Общероссийский математический портал

В. В. Коннов, О дифференциально-геометрических признаках кривых Веронезе,
Матем. сб., 2000, том 191, номер 7, 73–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:32:51

УДК 514.76

В. В. Коннов

О дифференциально-геометрических признаках кривых Веронезе

Одна из задач *проблемы алгебраизуемости* гладких подмногообразий проективного пространства заключается в том, чтобы найти инвариантные дифференциально-геометрические признаки конкретных алгебраических многообразий. В работе найден и доказан признак кривых Веронезе W_n^1 , а также решена задача о нахождении необходимого и достаточного условия того, чтобы пара гладких кривых принадлежала одной кривой Веронезе W_n^1 . Пусть $\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma)$ – многообразие пар различных точек кривой γ , а $\gamma_1 \times \gamma_2$ – многообразие пар точек двух кривых γ_1 и γ_2 , вложенных в проективное пространство P^n . На многообразиях $\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma)$ и $\gamma_1 \times \gamma_2$ строится система дифференциальных инвариантов $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$, имеющих следующий геометрический смысл. Для многообразия $\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma)$ условие $J_1 \equiv J_2 \equiv \dots \equiv J_{n-1} \equiv 1$ служит признаком того, что линия γ является кривой Веронезе W_n^1 . Для многообразия $\gamma_1 \times \gamma_2$ условие $J_1 \equiv J_2 \equiv \dots \equiv J_{n-1} \equiv 1$ является критерием принадлежности пары кривых γ_1 и γ_2 одной кривой Веронезе W_n^1 .

Библиография: 13 названий.

Введение

Современная алгебраическая геометрия оперирует мощным математическим аппаратом исследования, который довольно часто позволяет детально описать геометрию конкретных алгебраических многообразий. И всякий раз, когда исследования гладких подмногообразий проективного пространства сводятся к изучению класса алгебраических многообразий, становится возможным одновременное использование как дифференциально-геометрических, так и алгебро-геометрических методов. В силу этого *общая проблема алгебраизуемости* заключается в нахождении дифференциально-геометрических критериев того, что заданное гладкое подмногообразие является алгебраическим.

Не менее актуальным является решение задач *частной проблемы алгебраизуемости*, состоящей в нахождении дифференциально-геометрических критериев конкретных алгебраических многообразий, а также признаков принадлежности заданной совокупности гладких подмногообразий некоторому конкретному алгебраическому многообразию. К числу решенных задач подобного типа в классической дифференциальной геометрии относятся признаки вырождения подмногообразий в плоскость или квадрику, теорема Абеля о принадлежности четверки плоских кривых одной кривой четвертого порядка, ее многомерные обобщения (см. [1], [2]) и другие известные результаты.

Многообразия Веронезе относятся к числу алгебраических многообразий, которые наиболее часто встречаются в различных приложениях. Они являются объектом интенсивного изучения не только алгебраической, но и дифференциальной

геометрии. Так, например, в работе [3] (см. также [4]) найден признак двумерной поверхности Веронезе в пятимерном проективном пространстве, а в работе [5] вводится понятие Веронезе-структуры (*Veronese-structure*) и изучается класс квадратичных вложений Веронезе. Интересные результаты, касающиеся дифференциальной геометрии многообразий Веронезе, можно найти в [6]. Метрический подход к изучению вложений Веронезе представлен в [7]–[9].

В настоящей работе частная проблема алгебраизуемости исследуется применительно к кривым Веронезе (т.е. к *вложениям Веронезе* проективной прямой в многомерное проективное пространство). Находится дифференциально-геометрический признак кривых Веронезе, а также решается задача о нахождении необходимого и достаточного условия принадлежности пары гладких кривых одной кривой Веронезе.

§ 1. Многообразие реперов проективного пространства

Пусть W – вещественное векторное пространство размерности $n + 1$, $P^n = P(W)$ – порожденное им проективное пространство, $p: W \setminus \{0\} \rightarrow P(W)$ – каноническая проекция (*отображение проективизации*). Обозначим через $\mathcal{F}(P(W))$ многообразие всех базисов $B = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ пространства W , нормированных условием $\det\{e_0, e_1, \dots, e_n\} = 1$ относительно некоторого фиксированного базиса B_0 . Каждый базис $B = \{e_u\} \in \mathcal{F}(P(W))$ однозначно определяет проективный репер $\{E_u, E\}$ с вершинами $E_u = p(e_u)$ и единичной точкой $E = p(\sum_{u=0}^n e_u)$. Поэтому многообразие $\mathcal{F}(P(W))$ отождествляется с группой Ли $SL(n+1)$. При этом $SL(n+1) \simeq PGL(n)$, если n четно, и $SL(n+1)/\{E, -E\} \simeq PGL_0(n)$, если n нечетно. Здесь $PGL_0(n)$ – связная компонента единицы полной проективной группы $PGL(n)$.

Каждый вектор e_u базиса $B \in \mathcal{F}(P(W))$ можно рассматривать как гладкую W -значную функцию ($e_u: B \rightarrow e_u$) на группе Ли $PGL_0(n)$. Поэтому de_u – это W -значная 1-форма на $PGL_0(n)$. Разлагая ее по базису B пространства W , получаем:

$$de_u = \omega_u^v e_v. \quad (1)$$

Формы ω_u^v являются *левоинвариантными формами* группы Ли $PGL(n)$ и удовлетворяют *структурным уравнениям Маурера–Картана*:

$$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v, \quad (2)$$

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \dots + \omega_n^n = 0. \quad (3)$$

Равенства (1), в которых 1-формы ω_u^v удовлетворяют уравнениям (2), (3), называются *уравнениями инфинитезимальных перемещений репера проективного пространства*, а сами уравнения (2), (3) – *структурными уравнениями проективного пространства* [4]. Эти уравнения играют фундаментальную роль при изучении подмногообразий проективного пространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [3], [10]. Пусть ω_u^v – формы Маурера–Картана группы $PGL(n)$ и $f_1, f_2: M \rightarrow \mathcal{F}(P(W))$ – два гладких вложения связного многообразия M в многообразие $\mathcal{F}(P(W))$. Равенство $f_1^* \omega_u^v = f_2^* \omega_u^v$ является необходимым и достаточным условием того, что подмногообразия $f_1(M)$ и $f_2(M)$ совпадают с точностью до проективного преобразования: $f_1(M) = g \cdot f_2(M)$, где $g \in PGL(n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [3], [10]. Пусть θ_u^v – дифференциальные 1-формы на связном, односвязном многообразии M ; ω_u^v – формы Маурера–Картана группы $\mathrm{PGL}(n)$. Формы θ_u^v удовлетворяют уравнениям Маурера–Картана (2), (3) группы $\mathrm{PGL}(n)$ тогда и только тогда, когда существует гладкое отображение $f: M \rightarrow \mathcal{F}(P(W))$, для которого $\theta_u^v = f^*\omega_u^v$.

