, равен ε^2 на F_0^ε и единице на F_1^ε .

4. *Сеточная модель двух параллельных слабо связанных потоков*. Здесь F_1, F_2 – две “тонкие” непересекающиеся периодические решетки в $\mathbb{R}^3$, F_0 – связывающие их звенья, см. рис. 3.

5. *“Тонкостенная модель”*. Здесь μ – это поверхностная мера Лебега на гранях единичного куба $\square$, F_0 – круги на гранях; их центры находятся в центрах граней, а радиусы $< \frac{1}{2}$, см. рис. 4.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Усреднению в моделях double-porosity посвящено много работ механиков и математиков [12]–[14]. Рассматривался только случай, когда $d\mu = dx$ – мера Лебега, жесткая фаза F связна и представляет собой достаточно гладкую периодическую область. Для нестационарного уравнения (1.17) методомNguetseng–Allaire было выведено “предельное уравнение”. Много материалов по этим вопросам имеется в книге Hornung [15]. Г.В. Сандраков [16], [17] с помощью классического метода асимптотических разложений не только доказал собственно усреднение, но и получил соответствующие оценки между точным решением и “двухмасштабным” нулевым приближением. Сандракову принадлежат также интересные наблюдения в случае нескольких жестких фаз. Впрочем, применение классических методов связано с довольно сильными ограничениями гладкости на фазы.

Общая версия модели параллельных потоков в терминах меры μ дана в § 6. Для исследования свойств усреднения будет применена двухмасштабная сходимость. При этом никаких ограничений гладкости на фазы не потребуется.

§ 2. Определение двухмасштабной сходимости

2.1. Пусть μ – периодическая борелевская мера, μ_ε – “скейлинг”-мера, определенная равенством (1.11).

Исходным пунктом для двухмасштабной сходимости служит свойство среднего значения периодической функции. В простейшей форме оно выглядит так.

СВОЙСТВО СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ. Рассмотрим заданную на $\mathbb{R}^N$ периодическую μ -измеримую функцию $b(x)$, $b \in L^1(\square, d\mu)$. Тогда имеет место слабая сходимость мер: $b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \rightharpoonup \langle b \rangle dx$, где $\langle b \rangle = \int_\square b d\mu$ – среднее значение b . Другими словами,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_\square b(y) \varphi(x) dx d\mu(y) \\ &= \langle b \rangle \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем $\mathbb{R}^N$ на кубы со стороной ε и обозначим отдель-

ный такой куб символом $\varepsilon \square_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon &= \sum \int_{\varepsilon \square_j} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= \sum \varphi(x_j) \int_{\varepsilon \square_j} b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где x_j — точка из куба $\varepsilon \square_j$. По периодичности

$$\int_{\varepsilon \square_j} b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \varepsilon^N \int_{\square} b(y) d\mu = \varepsilon^N \langle b \rangle.$$

Поэтому (2.2) есть риманова сумма для интеграла (2.1), и свойство доказано.

Из (2.1) и общих свойств слабой сходимости мер получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) b(y) dx d\mu(y), \quad (2.3)$$

где Ω — ограниченная область, граница которой имеет нулевую лебегову меру, φ — непрерывная функция в $\overline{\Omega}$. Ниже всегда предполагается, что Ω — липшицева область.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более общая формулировка свойства среднего значения такова. Скажем, что $\Phi = \Phi(x, y) \in C(\overline{\Omega}, L^1_{\text{per}}(\square, d\mu))$, если Φ периодична по y и непрерывна как функция аргумента $x \in \overline{\Omega}$ со значениями в $L^1(\square, d\mu)$. Тогда функция $\Phi(x, \varepsilon^{-1}x)$ будет μ_ε -измеримой и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi(x, y) dx d\mu.$$

2.2. Будем изучать последовательность функций $u_\varepsilon(x) \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, всегда предполагая ее ограниченной (см. (1.14)), и использовать пробные функции

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) b(y), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad b \in C^\infty_{\text{per}}(\square). \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Последовательность u_ε *слабо двухмасштабно* сходится к функции $u = u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square, dx \times d\mu) = L^2(\Omega \times \square)$: $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi(x, y) u(x, y) dx d\mu(y) \quad (2.5)$$

для любой пробной функции Φ из (2.4).

Простейший пример: если $u_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)$, то двухмасштабный предел равен $\Phi(x, y)$. Это следует из свойства среднего значения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если последовательность u_ε ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, то она компактна в смысле слабой двухмасштабной сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество (2.4) пробных функций сепарабельно относительно нормы $\sup_{\Omega \times \square} |\Phi|$. Выбирая счетное всюду плотное множество Γ пробных функций, диагональным методом выделим подпоследовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такую, что предел

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} = l(\Phi) \quad (2.6)$$

существует для любой $\Phi \in \Gamma$. Но тогда этот предел, очевидно, существует и для любой пробной функций из (2.4). Далее, по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} \right)^2 &\leq \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x) d\mu_{\varepsilon} \int_{\Omega} \Phi^2(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon} \\ &\leq C \int_{\Omega} \Phi^2(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда по свойству среднего значения

$$|l(\Phi)|^2 \leq C \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi^2(x, y) dx d\mu(y).$$

Тогда по теореме Рисса линейный функционал $l(\Phi)$ допускает представление

$$l(\Phi) = \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi(x, y) u(x, y) dx d\mu(y), \quad u \in L^2(\Omega \times \square).$$

Так как линейная оболочка пробных функций плотна в $L^2(\Omega \times \square)$, то функция u определена единственным образом. Отсюда, между прочим, ясно, что предельное соотношение (2.5) автоматически выполнено для более широкого класса пробных функций – когда φ берется из $C(\overline{\Omega})$, а b – по-прежнему из C_{per}^{∞} .

Действительно, мы могли бы повторить предыдущие рассуждения для этого более широкого класса пробных функций, перейдя, быть может, в (2.6) к подпоследовательности ε'_k . Но функция $u(x, y)$ уже определена, и поэтому в действительности переходить к подпоследовательности не нужно. Предложение доказано.

В определении 2.1 задействован минимально узкий класс пробных функций. Его можно по-разному расширять с сохранением сходимости (2.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Сходимость (2.5) сохраняется для пробных функций $\Phi(x, y) = \varphi(x)b(y)$, где $\varphi(x)$ берется теперь из $C(\overline{\Omega})$, а функция b – из $L^2(\square, d\mu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. О функциях φ уже сказано выше. Рассмотрим вопрос о расширении класса функций $b(y)$. Для $b \in L^2(\square, d\mu)$ возьмем

$$\tilde{b} \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square), \quad \int_{\square} |b - \tilde{b}|^2 d\mu \leq \delta,$$

и воспользуемся тем, что по свойству среднего значения (2.3)

$$\int_{\Omega} |b(\varepsilon^{-1}x) - \tilde{b}(\varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_{\varepsilon} \leq 2|\Omega|\delta$$

при достаточно малом ε . Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi(x) [b(\varepsilon^{-1}x) - \tilde{b}(\varepsilon^{-1}x)] u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} \right| &\leq C\delta, \\ \left| \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) [b(y) - \tilde{b}(y)] u(x, y) dx d\mu \right| &\leq C\delta, \end{aligned}$$

где C не зависит от ε . Отсюда следует наше утверждение.

Нетрудно показать, что сходимость (2.5) сохраняется для более широкого класса “допустимых” пробных функций, например для $\Phi \in C(\overline{\Omega}, L^2_{\text{per}}(\square, d\mu))$.

2.3. Перечислим некоторые свойства двухмасштабной сходимости.

i) Если $u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, $a \in L^{\infty}_{\text{per}}(\square, d\mu)$, то

$$a(\varepsilon^{-1}x) u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} a(y) u(x, y). \quad (2.7)$$

Действительно, согласно предложению 2.3 множитель $a(\varepsilon^{-1}x)$ может быть отнесен к пробной функции.

Сравним обычный слабый предел с двухмасштабным.

ii) Если $u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то

$$u_{\varepsilon}(x) \rightharpoonup \int_{\square} u(x, y) d\mu. \quad (2.8)$$

В самом деле, если в (2.5) взять пробную функцию $\Phi(x, y) = \varphi(x)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} = \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) d\mu(y) \varphi(x) dx.$$

Видим, что обычный слабый предел получается из двухмасштабного усреднением по периоду.

iii) Если $u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x) d\mu_{\varepsilon} \geq \int_{\Omega} \int_{\square} u^2(x, y) dx d\mu. \quad (2.9)$$

Докажем iii). Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [u_{\varepsilon}(x) - \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)]^2 d\mu_{\varepsilon} \\ &= \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x) d\mu_{\varepsilon} - 2 \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon} + \int_{\Omega} \Phi^2(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

По свойству (2.5) и свойству среднего значения

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2 d\mu_{\varepsilon} \geq 2 \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) \Phi(x, y) dx d\mu - \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi^2(x, y) dx d\mu.$$

Здесь $\Phi(x, y)$ — линейная комбинация пробных функций (2.4), $\Phi(x, y) = \varphi_i(x) b_i(y)$. Выбрав последовательность $\Phi_k \rightarrow u$ в $L^2(\Omega \times \square)$, получим искомое неравенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Последовательность u_ε *сильно двухмасштабно* сходится к функции $u = u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) v(x, y) dx d\mu(y), \text{ как только } v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y). \quad (2.11)$$

Очевидно, что сильная сходимость влечет слабую (достаточно взять $v_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)$). Кроме того, взяв $v_\varepsilon = u_\varepsilon$, получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} u^2(x, y) dx d\mu. \quad (2.12)$$

Верно и обратное:

iv) слабая сходимость и соотношение (2.12) влекут сильную.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольную последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такую, что существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon_k}(x) v_{\varepsilon_k}(x) d\mu_{\varepsilon_k} = \alpha, \quad \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon_k}^2(x) d\mu_{\varepsilon_k} = \beta,$$

где $v_{\varepsilon_k}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$. Тогда из (2.9), (2.12) получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_{\varepsilon_k} + t u_{\varepsilon_k})^2 d\mu_{\varepsilon_k} &\geq \int_{\Omega} \int_{\square} (v + t u)^2 dx d\mu, \\ 2t\alpha + t^2\beta &\geq 2t \int_{\Omega} \int_{\square} uv dx d\mu + t^2 \int_{\Omega} \int_{\square} u^2 dx d\mu. \end{aligned}$$

Сокращая здесь на t (сначала при $t > 0$, а затем при $t < 0$), будем иметь

$$\alpha = \int_{\Omega} \int_{\square} uv dx d\mu,$$

что и дает (2.11).

v) Пусть $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ и предельная функция $u(x, y)$ является достаточно гладкой, например $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}, L^2_{\text{per}}(\square, d\mu))$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon = 0. \quad (2.13)$$

Действительно, возьмем в (2.10) пробную функцию $\Phi(x, y) = u(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon \\ = \int_{\Omega} \int_{\square} u^2 dx d\mu - 2 \int_{\Omega} \int_{\square} uu dx d\mu + \int_{\Omega} \int_{\square} u^2 dx d\mu = 0 \end{aligned}$$

согласно (2.12), (2.5) и свойству среднего значения.

Сравним обычную сильную сходимость и двухмасштабную.

vi) Если $u_\varepsilon(x) \rightarrow \overline{u}(x)$, то $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \overline{u}(x)$, т.е. двухмасштабный предел не зависит от y .

