Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Сатаев, Некоторые свойства сингулярно гиперболических аттракторов, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 1, 37–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 07:36:30

УДК 517.938

Е. А. Сатаев

Некоторые свойства сингулярно гиперболических аттракторов

Определение сингулярно гиперболического аттрактора было приведено в работе Моралеса, Пачифико и Пьюджалса (С. А. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals) в 1998 г. Похожее определение было дано Д. В. Тураевой и Л. П. Шильниковым в 1998 г. Это определение мотивировано, с одной стороны, хорошо известной моделью Лоренца, а с другой стороны – определением гиперболического аттрактора. В работе доказываются некоторые свойства сингулярно гиперболических аттракторов, которые впоследствии будут использованы при доказательстве существования инвариантных мер типа Синая–Боуэна–Рюэлля. Основным результатом работы является доказательство существования инвариантного семейства строго неустойчивых пространств на достаточно представительном множестве.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: сингулярная гиперболичность, устойчивые многообразия, неустойчивые пространства.

§ 1. Введение

1.1. Определение сингулярно гиперболического потока. Это определение было приведено в работе [1]; оно мотивировано знаменитой системой Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy \quad (1)$$

при значениях параметров $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (см. [2], [3]). Если говорить точнее, то мотивацией является геометрическая модель аттрактора Лоренца (см. [4]–[6] и др.).

Приведем определение сингулярно гиперболического потока согласно работе [1].

Пусть Φ_t – поток на трехмерном римановом многообразии M , порожденный векторным полем $X(x)$ класса C^2 , $\Lambda \subset M$ – инвариантное замкнутое множество. Касательное пространство к многообразию M в точке x обозначается $T_x M$. Дифференциал отображения Φ_t обозначается $d\Phi_t$. Длина вектора $v \in T_x M$ обозначается $|v|$. Через $S(u, v)$, где $u, v \in T_x M$, обозначается площадь параллелограмма, порожденного векторами u, v .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00351) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3038.2008.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Поток Φ_t на трехмерном римановом многообразии M называется *сингулярно гиперболическим* на инвариантном множестве Λ , если для каждой точки $x \in \Lambda$ существует разложение касательного пространства $T_x M$ в прямую сумму двух инвариантных пространств $T_x M = E_x^{ss} \oplus E_x^c$, непрерывно зависящих от x на Λ , причем выполняются следующие свойства:

- 1) E_x^{ss} одномерно, E_x^c двумерно;
- 2) существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ такие, что:
 - (а) если $u \in E_x^{ss}$, $t > 0$, то $|d\Phi_t(u)| < c_1 e^{-\gamma_1 t} |u|$,
 - (б) если $u \in E_x^{ss}$, $v \in E_x^c$, $t > 0$, то

$$\frac{|d\Phi_t(u)|}{|u|} < c_2 e^{-\gamma_2 t} \frac{|d\Phi_t(v)|}{|v|};$$

- 3) существуют константы $c_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$ такие, что если $u, v \in E_x^c$, $t > 0$, то

$$S(d\Phi_t(u), d\Phi_t(v)) > c_3 e^{\gamma_3 t} S(u, v);$$

- 4) все неподвижные точки, лежащие в множестве Λ , гиперболичны.

Похожее определение было дано Д. В. Тураевым и Л. П. Шильниковым в работе [7] (оно повторено в [8]). Соответствующее свойство потока в работе [7] называется псевдогиперболическостью. Приведем определение псевдогиперболического потока согласно работе [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Полупоток Φ_t называется *псевдогиперболическим* на множестве U , если для каждой точки $x \in U$ существует разложение касательного пространства $T_x M$ в прямую сумму $T_x M = E_1 \oplus E_2$ инвариантных пространств E_1 , E_2 , непрерывно зависящих от точки x , таких, что:

- 1) если $u \in E_1$, $v \in E_2$, то

$$\limsup \frac{|d\Phi_t(u)|}{|u|} < \liminf \frac{|d\Phi_t(v)|}{|v|};$$

- 2) поток экспоненциально увеличивает объем в пространстве E_2 .

Еще одно определение сингулярно гиперболического потока приведено в [9]. Характерная черта этого определения состоит в том, что оно дается через инвариантную систему конусов в сопряженном пространстве; из определения, приведенного в [9], не следует существование инвариантного разложения $T_x M = E_x^{ss} \oplus E_x^c$, а следует только существование инвариантного семейства пространств E_x^c , $x \in \Lambda$. В [9] доказано, что при неавтономном возмущении сингулярно гиперболического потока устойчивых траекторий не появляется.

Я приношу извинения за то, что в работе [9] не цитирована работа [1] и последующие работы на эту тему.

В последние годы сингулярно гиперболические системы изучались довольно интенсивно (см. [1], [10]–[17]). Наиболее сильным результатом этого цикла работ следует считать то, что свойство устойчивой топологической транзитивности инвариантного множества для потока на трехмерном многообразии “почти эквивалентно” сингулярной гиперболичности.

Результаты настоящей работы анонсированы в [18].

Напомним, что замкнутое инвариантное множество Λ называется локально максимальным, если существует такое открытое множество U , что $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \Phi_t(U)$. Если $\Lambda = \bigcap_{t > 0} \Phi_t(U)$, то Λ называется аттрактором.

Имеется другое определение. Множество Λ называется локально максимальным, если существует такое открытое множество U , что всякая траектория, целиком содержащаяся в U , содержится в Λ .

Нетрудно показать, что эти два определения эквивалентны. Множество U , участвующее в этих определениях, называется изолирующим блоком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть Φ_t – поток на трехмерном римановом многообразии M , порожденный векторным полем $X(x)$, Λ – локально максимальное инвариантное множество, U – соответствующий изолирующий блок.

Поток Φ_t называется *робастно топологически транзитивным* на Λ , если Φ_t топологически транзитивен на Λ и всякий поток Ψ_t , достаточно близкий к Φ_t (в C^1 -топологии), топологически транзитивен на множестве $\Lambda' = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Psi_t(U)$.

Очевидно, что в этом определении Λ' – локально максимальное инвариантное множество для Ψ_t , а множество U является изолирующим блоком для Λ' .

ТЕОРЕМА 1.4 (см. [12]). *Если поток на трехмерном римановом многообразии, порожденный векторным полем $X(x)$, робастно топологически транзитивен на локально максимальном множестве Λ , то Λ – сингулярно гиперболический аттрактор либо для потока, порожденного векторным полем $X(x)$, либо для потока, порожденного векторным полем $-X(x)$.*

ТЕОРЕМА 1.5 (см. [11]). *Пусть Λ – топологически транзитивный аттрактор сингулярно гиперболического потока и одномерные сепаратрисы неподвижных точек не лежат в устойчивых многообразиях периодических траекторий и неподвижных точек. Тогда множество Λ робастно топологически транзитивно.*

В настоящей работе рассматривается локальный поток Φ_t на открытом множестве n -мерного риманова многообразия M , порожденный гладким (класса C^2) векторным полем $X(x)$. Возможно, что M – многообразие с краем. Многообразие M предполагается ориентируемым. Это не ограничивает общности, так как если многообразие M неориентируемо, то можно перейти к двустороннему накрытию и рассмотреть поднятие потока на это накрытие.