§ 2. Пара кривых в проективном пространстве. Инварианты пар точек

Пусть $f: I \rightarrow P(W)$ – гладкое вложение числового интервала I в проективное пространство $P(W)$, тогда $f(I) = \gamma$ – гладкая связная кривая в $P(W)$. Рассмотрим произвольное гладкое поднятие F отображения f в векторное пространство W , т.е. $f = p \circ F$. Поднятие F называется *векторным уравнением* кривой γ . Допустимая замена поднятия $\tilde{F} = \lambda \cdot F$, где λ – гладкая знакопостоянная функция на I , называется *перенормировкой* векторного уравнения кривой γ .

Пусть $t_0 \in I$, тогда $A = f(t_0) \in P(W)$, $F(t_0) \in W$ и $p(F(t_0)) = A$. Последовательность подпространств

$$\langle F(t_0) \rangle, \langle F(t_0), F'(t_0) \rangle, \dots, \langle F(t_0), F'(t_0), \dots, F^{(n)}(t_0) \rangle$$

векторного пространства W не зависит от выбора поднятия F (инвариантна относительно перенормировки векторного уравнения) и при помощи отображения проективизации корректно определяет в $P(W)$ последовательность проективных плоскостей

$$A, PT_A^1(\gamma), \dots, PT_A^n(\gamma).$$

Здесь $A = p(\langle F(t_0) \rangle)$ – точка на кривой γ , соответствующая параметру t_0 ; $PT_A^1(\gamma) = p(\langle F(t_0), F'(t_0) \rangle)$ – касательная прямая к кривой γ в точке A ; $PT_A^k(\gamma) = p(\langle F(t_0), F'(t_0), \dots, F^{(k)}(t_0) \rangle)$ – проективное соприкасающееся пространство порядка k к кривой γ в точке A .

Кривая γ называется *кривой общего типа*, если для любой ее точки A и любого числа $k = 1, 2, \dots, n$ имеют место равенства $\dim PT_A^k(\gamma) = k$. В каждой точке $A = f(t_0)$ кривой общего типа $\gamma \subset P^n$ определитель Вронского отличен от нуля:

$$\det(F(t_0), F'(t_0), \dots, F^{(n)}(t_0)) \neq 0.$$

Пусть γ_1 и γ_2 – две гладкие связные кривые общего типа в $P(W)$, удовлетворяющие *условию общего положения*, т.е. такие, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ и для любой точки $A \in \gamma_1$ и любой точки $B \in \gamma_2$ выполняются равенства:

$$\dim(PT_A^i(\gamma_1) \cap PT_B^{n-i}(\gamma_2)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Если $a = a(u)$ и $b = b(v)$ – векторные уравнения кривых общего типа γ_1 и γ_2 , то условие общего положения аналитически означает, что

$$\det(a(u), a'(u), \dots, a^{(k)}(u), b^{(n-k-1)}(v), \dots, b'(v), b(v)) \neq 0$$

для любого $k = 1, 2, \dots, n-1$ и любых u и v из областей определения функций $a = a(u)$ и $b = b(v)$.

Для пары кривых общего типа γ_1 и γ_2 , удовлетворяющих условию общего положения, обозначим через $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ подмножество реперов из $\mathcal{F}(P(W))$, определяемое условиями:

$$\begin{aligned} A_0 &= p(e_0) \in \gamma_1, & A_n &= p(e_n) \in \gamma_2, \\ A_i &= p(e_i) = PT_{A_0}^i(\gamma_1) \cap PT_{A_n}^{n-i}(\gamma_2), & i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ – гладкое подмногообразие в $\mathcal{F}(P(W))$. Если рассмотреть проекцию

$$\pi: \{e_u\} \rightarrow A_0 \times A_n, \quad (4)$$

сопоставляющую каждому базису $B = \{e_0, e_1, \dots, e_n\} \in \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ пару точек $A_0 = p(e_0)$ и $A_n = p(e_n)$ кривых γ_1 и γ_2 , порожденных векторами e_0 и e_n , то многообразие $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ можно считать тотальным пространством для главного расслоения, базой которого является $\gamma_1 \times \gamma_2$, а структурная группа G изоморфна группе диагональных матриц порядка $n+1$ с определителем равным единице.

Проекции

$$\pi_0 = p \circ e_0: \{e_u\} \rightarrow A_0, \quad (5)$$

$$\pi_n = p \circ e_n: \{e_u\} \rightarrow A_n \quad (6)$$

определяют еще два расслоения с тем же тотальным пространством $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ и базами γ_1 и γ_2 соответственно. Проекции e_0 и e_n позволяют находить проективные соприкасающиеся пространства кривых γ_1 и γ_2 без явного использования их векторных уравнений. Пусть $\mathfrak{N}(M) - C^\infty(M)$ -модуль векторных полей на многообразии $M = \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$; $B \in M$; $X_i \in \mathfrak{N}(M)$. Так как e_0 – гладкая W -значная функция на M , а X_1 – дифференцирование алгебры гладких функций, то $X_1(e_0) = de_0(X_1)$ – вновь гладкая W -значная функция на M . Аналогично, $X_k \circ \dots \circ X_1(e_0)$ – гладкая W -значная функция на M , и ее значение $(X_k \circ \dots \circ X_1(e_0))(B)$ в точке $B \in M$ является элементом векторного пространства W . Для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ определим отображение

$$d^k e_0: M \times \underbrace{\mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M) \times \dots \times \mathfrak{N}(M)}_k \rightarrow W$$

следующим образом. Для базиса $B = \{e_u\} \in M$, лежащего над точкой $A_0 = p(e_0) = \pi_0(B)$, и векторных полей $X_i \in \mathfrak{N}(M)$ положим:

$$d^k e_0(B, X_1, \dots, X_k) = (X_k \circ \dots \circ X_1(e_0))(B).$$

Можно показать, что определенные таким образом отображения имеют следующий геометрический смысл:

$$\begin{aligned} p(\langle e_0 \rangle) &= A_0 \in \gamma_1, \\ p(\langle e_0, \text{Im } d^1 e_0, \text{Im } d^2 e_0, \dots, \text{Im } d^k e_0 \rangle) &= PT_{A_0}^k(\gamma_1). \end{aligned}$$

Аналогично, для проекции e_n имеем:

$$\begin{aligned} p(\langle e_n \rangle) &= A_n \in \gamma_2, \\ p(\langle e_n, \text{Im } d^1 e_n, \text{Im } d^2 e_n, \dots, \text{Im } d^k e_n \rangle) &= PT_{A_n}^k(\gamma_2). \end{aligned}$$

Пусть $f: \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2) \rightarrow \mathcal{F}(P(W))$ – отображение вложения. Обозначим через $\theta_u^v = f^* \omega_u^v$ сужение форм ω_u^v на $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$. Из определения многообразия $M = \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ следует, что увлеченные формы θ_u^v кроме уравнений (2) и (3) удовлетворяют также уравнениям:

$$\theta_{k-1}^{k+1} = \theta_{k-1}^{k+2} = \dots = \theta_{k-1}^n = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1), \quad (7)$$

$$\theta_{n-k+1}^{n-k-1} = \theta_{n-k+1}^{n-k-2} = \dots = \theta_{n-k+1}^0 = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1). \quad (8)$$

Докажем это.