Докажем vi). Пусть $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$. Тогда по предыдущему (см. также предложение 1.1)

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) &= \int_{\square} u(x, y) d\mu, \\ \int_{\Omega} \bar{u}^2(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon \geq \int_{\Omega} \int_{\square} u^2(x, y) dx d\mu \geq \int_{\Omega} \bar{u}^2 dx.\end{aligned}$$

Ясно, что здесь наблюдаются строгие равенства и поэтому $\bar{u} \equiv u$ и $u_\varepsilon \xrightarrow{2} \bar{u}$.

Главные свойства двухмасштабной сходимости обнаруживаются при совместном рассмотрении последовательности функций u_ε и последовательности их градиентов ∇u_ε . Прежде чем говорить об этом, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с гармоническим анализом на торе, наделенном мерой μ .

§ 3. Соболевские пространства

3.1. Пусть μ – периодическая нормированная мера. Мы хотим определить соболевское пространство периодических функций $H_{\text{per}}^1 = H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$.

Сначала определим пространство $W = W(\square, d\mu)$ как замыкание множества пар $\{u, \nabla u : u \in C_{\text{per}}^\infty\}$ в $L^2(\square, d\mu) \times L^2(\square, d\mu)^N$.

Элементами W служат пары u, z . Условимся вектор z обозначать через ∇u и называть градиентом функции u : $z = \nabla u$. Совокупность первых компонент u назовем *соболевским пространством* H_{per}^1 . Норму на этом пространстве не вводим.

Функция из соболевского пространства может иметь много градиентов.

Очевидно, что множество $\Gamma(u)$ градиентов данной функции $u \in H_{\text{per}}^1$ имеет структуру $\Gamma(u) = \nabla u + \Gamma(0)$, где ∇u – некоторый градиент, а $\Gamma(0)$ – множество градиентов нуля. По определению $g \in \Gamma(0)$, если

$$\exists \varphi_n \in C_{\text{per}}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n^2 \rangle = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle |g - \nabla \varphi_n|^2 \rangle = 0. \quad (3.1)$$

Ясно, что $\Gamma(0)$ есть подпространство векторного пространства $(L^2)^N$.

Для иллюстрации неединственности градиента рассмотрим простейший пример.

ПРИМЕР. Пусть $N = 2$, $\square = [0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ – ячейка периодичности, μ – линейная мера на отрезке $I = [0, 1] \times \{0\}$. По определению для $u \in H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$

$$\begin{aligned}\exists u_n \in C_{\text{per}}^\infty(\square) : \quad & \int_I |u - u_n|^2 dx_1 \rightarrow 0, \\ \int_I \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} - z_1 \right|^2 dx_1 & \rightarrow 0, \quad \int_I \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} - z_2 \right|^2 dx_1 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Тогда u принадлежит одномерному соболевскому пространству $H_{\text{per}}^1(I)$, причем

$z_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$, т.е. $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, z_2 \right\}$. Убедимся, что компонента z_2 может быть произвольным элементом из $L^2(I)$, другими словами,

$$\Gamma(0) = \{(0, \alpha)\}, \quad \alpha \in L^2(I) = L^2(\square, d\mu).$$

Поскольку $\Gamma(0)$ замкнуто в $L^2(\square, d\mu)$, то достаточно проверить, что $(0, \alpha) \in \Gamma(0)$ для $\alpha \in C_{\text{per}}^\infty(I)$. В этом случае в качестве φ_n из (3.1) можно взять $\varphi_n(x) = \chi(x_2)\alpha(x_1)$, где $\chi(x_2)$ — гладкая периодическая функция, $\chi(0) = 0$, $\chi'(0) = 1$.

Дальнейшие свойства градиента имеет смысл обсудить в связи с эллиптическими уравнениями. Пусть $A(x)$ — периодическая μ -измеримая симметрическая матрица, подчиненная условию эллиптичности и ограниченности (1.2).

Скажем, что $u \in H_{\text{per}}^1$ есть решение периодической задачи

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \lambda u = f, \quad f \in L^2(\square, d\mu), \quad \lambda > 0, \quad (3.2)$$

если выполнено интегральное тождество

$$\langle A\nabla u \cdot \nabla \varphi \rangle + \lambda \langle u \varphi \rangle = \langle f \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty, \quad (3.3)$$

в котором ∇u — *некоторый* градиент u . Существование и единственность решения как пары $u, \nabla u$ из W получить совсем просто. Действительно, с помощью левой части (3.3) на пространстве W задается новое скалярное произведение, причем соответствующая норма эквивалентна исходной. Поэтому достаточно сослаться на теорему Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. Таким образом, единственность здесь двоякая: одна функция из H_{per}^1 и лишь один ее градиент удовлетворяют тождеству (3.3).

Интересно, что градиент, участвующий в этом тождестве, с самим уравнением не связан, а определяется только матрицей $A(x)$. Действительно, в тождестве (3.3) возьмем $\varphi = \varphi_n$ — последовательность из (3.1). Тогда получим

$$A\nabla u \perp \Gamma(0) \quad (3.4)$$

и воспользуемся следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Всякая функция из соболевского пространства имеет единственный градиент, удовлетворяющий условию (3.4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ∇u — какой-то градиент u . В силу эллиптичности A задача

$$c \in \Gamma(0), \quad \langle A(c + \nabla u) \cdot g \rangle = 0 \quad \forall g \in \Gamma(0)$$

имеет единственное решение. Тогда $c + \nabla u$ будет искомым градиентом.

В частности, взяв в качестве A единичную матрицу, найдем, что всякая функция из соболевского пространства имеет единственный градиент, удовлетворяющий условию $\nabla u \perp \Gamma(0)$. Такой градиент называется *тангенциальным*. Более подробно об этом см. § 9.

Уравнение (3.2) легко интерпретируется с операторной точки зрения. Покажем, что оно имеет вид

$$\mathcal{A}u + \lambda u = f, \quad (3.5)$$

где $\mathcal{A}$ — самосопряженный неотрицательный оператор в $L^2 = L^2(\square, d\mu)$. С этой целью обозначим через $D(\mathcal{A})$ множество всех решений уравнения (3.2), в котором правая часть f пробегает L^2 . Очевидное замечание: $D(\mathcal{A})$ не зависит от выбора

$\lambda > 0$. Далее, рассмотрим второй экземпляр уравнения (3.2), в котором f заменено на g , а u заменено на v . Поскольку в соответствующих тождествах можно брать пробные функции $\varphi \in H_{\text{per}}^1$, то, выбрав в (3.3) $\varphi = v$, а в тождестве для v — пробную функцию $\varphi = u$, получим

$$\langle fv \rangle = \langle gu \rangle. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что $D(\mathcal{A})$ плотно в L^2 . Действительно, взяв $g \perp D(\mathcal{A})$, найдем, что $v = 0$. Интегральное тождество для v принимает вид $\langle A \nabla v \cdot \nabla \varphi \rangle = \langle g \varphi \rangle \forall \varphi \in H_{\text{per}}^1$. Полагая в нем $\varphi = v$, получаем $\nabla v = 0$ и поэтому $g = 0$. Плотность множества $D(\mathcal{A})$ доказана. На множестве $D(\mathcal{A})$ зададим оператор $\mathcal{A}$ равенством $\mathcal{A}u = f - \lambda u$. Тогда $\mathcal{A} + \lambda I$ обратим, обратный — ограничен (его норма $\leq \lambda^{-1}$) и симметричен, как это следует из (3.6). Следовательно, $\mathcal{A}$ самосопряжен.

Из самого построения ясно, что разрешимость эллиптической задачи (3.2) эквивалентна разрешимости операторного уравнения (3.5).

Мы видим, что неединственность градиента не является препятствием к рассмотрению эллиптических уравнений и привносит сюда лишь небольшие нюансы. Положение упрощается еще и тем, что само условие (3.4) оказывается *поточечным*. Этот результат доказан в приложении к настоящей работе, см. § 9.

Все сказанное выше о пространстве H_{per}^1 и периодической задаче (3.2) справедливо для пространства $H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ и задачи Дирихле (1.12).

3.2. Определим потенциальные и соленоидальные векторы на торе периодичности. Введем пространство V_{pot} *потенциальных* векторов как

$$\text{замыкание множества } \{\nabla \varphi : \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)\} \text{ в } L_{\text{per}}^2(\square, d\mu)^N. \quad (3.7)$$

Потенциальный вектор не обязан иметь нулевое среднее, $\langle v \rangle \neq 0$. Более того, трудно показать, что если каждый потенциальный вектор имеет нулевое среднее, то μ — это мера Лебега на торе. Вектор $b \in L^2(\square, d\mu)^N$ называется *соленоидальным*, если он ортогонален всем потенциальным, т.е.

$$\langle b \cdot \nabla \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty. \quad (3.8)$$

Таким образом, имеем ортогональное разложение

$$L^2(\square, d\mu)^N = V_{\text{pot}} \oplus V_{\text{sol}}. \quad (3.9)$$

Отметим, что в пространстве V_{pot} гладкие векторы плотны по определению, но этого нельзя утверждать относительно V_{sol} .

Имеется естественная связь между функциями из соболевского пространства H_{per}^1 и потенциальными векторами. Например, градиент любой функции из H_{per}^1 есть потенциальный вектор. В общем случае потенциальный вектор может не быть градиентом функции из H_{per}^1 . Однако если справедливо неравенство Пуанкаре (1.16), то для каждого вектора $v \in V_{\text{pot}}$ найдется единственная функция $\hat{u} \in H_{\text{per}}^1$ такая, что $v = \nabla \hat{u}$, $\langle \hat{u} \rangle = 0$. В этом случае H_{per}^1 есть в точности совокупность потенциалов, отвечающих векторам из V_{pot} .

Из ортогонального разложения (3.9) получим

$$L^2(\Omega \times \square)^N = L^2(\Omega, L^2(\square)^N) = L^2(\Omega, V_{\text{pot}}) \oplus L^2(\Omega, V_{\text{sol}}). \quad (3.10)$$

Формально $L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$ – это совокупность квадратично интегрируемых (по Бохнеру) функций аргумента $x \in \Omega$ со значениями в V_{pot} . Однако проще $L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$ определить как замыкание в $L^2(\Omega \times \square)$ линейной оболочки векторов $f(x)\nabla_y\varphi(y)$, где $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C_{\text{per}}^\infty$. Аналогично, $L^2(\Omega, V_{\text{sol}})$ – это замыкание в $L^2(\Omega \times \square)$ линейной оболочки векторов $f(x)b(y)$, где $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $b \in V_{\text{sol}}$.