Касательное пространство в точке $x \in M$ обозначается $T_x M$. Дифференциал отображения Φ_t обозначается $d\Phi_t$.

Риманова метрика позволяет определять длины векторов и углы между векторами в касательном пространстве. Длина вектора $v \in T_x M$ обозначается $|v|$, угол между векторами $u, v \in T_x M$ обозначается $\angle(u, v)$. Расстояние между точками $x, y \in M$ обозначается $\rho(x, y)$. Риманову метрику мы считаем заданной. Через $\text{clos } A$ обозначается замыкание множества A .

Следует отметить, что вместе с длиной вектора, определяемой римановой метрикой, появится другое определение длины. Поэтому длина вектора, определяемая римановой метрикой, будет называться римановой длиной.

Предполагается, что векторное поле $X(x)$ определено в ограниченном открытом множестве $U \subset M$ и не определено вне U . Поэтому отображение Φ_t определено не на всей области U , а только на ее части, своей для каждого t . Множество U предполагается инвариантным, т.е. если $t > 0$, то $\Phi_t(x)$ определено для всех точек $x \in U$, и множество $\text{clos } \Phi_t(U)$ – компактное множество, принадлежащее U и не содержащее точек края. Следовательно, локальный поток Φ_t является полупотоком.

Термин “аттрактор” имеет множество толкований. Поэтому уточним, что понимается под аттрактором в настоящей работе.

Мы будем называть аттрактором множество

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U).$$

В литературе это множество иногда называется предельным множеством. Оно называется также максимальным аттрактором.

Не исключено, что имеется открытое инвариантное подмножество $U_1 \subset U$, содержащее аттрактор $\Lambda_1 = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U_1) \subset \Lambda$, который является собственным подмножеством аттрактора Λ . Например, на рис. 1 изображен поток, аттрактор Λ которого состоит из точек A , B , C и неустойчивых сепаратрис точки C . В то же время аттрактор Λ содержит два аттрактора, совпадающих с точками A и B .

Рис. 1

Траекторией точки x мы будем называть решение $x(t)$ уравнения $\dot{x} = X(x)$ с начальными условиями $x(0) = x$. Так как уравнение рассматривается в ограниченной области, то траектория $x(t)$ определена только для t из некоторого интервала (t_1, t_2) . По умолчанию подразумевается, что (t_1, t_2) – максимальный интервал, на котором определено решение (в частности, по умолчанию $t_2 = +\infty$). В том случае, когда нам потребуется определить только часть траектории, соответствующую $t \in (t_1, t_2)$, мы будем писать $\{x(t) : t \in (t_1, t_2)\}$. Очевидно, что $x(t) = \Phi_t(x(0))$.

Положительной полутраекторией мы называем часть траектории, соответствующую $t \geq 0$; отрицательной полутраекторией называем часть траектории,

соответствующую $t \leq 0$. Траекторию будем называть полной, если $x(t)$ определено и принадлежит области U при всех $t \in \mathbb{R}$. Аналогично определяются полные положительные и отрицательные полутраектории.

Очевидно, что Λ совпадает с множеством таких точек, что полная траектория, проходящая через эту точку, определена и принадлежит U .

Мы приводим определение частично гиперболического потока и сингулярно гиперболического потока в терминах инвариантной системы конусов.

Уточним, что мы понимаем под конусом в настоящей работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Конусом* в евклидовом пространстве T с осевым пространством $E \subset T$ называется множество $\mathcal{K} \subset T$, состоящее из ненулевых векторов v таких, что $\angle(v, E) < \alpha$.

Размерностью конуса $\mathcal{K}$ называется размерность пространства E . Величина α называется *углом раствора* конуса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Мы говорим, что на U определено инвариантное при движении назад семейство *строго устойчивых конусов*, если для каждой точки $x \in U$ определен конус $\mathcal{K}_x^{ss} \subset T_x M$ размерности $n - 2$; семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ непрерывно зависит от x и инвариантно в том смысле, что если $t < 0$, $\Phi_t(x)$ определено, то $d\Phi_t(\mathcal{K}_x^{ss}) \subset \mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$. Кроме того, существуют такие константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, что для любой точки $x \in U$, любого вектора $v \in \mathcal{K}_x^{ss}$ и любого $t < 0$, для которого $\Phi_t(x)$ определено, справедливо неравенство $|d\Phi_t(v)| > c_1 e^{\gamma_1 |t|} |v|$.

Конусы $\mathcal{K}_x^{ss}$ называются строго устойчивыми конусами.

Множество векторов $u \in T_x M$, не принадлежащих конусу $\mathcal{K}_x^{ss}$, является двумерным конусом, который мы обозначим $\mathcal{K}_x^c$. Этот конус называется центрально-неустойчивым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Поток Φ_t , порожденный векторным полем $X(x)$ на множестве $U \subset M$, называется *частично гиперболическим*, если на U имеется инвариантное семейство строго устойчивых конусов и, кроме того, существуют такие константы $c_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $T_0 > 0$, что для любой точки $x \in U$, любого $t > T_0$, любого вектора v такого, что $d\Phi_t(v) \in \mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$, и любого $u \in \mathcal{K}_x^c$ имеет место неравенство

$$\frac{|d\Phi_t(u)|}{|u|} > c_2 e^{\gamma_2 t} \frac{|d\Phi_t(v)|}{|v|}.$$

Обозначим, как и выше, через $S(v_1, v_2)$ площадь параллелограмма, порожденного векторами $v_1, v_2 \in T_x M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Частично гиперболический поток, порожденный векторным полем $X(x)$, называется *сингулярно гиперболическим*, если все неподвижные точки гиперболически и существуют такие константы $c_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$, что для любого $t > 0$, любой точки $x \in U$ и любых $v_1, v_2 \in \mathcal{K}_x^c$ справедливо неравенство

$$S((d\Phi_t(v_1), d\Phi_t(v_2))) > c_3 e^{\gamma_3 t} S(v_1, v_2), \quad t > 0. \quad (2)$$

1.2. Инвариантные семейства подпространств и многообразий.

Инвариантные семейства пространств. Из существования системы конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ следует существование семейства $(n-2)$ -мерных подпространств

$$E_x^{ss} = \bigcap_{t>0} d\Phi_{-t}(\mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}),$$

определенных на множестве U , и семейства двумерных подпространств

$$E_x^c = \bigcap_{t>0} d\Phi_t(\mathcal{K}_{\Phi_{-t}(x)}^c),$$

определенных на Λ . Пространство E_x^{ss} называется строго устойчивым пространством, пространство E_x^c называется центрально-неустойчивым пространством.