Так как $p(\langle e_0, \text{Im } d^1 e_0 \rangle) = PT_{A_0}^1(\gamma_1)$ и

$$d^1 e_0(X) = \theta_0^u(X) e_u = \theta_0^0(X) e_0 + \theta_0^1(X) e_1 + \theta_0^2(X) e_2 + \dots + \theta_0^n(X) e_n,$$

то

$$T_{A_0}^1(\gamma_1) = p(\langle e_0, e_1 \rangle) \iff \theta_0^2(X) = \theta_0^3(X) = \dots = \theta_0^n(X) = 0$$

для любого $X \in \mathfrak{N}(M)$.

Далее, так как $p(\langle e_0, \text{Im } d^1 e_0, \text{Im } d^2 e_0 \rangle) = PT_{A_0}^2(\gamma_1)$ и

$$\begin{aligned} d^2 e_0(X_1, X_2) &= X_2(\theta_0^0(X_1) e_0 + \theta_0^1(X_1) e_1) \\ &= (X_2(\theta_0^0(X_1)) + \theta_0^0(X_2) \theta_0^0(X_1) + \theta_0^1(X_1) \theta_1^0(X_2)) e_0 \\ &\quad + (X_2(\theta_0^1(X_1)) + \theta_0^1(X_1) \theta_1^1(X_2)) e_1 + \theta_0^1(X_1) \theta_1^2(X_2) e_2 \\ &\quad + \theta_0^1(X_1) (\theta_1^3(X_2) e_3 + \dots + \theta_1^n(X_2) e_n), \end{aligned}$$

т.е.

$$d^2 e_0(X_1, X_2) = \theta_0^1(X_1) (\theta_1^3(X_2) e_3 + \dots + \theta_1^n(X_2) e_n) \pmod{\langle e_0, e_1, e_2 \rangle},$$

то

$$T_{A_0}^2(\gamma_1) = p(\langle e_0, e_1, e_2 \rangle) \iff \theta_1^3(X_2) = \dots = \theta_1^n(X_2) = 0$$

для любого $X_2 \in \mathfrak{N}(M)$.

Продолжая этот процесс, получаем:

$$\begin{aligned} d^k e_0(X_1, X_2, \dots, X_k) &= \theta_0^1(X_1) \theta_1^2(X_2) \dots \theta_{k-2}^{k-1}(X_{k-1}) \\ &\quad \times (\theta_{k-1}^{k+1}(X_k) e_{k+1} + \dots + \theta_{k-1}^n(X_k) e_n) \pmod{\langle e_0, e_1, \dots, e_k \rangle}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T_{A_0}^k(\gamma_1) = p(\langle e_0, e_1, \dots, e_k \rangle) \iff \theta_{k-1}^{k+1}(X_k) = \dots = \theta_{k-1}^n(X_k) = 0$$

для любого $X_k \in \mathfrak{N}(M)$, где $1 \leq k \leq n-1$.

Таким образом, на многообразии $M = \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ 1-формы θ_u^v удовлетворяют системе (7). Аналогично, рассматривая дифференциалы проекции e_n , можно доказать справедливость системы (8).

Горизонтальными формами расслоения (4) являются линейно независимые 1-формы θ_0^1 и θ_n^{n-1} . При этом форма θ_0^1 является горизонтальной для расслоения (5), а форма θ_n^{n-1} – горизонтальной для расслоения (6).

Дифференцируя внешним образом системы равенств (7) и (8), находим, что $\theta_k^{k+1} \wedge \theta_0^1 = 0$ и $\theta_k^{k-1} \wedge \theta_n^{n-1} = 0$ для любого $k = 1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, используя лемму Картана, получаем:

$$\theta_k^{k+1} = (k+1)a_k\theta_0^1, \quad \theta_{n-k}^{n-k-1} = (k+1)\bar{a}_k\theta_n^{n-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (9)$$

Здесь a_k и $\bar{a}_k$ — гладкие функции на $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$, называемые *асимптотическими кривизнами* линий γ_1 и γ_2 . Эти функции всюду отличны от нуля в силу предположения о том, что γ_1 и γ_2 — кривые общего типа. Заметим, что постоянный множитель $k+1$ в формулах (9) выбран лишь для упрощения дальнейших обозначений.

На многообразии $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} de_0 &= \theta_0^0 e_0 + \theta_0^1 e_1, \\ de_i &= (n-i+1)\bar{a}_{n-i}\theta_n^{n-1}e_{i-1} + \theta_i^i e_i + (i+1)a_i\theta_0^1 e_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ de_n &= \theta_n^{n-1} e_{n-1} + \theta_n^n e_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (9) и применяя лемму Картана, находим:

$$da_k = a_k(\theta_1^1 - \theta_0^0 + \theta_k^k - \theta_{k+1}^{k+1}) + b_k\theta_0^1, \quad (11)$$

$$d\bar{a}_k = \bar{a}_k(\theta_{n-1}^{n-1} - \theta_n^n + \theta_{n-k}^{n-k} - \theta_{n-k-1}^{n-k-1}) + \bar{b}_k\theta_n^{n-1}. \quad (12)$$

Уравнения (11), (12) показывают, что асимптотические кривизны a_k и $\bar{a}_k$ не являются инвариантами на $\gamma_1 \times \gamma_2$, а заданы с точностью до множителей (т.е. являются *относительными инвариантами*). Для построения абсолютных инвариантов на многообразии $\gamma_1 \times \gamma_2$ рассмотрим допустимую замену базиса, лежащего над парой точек $A_0 \times A_n$:

$$e'_u = \lambda_u e_u, \quad 0 \leq u \leq n, \quad \prod_{u=0}^n \lambda_u = 1. \quad (13)$$