3.3. Может случиться, что ненулевой постоянный вектор является потенциальным. Обозначим через L подпространство в $\mathbb{R}^N$, состоящее из потенциальных векторов. Мера μ называется *невырожденной*, если $L = \{0\}$. Невырожденность меры тесно связана с невырожденностью усредненной матрицы, которая определяется следующим образом:

$$A^{\text{hom}}\xi \cdot \xi = \min_{v \in V_{\text{pot}}} \langle A(\xi + v) \cdot (\xi + v) \rangle, \quad (3.11)$$

где, как всегда, $A = A(x)$ – периодическая μ -измеримая матрица, удовлетворяющая условию (1.2). Отсюда ясно, что A^{hom} (как неотрицательный самосопряженный оператор в $\mathbb{R}^N$) имеет своим ядром подпространство L , а областью значений – ортогональное дополнение $\tilde{L} = L^\perp$. Уравнение Эйлера для (3.11) имеет вид

$$v \in V_{\text{pot}}, \quad \langle A(\xi + v) \cdot h \rangle = 0 \quad \forall h \in V. \quad (3.12)$$

Из него

$$\begin{aligned} A^{\text{hom}}\xi \cdot \xi &= \langle A(\xi + v) \cdot (\xi + v) \rangle = \langle A(\xi + v) \rangle \cdot \xi, \\ A^{\text{hom}}\xi &= \langle A(\xi + v) \rangle, \quad A(\xi + v) \in V_{\text{sol}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Каждый вектор из $\tilde{L}$ является средним значением некоторого соленоидального вектора – это ясно из (3.13). Верно и обратное: среднее значение любого соленоидального вектора принадлежит $\tilde{L}$. Действительно, если $b \in V_{\text{sol}}$, то $0 = \langle b \cdot \xi \rangle = \langle b \rangle \cdot \xi$ для $\xi \in L$. Итак, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть L – подпространство в $\mathbb{R}^N$, состоящее из потенциальных векторов, $\tilde{L}$ – его ортогональное дополнение. Тогда усредненная матрица является нулевой на L и положительно определенной на $\tilde{L}$. Пространство $\tilde{L}$ – это в точности совокупность средних значений соленоидальных векторов.

Сама по себе невырожденность меры μ не означает ничего глубокого с точки зрения усреднения. Для усреднения требуется другое свойство – эргодичность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Мера μ эргодична, если любая функция $u \in H_{\text{per}}^1$, обладающая нулевым градиентом, есть константа μ -почти всюду.

Сейчас мы приведем одно важное следствие эргодичности.

Для $a \in L^2(\square, d\mu)$, $b \in L^2(\square, d\mu)^N$ мы пишем $a = \text{div } b$, если

$$\langle b \cdot \nabla \varphi \rangle = -\langle a \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty. \quad (3.14)$$

Очевидно, что функция a обязана иметь нулевое среднее: $\langle a \rangle = 0$.

ЛЕММА ОБ АППРОКСИМАЦИИ [7], [8]. Если мера μ эргодична, то множество функций $a \in L^2(\square, d\mu)$, допускающих представление $a = \operatorname{div} b$, $b \in L^2(\square, d\mu)^N$, плотно в подпространстве всех функций из $L^2(\square, d\mu)$, имеющих нулевое среднее.

В случае выполнения неравенства Пуанкаре (1.16) всякий вектор $a \in L^2$ с нулевым средним допускает указанное представление $a = \operatorname{div} b$.

§ 4. Эргодичность и двухмасштабная сходимость

4.1. Изучим последовательность $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, считая, что она ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ и $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$. Первый вопрос: когда двухмасштабный предел не зависит от y ? Ответ существенно использует эргодичность меры μ .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть мера μ эргодична и выполнены условия

- i) $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$;
- ii) $\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)} \rightarrow 0$.

Тогда двухмасштабный предел $u(x, y)$ не зависит от y : $u(x, y) = u(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $a = \operatorname{div} b$, $a \in L^2(\square, d\mu)$, $b \in L^2(\square, d\mu)^N$.

Сначала заметим, что тождество (3.14) на периодических функциях влечет за собой аналогичное тождество на финитных функциях:

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} b(\varepsilon^{-1}x) \cdot \nabla \psi(x) d\mu_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^N} a(\varepsilon^{-1}x) \psi(x) d\mu_\varepsilon, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Поэтому для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\varphi u_\varepsilon) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= - \int_{\Omega} \varphi(x) a(\varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Левая часть стремится к нулю в силу условия ii). Второе слагаемое справа также имеет нулевой предел. Поэтому

$$0 = \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) a(y) u(x, y) dx d\mu(y).$$

Теперь из леммы об аппроксимации следует, что $u(x, y) = u(x)$. Теорема доказана.

Пусть теперь мера μ эргодична, $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, $u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$ ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$,

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x), \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} p(x, y).$$

Возникают вопросы: принадлежит ли $u(x)$ соболевскому пространству $H^1(\Omega)$? Как связаны ∇u и $p(x, y)$?

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть мера μ эргодична и невырождена. Тогда

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} u(x) \in H_0^1(\Omega), \\ \nabla u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} \nabla u(x) + v(x, y), \quad \text{где } v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $b \in V_{\text{sol}}$, $\langle b \rangle = \eta$, $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \varphi(x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= \int_{\Omega} \nabla(\varphi u_\varepsilon) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= - \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \end{aligned}$$

и по определению двухмасштабной сходимости

$$\int_{\Omega} \int_{\square} p(x, y) \varphi(x) \cdot b(y) dx d\mu(y) = - \int_{\Omega} \int_{\square} u(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(y) dx d\mu(y). \quad (4.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) \eta \cdot \nabla \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} z(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \\ z(x) &= \int_{\square} p(x, y) b(y) d\mu, \quad z \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Получили, что $\eta \cdot \nabla u \in L^2(\Omega)$ в смысле распределений, $\eta \cdot \nabla u = z(x)$.

Теперь используем невырожденность меры μ . В этом случае для любого $\eta \in \mathbb{R}^N$ найдется $b \in V_{\text{pot}}$, $\langle b \rangle = \eta$. Тогда $\nabla u \in L^2$ в смысле распределений, т.е. $u \in H^1(\Omega)$, и равенство (4.2) переписывается так:

$$\begin{aligned} \int_{\square} \int_{\Omega} p(x, y) \cdot \varphi(x) b(y) dx d\mu &= \int_{\square} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot b(y) \varphi(x) dx d\mu, \\ \int_{\square} \int_{\Omega} [p(x, y) - \nabla u(x)] \cdot \varphi(x) b(y) dx d\mu &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку линейная оболочка вектор-функций $\varphi(x) b(y)$ плотна в $L^2(\Omega, V_{\text{sol}})$, то в силу ортогонального разложения (3.10) $p - \nabla u \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$.

Остается проверить, что $u \in H_0^1(\Omega)$. Из (4.3) следует, что

$$\int_{\Omega} u \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla u \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}). \quad (4.4)$$

Это означает, что функция u , продолженная нулем на $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, принадлежит пространству $H^1(\mathbb{R}^N)$. Но тогда благодаря липшицевости Ω $u \in H_0^1(\Omega)$ — замыканию $C_0^\infty(\Omega)$ по соболевской норме. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай вырожденной меры (см. предложение 3.2).

По предыдущему $\eta \cdot \nabla u \in L^2(\Omega)$ для $\eta \in \tilde{L}$, в частности $A^{\text{hom}} \nabla u \in L^2(\Omega)$ и $\tilde{\nabla} u \in L^2(\Omega)$, где через $\tilde{\nabla} u$ обозначена ортогональная проекция ∇u на $\tilde{L}$.

Невырожденной мере соответствуют соболевские пространства $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, а вырожденной – пространство

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \tilde{\nabla} u \in L^2(\Omega)^N\}$$

с нормой $\|u\|_{L^2} + \|\tilde{\nabla} u\|_{(L^2)^N}$ и его подпространство $\tilde{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \tilde{H}^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$. При этом $u|_{\partial\Omega} = 0$ означает по определению тождество (4.4), в котором $\nabla u, \nabla \varphi$ заменены на $\tilde{\nabla} u, \tilde{\nabla} \varphi$. Важно, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\tilde{H}_0^1(\Omega)$. Для звездной Ω этот факт доказывается обычным сглаживанием, а для липшицевой – требуются более сложные рассуждения, см. [18; с. 311].

Теперь, если действовать как при доказательстве теоремы 4.2, получим:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} u(x) \in \tilde{H}_0^1(\Omega), \\ \nabla u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} \tilde{\nabla} u(x) + v(x, y), \quad \text{где } v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

До сих пор мы для простоты рассматривали последовательность $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Все результаты сохраняются, если брать $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Единственный пункт, требующий внимания, это условие ограниченности градиентов ∇u_ε . В случае $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ надо говорить “найдутся такие $\nabla u_\varepsilon \in \Gamma(u_\varepsilon)$, что последовательность ∇u_ε ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ ”.

4.2. Выведем из полученных результатов одно следствие, которое будет рабочим инструментом в вопросах усреднения. Будем считать, что имеют место соотношения (4.1) или более общие соотношения (4.5).

ЛЕММА 4.3. Пусть дополнительно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla_y w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) d\mu_\varepsilon = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), w \in C_{\text{per}}^\infty. \quad (4.6)$$

Тогда имеет место слабая сходимость “потоков”:

$$A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \rightharpoonup A^{\text{hom}} \nabla u(x). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств (2.7), (2.8) двухмасштабной сходимости имеем

$$\begin{aligned} A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)], \\ A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) &\rightharpoonup \int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] d\mu(y). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В частности, предел (4.6) равен

$$\int_{\Omega} \int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] \varphi(x) \cdot \nabla_y w(y) dx d\mu = 0.$$

Поскольку $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ произвольно, то

$$\int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] \cdot \nabla_y w(y) d\mu = 0 \quad \forall w \in C_{\text{per}}^\infty.$$

Видим, что $v(x, y)$ есть решение периодической задачи (3.12) для $\xi = \tilde{\nabla} u(x)$, и тогда формула (3.13) дает

$$\int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] d\mu = A^{\text{hom}} \tilde{\nabla} u(x) = A^{\text{hom}} \nabla u(x).$$

Теперь (4.8) означает искомую сходимость потоков.

4.3. Установленных выше свойств двухмасштабной сходимости достаточно, чтобы легко вывести теорему усреднения в классической постановке. Покажем, что в тождестве (1.13) можно перейти к пределу и получить усредненную задачу, связанную уже с мерой Лебега. Усредненное уравнение имеет обычный вид

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(A^{\text{hom}} \nabla u) + \lambda u = f$$

в случае невырожденной A^{hom} . В случае вырождения берем $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ вместо $H_0^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть мера μ эргодична и правые части f_ε в (1.12) слабо (сильно) сходятся к $f \in L^2(\Omega)$. Тогда последовательность решений слабо (сильно) сходится к решению усредненного уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (1.13) и ограниченности f_ε следует, что $u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$ ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Без потери общности считаем, что имеют место соотношения (4.1) или (4.5).

Взяв в интегральном тождестве (1.13) пробную функцию

$$\psi(x) = \varepsilon \varphi(x) w(y), \quad \text{где } y = \varepsilon^{-1}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad w \in C_{\text{per}}^\infty,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla_y w \varphi d\mu_\varepsilon + \varepsilon \int_{\Omega} A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi w d\mu_\varepsilon \\ + \varepsilon \lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi w d\mu_\varepsilon = \varepsilon \int_{\Omega} f \varphi w d\mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме первого, сходятся к нулю. Тогда сходится к нулю и первое, т.е. выполнено условие (4.6). Лемма 4.3 дает слабую сходимости (4.7). Кроме того, имеем $u_\varepsilon \rightharpoonup u, f_\varepsilon \rightharpoonup f$. Поэтому в тождестве (1.13) можно перейти к пределу и получить

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} \nabla u \cdot \nabla \psi dx + \lambda \int_{\Omega} u \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx.$$

Тем самым доказана первая часть теоремы о слабой сходимости решений.