Таким образом, на Λ имеется разложение $T_x M = E_x^{ss} \oplus E_x^c$, только пространство E_x^{ss} не одномерно, как в [1], а $(n-2)$ -мерно, и поток является сингулярно гиперболическим в смысле определения 1.1.

С другой стороны, можно показать, что если поток Φ_t является сингулярно гиперболическим на аттракторе Λ в смысле определения 1.1, то в некоторой окрестности множества Λ существует инвариантное семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ и аттрактор является сингулярно гиперболическим в смысле определения 1.9.

То, что размерность пространства E_x^{ss} в определении 1.9 больше 1, по существу ничего нового по сравнению с определением 1.1 не вносит. Поэтому приведенное определение 1.9 сингулярно гиперболического потока не следует считать чем-то новым.

Следует обратить внимание на то, что пространства E_x^{ss} определены на U , в то время как пространства E_x^c определены только на Λ . Ниже мы покажем, что если $x \in \Lambda$, то $X(x) \in E_x^c$.

Необходимо сделать несколько замечаний по поводу терминологии, принятой в настоящей работе. Мы сделаем эти замечания применительно к гиперболическому потоку, который является частным случаем сингулярно гиперболического потока (сингулярно гиперболический поток, не имеющий неподвижных точек, является гиперболическим; см. [11]).

Напомним, что поток Φ_t , порожденный векторным полем $X(x)$, называется гиперболическим на некотором инвариантном множестве Λ , если в каждой точке $x \in \Lambda$ имеется разложение касательного пространства $T_x M$ в прямую сумму

$$T_x M = E_x^{ss} \oplus E_x^0 \oplus E_x^{uu}.$$

Семейства пространств E_x^{ss} , E_x^0 , E_x^{uu} инвариантны на Λ , непрерывно зависят от x и дифференцируемо зависят от x вдоль траекторий. Пространство E_x^0 одномерно и порождено вектором $X(x)$. При этом существуют такие константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma > 0$, что:

- если $v \in E_x^{ss}$, $t > 0$, то $|d\Phi_t(v)| < c_1 e^{-\gamma t} |v|$;
- если $u \in E_x^{uu}$, $t > 0$, то $|d\Phi_t(u)| > c_2 e^{\gamma t} |u|$.

Согласно терминологии, принятой в настоящей работе, пространство E_x^{ss} называется строго устойчивым, пространство E_x^{uu} называется строго неустойчивым, пространство $E_x^s = E_x^{ss} \oplus E_x^0$ называется устойчивым, а пространство $E_x^c = E_x^0 \oplus E_x^{uu}$ называется центрально-неустойчивым.

Ориентируемость. В каждом пространстве E_x^{ss} можно выбрать одну из двух ориентаций. Семейство пространств называется ориентируемым, если можно выбрать ориентацию, непрерывно зависящую от точки $x \in U$. Всякое семейство пространств, непрерывно зависящее от точки, является локально ориентируемым. Это означает, что для каждой точки существует окрестность, в которой можно выбрать одну из двух непрерывных ориентаций.

Если семейство пространств E_x^{ss} неориентируемо, то существует двуслойное накрытие множества U , на котором семейство пространств E_x^{ss} является ориентируемым.

Следует отметить, что это накрытие не обязательно продолжается до накрытия всего многообразия M .

Мы предполагаем, что семейство пространств E_x^{ss} ориентируемо. Если оно оказалось неориентируемым, то мы перейдем к двуслойному накрытию множества U . Нетрудно показать, что для двуслойного накрытия все свойства сохраняются.

Строго устойчивые многообразия. Семейство пространств E_x^{ss} порождает семейство многообразий $W^{ss}(x)$, которые называются строго устойчивыми многообразиями. Многообразие $W^{ss}(x)$ является гладким (класса C^2) многообразием, которое в каждой точке $y \in W^{ss}(x)$ касается пространства E_y^{ss} (точнее, пространство E_y^{ss} является касательным пространством к многообразию $W^{ss}(x)$ в точке $y \in W^{ss}(x)$). В общем случае гладкого частично гиперболического потока класс гладкости многообразия $W^{ss}(x)$ такой же, как и класс гладкости векторного поля, задающего поток.

Многообразия $W^{ss}(x)$ характеризуются тем, что если $y \in W^{ss}(x)$, то

$$\rho(x(t), y(t)) \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow +\infty.$$

Различают локальные и глобальные многообразия. Локальное строго устойчивое многообразие $W_\varepsilon^{ss}(x)$ – это часть строго устойчивого многообразия, являющаяся шаром радиуса ε относительно внутренней метрики многообразия $W^{ss}(x)$. Глобальным строго устойчивым многообразием называется множество

$$W_{gl}^{ss}(x) = \bigcup_{t>0} d\Phi_{-t}(W_\varepsilon^{ss}(\Phi_t(x))).$$

Если бы векторное поле было определено на всем многообразии M , то $W_{gl}^{ss}(x)$ являлось бы иммерсированным подмногообразием, которое получается иммерсией пространства $\mathbb{R}^{n-2} \rightarrow M$. В нашем случае глобальное многообразие – это образ некоторого открытого множества в пространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ при его иммерсии в M . Поэтому мы будем рассматривать только локальные многообразия.

Под многообразием $W^{ss}(x)$ мы понимаем локальное многообразие неопределенного размера, обычно такого, какой нужен.

Можно утверждать, что если x находится на расстоянии ε от границы множества U , то многообразие $W_\varepsilon^{ss}(x)$ определено и является частью многообразия $W^{ss}(x)$.

Свойства строго устойчивых подпространств и локальных многообразий мы формулируем в теореме о локальных многообразиях.

Теорема о существовании семейства строго устойчивых многообразий для различных классов динамических систем имеет длинную историю. Одной из первых таких теорем является классическая теорема Адамара–Перрона. Для систем Аносова соответствующая теорема была доказана Д. В. Аносовым (см. [19]). Приведенная ниже формулировка теоремы о локальных многообразиях является перефразировкой соответствующей теоремы из [20].

В нижеследующей теореме через B_ε обозначается шар радиуса ε в пространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ с центром в начале координат, через U_ε обозначается множество таких точек $x \in U$, что расстояние от точки x до границы области U больше ε .

ТЕОРЕМА 1.10. *Для каждой точки $x \in U$ определено пространство $E_x^{ss} \subset T_x M$ размерности $n - 2$. Для каждой точки $x \in U_\varepsilon$ определено C^2 -гладкое многообразие $W_\varepsilon^{ss}(x)$, которое является образом шара B_ε при взаимно однозначном отображении $\psi_x: B_\varepsilon \rightarrow U$. При этом выполнены следующие условия:*

- 1) *семейство пространств E_x^{ss} удовлетворяет условию Гёльдера на каждом компактном множестве $K \subset U$;*
- 2) *касательное пространство κ множеству $\psi_x(B_\varepsilon)$ в каждой точке $y = \psi_x(\xi) \in \psi_x(B_\varepsilon)$ совпадает с пространством E_y^{ss} ;*
- 3) *функция $\psi_x(\xi)$ является C^2 -гладкой функцией переменной $\xi \in B_\varepsilon$;*
- 4) *при фиксированном ξ функция $h(x) = \psi_x(\xi)$ является непрерывной функцией переменной x .*

Кроме перечисленных свойств, семейство многообразий $W^{ss}(x)$ обладает свойством инвариантности и единственности. Мы их формулировать не будем, так как эти свойства хорошо известны, а их точная формулировка является громоздкой.