После преобразований (13) получим:

$$\begin{aligned} de'_u &= \bar{\theta}_u^v e'_v, \quad \bar{\theta}_u^u = \theta_u^u + d \ln \lambda_u, \quad \bar{\theta}_0^1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \theta_0^1, \quad \bar{\theta}_n^{n-1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \theta_n^{n-1}, \\ a'_i &= \frac{\lambda_1 \lambda_i}{\lambda_0 \lambda_{i+1}} a_i, \quad \bar{a}'_i = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-i}}{\lambda_n \lambda_{n-i-1}} \bar{a}_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что формулы перехода (14) эквивалентны дифференциальным уравнениям (11), (12). Из (14) находим, что

$$\frac{\bar{a}'_u \cdot a'_{n-u-1}}{a'_v \cdot \bar{a}'_{n-v-1}} = \frac{\bar{a}_u \cdot a_{n-u-1}}{a_v \cdot \bar{a}_{n-v-1}} \quad (0 \leq u, v \leq n-1).$$

Следовательно, $J_{u,v} = \frac{\bar{a}_u \cdot a_{n-u-1}}{a_v \cdot \bar{a}_{n-v-1}}$ — *абсолютные инварианты*. Здесь для общности обозначений предполагается, что $a_0 = \bar{a}_0 = 1$. Заметим, что инвариантность величин $J_{u,v}$ может быть доказана также при помощи дифференциальных

уравнений (11), (12). Для этого достаточно убедиться в том, что $dJ_{u,v}$ – горизонтальные 1-формы расслоения (4). Квадратная $(n \times n)$ -матрица инвариантов $\mathbf{J} = (J_{u,v})$ имеет следующие свойства симметрии: $J_{u,u} = 1$, $J_{u,v} \cdot J_{v,u} = 1$, $J_{u,v} = J_{0,n-u-1} \cdot J_{n-v-1,0}$. В частности, все элементы этой матрицы выражаются через инварианты

$$J_i = J_{n-i,0} = \frac{\bar{a}_{n-i} \cdot a_{i-1}}{a_{n-1}} \quad (1 \leq i \leq n-1). \quad (15)$$

В силу (11), (12) и (15) инварианты J_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dJ_i = \frac{\bar{a}_{n-i} b_{i-1} a_{n-1} - \bar{a}_{n-i} a_{i-1} b_{n-1}}{a_{n-1}^2} \theta_0^1 + \frac{\bar{b}_{n-i}}{a_{n-1}} \theta_n^{n-1}, \quad (16)$$

где $1 \leq i \leq n-1$, $a_0 = 1$ и $b_0 = 0$. Уравнения (16) явно показывают горизонтальность 1-форм dJ_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть γ_1 и γ_2 – две области на некоторой гладкой кривой общего типа γ , удовлетворяющие условию общего положения. Тогда вместо прямого произведения $\gamma_1 \times \gamma_2$ будет выступать некоторая область на многообразии $\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma)$, состоящем из пар различных точек кривой γ . Рассматривая семейство реперов $\mathcal{F}(\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma))$, построенное по аналогии с многообразием $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$, получаем систему инвариантов $J_{u,v}$ и J_i , связанных с каждой парой различных точек кривой γ .

§3. Инварианты пар точек на кривых Веронезе

Вычислим инварианты J_i для кривой Веронезе. Пусть W – двумерное векторное пространство, $S^n(W) = \text{Sym}(\underbrace{W \otimes W \otimes \dots \otimes W}_n)$ – пространство симметрических n -валентных тензоров, $P(S^n(W))$ – проективное пространство, порожденное векторным пространством $S^n(W)$. Обозначим через

$$V_n^1 = \{x \otimes x \otimes \dots \otimes x \in S^n(W) : x \in W \setminus \{0\}\}$$

подмножество простых абсолютно вырожденных ненулевых тензоров из $S^n(W)$. Тогда $W_n^1 = p(V_n^1)$ – кривая Веронезе, вложенная в проективное пространство $P(S^n(W))$. Кривая Веронезе W_n^1 является простейшей орбитой относительно канонического действия группы

$$G = \text{diag}(\underbrace{\text{PGL}(1) \times \text{PGL}(1) \times \dots \times \text{PGL}(1)}_n) \cong \text{PGL}(1)$$

на пространстве $P(S^n(W))$. Если $B_W = \{e_0, e_1\}$ – базис векторного пространства W , то базис в $S^n(W)$ образуют тензоры $e_{u_1 u_2 \dots u_n} = e_{(u_1} \otimes e_{u_2} \otimes \dots \otimes e_{u_n)}$, где $u_i = 0, 1$. Базис $B_{S^n(W)} = \{e_{u_1 u_2 \dots u_n}\}$ определяет проективный репер в $P(S^n(W))$ с вершинами $A_{u_1 u_2 \dots u_n} = p(e_{u_1 u_2 \dots u_n})$. Относительно этого репера кривая Веронезе W_n^1 задается параметрическими уравнениями

$$\rho \cdot X^{u_1 u_2 \dots u_n} = X^{u_1} X^{u_2} \dots X^{u_n} \quad (u_i = 0, 1). \quad (17)$$

Формулы (17) определяют *вложение Веронезе* проективной прямой $P^1 = P(W)$ в n -мерное проективное пространство $P^n = P(S^n(W))$.

Проективный репер $\{A_{u_1 u_2 \dots u_n}\}$ непосредственно связан с кривой Веронезе W_n^1 .

$$\begin{aligned} \underbrace{A_{00\dots 0}}_n &\in W_n^1, & \underbrace{A_{11\dots 1}}_n &\in W_n^1, \\ \underbrace{A_{00\dots 0}}_{n-i} \underbrace{A_{11\dots 1}}_i &= P_{A_{00\dots 0}}^i(W_n^1) \cap P_{A_{11\dots 1}}^{n-i}(W_n^1), \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

То есть

$$B_{S^n(W)} = \{e_{u_1 u_2 \dots u_n}\} \in \mathcal{F}(P(S^n(W))) = \mathcal{F}(W_n^1 \times W_n^1 \setminus \text{diag}(W_n^1 \times W_n^1)).$$

Для многообразия реперов $\mathcal{F}(P(S^n(W)))$ уравнения (1)–(3) записываются в виде [11]:

$$de_{u_1 u_2 \dots u_n} = \omega_{u_1 u_2 \dots u_n}^{v_1 v_2 \dots v_n} e_{v_1 v_2 \dots v_n}, \quad (18)$$

$$d\omega_{u_1 u_2 \dots u_n}^{v_1 v_2 \dots v_n} = \omega_{u_1 u_2 \dots u_n}^{w_1 w_2 \dots w_n} \wedge \omega_{w_1 w_2 \dots w_n}^{v_1 v_2 \dots v_n}, \quad (19)$$

$$\sum_{u_1, u_2, \dots, u_n=0}^1 \omega_{u_1 u_2 \dots u_n}^{u_1 u_2 \dots u_n} = 0. \quad (20)$$

При этом имеют место равенства:

$$\omega_{u_1 u_2 \dots u_n}^{v_1 v_2 \dots v_n} = n \cdot \omega_{(u_1}^{v_1} \delta_{u_2}^{v_2} \dots \delta_{u_n}^{v_n}), \quad (21)$$

где ω_u^v – формы Маурера–Картана группы $\text{PGL}(1)$.