Остается получить сильную сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u$ при условии, что правые части сходятся сильно. Это достигается следующим простым рассуждением. Рассмотрим задачу:

$$z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon), \quad -\operatorname{div}(A(\varepsilon^{-1}x) \nabla z_\varepsilon) + \lambda z_\varepsilon = u_\varepsilon. \quad (4.9)$$

Так как $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, то по доказанному выше $z_\varepsilon \rightharpoonup z$,

$$z \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(A^{\text{hom}} \nabla z) + \lambda z = u.$$

Умножая уравнение (4.9) скалярно на u_ε , а исходное уравнение (1.12) на z_ε , получаем

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} z_\varepsilon f_\varepsilon d\mu_\varepsilon.$$

Отсюда по определению сильной сходимости $f_\varepsilon \rightarrow f$ (см. предложение 1.1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} z_\varepsilon f_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} z f dx = \int_{\Omega} u^2 dx$$

и сильная сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u$ установлена. Теорема доказана.

4.4. Нам понадобится еще одно свойство двухмасштабной сходимости, но сначала введем класс $L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1)$. Скажем, что функция $u = u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square)$ принадлежит $L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\square, d\mu))$ и $\nabla_y u \in L^2(\Omega \times \square)^N$ – ее градиент, если

$$\begin{aligned} \exists u_n \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \square): \quad u_n - \text{периодичны по } y, \\ u_n \rightarrow u, \quad \nabla_y u_n \rightarrow \nabla_y u \quad \text{в } L^2(\Omega \times \square). \end{aligned}$$

Из определения видно, что $\nabla_y u \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$. Если выполнено неравенство Пуанкаре (1.16), то верно и обратное: каждому вектору $v = v(x, y) \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$ соответствует единственная функция $\hat{u} = \hat{u}(x, y)$ такая, что

$$\hat{u}(x, \cdot) \in H_{\text{per}}^1, \quad v = \nabla_y u, \quad \langle \hat{u} \rangle = 0, \quad (4.10)$$

и ясно, что $\hat{u} \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1)$.

Изучим ситуацию, когда $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ и $u_\varepsilon(x), \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x)$ ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 4.5. *Предположим, что выполнено неравенство Пуанкаре (1.16). Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности) имеет место (1.10).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $a \in L^2(\square, d\mu)$, $b \in L^2(\square, d\mu)^N$, связанные равенством $\text{div } b = a$. Пусть $\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$. Тогда для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ = \varepsilon \int_\Omega \nabla(\varphi u_\varepsilon) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ = - \int_\Omega u_\varepsilon(x) \varphi(x) a(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\square \varphi(x) v(x, y) \cdot b(y) dx d\mu = - \int_\Omega \int_\square \varphi(x) u(x, y) \text{div } b dx d\mu, \\ \int_\square v(x, y) \cdot b(y) d\mu = - \int_\square u(x, y) a(y) d\mu. \end{aligned}$$

В частности, полагая $a = 0$, видим, что $v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$. Для вектора v рассмотрим потенциал $\hat{u}$ из (4.10). Тогда из условия $\text{div } b = a$ имеем

$$\int_\square v(x, y) \cdot b(y) d\mu = \int_\square \nabla_y \hat{u}(x, y) \cdot b(y) d\mu = - \int_\square \hat{u}(x, y) a(y) d\mu.$$

Мы получили равенство

$$\int_\square u(x, y) a(y) d\mu = \int_\square \hat{u}(x, y) a(y) d\mu.$$

Из него по лемме об аппроксимации

$$\hat{u}(x, y) = u(x, y) - \int_\square u(x, y) d\mu$$

и поэтому $v = \nabla_y \hat{u} = \nabla_y u$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 4.5 была ранее доказана в [19], [20] для случая, когда μ есть поверхностная мера на гладкой периодической поверхности.

§ 5. Усреднение в некоторых моделях пористых сред

5.1. Сформулируем математическое представление о параллельных потоках, “мягко” или слабо связанных между собой.

Пусть μ – периодическая борелевская мера в $\mathbb{R}^N$, $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ – объединение периодических μ -измеримых множеств, непересекающихся в том смысле, что

$$i) \exists E_i \in H_{\text{рег}}^1(\square, d\mu): \nabla E_i|_F = 0, E_i|_{F_j} = \delta_{ij} - \text{символ Кронекера.} \quad (5.1)$$

Это условие, очевидно, выполнено, если, например, $\overline{F_i} \cap \overline{F_j} = 0$ ($i \neq j$).

Мягкую фазу определим как дополнение $F_0 = \mathbb{R}^N \setminus F$.

Зададим проницаемость такой среды матрицей

$$A_\varepsilon(x) = \begin{cases} A_i(\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \in F_i^\varepsilon, i = 1, \dots, k, \\ \delta(\varepsilon)A_0(\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \in F_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь $F_i^\varepsilon = \varepsilon F_i$ – гомотетические сжатия множеств F_i , $A_i(y)$ – μ -измеримые симметрические матрицы, подчиненные условию ограниченности и эллиптичности (1.2), $0 < \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В физической литературе принято брать $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Такая “автомодельная” проницаемость на мягкой фазе действительно приводит к наиболее интересным математическим проблемам. Случаи иного поведения (а их всего два: $\varepsilon^{-2}\delta(\varepsilon) \rightarrow \infty$ и $\varepsilon^{-2}\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$) исследуются проще. Мы сделаем это в § 6.

Кроме условия i) мы будем предполагать, что

- ii) для меры μ выполнено неравенство Пуанкаре (1.16);
- iii) меры $\mu|_{F_i}$ ($i = 1, \dots, k$) эргодичны и невырождены.

Отметим, что мы требуем невырожденности мер $\mu|_{F_i}$ ($i = 1, \dots, k$) только ради упрощения формулировки; требование эргодичности этих мер – существенно.

На мягкую фазу F_0 не накладывается никаких условий, кроме $\mu(F_0) > 0$.

Рассмотрим задачу Дирихле (1.12), в которой матрица $A_\varepsilon(x)$ имеет вид (5.2), а правые части f_ε ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Область Ω распадается на части:

$$\begin{aligned} \Omega_i^\varepsilon &= \Omega \cap F_i^\varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, k) - \text{жесткие фазы,} \\ \Omega_0^\varepsilon &= \Omega \cap F_0^\varepsilon - \text{мягкая фаза.} \end{aligned}$$

Из интегрального тождества

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i^\varepsilon} A_i(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, d\mu_\varepsilon + \delta(\varepsilon) \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, d\mu_\varepsilon \\ + \lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon \psi \, d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} f_\varepsilon \psi \, d\mu_\varepsilon, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned} \quad (5.3)$$

непосредственно следует оценка

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0^\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, d\mu_\varepsilon + \delta(\varepsilon) \int_{\Omega_0^\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, d\mu_\varepsilon + \lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 \, d\mu_\varepsilon \leq C < \infty. \quad (5.4)$$

Наша цель – перейти к пределу в интегральном тождестве и получить предельное уравнение. В первую очередь стоит описать само предельное уравнение.

Пределом решений $u_\varepsilon(x)$ будет функция $u(x, y)$ двух переменных $x \in \Omega$ и $y \in \square$, принадлежащая классу V , который коротко описывается так:

$$\begin{aligned} u &\in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1), \\ \nabla_y u|_F &= 0, \quad u|_{F_j} = u_j(x) \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Иначе говоря, берутся такие функции $u \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1)$, для которых (хотя бы один) градиент $\nabla_y u$ подчинен условию $\nabla_y u = 0$ в $L^2(\Omega \times F)$. Из эргодичности мер $\mu|_{F_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) следует, что $u|_{F_i}$ зависит только от $x \in \Omega$; дополнительно требуется $u|_{F_i} = u_i(x) \in H_0^1(\Omega)$. Рисунок 5 соответствует случаю двух жестких фаз. Здесь функция u определяется двумя жесткими компонентами $u_1(x), u_2(x)$ и мягкой компонентой $u|_{F_0}$, которая зависит от $x \in \Omega$ и $y \in F_0$.

Рис. 5

Полезно записать функцию $u \in V$ в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^k u_i(x) E_i(y) + v(x, y),$$

где E_i – разделяющие функции. Из (3.1), (5.5) видим, что $v|_F = \nabla_y v|_F = 0$. Другими словами, $v \in L^2(\Omega, X)$, где мы положили

$$X = \{h \in H_{\text{per}}^1(\square, d\mu) : h|_F = \nabla h|_F = 0\}. \quad (5.6)$$

Пусть A_i^{hom} – усредненные матрицы, соответствующие матрицам A_i и мерам $\mu|_{F_i}$:

$$\xi A_i^{\text{hom}} \xi = \inf_{\psi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)} \int_{\square \cap F_i} A_i(\xi + \nabla \psi) \cdot (\xi + \nabla \psi) d\mu, \quad A_i^{\text{hom}} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда предельная задача формулируется так: для данного $f \in L^2(\Omega \times \square)$ найти $u \in V$ такую, что выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} A_i^{\text{hom}} \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i dx + \int_{\Omega} \int_{\square} A_0(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y \varphi dx d\mu \\ + \lambda \int_{\Omega} \int_{\square} u \varphi dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \varphi dx d\mu, \quad \varphi \in V, \end{aligned} \quad (5.7)$$

в котором $\nabla_y u$ – некоторый градиент u .

Существование и единственность решения как пары $u, \nabla_y u$ получается совсем просто. Действительно, левая часть (5.6) задает скалярное произведение на множестве пар $\tilde{V} = \{u, \nabla u : u \in V\}$ и $\tilde{V}$ полно относительно соответствующей нормы. Поэтому достаточно сослаться на теорему Рисса.

В дальнейшем используются пробные функции $\varphi \in V$ частного вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) E_i(y) + \alpha(x) h(y), \quad \alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_0^\infty(\Omega), \quad h \in X. \quad (5.8)$$

Легко видеть, что линейная оболочка таких пробных функций (точнее, пар $\varphi, \nabla_y \varphi$) плотна в $\tilde{V}$ относительно упомянутой выше нормы. Поэтому само интегральное тождество (5.7) достаточно проверить только для этих пробных функций.

Сформулируем один из результатов работы.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ и правые части f_ε в (1.12) слабо (сильно) двухмасштабно сходятся к $f \in L^2(\Omega \times \square)$. Тогда последовательность решений u_ε слабо (сильно) двухмасштабно сходится к решению задачи (5.7).

Доказательство дано в §6, а сейчас мы обсудим само предельное уравнение.

5.2. С пространством X будут связаны краевые задачи, описывающие “мягкую” компоненту решения предельного уравнения, и нам потребуется неравенство

$$\langle h^2 \rangle \leq C \langle |\nabla h|^2 \rangle, \quad h \in X. \quad (5.9)$$

Действительно, допустив, что оно не имеет места, найдем

$$h_n \in X: \quad \langle h_n^2 \rangle = 1, \quad \langle |\nabla h_n|^2 \rangle \rightarrow 0.$$

Тогда из неравенства Пуанкаре (1.16) следует, что

$$\langle |h_n - c_n|^2 \rangle \rightarrow 0, \quad c_n = \langle h_n \rangle.$$

Поэтому последовательность h_n компактна в $L^2(\square, d\mu)$ и ее предел h есть ненулевая константа. В то же время, $h|_F = 0$, что невозможно.