Устойчивые многообразия. Устойчивое многообразие $W^s(x)$ – это многообразие, которое в каждой точке y касается пространства $E_y^s = E_y^{ss} \oplus E_y^0$. Многообразия $W^s(x)$ характеризуются тем, что если $y \in W^s(x)$, то существует такое $\tau \in \mathbb{R}$, что

$$\rho(x(t), y(t + \tau)) \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow +\infty.$$

Многообразие $W^s(x)$ является объединением строго устойчивых многообразий, проходящих через точки траектории $x(t)$. Это почти то же самое, что объединение траекторий, проходящих через многообразие $W^{ss}(x)$.

Строго неустойчивые пространства и многообразия. Отметим, что в отличие от гиперболического потока для сингулярно гиперболического потока, вообще говоря, не существует инвариантного разложения $E_x^c = E_x^0 \oplus E_x^{uu}$. В отличие от семейств E_x^{ss} , E_x^s семейство E_x^c не порождает слоения. Причина состоит в том, что класс сингулярно гиперболических потоков не обладает симметрией

по отношению к обращению времени и перемене пространств E_x^{ss} , E_x^{uu} , присущей классу гиперболических потоков.

Строго неустойчивым пространством E_x^{uu} называется подпространство пространства $T_x M$, состоящее из таких векторов v , что $\lim_{t \rightarrow -\infty} |d\Phi_t(v)| = 0$, причем сходимость экспоненциальная. При этом считается, что точка x не принадлежит неустойчивой сепаратрисе неподвижной точки и не является неподвижной точкой.

Строго неустойчивым многообразием называется многообразие $W^{uu}(x)$, состоящее из таких точек $y \in \Lambda$, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = 0.$$

Многообразие $W^{uu}(x)$ является гладкой (класса C^2) кривой; касательное пространство в точке $y \in W^{uu}(x)$ совпадает с E_y^{uu} .

Строго неустойчивые пространства E_x^{uu} и многообразия $W^{uu}(x)$ существуют не для всех точек $x \in \Lambda$. Множество точек, для которых существуют строго неустойчивые многообразия, инвариантно относительно Φ_t . В отличие от пространств E_x^{ss} для пространств E_x^{uu} нет непрерывной зависимости пространства от точки.

Большая часть настоящей работы посвящена доказательству существования строго неустойчивых пространств и многообразий.

1.3. Изложение результатов. Для анализа поведения траекторий в окрестности неподвижных точек строится частичная линеаризация в окрестности неподвижных точек. “Частичная” означает, что поток линеаризуется только по двум координатам.

Неподвижные точки. Нетрудно видеть, что любая неподвижная точка $Q \in U$ принадлежит аттрактору.

Пусть Q – неподвижная точка потока. В работе [11] показано, что если многообразие M трехмерно, а аттрактор топологически транзитивен, то собственные числа линеаризованного потока в окрестности неподвижной точки таковы, что $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

В нашем случае неподвижные точки могут быть двух типов. Первый тип, назовем его типом (L) , характеризуется тем, что собственные числа линеаризованного потока в окрестности неподвижной точки таковы, что имеется два собственных числа $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, а остальная часть собственных значений лежит в области $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$. Для неподвижной точки Q типа (L) пространство E_x^{ss} совпадает с подпространством пространства $T_Q M$, порожденным собственными числами, лежащими в области $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$; пространство E_Q^c порождено собственными векторами, соответствующими собственным числам λ_1, λ_2 .

Второй тип неподвижных точек назовем типом (F) . У неподвижных точек типа (F) имеется два собственных числа с положительной вещественной частью (это может быть пара вещественных чисел или одно вещественное кратности 2 или пара комплексно-сопряженных), а остальная часть спектра лежит левее мнимой оси. У неподвижной точки типа (F) существует окрестность,

в которой точки аттрактора Λ – это сама точка и часть ее неустойчивого (двумерного) многообразия (доказательство этого утверждения см. в [9]). Поэтому неподвижные точки типа (F) могут быть исключены из рассмотрения вместе с некоторой окрестностью и входящими в нее траекториями.

Частичная линеаризация. Мы покажем, что в окрестности неподвижных точек типа (L) существуют функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, которые непрерывны, дифференцируемы вдоль траекторий, постоянны на многообразиях $W^{ss}(x)$ и

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2.$$

Новое в этой теореме по сравнению с теоремами Гробмана–Хартмана и Стернберга является то, что построенные функции y_1 , y_2 постоянны на многообразиях $W^{ss}(x)$.

Строго неустойчивые пространства. Для построения SBR-меры требуется построение семейства строго устойчивых многообразий для достаточно большого множества точек аттрактора.

Мы определим множества $M(b; \delta)$, состоящие, грубо говоря, из тех точек, отрицательные полутраектории которых не подходят слишком близко к неподвижным точкам. Определение множеств $M(b; \delta)$ дается через линеаризованную систему координат.

Пусть $\mathcal{N}$ – поверхность, состоящая из непересекающихся связных кусков, определяемых уравнением $|y_1| = |y_2|$. Так как функции y_1 , y_2 не гладкие, то и поверхность $\mathcal{N}$ не гладкая, а всего лишь непрерывная. Размерность поверхности $\mathcal{N}$ равна $n - 1$.

Определим множество $M(b; \delta)$ как множество таких точек $x \in \Lambda$, что если траектория $x(t)$ точки x пересекает поверхность $\mathcal{N}$ в точке с координатами $|y_1| = |y_2| = d$ в момент $t < 0$, то $d \geq b e^{-\delta|t|}$.

Мы докажем, что если $2\delta < \gamma_3$, то на множестве $M(b; \delta)$ определено семейство одномерных подпространств E_x^{uu} , непрерывно зависящих от точки x на множестве $M(b; \delta)$. Пространство E_x^{uu} характеризуется тем, что если $v \in E_x^{uu}$, то $|d\Phi_t(v)|$ убывает экспоненциально при $t \rightarrow -\infty$.

Отсюда следует, что если $x \in M(b; \delta)$, то существует разложение $E_x^c = E_x^0 \oplus E_x^{uu}$, где E_x^0 порождено вектором $X(x)$.

Далее мы покажем, что для каждой точки $x \in M(b; \delta)$ существует строго неустойчивое многообразие $W^{uu}(x)$, которое является объединением таких точек y , что расстояние между точками $x(t) = \Phi_t(x)$, $y(t) = \Phi_t(y)$ стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Многообразие $W^{uu}(x)$ является гладкой иммерсированной кривой, принадлежит множеству Λ и в каждой точке y касается пространства E_x^{uu} .