Запишем уравнения (18) подробнее:

$$\begin{aligned} \underbrace{de_{0\dots 0}}_n &= n\omega_0^0 \underbrace{e_{0\dots 0}}_n + n\omega_0^1 \underbrace{e_{0\dots 0}}_{n-1} 1, \\ \underbrace{de_{0\dots 0}}_{n-k} \underbrace{e_{1\dots 1}}_k &= k\omega_1^0 \underbrace{e_{0\dots 0}}_{n-k+1} \underbrace{e_{1\dots 1}}_{k-1} \\ &+ ((n-k)\omega_0^0 + k\omega_1^1) \underbrace{e_{0\dots 0}}_{n-k} \underbrace{e_{1\dots 1}}_k + (n-k)\omega_0^1 \underbrace{e_{0\dots 0}}_{n-k-1} \underbrace{e_{1\dots 1}}_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-1), \\ \underbrace{de_{1\dots 1}}_n &= n\omega_1^0 \underbrace{e_{0\dots 0}}_{n-1} + n\omega_1^1 \underbrace{e_{1\dots 1}}_n. \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая системы (10) и (22), находим, что для кривой Веронезе W_n^1 асимптотические кривизны имеют вид:

$$a_i = \bar{a}_i = \frac{n-i}{(i+1)n}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Следовательно,

$$J_i = \frac{\bar{a}_{n-i} \cdot a_{i-1}}{a_{n-1}} = \frac{\frac{i}{(n-i+1)n} \cdot \frac{(n-i+1)}{i \cdot n}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Итак, для кривой Веронезе W_n^1 все инварианты J_i равны 1. Заметим, что в этом случае все остальные инварианты, составляющие матрицу $\mathbf{J}$, также равны 1.

§ 4. Критерий принадлежности пары кривых одной кривой Веронезе. Признак кривых Веронезе

Наша дальнейшая задача – доказать, что условие

$$J_1 = J_2 = \dots = J_{n-1} = 1 \quad (23)$$

является не только необходимым, но также и достаточным для того, чтобы две кривые γ_1 и γ_2 принадлежали кривой Веронезе W_n^1 .

Пусть выполняется система равенств (23). Тогда из (16) в силу линейной независимости 1-форм θ_0^1 и θ_n^{n-1} находим: $b_{i-1}a_{n-1} - a_{i-1}b_{n-1} = 0$, $\bar{b}_{n-i}a_{i-1} = 0$, где $1 \leq i \leq n-1$, $a_0 = 1$ и $b_0 = 0$. Так как все асимптотические кривизны a_i и $\bar{a}_i$ отличны от нуля, то из последней системы следует, что $b_i = \bar{b}_i = 0$. Поэтому система дифференциальных уравнений (11), (12) примет вид:

$$da_k = a_k(\theta_1^1 - \theta_0^0 + \theta_k^k - \theta_{k+1}^{k+1}), \quad d\bar{a}_k = \bar{a}_k(\theta_{n-1}^{n-1} - \theta_n^n + \theta_{n-k}^{n-k} - \theta_{n-k-1}^{n-k-1}). \quad (24)$$

Произведем допустимую замену базиса, лежащего над $A_0 \times A_n$, по формулам (13), в которых параметры λ_u выбираются из соотношений:

$$\lambda_{i+1} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^i \cdot \frac{n^i(i+1)!(n-i-1)!}{(n-1)!} \cdot \lambda_1 a_1 a_2 \dots a_i \quad (1 \leq i \leq n-1). \quad (25)$$

Из (14) находим, что в результате этой перенормировки кривизны a_i будут приведены к виду:

$$a'_i = \frac{\lambda_1 \lambda_i}{\lambda_0 \lambda_{i+1}} \cdot a_i = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{i-1} \cdot \frac{n^{i-1}i!(n-i)!}{(n-1)!} \cdot \lambda_1 a_1 a_2 \dots a_{i-1}}{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^i \cdot \frac{n^i(i+1)!(n-i-1)!}{(n-1)!} \cdot \lambda_1 a_1 a_2 \dots a_i} \cdot a_i = \frac{n-i}{n(i+1)}.$$

Далее, в силу (23) $J_i = \frac{\bar{a}'_{n-i} \cdot a'_{i-1}}{a'_{n-1}} = 1$. Поэтому $\bar{a}'_i = \frac{a'_{n-1}}{a'_{n-i-1}} = \frac{n-i}{n(i+1)}$.

Итак, после выбранной перенормировки получим:

$$a_i = \bar{a}_i = \frac{n-i}{n(i+1)}. \quad (26)$$

Следовательно, равенства (9) примут вид:

$$\theta_k^{k+1} = \frac{n-k}{n} \theta_0^1, \quad \theta_{n-k}^{n-k-1} = \frac{n-k}{n} \theta_n^{n-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (27)$$

Учитывая (26), из (24) находим:

$$\theta_1^1 - \theta_0^0 + \theta_k^k - \theta_{k+1}^{k+1} = 0, \quad \theta_{n-1}^{n-1} - \theta_n^n + \theta_{n-k}^{n-k} - \theta_{n-k-1}^{n-k-1} = 0.$$

После линейных преобразований последняя система приводится к виду:

$$\theta_k^k = \frac{n-k}{n}\theta_0^0 + \frac{k}{n}\theta_n^n, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (28)$$

Равенства (27), (28) позволяют записать систему дифференциальных уравнений (1) для подмногообразия $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ в виде:

$$\begin{aligned} de_0 &= \theta_0^0 e_0 + \theta_0^1 e_1, \\ de_i &= \frac{i}{n}\theta_n^{n-1}e_{i-1} + \left(\frac{n-i}{n}\theta_0^0 + \frac{i}{n}\theta_n^n\right)e_i + \frac{n-i}{n}\theta_0^1 e_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ de_n &= \theta_n^{n-1}e_{n-1} + \theta_n^n e_n. \end{aligned} \quad (29)$$

Если обозначить:

$$e_u = e_{\underbrace{0 \dots 0}_{n-u} \underbrace{1 \dots 1}_u}, \quad \theta_0^1 = n\omega_0^1, \quad \theta_n^{n-1} = n\omega_1^0, \quad \theta_0^0 = n\omega_0^0, \quad \theta_n^n = n\omega_1^1,$$

то система дифференциальных уравнений (29) совпадает с системой (22). При этом прямым вычислением легко проверить, что формы ω_u^v ($0 \leq u, v \leq 1$) будут удовлетворять уравнениям Маурера–Картана группы Ли $\text{PGL}(1)$. Применяя предложения 1 и 2, можно заключить, что многообразие реперов $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ с точностью до проективного преобразования пространства P^n совпадает с некоторой областью на многообразии $\mathcal{F}(W_n^1 \times W_n^1 \setminus \text{diag}(W_n^1 \times W_n^1))$. Следовательно, кривые γ_1 и γ_2 принадлежат одной кривой Веронезе W_n^1 .