В качестве образца краевой задачи возьмем следующую:

$$w \in X, \quad -\operatorname{div}(A_0 \nabla w) = p - \operatorname{div} q \quad \text{в } F_0, \quad \text{где } p \in L^2(F_0, d\mu), \quad q \in L^2(F_0, d\mu)^N. \quad (5.10)$$

По определению функция $w \in X$ есть решение, если

$$\langle A_0 \nabla w \cdot \nabla h \rangle = \langle p h \rangle + \langle q \cdot \nabla h \rangle \quad \forall h \in X.$$

С помощью оценки (5.9) нетрудно доказать, что решение существует и единственно вместе с градиентом.

Воспользуемся этим фактом и убедимся, что разделяющие функции E_j можно подчинить дополнительному условию $\operatorname{div}(A_0 \nabla E_j) = 0$ в F_0 , т.е.

$$\langle A_0 \nabla E_j \cdot \nabla h \rangle = 0 \quad \forall h \in X. \quad (5.11)$$

Достаточно вместо E_j взять $E_j + v_j$, где v_j — решение задачи $v_j \in X$, $\operatorname{div} A_0 \nabla v_j = -\operatorname{div}(A_0 \nabla E_j)$ в F_0 . В свою очередь, из (5.11) следует равенство

$$\sum_{j=1}^k \nabla E_j = 0 \quad \mu\text{-п.в.} \quad (5.12)$$

Действительно, $-1 + \sum_{j=1}^k E_j = v \in X$ и $\operatorname{div} A_0 \nabla v = 0$ в F_0 . Поэтому $\nabla v \equiv 0$.

Так как $b_i - E_i \in X$, то

$$c_{ij} = \langle A_0 \nabla E_i \cdot \nabla b_j \rangle = \langle A_0 \nabla E_i \cdot \nabla E_j \rangle = c_{ji} \quad (\text{симметрия}).$$

Заметим, что матрица $\{c_{ij}\}$ — неотрицательно определенная и не зависит от λ . Эта “матрица связи” удовлетворяет условию $\sum_i c_{ij} = 0$, как это следует из (5.12). Для $k = 2$ матрица связи имеет структуру

$$\begin{pmatrix} q & -q \\ -q & q \end{pmatrix}, \quad q = \langle A_0 \nabla E_1 \cdot \nabla E_1 \rangle.$$

Нетрудно проверить, что матрица $\{\beta_{ij}\}$ — также симметрическая и положительно определенная. Нелинейный характер ее зависимости от λ указывает, что система (5.15) как таковая не является резольвентной. В этом нет ничего особенного, поскольку эта система — всего лишь некоторая “проекция” предельной задачи (5.7). Сама же предельная задача имеет резольвентный характер, и это — наиболее важное в данном случае обстоятельство.

§ 6. Доказательство сходимости

6.1. Будем изучать общий случай задания проницаемости на мягкой фазе: $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ произвольно, см. (5.2).

Пусть u_ε — решение исходной задачи (1.12). Без потери общности считаем, что имеет место слабая двухмасштабная сходимость

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y). \quad (6.1)$$

Нам нужно выяснить структуру предельной функции u .

ЛЕММА 6.1. *Найдутся функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x) \in H_0^1(\Omega)$ такие, что*

$$u(x, y) = u_1(x), \quad \text{если } y \in F_1, \quad (6.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_1^\varepsilon} A_1(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} A_1^{\text{hom}} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (6.3)$$

и аналогично для других жестких компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi_1(y)$ — характеристическая функция множества F_1 . Тогда по свойству (2.7) двухмасштабной сходимости

$$\chi_1(\varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi_1(y) u(x, y).$$

С другой стороны, сужения $u_\varepsilon|_{\Omega_1^\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon|_{\Omega_1^\varepsilon}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2 по отношению к мере $\mu|_{F_1}$. Поэтому $\chi_1(\varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u_1(x) \in H_0^1(\Omega)$ и равенство (6.2) доказано. Далее, для пробной функции

$$\psi(x) = \psi_\varepsilon(x) = \varepsilon w(y) \varphi(x), \quad \text{где } y = \varepsilon^{-1}x, \quad w(y) \in C_{\text{per}}^\infty(\square), \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega),$$

имеем

$$\nabla \psi_\varepsilon|_{\Omega_1^\varepsilon} = \varphi(x) \nabla_y w + \varepsilon w \nabla \varphi, \quad \nabla \psi_\varepsilon|_{\Omega_j^\varepsilon} = \varepsilon w \nabla \varphi \quad \text{при } j > 1, \quad |\nabla \psi_\varepsilon| \leq C \quad \text{на } \Omega_0^\varepsilon.$$

Подставим $\psi = \psi_\varepsilon$ в интегральное тождество (5.3). Из оценок (5.4) легко заключаем, что все слагаемые, кроме, может быть, слагаемого

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} A_1(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla_y w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) d\mu_\varepsilon,$$

сходятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но тогда и указанное слагаемое сходится к нулю. По лемме 4.3 получаем искомую сходимость (6.3), и доказательство закончено.

Доказанная лемма описывает поведение решений u_ε на жестких компонентах. Поведение решений на мягкой компоненте уже *зависит от асимптотики* $\delta(\varepsilon)$.

6.2. Случай $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Этот случай соответствует сформулированной ранее теореме 5.1, которую мы сейчас докажем. Здесь $u_\varepsilon, \varepsilon \nabla u_\varepsilon$ ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ и по теореме 4.5 $u(x, y) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1), \varepsilon \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_y u$. Поскольку $\varepsilon \chi_j(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots, k$), то $\nabla_y u|_F = 0$. Поэтому функция u принадлежит классу V , см. (5.5).

Положим $\psi(x) = \psi_\varepsilon(x) = \varphi(x, \varepsilon^{-1}x)$, где φ — пробная функция (5.8). Очевидно,

$$\nabla \psi_\varepsilon|_{\Omega_j^\varepsilon} = \nabla \varphi_j, \quad \varepsilon \nabla \psi_\varepsilon = \nabla_y \varphi + o(1) \quad \text{по норме } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon).$$

Подставим $\psi = \psi_\varepsilon$ в интегральное тождество (5.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \int_{\Omega_j^\varepsilon} A_j(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi_j(x) d\mu_\varepsilon \\ & + \delta(\varepsilon) \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot [\nabla_y \varphi(x, \varepsilon^{-1}x) + o(1)] d\mu_\varepsilon \\ & + \lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} f_\varepsilon \varphi d\mu_\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предел первой суммы уже вычислен в (6.3). Далее, в нашем случае $\delta(\varepsilon) \varepsilon^{-1} = \varepsilon$, и поэтому предел второго слагаемого, вычисляемый по двухмасштабной сходимости

$$\varepsilon A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} A_0(y) \nabla_y u(x, y),$$

равен $\int_{\square} \int_{\Omega} A_0 \nabla_y u \cdot \nabla_y \varphi dx d\mu$. В результате получим, что u удовлетворяет тождеству (5.7) на пробных функциях из (5.8). Как уже отмечалось, этого достаточно для того, чтобы u было решением предельной задачи (5.7).

Нам остается проверить, что имеет место сильная сходимость $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если только правые части также сходятся сильно. Но это достигается тем же рассуждением, что и в теореме 4.4. Теорема 5.1 доказана.

$$\delta(\varepsilon) \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \psi(x) d\mu_\varepsilon \rightarrow 0,$$
$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(A^{\text{hom}} \nabla u) + \lambda u = f, \\ A^{\text{hom}} &= A_1^{\text{hom}} + A_2^{\text{hom}} + \cdots + A_k^{\text{hom}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$
$$\delta(\varepsilon)\varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla_y \varphi(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \rightarrow 0,$$
$$\sum_{j=1}^k \int_{\Omega} A_j^{\text{hom}} \nabla u_j \cdot \nabla \varphi_j \, dx + \lambda \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) \varphi(x, y) \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \varphi \, dx \, d\mu,$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda u_0 = f|_{F_0}, \\ -\operatorname{div}(A_1^{\operatorname{hom}} \nabla u_1) + \lambda \langle u E_1 \rangle = \langle f E_1 \rangle, \\ \dots\dots\dots \\ -\operatorname{div}(A_k^{\operatorname{hom}} \nabla u_k) + \lambda \langle u E_k \rangle = \langle f E_k \rangle. \end{array} \right.$$
[illegible]

где χ_i – характеристическая функция множества F_i , $\theta_i = \mu(F_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $\varepsilon^{-2}\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ и правые части f_ε слабо (сильно) двухмасштабно сходятся к $f \in L^2(\Omega \times \square)$. Тогда последовательность решений слабо (сильно) двухмасштабно сходится к решению системы (6.6).

§ 7. Аналог сильной резольвентной сходимости

7.1. Определим гильбертово пространство H как подпространство в $L^2(\Omega \times \square)$, состоящее из функций

$$f = f(x, y) = \begin{cases} f_i(x), & \text{если } y \in F_i \ (i = 1, \dots, k), \\ f_0(x, y), & \text{если } y \in F_0. \end{cases}$$

Скалярное произведение в H наследуется из $L^2(\Omega \times \square)$. Такой выбор пространства H объясняется очень просто: H – это замыкание множества V в $L^2(\Omega \times \square)$, см. (5.5). С предельной задачей (5.7) свяжем самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ так, что само это уравнение запишется как операторное уравнение (3.5) в H . Для этого через $D(\mathcal{A})$ обозначим совокупность решений задачи (5.7), в которой f пробегает H . На $D(\mathcal{A}) \subset V \subset H$ положим $\mathcal{A}u = f - \lambda u$. Как и в случае уравнения (3.2), нужно проверить, что $D(\mathcal{A})$ плотно в H . Для доказательства плотности возьмем второй экземпляр задачи (5.7), в котором f заменено на g , а u заменено на v . Получаем обычное равенство

$$\int_{\Omega} \int_{\square} f v \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} g u \, dx \, d\mu.$$

Пусть $f \in H$, $f \perp D(\mathcal{A})$ в H . Тогда $u = 0$ (поскольку можно взять $g = u$) и интегральное тождество (5.7) принимает вид

$$\int_{\Omega} \int_{\square} A_0 \nabla_y u \cdot \nabla_y \varphi \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \varphi \, dx \, d\mu \quad \forall \varphi \in V.$$

Полагая здесь $\varphi = u$, получаем $\nabla_y u = 0$. Тогда и $f = 0$ ввиду плотности V в H . Тем самым доказана самосопряженность оператора $\mathcal{A}$.

Итак, имеем допредельные самосопряженные операторы $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla)$, заданные в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, и предельный самосопряженный оператор $\mathcal{A}$, заданный в H .

Из теоремы 5.1 получаем следующий результат.