Особенность сингулярно гиперболических потоков состоит в том, что угол между вектором $X(x)$ и пространством E_x^{uu} может быть сколь угодно малым. Кроме того, нет непрерывной зависимости пространства E_x^{uu} и многообразия $W^{uu}(x)$ от точки x , однако они зависят от x непрерывно на каждом множестве $M(b; \delta)$.

Инвариантные меры. Работа посвящена построению инвариантных мер типа Синая–Боуэна–Рюэлля для сингулярно гиперболических потоков. Эти меры будут построены в следующих статьях. Будет доказано, что существует конечное число множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ и мер $\mu_1, \dots, \mu_m$, сосредоточенных на множествах $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$, таких, что поток на Λ_j с мерой μ_j эргодичен, периодические точки всюду плотны в множестве Λ_j , положительная полутраектория почти каждой точки $x \in U$ сходится к одному из множеств Λ_j .

Более подробное изложение соответствующих результатов будет приведено в следующих статьях.

С удовольствием выражаю благодарность Р. В. Плыкину, Н. Э. Клишпонт, С. В. Гонченко, Д. В. Аносову, А. М. Степину за внимание к работе и полезные замечания.

§ 2. Предварительные конструкции

2.1. Дифференциальные формы. Дифференциальные формы использовались Д. В. Аносовым в работе [19] при доказательстве абсолютной непрерывности слоений. Мы будем их использовать при доказательстве теоремы о частичной линеаризации, при доказательстве существования инвариантного семейства строго неустойчивых многообразий, при доказательстве формулы для якобиана отображения вдоль строго устойчивых многообразий и при доказательстве теоремы о возвратности. В настоящей работе многое при работе с дифференциальными формами заимствовано из [19]; речь идет о неформальном заимствовании, поэтому ссылок на эту работу нет.

Напомним некоторые сведения из теории дифференциальных форм, которые в дальнейшем будем использовать.

Пусть T – конечномерное векторное пространство. 1-форма p , определенная на T , – это линейный функционал, определенный на T . Значение формы p на векторе v мы будем обозначать $\langle p; v \rangle$.

Множество 1-форм, определенных на пространстве T , образует линейное пространство, обозначаемое T^* ; пространство T^* называется пространством, сопряженным (или двойственным) пространству T .

Если в пространстве T определен базис, а в пространстве T^* определен двойственный базис, то вектор v записывается как вектор-столбец, а 1-форма p записывается как вектор-строка:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in T, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in T^*.$$

Мы будем употреблять обозначение $(v_1, \dots, v_n)^T$ для вектор-столбца с элементами $v_1, \dots, v_n$. Индекс T в данном случае означает транспонирование.

Следует обратить внимание на то, что обозначение v_k может означать “вектор номер k ” или “ k -я координата вектора v ”. У нас в основном будет использоваться бескоординатная форма записи векторов (равно как и форм), поэтому

чаще всего обозначение v_k означает “вектор номер k ”. В тех случаях, когда оно употребляется во втором смысле, по контексту это будет понятно и недоразумений не возникнет.

m -форма φ – это m -линейный кососимметрический функционал от m переменных $v_j \in T$, $j = 1, \dots, m$. Значение m -формы φ на векторах $v_1, \dots, v_m$ обозначается $\langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle$.

Множество m -форм образует линейное пространство, обозначаемое $\bigwedge^m T^*$.

В пространстве T^* определено внешнее произведение $\wedge$; если $p_1, \dots, p_m$ – 1-формы, то значение формы $\varphi = p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_m$ на векторах $v_1, \dots, v_m$ определяется как

$$\langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle = \det(A),$$

где A – матрица из элементов $a_{ij} = \langle p_i; v_j \rangle$.

m -форма φ называется разложимой, если существуют 1-формы $p_1, \dots, p_m$, через которые φ выражается в виде $\varphi = p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_m$.

Любая m -форма представляется в виде суммы разложимых форм.

Отметим, что в n -мерном пространстве все 1-формы, $(n-1)$ -формы и n -формы разложимы. В частности, в $\mathbb{R}^3$ все формы разложимы.

Для каждой m -формы единственным образом определяется минимальное пространство $R^* \subset T^*$, состоящее из тех 1-форм, через которые форма φ выражается в виде суммы внешних произведений. Пространство R^* называется ранговым пространством, а его размерность называется рангом m -формы φ . Очевидно, что ранг ненулевой m -формы не менее m . Если ранг m -формы φ равен m , то φ разложима.

Пусть R^* – ранговое пространство формы φ , а $E \subset T$ – ортогональное дополнение к R^* . Если хотя бы один из векторов $v_1, \dots, v_m$ принадлежит пространству E , то $\langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle = 0$. Обратно, если v_1 – такой вектор, что $\langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle = 0$ при любых других векторах $v_2, \dots, v_m$, то $v_1 \in E$. Пространство E называется аннулятором формы φ . Из вышеприведенных рассуждений следует, что аннулятор формы совпадает с ортогональным дополнением к ранговому пространству.

Вектор $v \in T$ является линейным функционалом, определенным на пространстве T^* . Соответственно, если рассматривать векторы как формы на пространстве T^* , то определяется и внешнее произведение $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$. Соответствующий объект называется m -поливектором. Множество m -поливекторов образует линейное пространство, обозначаемое через $\bigwedge^m T$. Пространство m -поливекторов и пространство m -форм являются сопряженными друг другу. Это следует из того, что равенство

$$\langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle = \langle \varphi; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m \rangle$$

справедливо для любой ненулевой m -формы φ тогда и только тогда, когда

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_m = \tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_m.$$

Дифференциальная m -форма – это функция $\varphi(x)$, определенная на множестве U со значениями в пространстве $\bigwedge^m T_x^*M$. Если в любой гладкой локальной системе координат координаты формы являются гладкими функциями, то форма называется гладкой. Если координаты формы непрерывны, то форма называется непрерывной.

Дифференциальная 1-форма $p(x)$ определяет действие на векторное поле $v(x)$, которое в каждой точке x совпадает с $\langle p(x), v(x) \rangle$. Результат действия 1-формы на векторное поле – функция.

Каждая дифференциальная 1-форма определяет интеграл по гладкой кривой. Именно, пусть I – гладкая кривая, лежащая в области определения дифференциальной 1-формы p и параметризованная параметром τ (т.е. $I = \{h(\tau) : \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$). Обозначим через $h'(\tau)$ вектор $h'(\tau) = \frac{dh}{d\tau}$. Интегралом от формы p по кривой I называется интеграл

$$\int_I p = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle p(h(\tau)); h'(\tau) \rangle d\tau.$$

Этот интеграл не меняется при замене параметризации, не меняющей ориентации кривой; если же при замене параметра ориентация кривой меняется на противоположную, то интеграл меняет знак.