Итак, доказан критерий принадлежности пары кривых одной кривой Веронезе:

ТЕОРЕМА 1. Пусть γ_1 и γ_2 — две гладкие связные кривые общего типа в проективном пространстве P^n , удовлетворяющие условию общего положения, и пусть $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$ — система инвариантов на многообразии $\gamma_1 \times \gamma_2$, определенная равенствами (15). Кривые γ_1 и γ_2 принадлежат одной кривой Веронезе W_n^1 тогда и только тогда, когда выполняется условие $J_1 \equiv J_2 \equiv \dots \equiv J_{n-1} \equiv 1$.

Рассматривая теперь многообразие $\mathcal{F}(\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma))$, ассоциированное с гладкой кривой γ , получаем признак кривой Веронезе:

ТЕОРЕМА 2. Пусть γ — гладкая связная кривая общего типа в проективном пространстве P^n , для которой любая пара непересекающихся окрестностей удовлетворяет условию общего положения, и пусть $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$ — система инвариантов на многообразии $\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma)$, определенная равенствами (15). Кривая γ является областью на кривой Веронезе W_n^1 тогда и только тогда, когда выполняется условие $J_1 \equiv J_2 \equiv \dots \equiv J_{n-1} \equiv 1$.

§5. Процесс вычисления инвариантов

Для практического применения теорем 1 и 2 кратко опишем процесс вычисления инвариантов $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$ в случае локального задания кривых их векторными уравнениями. Пусть кривая $\gamma_1 = f_1(U)$ задана векторным уравнением $P = P(u)$, $u \in U$, а кривая $\gamma_2 = f_2(V)$ — уравнением $Q = Q(v)$, $v \in V$.

Шаг 1. Построение локального сечения в расслоенном многообразии реперов $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$.

Локальное сечение расслоения (4), т.е. гладкое отображение $s: \gamma_1 \times \gamma_2 \rightarrow \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$, удовлетворяющее условию $\pi \circ s = \text{id}$, определяется при помощи гладкого отображения

$$S = s \circ (f_1 \times f_2): U \times V \rightarrow \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2),$$

ассоциированного с локальными поднятиями P и Q в векторное пространство W иммерсий f_1 и f_2 . Ясно, что $s = S \circ (f_1^{-1} \times f_2^{-1})$. Так как $\pi \circ S = f_1 \times f_2$, то отображение $S: U \times V \rightarrow \mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ является гладким поднятием в многообразии базисов $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ отображения $f_1 \times f_2: U \times V \rightarrow P(W)$.

Построим явным образом отображение S . Положим $e_0 = P(u)$, $e_n = Q(v)$. Остальные векторы e_i ($1 \leq i \leq n-1$) определяются (с точностью до множителей) требованием:

$$e_i \in \langle P(u), P'(u), \dots, P^{(i)}(u) \rangle \cap \langle Q(v), Q'(v), \dots, Q^{(n-i)}(v) \rangle.$$

Здесь $P^{(k)} = \frac{d^k P}{du^k}$ и $Q^{(k)} = \frac{d^k Q}{dv^k}$. Из условия

$$e_i = c_0 P + c_1 P' + \dots + c_i P^{(i)} \in \langle Q, Q', \dots, Q^{(n-i)} \rangle$$

следует, что

$$\frac{c_0}{c_k} = (-1)^k \frac{\det(P', P'', \dots, P^{(i)}, Q, Q', \dots, Q^{(n-i)})}{\det(P, P', \dots, P^{(k-1)}, P^{(k+1)}, \dots, P^{(i)}, Q, Q', \dots, Q^{(n-i)})}.$$

Поэтому можно положить

$$e_1 = \rho \cdot \varepsilon_1, \quad e_a = \varepsilon_a \quad (2 \leq a \leq n-1),$$

где $\rho = \det(e_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, e_n)^{-1}$ и

$$\varepsilon_i = \sum_{k=0}^i (-1)^k \det(P, P', \dots, P^{(k-1)}, P^{(k+1)}, \dots, P^{(i)}, Q, Q', \dots, Q^{(n-i)}) P^{(k)} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Ясно, что для пары кривых общего типа γ_1 и γ_2 , удовлетворяющих условию общего положения, отображение S существует и задается при помощи W -значных функций $e_0, e_1, \dots, e_n$, определенных на $U \times V$. Заметим, что для построения репера $\{e_u\}$ были использованы производные не выше $(n-1)$ -го порядка от W -значных функций $P(u)$ и $Q(v)$.

Шаг 2. Вычисление форм Маурера–Картана.

В силу (1) 1-формы $\theta_u^v = S^* \omega_u^v$ ($0 \leq u, v \leq n$), определенные на многообразии $U \times V$, можно вычислить по формулам:

$$\theta_u^v = S^* \det(e_0, \dots, e_{v-1}, de_u, e_{v+1}, \dots, e_n).$$

В нашем случае формы θ_u^v будут являться линейными комбинациями дифференциалов du и dv , коэффициенты которых выражаются через производные не выше n -го порядка от W -значных функций $P(u)$ и $Q(v)$.

Шаг 3. Вычисление асимптотических кривизн и инвариантов J_i .

Асимптотические кривизны a_i и $\bar{a}_i$ однозначно определяются соотношениями (9) и могут быть найдены при помощи следующих формул (имеющих условно-символический смысл):

$$a_i = \frac{\theta_i^{i+1}}{(i+1)\theta_0^1}, \quad \bar{a}_i = \frac{\theta_{n-i}^{n-i-1}}{(i+1)\theta_n^{n-1}}.$$

Для нахождения инвариантов J_i следует использовать формулы (15).

Итак, все инварианты J_i являются гладкими функциями двух переменных u и v . Они выражаются через производные не выше n -го порядка от векторных функций $P(u)$ и $Q(v)$. Если система равенств $J_1 = J_2 = \dots = J_{n-1} = 1$ будет тождественно выполняться для любого u из области определения функции $P(u)$ и любого v из области определения функции $Q(v)$, то кривые γ_1 и γ_2 будут принадлежать одной кривой Веронезе W_n^1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для практического применения теоремы 2 нахождение инвариантов J_i , определенных на многообразии $\gamma \times \gamma \setminus \text{diag}(\gamma \times \gamma)$, производится в аналогичной последовательности. Теперь если задано векторное уравнение $F = F(t)$ кривой γ , то можно положить $e_0 = F(u)$, $e_n = F(v)$ при $u \neq v$.