Имеет место сильная резольвентная сходимость, именно:

$$\text{если } f_\varepsilon \xrightarrow{2} f \in H, \text{ то } (\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} f_\varepsilon \xrightarrow{2} (\mathcal{A} + \lambda I)^{-1} f. \quad (7.1)$$

Указанная сходимость обладает всеми достоинствами классической сильной резольвентной сходимости: она влечет сильную двухмасштабную сходимость соответствующих спектральных проекторов и полугрупп (аналог теоремы Троттера–Като), см. [21]. Эти факты могут быть полезны в теории пористых сред. Дело в том, что исходным объектом в этой теории служит эволюционное уравнение

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon), \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_\varepsilon|_{t=0} = f_\varepsilon. \quad (7.2)$$

Кроме того, важнейшим считается вопрос о характере спектра допредельного оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ при малых ε . Сильная сходимость спектральных проекторов позволяет делать на этот счет некоторые заключения, если, конечно, известен спектр предельного оператора. Ниже мы рассматриваем эти вопросы подробнее.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть начальные значения f_ε сильно двумасштабно сходятся к $f \in H$. Тогда при любом $t \geq 0$

$$u_\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2} u(x, y, t),$$

где $u(x, y, t)$ – решение предельного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u = 0, \quad u|_{t=0} = f. \quad (7.3)$$

Поскольку $\mathcal{A}$ есть самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве H , то точный смысл самого предельного уравнения вполне очевиден: для любого начального значения $f \in H$ существует единственная функция $u(t) = e^{-\mathcal{A}t}f$ со значением в H такая, что $u(t)$ непрерывна в H и $u(0) = f$, $u(t)$ дифференцируема при $t > 0$, $u(t) \in D(\mathcal{A}) \subseteq V$ и $u'(t) + \mathcal{A}u = 0$.

Из стационарных уравнений (5.13), (5.14), полагая $f = -\frac{\partial u}{\partial t}$, $\lambda = 0$, имеем

[illegible]

Из последнего уравнения можно выразить решение $u(x, y, t)$ через компоненты $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_k(x, t)$ и получить для $u_1, u_2, \dots, u_k$ связанную систему с памятью. На подробностях останавливаться не будем, так как они вполне аналогичны случаю резольвентного уравнения. Отметим только, что связанные системы с памятью, по-видимому, впервые были обнаружены в работах Хрушлова [22]–[24].

§8. О спектре предельного оператора

8.1. Будем изучать случай, когда жесткая фаза – одна: $k = 1$, $F = F_1$.

Функцию $u \in V$ запишем в виде

$$u(x, y) = u_1(x) + v(x, y), \quad v \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1), \quad v|_{F_1} = \nabla_y v|_{F_1} = 0,$$

или короче: $v \in L^2(\Omega, X)$ (см. обозначение (5.6)).

Рассмотрим равенство $\mathcal{A}u = f$, где $u \in V$, $f \in H$. По определению должно выполняться тождество

$$\int_{\Omega} A_1^{\text{hom}} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi_1 \, dx + \int_{\Omega} \int_{\square} A_0 \nabla_y v \cdot \nabla_y \varphi \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \varphi \, dx \, d\mu, \quad \varphi \in V.$$

Выбирая здесь пробные функции (5.8) частного вида $\varphi = \alpha(x)h(y)$, а затем $\varphi = \varphi_1(x)$, получаем два равенства

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A_0(y)\nabla_y v) = f(x, y) \text{ в } F_0, \\ -\operatorname{div}(A_1^{\operatorname{hom}}\nabla u_1) = \int_{\square} f(x, y) d\mu(y) = \langle f \rangle \text{ в } \Omega, \end{cases} \quad (8.1)$$

причем в первом из них x играет роль параметра.

Введем два самосопряженных оператора.

i) $\mathcal{A}_0 = -\operatorname{div}_y(A_0(y)\nabla_y)$ определен в $L^2(F_0, d\mu)$ по следующему правилу. Мы знаем (см. (5.10)), что задача

$$w \in X, \quad -\operatorname{div}_y(A_0(y)\nabla_y w) = p$$

имеет решение для любого $p \in L^2(F_0, d\mu)$. Оператор $\mathcal{A}_0$ задается на множестве решений этого уравнения и оказывается положительно определенным в силу оценки (5.9). Кроме того, мы предполагаем, что обратный к нему вполне непрерывен. В модельных примерах это имеет место.

Тем же символом $\mathcal{A}_0$ обозначается и соответствующий оператор в $L^2(\Omega \times F_0)$; очевидно, спектр остается тем же, а собственные функции умножаются на произвольную функцию $a(x) \in L^2(\Omega)$.

Особенно просто выглядит оператор $\mathcal{A}_0$ в том случае, когда $d\mu = dx$ — мера Лебега, а мягкая фаза F_0 дисперсна, например является периодической системой шаров, $\square \cap F_0 = B$ — шар. Тогда пространство X (см. определение (5.6)) совпадает с множеством функций из $H_0^1(B)$, продолженных нулем на тор периодичности $\square$. Также с точностью до очевидного продолжения $\mathcal{A}_0$ — это самосопряженный оператор $-\operatorname{div}_y A_0(y)\nabla_y$ в $L^2(B)$, отвечающий задаче Дирихле в шаре B .

ii) $\mathcal{A}_1 = -\operatorname{div}(A_1^{\operatorname{hom}}\nabla)$ — это обычный усредненный оператор в $L^2(\Omega)$, отвечающий краевой задаче Дирихле.

Оператор $\mathcal{A}_0$ назовем *блоховским*, а оператор $\mathcal{A}_1$ — *пространственным*.

Теперь рассмотрим задачу на “спектре”:

$$\mathcal{A}u = su + f, \quad s \geq 0. \quad (8.2)$$

Согласно (8.1) имеем

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 v = s(u_1 + v) + f, \\ \mathcal{A}_1 u_1 = s\langle u_1 + v \rangle + \langle f \rangle. \end{cases}$$

Введем (пока формально) решения вспомогательных уравнений

$$\mathcal{A}_0 b = sb + 1, \quad \mathcal{A}_0 b_0 = sb_0 + f. \quad (8.3)$$

Тогда $v = su_1 b + b_0$,

$$\mathcal{A}_1 u_1 = \beta(s)u_1 + \langle sb_0 + f \rangle, \quad (8.4)$$

где $\beta(s) = s(1 + s\langle b \rangle)$. Задачи (8.3), (8.4) разрешимы, если s не является точкой спектра оператора $\mathcal{A}_0$, а $\beta(s)$ — точкой спектра оператора $\mathcal{A}_1$. Для таких s уравнение (8.2) имеет решение при любом $f \in H$. Итак,

$$\text{если } s \notin \operatorname{Sp} \mathcal{A}_0 \text{ и } \beta(s) \notin \operatorname{Sp} \mathcal{A}_1, \text{ то } s \notin \operatorname{Sp} \mathcal{A}.$$

Изучим подробней спектр оператора $\mathcal{A}$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\mathcal{A}u = su \text{ или } \begin{cases} \mathcal{A}_0 v = s(u_1 + v), \\ \mathcal{A}_1 u_1 = s\langle u_1 + v \rangle. \end{cases} \quad (8.5)$$

Замечаем, что если $\mathcal{A}_0 v = sv$ и $\langle v \rangle = 0$, то оба уравнения (8.5) выполняются при $u_1 = 0$. Другими словами, в этом случае $u = v(y)$ будет собственной функцией оператора $\mathcal{A}$. Собственной функцией будет также $a(x)v(y)$, $a(x) \in L^2(\Omega)$. Это тривиальные или *чисто блоховские* собственные функции.

По условию спектр оператора $\mathcal{A}_0$ состоит из конечнократных собственных значений, образующих сходящуюся к бесконечности последовательность положительных чисел. Разобьем его на две непересекающиеся части

$$\text{Sp } \mathcal{A}_0 = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\},$$

отнеся ко второй части собственные значения, у которых все соответствующие собственные функции имеют нулевое среднее.

Напишем разложение

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = \langle \varphi_n \rangle,$$

где φ_n — нормированные в $L^2(F_0, d\mu)$ собственные функции оператора $\mathcal{A}_0$. Считаем, что в этом разложении коэффициенты $c_n \neq 0$. Другими словами, собственные функции с нулевым средним здесь не участвуют. Тогда из $\mathcal{A}_0 b = sb + 1$ находим

$$b = b(y, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \varphi_n(y)}{\omega_n - s}, \quad \beta(s) = s(1 + s\langle b \rangle) = s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^2 c_n^2}{\omega_n - s}.$$

Первое из уравнений (8.5) выполняется, если положить $v(x, y) = su_1(x)b(y, s)$. Поскольку $s\langle u_1 + v \rangle = \beta(s)u_1(x)$, то второе уравнение удовлетворяется, если $k = \beta(s)$ есть точка спектра оператора $\mathcal{A}_1$, а $u_1(x)$ — соответствующая собственная функция.

Рис. 6

Функция $\beta(s)$ строго возрастает на промежутках между точками $0, \omega_1, \omega_2, \dots$. Из рис. 6 видно, что решения уравнения $\beta(s) = k \in \text{Sp } \mathcal{A}_1$ образуют бесконечные серии, имеющие своими пределами точки $\omega_1, \omega_2, \dots$. В результате получим:

если $k = \beta(s) \in \text{Sp } \mathcal{A}_1$, $u_1(x)$ – собственная функция оператора $\mathcal{A}_1$ с собственным значением k , то $u_1(x)(1 + sb(y))$ – собственная функция оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением s . (8.6)

Найденные “пространственные” собственные значения, конечно, могут попасть в множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, и тогда им будут соответствовать еще и чисто блоховские собственные функции. Покажем, что *никаких других собственных функций (кроме указанных в (8.6) и возможных блоховских) нет*. Для этого достаточно проверить, что уравнение (8.2) разрешимо, если f ортогонально в $L^2(\Omega \times \square)$ собственным функциям из (8.6) и соответствующим блоховским, т.е.

$$\int_{\Omega} \int_{\square} f(x, y) u_1(x) (1 + sb(y)) dx d\mu = 0, \quad (8.7)$$

$$\int_{\Omega} \int_{\square} f(x, y) a(x) \varphi(y) dx d\mu = 0, \text{ как только } \mathcal{A}_0 \varphi = s\varphi, \langle \varphi \rangle = 0, a \in L^2(\Omega). \quad (8.8)$$

Первое из уравнений (8.3), очевидно, разрешимо, поскольку $s \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Разрешимость второго следует из (8.8). Для разрешимости уравнения (8.4) нужно проверить условие ортогональности

$$\langle sb_0 + f \rangle \perp u_1 \text{ в } L^2(\Omega). \quad (8.9)$$

Но из уравнений (8.3) имеем равенство $\langle b_0 \rangle = \langle fb \rangle$, откуда

$$\int_{\Omega} \int_{\square} b_0 u_1 dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} b f u_1 dx d\mu$$

и поэтому (8.9) следует из (8.7).

Наконец, выясним, когда точка $s \in \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ будет собственным значением оператора $\mathcal{A}$. По определению множества $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ имеем $\mathcal{A}_0 \varphi = s\varphi, \langle \varphi \rangle \neq 0$. Пусть $u = u_1(x) + v(x, y)$ – собственная функция оператора $\mathcal{A}$. Тогда из (8.5) следует ортогональность

$$\mathcal{A}_0 v - sv = su_1 \perp \varphi \text{ в } L^2(F_0, d\mu).$$

Отсюда $u_1 \equiv 0$ и поэтому (см. второе уравнение (8.5)) $\langle v \rangle = 0$. Видим, что собственная функция – чисто блоховская. При этом s должно быть кратным собственным значением оператора $\mathcal{A}_0$.

Итак, оператор $\mathcal{A}$ имеет чисто точечный спектр в том смысле, что его *собственные функции образуют полную в H систему*.