Каждая дифференциальная 2-форма определяет интеграл по гладкой поверхности. Именно, если Π – гладкая поверхность, лежащая в области определения дифференциальной 2-формы φ и параметризованная параметрами s, τ (т.е. $\Pi = \{h(s, \tau) : (s, \tau) \in G \subset \mathbb{R}^2\}$), то

$$\int_{\Pi} \varphi = \int_G \left\langle \varphi(h(s, \tau)); \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial \tau} \right\rangle ds d\tau.$$

Этот интеграл не меняется при замене параметризации, не меняющей ориентации поверхности; если же при замене параметра ориентация поверхности меняется на противоположную, то интеграл меняет знак.

Векторные поля и формы, возникающие в данной работе, являются всего лишь непрерывными, но дифференцируемыми вдоль траекторий. Недифференцируемость форм создает некоторые неудобства, связанные с тем, что для них нельзя обычным образом определять внешнюю производную. Трудности, связанные с недифференцируемостью форм, преодолеваются за счет использования абсолютной непрерывности слоений и выражения нужных величин через интегралы.

Дифференциальные 1-формы полезны, поскольку они позволяют определить координаты в пространствах $T_x M$. В самом деле, если T – линейное пространство, то 1-форма определяет одну координату. Две 1-формы определяют две координаты. Таким образом, задав две 1-формы, можно определить систему координат сразу во всех двумерных подпространствах, трансверсальных некоторому $(n - 2)$ -мерному подпространству.

m -формы позволяют сопоставить многомерному пространству одномерное. Действительно, m -мерному пространству $E \subset T$ сопоставляется $(n - m)$ -форма $\varphi = p_1 \wedge \dots \wedge p_{n-m}$, где 1-формы $p_1, \dots, p_{n-m}$ образуют базис в ортогональном

дополнении $E^\perp$ к пространству E . Множество определенных таким образом $(n - m)$ -форм образует одномерное подпространство пространства $\bigwedge^{n-m} T^*$. При этом пространство $E^\perp$ является ранговым пространством соответствующих форм φ , а пространство E – их аннулятором.

2.2. Уравнение в вариациях и сопряженное уравнение в вариациях.

Введение локальной системы координат позволяет отождествить все пространства $T_x M$ (точка x принадлежит рассматриваемой окрестности) с пространством $\mathbb{R}^n$. В локальной системе координат векторное поле $X(x)$ записывается как вектор-столбец с координатами $(X_1(x), \dots, X_n(x))^T$. Обозначим через $D(x)$ матрицу с элементами

$$d_{ij} = \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\}.$$

Матрица $D(x)$ действует на векторы обычным образом – как умножение матрицы на вектор-столбец. Она же действует на 1-формы как умножение вектор-строки $q = (q_1, \dots, q_n)$ на матрицу. Поэтому действие матрицы $D(x)$ на форму $q(x)$ мы записываем как $qD(x)$, так как это согласовывается с обычным произведением матриц.

Хорошо известно, что в локальных координатах вектор $v(t) = d\Phi_t(v)$ является решением уравнения в вариациях

$$\dot{v}(t) = D(x(t))v(t).$$

Отметим, что уравнение в вариациях не имеет тензорного характера. Тензорный характер имеет соответствующее векторное поле на касательном расслоении. Мы будем понимать записанное в бескоординатной форме уравнение в вариациях и последующие уравнения на формы (в частности, сопряженное уравнение в вариациях) как способ записать соответствующее уравнение в локальных координатах.

Действие дифференциала на формы. Действие дифференциала на m -форму $\varphi \in \bigwedge^m T_x^* M$ обозначается через $d_{*m}\Phi_t(\varphi)$; это действие определяется так, что для любых векторов $v_1, \dots, v_m \in T_x M$ и любого t , для которого $\Phi_t(x)$ определено, имеет место равенство

$$\langle d_{*m}\Phi_t(\varphi); d\Phi_t(v_1), \dots, d\Phi_t(v_m) \rangle = \langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Действие d_{*1} мы будем обозначать d_* . Хорошо известно, что в локальных координатах форма $q(t) = d_*\Phi_t(q)$ (которая представляется как вектор-строка) является решением уравнения

$$\dot{q}(t) = -q(t)D(x(t));$$

это уравнение называется сопряженным уравнением в вариациях (см., например, [21]).

ЛЕММА 2.1. Пусть $v(t), q(t)$ – решения уравнения в вариациях и сопряженного уравнения в вариациях вдоль одной и той же траектории $x(t)$. Тогда $\langle q(t), v(t) \rangle = \text{const}$.

Справедливость леммы следует из очевидной цепочки равенств

$$\frac{d}{dt}\langle q, v \rangle = \langle \dot{q}, v \rangle + \langle q, \dot{v} \rangle = \langle -qD(x(t)), v \rangle + \langle q, D(x(t))v \rangle = 0.$$

Из леммы следует, что определение сопряженного уравнения в вариациях согласовано с определением действия $d_*\Phi_t$.

Уравнение в вариациях для форм. Обозначим через D_m оператор, который действует на m -формы следующим образом.

Пусть φ – разложимая m -форма, представленная в виде

$$\varphi = p_1 \wedge \cdots \wedge p_m,$$

где $p_1, \dots, p_m$ – 1-формы. Тогда положим

$$\varphi D_m = p_1 D \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_m + p_1 \wedge p_2 D \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_m + \cdots + p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_m D.$$

Действие оператора D_m на неразложимые m -формы определяется по линейности.

Уравнение в вариациях для m -форм имеет вид

$$\dot{\varphi} = -\varphi D_m. \quad (3)$$

2.3. Семейства подпространств и многообразий. Пусть $\mathcal{K}$ – конус размерности d в евклидовом n -мерном пространстве T . Пространство E_{com} размерности $n - d$ называется дополнительным к конусу $\mathcal{K}$, если E_{com} не содержит векторов, принадлежащих конусу $\mathcal{K}$. Объединение дополнительных пространств к конусу $\mathcal{K}$ называется дополнительным конусом; обозначается дополнительный конус $\mathcal{K}_{\text{com}}$.

Ортогональным дополнением $E^\perp$ к пространству $E \subset T$ называется подпространство пространства T^* , состоящее из таких 1-форм $q \in T^*$, что $\langle q, v \rangle = 0$ для любого вектора $v \in E$.

Конусом, ортогональным конусу $\mathcal{K}$, называется конус в пространстве T^* , состоящий из таких $(n - d)$ -мерных подпространств $E^* \subset T^*$, для которых ортогональное дополнение принадлежит конусу $\mathcal{K}$.

Конус $\mathcal{K}^*$, двойственный конусу $\mathcal{K}$, – это конус, ортогональный дополнению.

Двойственный конус характеризуется следующим свойством.

Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерный конус. Для любого $v \in \mathcal{K}$ и любого d -мерного пространства $E^* \subset \mathcal{K}^*$ найдется вектор $q \in E^*$ такой, что $\langle q, v \rangle \neq 0$.