§6. Пример

Как известно, овальная линия на проективной плоскости является представителем кривых Веронезе W_n^1 при $n = 2$. Проиллюстрируем полученные результаты в этом простейшем случае.

Прежде всего заметим, что известный признак кривых второго порядка, полученный Ф. Клейном (см., например, [12]), связывает производные до пятого порядка включительно: *гладкая кривая $y = y(x)$ на плоскости является линией второго порядка тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

$$9(y'')^2 y^{(v)} - 45 y'' y''' y^{(iv)} + 40 (y''')^3 \equiv 0. \quad (30)$$

Покажем, что при помощи теорем 1 и 2 дифференциально-геометрический признак овальной линии может быть выражен через производные не выше второго порядка.

Пусть γ_1 и γ_2 — пара кривых на плоскости P^2 , заданных векторными уравнениями $P = P(u)$ и $Q = Q(v)$. Тогда сечение в расслоенном многообразии реперов $\mathcal{F}(\gamma_1 \times \gamma_2)$ задается векторными функциями:

$$e_0 = P(u), \quad e_2 = Q(v),$$

$$e_1 = \frac{1}{(PP'Q)} P' - \frac{(Q\dot{Q}P')}{(PP'Q)(Q\dot{Q}P)} P = \frac{(PP'\dot{Q})}{(PP'Q)(Q\dot{Q}P)} Q - \frac{1}{(Q\dot{Q}P)} \dot{Q}. \quad (31)$$

Здесь и далее штрихом обозначается дифференцирование по u , точкой — дифференцирование по v , а скобки (ABC) обозначают определитель, составленный из координат векторов A , B и C .

Матрица $\Theta = (\theta_u^v)$ 1-форм Маурера–Картана имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \ln(Q\dot{Q}P)}{\partial u} du & (PP'Q) du & 0 \\ \frac{(\dot{Q}\ddot{Q})}{(Q\dot{Q}P)^2} dv & \frac{\partial \ln(Q\dot{Q}P)^{-1}}{\partial u} du + \frac{\partial \ln(PP'Q)^{-1}}{\partial v} dv & \frac{(PP'P'')}{(PP'Q)^2} du \\ 0 & (\dot{Q}QP) dv & \frac{\partial \ln(PP'Q)}{\partial v} dv \end{pmatrix}.$$

Пара кривизн $a_1 = a$ и $\bar{a}_1 = \bar{a}$ вычисляется по формулам:

$$a = \frac{(PP'P'')}{2(PP'Q)^3} - \text{асимптотическая кривизна линии } \gamma_1,$$

$$\bar{a} = \frac{(Q\dot{Q}\ddot{Q})}{2(Q\dot{Q}P)^3} - \text{асимптотическая кривизна линии } \gamma_2.$$

Единственный в этом случае инвариант $J = J_1 = \bar{a}/a$ имеет вид:

$$J = \frac{(PP'Q)^3 \cdot (Q\dot{Q}\ddot{Q})}{(Q\dot{Q}P)^3 \cdot (PP'P'')}.$$

Равенство $J \equiv 1$ эквивалентно условию:

$$\frac{(PP'Q)^3}{(Q\dot{Q}P)^3} \equiv \frac{(PP'P'')}{(Q\dot{Q}\ddot{Q})}. \quad (32)$$

Тождество (32) является критерием того, что пара кривых γ_1 и γ_2 общего типа и общего положения принадлежит одной овальной линии.

Условие (32) можно записать в несколько ином виде. Из (31) имеем:

$$(Q\dot{Q}P)P' - (Q\dot{Q}P')P = (PP'\dot{Q})Q - (PP'Q)\dot{Q}.$$

Дифференцируя это тождество, находим:

$$(P''P'P) = \frac{(PP''Q)(PP'\dot{Q}) - (PP''\dot{Q})(PP'Q)}{(Q\dot{Q}P)},$$

$$(\ddot{Q}\dot{Q}Q) = \frac{(Q\ddot{Q}P)(Q\dot{Q}P') - (Q\ddot{Q}P')(Q\dot{Q}P)}{(PP'Q)}.$$

Поэтому, преобразуя условие (32), получаем цепочку эквивалентных равенств:

$$\frac{(PP'Q)^2}{(Q\dot{Q}P)^2} \equiv \frac{(PP''Q)(PP'\dot{Q}) - (PP''\dot{Q})(PP'Q)}{(Q\ddot{Q}P)(Q\dot{Q}P') - (Q\ddot{Q}P')(Q\dot{Q}P)},$$

$$\frac{(PP''\dot{Q})(PP'Q) - (PP''Q)(PP'\dot{Q})}{(PP'Q)^2} \equiv \frac{(Q\ddot{Q}P')(Q\dot{Q}P) - (Q\ddot{Q}P)(Q\dot{Q}P')}{(Q\dot{Q}P)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{(PP''Q)}{(PP'Q)} \equiv \frac{\partial}{\partial u} \frac{(Q\ddot{Q}P)}{(Q\dot{Q}P)},$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \ln(PP'Q) \equiv \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \ln(Q\dot{Q}P),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\ln(PP'Q) - \ln(Q\dot{Q}P)) \equiv 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ln \frac{(PP'Q)}{(Q\dot{Q}P)} \equiv 0. \quad (33)$$

Тождество (33) также является критерием того, что пара кривых γ_1 и γ_2 общего типа и общего положения принадлежит одной овальной линии.

Если гладкая линия γ общего типа задана векторным уравнением $F = F(t)$, то следующие четыре условия эквивалентны:

$$\frac{(F(u)F'(u)F(v))^3}{(F(v)F'(v)F(u))^3} \equiv \frac{(F(u)F'(u)F''(u))}{(F(v)F'(v)F''(v))}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ln \frac{(F(u)F'(u)F(v))}{(F(v)F'(v)F(u))} \equiv 0, \quad (35)$$

$$\frac{(F(u)F'(u)F(v))}{(F(v)F'(v)F(u))} - \text{симметрическая функция}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ln(F(u)F'(u)F(v)) - \text{симметрическая функция}. \quad (37)$$

Каждое из условий (34)–(37) является признаком овальной линии. Отметим, что признаки (32)–(37) связывают лишь производные первого и второго порядка.

Теперь докажем, что признак кривой второго порядка (30), полученный Ф. Клейном, может быть выведен из критерия (34) предельным переходом при $v \rightarrow u$.