При этом спектр оператора $\mathcal{A}$ устроен следующим образом. Он состоит из спектра оператора $\mathcal{A}_0$, который разбивается на две непересекающиеся части $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, и бесконечной серии конечнократных собственных значений, сходящихся слева к точкам $\omega_1, \omega_2, \dots$. Точки $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ – это такие собственные значения $\mathcal{A}_0$, у которых все соответствующие собственные функции

имеют нулевое среднее. Они являются бесконечнократными собственными значениями самого оператора $\mathcal{A}$ и составляют тривиальную или число блоховскую часть $\text{Sp } \mathcal{A}$.

Точка из $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ будет собственным значением оператора $\mathcal{A}$, причем бесконечнократным, только в том случае, когда она есть кратное собственное значение оператора $\mathcal{A}_0$.

Самое примечательное в геометрической структуре спектра оператора $\mathcal{A}$ — это наличие особого рода “лакун”. На рис. 6 жирно отмечена бесконечная система интервалов, на которых функция $\beta(s)$ отрицательна. Эти интервалы могут содержать точки из $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, но все остальные точки $\text{Sp } \mathcal{A}$ обязаны принадлежать дополнительным отрезкам, на которых $\beta \geq 0$. Это геометрическое расположение имеет место независимо от выбора области Ω , поскольку функция $\beta(s)$ строится только по блоховскому оператору $\mathcal{A}_0$. В частности, если вместо ограниченной области Ω взять все пространство $\mathbb{R}^N$, то спектр оператора $\mathcal{A}_1$ заполнит положительную полуось, а нетривиальный спектр $\mathcal{A}$ — все отрезки, на которых $\beta \geq 0$, т.е. станет бесконечнозонным.

8.2. Теперь можно вернуться к вопросу о сходимости спектра при усреднении.

Рассмотрим случай, когда $d\mu = dx$ — мера Лебега, а мягкая фаза F_0 дисперсна, например F_0 — периодическая система шаров, $\square \cap F_0 = B$ — шар. Кроме того, для некоторого упрощения допустим, что мягкая фаза Ω_0^ε состоит только из шариков — компонент множества F_0^ε , целиком содержащихся в Ω (приграничные шарики отнесем к жесткой фазе Ω_1^ε).

В этих условиях мы докажем следующую теорему о сходимости спектра.

ТЕОРЕМА 8.1. *Спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ сходится по Хаусдорфу к спектру оператора $\mathcal{A}$. Подробнее это означает:*

- 1) для любого $s \in \text{Sp } \mathcal{A}$ найдется последовательность $s_\varepsilon \in \text{Sp } \mathcal{A}_\varepsilon$ такая, что $s_\varepsilon \rightarrow s$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 2) все конечные предельные точки последовательности $s_\varepsilon \in \text{Sp } \mathcal{A}_\varepsilon$ принадлежат $\text{Sp } \mathcal{A}$.

Из сходимости по Хаусдорфу ясно, что спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ содержит лакуны (близкие к лакунам в спектре оператора $\mathcal{A}$), причем число этих лакун растет до бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 8.1 остается верной, если ограниченную область Ω заменить на $\mathbb{R}^N$ (доказательство более громоздкое и здесь не приводится). Следовательно, заключение о существовании лакун в спектре справедливо и для самосопряженного оператора $-\text{div}(A_\varepsilon \nabla)$ в $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Отметим, что свойство 1) сходимости по Хаусдорфу всегда обеспечивается сильной резольвентной сходимостью, в то время как более тонкое свойство 2) может отсутствовать. Дело здесь в следующем. Если u_ε — нормированные в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ собственные функции, $\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = s_\varepsilon u_\varepsilon$, причем $s_\varepsilon \rightarrow s$, $u_\varepsilon \xrightarrow{2} u$, то всегда $\mathcal{A}u = su$. Однако предельная функция u может оказаться нулевой, и тогда точка s не обязана принадлежать $\text{Sp } \mathcal{A}$.

Сейчас установим одно свойство компактности, из которого непосредственно следует свойство 2).

ЛЕММА 8.2. Пусть

$$\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = s_\varepsilon u_\varepsilon, \quad \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx = 1.$$

Если $s_\varepsilon \rightarrow s \notin \text{Sp } \mathcal{A}_0$, то последовательность u_ε компактна в смысле сильной двухмасштабной сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in H_0^1(\Omega), \quad -\text{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = s_\varepsilon u_\varepsilon, \\ \int_{\Omega_1^\varepsilon} A_1(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx &= s_\varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx = s_\varepsilon. \end{aligned}$$

Продолжим $u_\varepsilon|_{\Omega_1^\varepsilon}$ на всю область Ω с условием

$$\tilde{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 dx \leq C < \infty. \quad (8.10)$$

Хорошо известно, что такое продолжение возможно [9], [10; гл. III]. Дополнительно всегда можно обеспечить соотношение

$$-\text{div } A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla \tilde{u}_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega_0^\varepsilon.$$

Тогда для разности $z_\varepsilon = u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon$ получаем

$$z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_0^\varepsilon), \quad \varepsilon^2 \text{div } A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla z_\varepsilon + s_\varepsilon z_\varepsilon = s_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \text{ в } \Omega_0^\varepsilon. \quad (8.11)$$

Из оценки (8.10) видно, что последовательность $\tilde{u}_\varepsilon$ компактна в $L^2(\Omega)$,

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightarrow \tilde{u} \text{ в } L^2(\Omega), \quad (8.12)$$

и требуется проверить, что последовательность z_ε компактна в смысле сильной двухмасштабной сходимости.

Ниже мы имеем дело с последовательностями функций, заданных на Ω_0^ε ; продолжаем эти функции нулем на Ω и рассматриваем вопросы компактности. Например, правая часть (8.11) имеет вид $s_\varepsilon \chi_0^\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon$, где χ_0^ε — характеристическая функция множества F_0^ε . Из (8.12) видно, что

$$\chi_0^\varepsilon(x) \tilde{u}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \tilde{u}(x) \chi_0(y). \quad (8.13)$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_0^\varepsilon), \quad \varepsilon^2 \text{div } A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla v_\varepsilon + s_\varepsilon v_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad f_\varepsilon \in L^2(\Omega_0^\varepsilon). \quad (8.14)$$

Нам потребуется следующее ключевое свойство:

$$\begin{aligned} &\text{если } f_\varepsilon \xrightarrow{2} f \in H, \text{ то} \\ &v_\varepsilon \xrightarrow{2} v = v(x, y), \quad v \in L^2(\Omega, X), \quad -\mathcal{A}_0 v + s v = f. \end{aligned} \quad (8.15)$$

(Напомним, что в нашем случае пространство X отождествляется с $H_0^1(B)$, $B = \square \cap F_0$ — шар.)

Легко видеть, что из свойства (8.15) (которое будет доказано ниже) следует компактность z_ε . Действительно, согласно (8.15), (8.13) имеем

$$z_\varepsilon \xrightarrow{2} z, \quad -\mathcal{A}_0 z + s z = s \tilde{u}.$$

Умножая уравнение (8.11) скалярно на v_ε , а уравнение (8.14) — на z_ε , получаем

$$\int_{\Omega} z_\varepsilon f_\varepsilon dx = s_\varepsilon \int_{\Omega} v_\varepsilon \chi_0^\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon dx.$$

В силу (8.15) и сильной сходимости (8.13)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} z_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x) dx = s \int_{\Omega} \int_{F_0} v(x, y) \tilde{u}(x) dx dy = \int_{\Omega} \int_{F_0} z(x, y) f(x, y) dx dy$$

(на последнем шаге мы использовали предельные уравнения для v и z). В частности, взяв $f_\varepsilon = z_\varepsilon$, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} z_\varepsilon^2(x) dx = \int_{\Omega} \int_{F_0} z^2(x, y) dx dy,$$

и искомая двухмасштабная компактность z_ε установлена.

Итак, нам остается доказать свойство сходимости (8.15).

Рассмотрим самосопряженный в $L^2(\Omega_0^\varepsilon)$ оператор $T_\varepsilon = -\varepsilon^2 \operatorname{div}(\mathcal{A}_0(\varepsilon^{-1}x)\nabla)$, отвечающий задаче Дирихле в Ω_0^ε . Так как Ω_0^ε состоит из отдельных шаров, то оператор T_ε распадается и его спектр совпадает со спектром оператора $\mathcal{A}_0$: $\operatorname{Sp} T_\varepsilon = \operatorname{Sp} \mathcal{A}_0$. В нашем случае $\mathcal{A}_0 = -\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y$ — самосопряженный оператор, отвечающий задаче Дирихле в шаре $B = \square \cap F_0$. Поскольку s_ε отделена от спектра T_ε , то

$$\|(T_\varepsilon - s_\varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho(s_\varepsilon, \operatorname{Sp} \mathcal{A}_0)} \leq C < \infty. \quad (8.16)$$

Отсюда для решения v_ε уравнения (8.14) получаем оценку

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} v_\varepsilon^2 dx \leq C_1 < \infty. \quad (8.17)$$

Без потери общности считаем, что имеет место двухмасштабная сходимость

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v, \quad \varepsilon \nabla v_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_y v, \quad v \in L^2(\Omega, H_0^1(B)).$$

В интегральном тождестве

$$-\int_{\Omega} \varepsilon^2 A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \psi_\varepsilon dx + s_\varepsilon \int_{\Omega} v_\varepsilon \psi_\varepsilon dx = \int_{\Omega} f_\varepsilon \psi_\varepsilon dx$$

возьмем

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x) b(y), \quad y = \varepsilon^{-1}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad b(y) \in C_0^\infty(B)$$

(функция $b(y)$ рассматривается как периодическая). Предельный переход дает

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \int_{\square} A_0(y) \nabla_y v \cdot \nabla_y b(y) \varphi(x) dx dy \\ & + s \int_{\Omega} \int_{\square} v(x, y) \varphi(x) b(y) dx dy = \int_{\Omega} \int_{\square} f(x, y) \varphi(x) b(y) dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда $\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y v + s v = f$, что и требовалось.

§9. Приложение: о тангенциальном градиенте

9.1. Градиент функции из соболевского пространства $H_{\text{рег}}^1 = H_{\text{рег}}^1(\square, d\mu)$ определен неоднозначно. Множество градиентов данной функции имеет структуру $\nabla u + g$, где ∇u – некоторый градиент, а g – произвольный градиент нуля, $g \in \Gamma(0)$.

По определению $g \in L^2(\square, d\mu)^N = (L^2)^N$ есть градиент нуля, если выполнено соотношение (3.1). Из него следует, что $\Gamma = \Gamma(0)$ – подпространство векторного пространства $(L^2)^N$. Установим некоторые свойства этого подпространства.

i) Если $g \in \Gamma$, $a \in L^\infty$, то $ag \in \Gamma$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть случай $a \in C_{\text{рег}}^\infty$. Тогда из (3.1) имеем

$$a\varphi_n \xrightarrow{L^2} 0, \quad \nabla(a\varphi_n) = a\nabla\varphi_n + \nabla a\varphi_n \xrightarrow{(L^2)^N} ag \implies ag \in \Gamma.$$

ii) Пусть Q – ортогональный проектор из $L^2(\square, d\mu)^N$ на Γ . Тогда

$$Q(ag) = aQg \quad \forall g \in L^2(\square, d\mu)^N, \quad a \in L^\infty(\square, d\mu).$$

В самом деле, положив $\bar{g} = Qg$, имеем

$$\bar{g} \in \Gamma, \quad g - \bar{g} \perp \Gamma.$$

Но тогда по свойству i)

$$a\bar{g} \in \Gamma, \quad \langle a(g - \bar{g}) \cdot h \rangle = 0 \quad \forall h \in \Gamma,$$

что и требуется.

iii) Множество $\Gamma \cap L^\infty(\square, d\mu)^N$ плотно в Γ .