Действительно, так как E^* – ортогональное дополнение к некоторому пространству E_{com} , то E_{com} – ортогональное дополнение к пространству E^* . Но так как $v \notin E_{\text{com}}$, то найдется $q \in E^*$ такой, что $\langle q, v \rangle \neq 0$.

С другой стороны, пусть $q \in \mathcal{K}^*$, $q \neq 0$, $E \subset \mathcal{K}$ – пространство размерности d . Тогда форма q не может быть ортогональной пространству E , так как q ортогональна пространству E_{com} , дополнительному к E . Следовательно, для любого $q \in \mathcal{K}^*$ и любого d -мерного пространства $E \subset \mathcal{K}$ найдется такой вектор $v \in E$, что $\langle q, v \rangle \neq 0$.

Из приведенных рассуждений очевидно, что конус, двойственный к двойственному, совпадает с исходным конусом. Иначе говоря, $(\mathcal{K}^*)^* = \mathcal{K}$.

Если $\mathcal{K} \subset T$ – одномерный конус в пространстве T , то двойственный конус $\mathcal{K}^* \subset T^*$ совпадает с множеством таких $q \in T^*$, что при любом $v \in \mathcal{K}$ верно неравенство $\langle q, v \rangle \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Мы говорим, что на U определено инвариантное при движении вперед семейство $(*)$ -неустойчивых конусов, если для каждой точки $x \in U$ определен конус $\mathcal{K}_x^{ss*} \subset T_x^*M$ размерности $n - 2$; семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss*}$ непрерывно зависит от x и инвариантно в том смысле, что если $x(t)$ – траектория, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(0) \in \mathcal{K}_{x(0)}^{ss*}$, то $q(t) \in \mathcal{K}_{x(t)}^{ss*}$ для всех $t > 0$, для которых $x(t)$ определено. Кроме того, существуют такие константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, что для любой траектории $x(t)$, любого решения $q(t)$ сопряженного уравнения в вариациях такого, что $q(0) \in \mathcal{K}_{x(0)}^{ss*}$, и любого $t > 0$, для которого $q(t)$ определено, справедливо неравенство $|q(t)| > c_1 e^{\gamma_1 t} |q(0)|$.

Двойственным семейством к семейству $\{\mathcal{K}_x^{ss}\}$ мы будем называть семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss*}$, двойственных конусам $\mathcal{K}_x^{ss}$. Тогда семейство $\{\mathcal{K}_x^{ss}\}$ является двойственным семейству $\{\mathcal{K}_x^{ss*}\}$.

Если на U определено инвариантное при движении вперед семейство $(*)$ -неустойчивых конусов $\{\mathcal{K}_x^{ss*}\}$, то двойственное семейство конусов $\{\mathcal{K}_x^{ss}\}$ является семейством инвариантных при движении назад устойчивых конусов, причем константа γ_1 для семейства $\mathcal{K}_x^{ss}$ и двойственного семейства $\mathcal{K}_x^{ss*}$ одна и та же. Наоборот, если определено семейство устойчивых конусов $\{\mathcal{K}_x^{ss}\}$, инвариантных при движении назад, то двойственное семейство конусов $\{\mathcal{K}_x^{ss*}\}$ является семейством $(*)$ -неустойчивых конусов, инвариантных при движении вперед.

Семейство центрально-неустойчивых пространств. По семейству конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ мы можем определить еще три семейства. Это семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss*}$, двойственных конусам $\mathcal{K}_x^{ss}$, определенное выше семейство конусов $\mathcal{K}_x^c$, дополнительных к конусам $\mathcal{K}_x^{ss}$, семейство конусов $\mathcal{K}_x^{c*}$, ортогональных конусам $\mathcal{K}_x^{ss}$. Очевидно, что конусы $\mathcal{K}_x^{c*}$ являются двойственными по отношению к конусам $\mathcal{K}_x^c$.

Аналогично семейству строго устойчивых пространств E_x^{ss} на множестве Λ определены семейство центрально-неустойчивых пространств E_x^c (называемых иногда неустойчивыми пространствами) и два семейства подпространств пространства T_x^*M . Это пространства E_x^{ss*} , E_x^{c*} . Пространства E_x^c , E_x^{ss*} определены только для точек аттрактора, пространства E_x^{ss} , E_x^{c*} определены для всех точек области U . Пространства E_x^{ss} , E_x^{c*} ортогональны друг другу, пространства E_x^c , E_x^{ss*} тоже ортогональны друг другу.

Кроме перечисленных пространств имеется еще одно пространство – пространство $E_x^{uu*} \subset T_x^*M$, состоящее из 1-форм, ортогональных пространству E_x^{ss} и вектору $X(x)$. Пространства E_x^{uu*} одномерны и определены для тех точек, в которых $X(x) \notin E_x^{ss}$. Ниже мы покажем, что исключительные точки (для которых $X(x) \in E_x^{ss}$) – это неподвижные точки и их строго устойчивые многообразия.

Пространства E_x^{ss} , E_x^{c*} , E_x^{uu*} определены на всем множестве U , и их зависимость от точки x является гёльдеровой; пространства E_x^c и E_x^{ss*} определены на множестве Λ , их зависимость от x является гёльдеровой на Λ .

2.4. Некоторые свойства сингулярно гиперболических потоков.

ЛЕММА 2.3. $X(x) \in E_x^{ss}$ тогда и только тогда, когда x принадлежит строго устойчивому многообразию $W^{ss}(Q)$ некоторой неподвижной точки Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X(x) \in E_x^{ss}$, $x(t)$ – траектория точки x . Из инвариантности семейства E_x^{ss} и инвариантности векторного поля $X(x(t))$ следует, что $X(x(t)) \in E_{x(t)}^{ss}$ при всех $t > 0$. Из определения пространств E_x^{ss} следует, что $|X(x(t))|$ экспоненциально убывает при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому $x(t)$ стремится к некоторой неподвижной точке Q при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, x принадлежит устойчивому многообразию точки Q . К тому же $x(t)$ – кривая, которая в каждой точке y касается пространства E_y^{ss} . Следовательно, $x \in W^{ss}(Q)$.

Пусть теперь $x \in W^{ss}(Q)$ для некоторой неподвижной точки Q . Тогда вся положительная полутраектория $x(t)$ принадлежит $W^{ss}(Q)$, поэтому при любом t вектор $X(x(t))$ касается многообразия $W^{ss}(Q)$ и, следовательно, принадлежит пространству $E_{x(t)}^{ss}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4 (см. [9]). Для любой точки $x \in \Lambda$ вектор $X(x)$ ортогонален пространству E_x^{ss*} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \Lambda$, $x(t)$ – траектория точки x , $x(0) = x$. Так как $x \in \Lambda$, то траектория определена при всех $t \in \mathbb{R}$. Пространство E_x^{ss*} определено как предел $\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \mathcal{K}_{x(-t_1)}^{ss*} d\Phi_{t_1}^*$. Но $X(x(t))$ является решением уравнения в вариациях. Рассмотрим решение $q(t)$ сопряженного уравнения в вариациях с таким начальным условием, что $q(0) \in E_{x(0)}^{ss*}$, $|q(0)| = 1$. В силу сохранения скалярного произведения получаем, что $(q(0), X(x(0))) = (q(t), X(x(t)))$, а в силу определения конусов $\mathcal{K}_x^{ss*}$ получаем, что при $t > 0$

$$|q(0)| > c_1 \exp(\gamma_1 t) |q(-t)|,$$

благодаря чему $\lim_{t \rightarrow -\infty} |q(t)| = 0$. Из ограниченности вектора $X(x)$ в области U следует, что величина $\langle q(-t), X(x(-t)) \rangle$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $\langle q(0), X(x(0)) \rangle = 0$. Лемма доказана.