Пусть на плоскости с декартовыми координатами (x, y) линия γ задана явным уравнением $y = y(x)$. Рассмотрим векторные функции $F(u) = (1, u, y(u))$ и $F(v) = F(u + t) = (1, u + t, y(u + t))$, где $t = v - u$. Тогда

$$\begin{aligned} F'(u) &= (0, 1, y'(u)), & F''(u) &= (0, 0, y''(u)), \\ F'(v) &= (0, 1, y'(u + t)), & F''(v) &= (0, 0, y''(u + t)). \end{aligned}$$

Условие (34) переписывается в виде:

$$\frac{(y'(u)(v - u) + y(u) - y(v))^3}{(y'(v)(u - v) + y(v) - y(u))^3} \equiv \frac{y''(u)}{y''(v)}. \quad (38)$$

Заметим, что равенство (38) является признаком невырожденной линии второго порядка в декартовой системе координат. Разложим функции $y(v) = y(u + t)$, $y'(v) = y'(u + t)$ и $y''(v) = y''(u + t)$ в ряды по степеням t в окрестности точки $t = 0$:

$$y(v) = y(u) + y'(u)t + \frac{1}{2}y''(u)t^2 + \frac{1}{6}y'''(u)t^3 + \frac{1}{24}y^{(iv)}(u)t^4 + \frac{1}{120}y^{(v)}(u)t^5 + o(t^5),$$

$$y'(v) = y'(u) + y''(u)t + \frac{1}{2}y'''(u)t^2 + \frac{1}{6}y^{(iv)}(u)t^3 + \frac{1}{24}y^{(v)}(u)t^4 + o(t^4),$$

$$y''(v) = y''(u) + y'''(u)t + \frac{1}{2}y^{(iv)}(u)t^2 + \frac{1}{6}y^{(v)}(u)t^3 + o(t^3).$$

С учетом этих разложений равенство (38) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\left(y'' + y'''t + \frac{1}{2}y^{(iv)}t^2 + \frac{1}{6}y^{(v)}t^3 + o(t^3) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y'''t + \frac{1}{24}y^{(iv)}t^2 + \frac{1}{120}y^{(v)}t^3 + o(t^3) \right)^3 \\ &\quad \equiv y'' \cdot \left(\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y'''t + \frac{1}{8}y^{(iv)}t^2 + \frac{1}{30}y^{(v)}t^3 + o(t^3) \right)^3. \end{aligned}$$

Здесь все производные вычисляются в точке u . Раскрывая скобки и деля результат на $y''t^3/4320$, находим:

$$9(y'')^2 y^{(v)} - 45 y'' y''' y^{(iv)} + 40(y''')^3 + O(t) \equiv 0.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \rightarrow 0$ (т.е. при $v \rightarrow u$), получаем условие (30).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $f(u, v)$ – функция двух переменных, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial v}} = \frac{(PP'Q)}{(Q\dot{Q}P)}.$$

Тогда равенство (33) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ln \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial v}} \equiv 0. \quad (39)$$

В теории *номографий* это уравнение называется *условием Сен-Робера*. Оно имеет красивую геометрическую интерпретацию с точки зрения *теории тканей*. Известно (см., например, [13]), что *три-ткань, заданная уравнением $z = f(u, v)$, является шестиугольной тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет уравнению (39)*.

§ 7. Кривые с постоянными инвариантами пар точек

В заключение докажем, что требование $J_1 \equiv J_2 \equiv \dots \equiv J_{n-1} \equiv 1$, входящее в условия теорем 1 и 2, можно ослабить, заменив его соотношениями:

$$J_1 \equiv \text{const}, \quad J_2 \equiv \text{const}, \quad \dots, \quad J_{n-1} \equiv \text{const}. \quad (40)$$

Действительно, если выполняется система (40), то в силу (16) приходим к равенствам $b_i = \bar{b}_i = 0$, из которых следуют соотношения (24). Рассмотрим допустимую замену базиса (13), в которой параметры λ_u выбираются из условия (25). После такой перенормировки получим, что

$$a_i = \frac{n-i}{n(i+1)}, \quad \bar{a}_i = \frac{n-i}{n(i+1)} J_i. \quad (41)$$

Поэтому из системы (24) будут следовать равенства (28), а соотношения (9) переписутся в виде:

$$\theta_k^{k+1} = \frac{n-k}{n} \theta_0^1, \quad \theta_{n-k}^{n-k-1} = \frac{n-k}{n} J_{n-i} \theta_n^{n-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (42)$$

Из равенств (3) и (28) следует, что 1-формы $\theta_u^v = f^* \omega_u^v$ удовлетворяют также соотношению:

$$\theta_0^0 + \theta_n^n = 0. \quad (43)$$

Дифференцируя (43) и (28) и учитывая (42), получаем:

$$J_{n-1} = 1, \\ i(n-i+1)J_{n-i} - (n-i)(i+1)J_{n-i-1} + (n-i)J_{n-1} - i = 0.$$

Осталось заметить, что последняя система имеет единственное решение $J_1 = J_2 = \dots = J_{n-1} = 1$.

Список литературы

1. *Акивис М. А.* О локальном условии алгебраизуемости системы подмногообразий вещественного проективного пространства // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1289–1291.
2. *Акивис М. А.* О некоторых задачах алгебраизуемости в проективно-дифференциальной геометрии // Изв. вузов. Сер. матем. 1992. Т. 6. С. 3–14.
3. *Griffiths P., Harris J.* Algebraic geometry and local differential geometry // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1979. V. 12. P. 355–452.
4. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland, 1993.
5. *Sasaki T.* On the Veronese embedding and related system of differential equations // Global differential geometry and global analysis. Proc. Conf., Berlin 1990. Lecture Notes in Math. V. 1481, 1991. P. 210–247.
6. *Little J. A., Pohl W. F.* On tight immersions of maximal codimension // Invent. Math. 1971. V. 11. P. 179–204.
7. *Chern S. S., do Carmo M., Kobayashi S.* Minimal submanifolds on the sphere with second fundamental form of constant length // Functional analysis and related field. Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, III, 1968. New York: Springer-Verlag, 1970. P. 59–75.
8. *Nomizu K.* A characterization of Veronese varieties // Nagoya Math. J. 1976. V. 60. P. 181–188.
9. *Nomizu K., Yano K.* On circles and spheres in Riemannian geometry // Math. Ann. 1974. V. 210. P. 163–170.
10. *Griffiths P.* On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry // Duke Math. J. 1974. V. 41. № 4. P. 775–814.
11. *Коннов В. В.* Дифференциальная геометрия некоторых классов алгебраических многообразий. Самара: СамГПУ, 1998.
12. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. М.–Л.: ГОНТИ, 1939.
13. *Акивис М. А., Шелехов А. М.* Геометрические и абстрактные три-ткани. Псков, 1980.

Московский педагогический
государственный университет

Поступила в редакцию
22.02.1999