Действительно, если a_n – характеристическая функция множества $\{x \in \square, |g| \leq n\}$, то $a_n g \in \Gamma$ и $a_n g \rightarrow g$ при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 9.1. *Существует μ -измеримое периодическое подпространство $D(x) \subset \mathbb{R}^N$ такое, что*

$$\Gamma = \Gamma(0) = \{g \in L^2(\square, d\mu)^N : g(x) \in D(x)\}. \quad (9.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e^1, \dots, e^N$ – естественный базис в $\mathbb{R}^N$. Положим

$$\xi^i = Qe^i$$

и определим $L(x)$ как линейную оболочку векторов $\xi^1(x), \dots, \xi^N(x)$.

Обозначим через B подпространство в $L^2(\square, d\mu)^N$, определенное правой частью (9.1). Требуется проверить, что $\Gamma = B$.

Пусть $g \in \Gamma \cap (L^\infty)^N$. Тогда по свойству ii)

$$g = g_1 e^1 + \dots + g_N e^N = Qg = g_1 \xi^1 + \dots + g_N \xi^N \in B.$$

В силу свойства iii) и замкнутости B получаем $\Gamma \subseteq B$. Проверим теперь, что $B \subseteq \Gamma$. Так как $\xi^1, \dots, \xi^N \in \Gamma$, то по свойствам i), ii)

$$a(x) \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi^i \in \Gamma, \quad a \in L^\infty, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^1.$$

Покажем, что такие элементы плотны в B . Пусть

$$b \in B, \quad \left\langle a(x)b(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \xi^i \right) \right\rangle = 0.$$

Поскольку a произвольно, то для μ -п.в. x

$$b(x) \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi^i(x) = 0,$$

что дает $b(x) = 0$. Лемма доказана.

Теперь мы можем уточнить предложение 3.1. Пусть $T(x) = (D(x))^\perp$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. *Всякая функция из соболевского пространства H_{per}^1 имеет единственный градиент, удовлетворяющий условию*

$$A(x)\nabla u(x) \in T(x). \quad (9.2)$$

Действительно, достаточно для μ -п.в. $x \in \square$ решить задачу

$$c(x) \in D(x), \quad A(x)[\nabla u(x) + c(x)] \perp D(x),$$

где $\nabla u(x)$ — какой-то градиент u . Тогда $\nabla u + c$ будет удовлетворять условию (9.2).

В частности, существует единственный тангенциальный градиент, т.е. удовлетворяющий условию $\nabla u \in T(x)$. Очевидно также, что если $\nabla u(x)$ — какой-то градиент u , а $P(x)$ — ортогональный проектор $\mathbb{R}^N \rightarrow T(x)$, то $P(x)\nabla u(x)$ будет тангенциальным градиентом.

Резюмируем полученные результаты. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9.3. *Существует μ -измеримое периодическое подпространство $T(x)$ такое, что множество градиентов любой функции из H_{per}^1 имеет вид $\nabla u(x) + g(x)$, где $\nabla u(x) \in T(x)$, а $g(x)$ — произвольный вектор из $L^2(\square, d\mu)^N$ такой, что $g(x) \in T^\perp(x)$.*

Подпространство $T(x)$ называется *тангенциальным* в точке x , а ∇u — тангенциальным градиентом.

9.2. В некоторых вопросах предпочтительно иметь дело исключительно с тангенциальным градиентом. Но вспомним, что интегральному тождеству (3.3) удовлетворяет функция $u(x)$ вместе со своим градиентом, подчиненным условию (3.4), а не тангенциальным. В связи с этим возникает задача так изменить исходную матрицу $A(x)$, чтобы новому уравнению с матрицей $\hat{A}(x)$ удовлетворяла та же функция $u(x)$ вместе со своим тангенциальным градиентом. Эта процедура носит название *релаксации*; смысл названия будет ясен из дальнейшего.

Благодаря теореме 9.3 задача нахождения матрицы $\hat{A} = \hat{A}(x)$ носит *поточечный характер*. Положим

$$\hat{A}(x)\xi \cdot \xi = \min_{\eta \in D(x)} A(x)(\xi + \eta) \cdot (\xi + \eta).$$

Симметрическая матрица $\hat{A}$ равна нулю на D и имеет T в качестве области значений, в частности $\hat{A}\xi = \hat{A}P\xi$. Кроме того, $A\xi = \hat{A}\xi$, если $A\xi \in T$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} A(\xi + \eta) \cdot (\xi + \eta) &= A\xi \cdot \xi + A\eta \cdot \eta, \\ \hat{A}\xi \cdot \xi &= A\xi \cdot \xi \implies A\xi = \hat{A}\xi \quad (\text{поскольку } A \geq \hat{A}). \end{aligned}$$

Возвратимся теперь к тождеству (3.3) и вспомним, что $A\nabla u \in T$. В результате

$$A\nabla u \cdot \nabla \varphi = \hat{A}\nabla u \cdot \nabla \varphi = \hat{A}P\nabla u \cdot \nabla \varphi,$$

и поскольку $P\nabla u$ — тангенциальный градиент, задача релаксации решена.

Вектор-функцию $b(x)$ будем называть тангенциальной, если $b(x) \in T(x)$. Из определения матрицы $\hat{A}$ видно, что вектор $\hat{A}(x)\xi$ тангенциален. Все собственные векторы матрицы $\hat{A}$ лежат в тангенциальном подпространстве.

ПРИМЕР. Пусть $N = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0,$$

T — ось x_1 . Тогда

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Термин “релаксация” связан со следующим обстоятельством. Функционал

$$\Phi(u) = \langle A(x)\nabla u \cdot \nabla u \rangle \quad \text{на } C_{\text{reg}}^\infty$$

не является полунепрерывным снизу относительно L^2 -сходимости. Его релаксация

$$\hat{\Phi}(u) = \inf_{u_\varepsilon \rightarrow u} \Phi(u_\varepsilon) = \min_{\nabla u \in \Gamma(u)} \langle A(x)\nabla u \cdot \nabla u \rangle = \langle \hat{A}\nabla u \cdot \nabla u \rangle.$$

Последний интеграл справа уже не зависит от выбора градиента, и можно взять в нем тангенциальный градиент.

Лемма 9.1 доказана совместно с профессором Dal Maso, которому автор выражает благодарность за обсуждение вопросов, касающихся градиента. По поводу проблемы релаксации см. также [25].

9.3. Сделаем несколько замечаний относительно потенциальных и соленоидальных векторов. Очевидно, что любой градиент нуля есть потенциальный вектор. Напомним (см. (3.7)), что v потенциален, $v \in V_{\text{pot}}$, если

$$\exists \varphi_n \in C_{\text{per}}^\infty: \nabla \varphi_n \rightarrow v \text{ в } (L^2)^N.$$

Разлагая $\nabla \varphi_n$ в ортогональную сумму $\nabla \varphi_n = P \nabla \varphi_n + a_n$, $a_n \in \Gamma$, приходим к очевидному представлению

$$V_{\text{pot}} = \widehat{V}_{\text{pot}} \oplus \Gamma,$$

где $\widehat{V}_{\text{pot}}$ есть замыкание в $(L^2)^N$ множества $\{P \nabla \varphi, \varphi \in C_{\text{per}}^\infty\}$. Элементы из $\widehat{V}_{\text{pot}}$ — это тангенциальные потенциальные векторы.

Любопытно, что соленоидальные векторы автоматически тангенциальны. Действительно, пусть вектор b соленоидален, т.е. выполнено условие ортогональности (3.8). Выбрав в (3.8) $\varphi = \varphi_n$ — последовательность из (3.1), получим $b \perp \Gamma(0)$. Отсюда следует наше утверждение.

Отмеченное свойство позволяет описать соленоидальные векторы в случае периодического графа на плоскости. Соленоидальный вектор на каждом ребре направлен вдоль ребра и постоянен на этом ребре (последнее легко следует из (3.8)). Рассмотрим вершину графа. Пусть в ней сходится s ребер. Возьмем единичные векторы $b^1, b^2, \dots, b^s$, идущие вдоль ребер к вершине. Тогда на ребрах вектор b равен $\lambda_1 b^1, \lambda_2 b^2, \dots, \lambda_s b^s$, причем должно быть выполнено соотношение

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 0,$$

легко вытекающее из (3.8). Такие соотношения нужно составить для каждой вершины, приняв во внимание условие периодичности. Дело сведется к решению некоторой однородной системы линейных уравнений.

Список литературы

1. *De Giorgi E., Spagnolo S.* Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine // Boll. Unione Mat. Ital. 1973. № 8. P. 391–411.
2. *Бажалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 516–519.
3. *Бажалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
4. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
5. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
6. *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 8. С. 27–58.
7. *Жиков В. В.* Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.
8. *Жиков В. В.* К технике усреднения вариационных задач // Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 1. С. 14–29.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
10. *Zhikov V. V., Kozlov S. M., Olejnik O. A.* Homogenization of differential operators and integral functionals. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

11. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
12. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 4. P. 823–836.
13. Hornung U., Jäger W. Diffusion, convection, adsorption, and reaction of chemicals in porous media // J. Differential Equations. 1991. V. 92. № 2. P. 199–225.
14. Bourgeat A., Mikelić A., Pyatnitski A. Modèle de double porosité aléatoire // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1998. V. 327. P. 99–104.
15. Hornung U. (ed.) Homogenization and porous media. New York: Springer-Verlag, 1997.
16. Сандраков Г. В. Осреднение нестационарных уравнений с контрастными коэффициентами // Докл. РАН. 1997. Т. 335. № 5. С. 605–608.
17. Сандраков Г. В. Осреднение нестационарных задач теории сильно неоднородных упругих сред // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 3. С. 308–311.
18. Экланд И., Тедмам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
19. Allaire G., Damlamian A., Hornung U. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications // Mathematical modelling of flow through porous media / ed. A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckhaus, A. Mikelić. Singapore: World Scientific, 1995. P. 15–25.
20. Neuss-Radu M. Some extensions of two-scale convergence // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1996. V. 322. P. 899–904.
21. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
22. Khruslov E. Ya. Homogenized models of strongly inhomogeneous media // Proceedings of the International congress of mathematicians, Zurich, Switzerland, 1994. Basel: Birkhäuser, 1995.
23. Хруслов Е. Я. Усреднение модели сильно неоднородных сред с памятью // УМН. 1990. Т. 45. № 1. С. 197–199.
24. Khruslov E. Homogenized models of composite media // Composite media and homogenization theory / ed. G. Dal Maso, G. F. Dell'Antonio. Basel: Birkhäuser, 1991. P. 159–182.
25. Bouchitté G., Buttazzo G., Seppecher P. Energies with respect to a measure and applications to low dimensional structures // Calc. Var. Partial Differential Equations. 1997. V. 5. № 1. P. 37–54.

Владимирский государственный
педагогический университет
E-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

Поступила в редакцию
19.04.1999 и 17.02.2000