В качестве следствия получаем, что если $x \in \Lambda$, то $X(x) \in E_x^c$. Выше это не формулировалось, но считалось как бы само собой разумеющимся. Теперь мы это доказали.

ЛЕММА 2.5 (см. [12; теорема В]). Строго устойчивое многообразие неподвижной точки Q не содержит других точек аттрактора, кроме самой точки Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.4 $\langle q, X(x) \rangle = 0$ для каждой точки $x \in \Lambda$ и каждой формы $q \in E_x^{ss*}$. С другой стороны, из того, что конус $\mathcal{K}_x^{ss*}$ является двойственным конусу $\mathcal{K}_x^{ss}$, для любого ненулевого вектора $v \in E_x^{ss}$ найдется такая форма $q \in E_x^{ss*}$, что $\langle q, v \rangle \neq 0$. Следовательно, если $X(x) \neq 0$ и $X(x) \in E_x^{ss}$,

то $x \notin \Lambda$. Но для точек $x \in W_Q^{ss}$ верно, что $X(x) \in E_x^{ss}$ (лемма 2.3) и $X(x) \neq 0$. Следовательно, $W^{ss}(Q)$ не содержит точек аттрактора.

СЛЕДСТВИЕ. *Не существует сингулярно гиперболических потоков, определенных на всем многообразии M без края и содержащих неподвижные точки.*

Действительно, для таких потоков $\Lambda = M$, и поэтому $W^{ss}(Q) \subset \Lambda$, что противоречит лемме 2.5.

ТЕОРЕМА 2.6 (см. [11]). *Пусть $\Lambda_1 \in U$ – инвариантное замкнутое множество, не содержащее неподвижных точек. Тогда поток на Λ_1 гиперболичесен.*

Эту теорему оставим без доказательства. Приведенная теорема является некоторым обоснованием введения класса сингулярно гиперболических систем.

ТЕОРЕМА 2.7 (см. [1]). *Пусть $X(x)$ – векторное поле, порождающее сингулярно гиперболический поток на множестве $U \subset M$. Тогда отображение последования на любом многообразии коразмерности 1, трансверсальном векторному полю $X(x)$, гиперболично.*

Доказательство для случая потока в трехмерном пространстве приведено в [1]. Это доказательство нетрудно перенести на случай произвольной размерности, поэтому мы его приводить не будем.

Отметим, что из гиперболичности отображения последования не следует сингулярная гиперболичность потока. В [12] приведен пример потока, порождающего гиперболическое отображение последования, но тем не менее в аттракторе (который является топологически транзитивным) содержится неподвижная точка с двумя положительными собственными значениями, а это для сингулярно гиперболического топологически транзитивного аттрактора невозможно.

В то же время если отображение последования гиперболично и все неподвижные точки аттрактора имеют тип (L) , то поток удовлетворяет некоторому более слабому свойству, чем сингулярная гиперболичность (см. [9]).

2.5. Инвариантные и полуинвариантные векторные поля и формы. Мы будем называть векторное поле $v(x)$, определенное на некотором инвариантном множестве, инвариантным, если для любой траектории $x(t)$ вектор $v(x(t))$ является решением уравнения в вариациях. Иначе говоря,

$$d\Phi_t(v(x)) = v(\Phi_t(x)).$$

Примером инвариантного векторного поля является поле $X(x)$.

Векторное поле $v(x)$ называется полуинвариантным, если оно непрерывно, дифференцируемо вдоль траекторий и семейство одномерных пространств $E_x \subset T_x M$, порожденных векторами $v(x)$, является инвариантным.

Дифференциальная форма называется полуинвариантной, если она непрерывна, дифференцируема вдоль траекторий, разложима и ранговое пространство инвариантно относительно действия сопряженного дифференциала.

Всякое инвариантное ориентируемое семейство пространств E_x порождается некоторым полуинвариантным векторным полем. Действительно, в качестве этого поля можно взять семейство векторов $v(x) \in E_x$ единичной длины, порождающих выбранную ориентацию семейства E_x .

Пусть семейство одномерных пространств $E_x \subset T_x M$ инвариантно и порождено векторным полем $v(x)$. Пусть $\tilde{v}(x(t))$ – решение уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $v(0) = \tilde{v}(0)$. Тогда существует такая функция $a(t)$, что $\tilde{v}(x(t)) = a(t)v(x(t))$. Подставляя в уравнение в вариациях $\dot{\tilde{v}} = D(x(t))\tilde{v}(t)$, получим

$$\dot{a}(t)v(x(t)) + a(t)\dot{v}(x(t)) = D(x(t))a(t)v(x(t)),$$

откуда

$$\dot{v}(x(t)) = D(x(t))v(x(t)) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}v(x(t)) = D(x(t))v(x(t)) - \left(\frac{d}{dt} \ln a(t)\right)v(x(t)).$$

Таким образом, всякое полуинвариантное векторное поле является решением уравнения, рассматриваемого как уравнение относительно поля $v(x)$ и функции $\sigma(x)$:

$$\dot{v}(x(t)) = D(x(t))v(x(t)) - \sigma(x(t))v(x(t)). \quad (4)$$

Наоборот, если для векторного поля $v(x)$ и функции $\sigma(x)$ выполнено равенство (4), то векторное поле $v(x)$ полуинвариантно.

Аналогично, пусть $R_x^* \subset T_x^* M$ – инвариантное семейство пространств, $\dim R_x^* = m$. Тогда существуют m линейно независимых 1-форм $p_1(x), \dots, p_m(x) \in R_x^*$, которые являются решениями сопряженного уравнения в вариациях. Всякая m -форма φ , ранговым пространством которой является пространство R_x^* , имеет вид $\varphi = a(x)p_1 \wedge \dots \wedge p_m$. Аналогично тому, как мы получили уравнение (4), получаем уравнение для формы

$$\dot{\varphi}(x(t)) = -\varphi(x(t))D_m(x(t)) + \sigma(x)\varphi(x(t)). \quad (5)$$

Можно показать, что если пара $(\varphi(x), \sigma(x))$ является решением уравнения (5), то форма $\varphi(x)$ полуинвариантна.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 2.8. Пусть φ – полуинвариантная m -форма с функцией $\sigma(x)$, определенной равенством (5), $v_1(t), \dots, v_m(t)$ – решения уравнения в вариациях вдоль некоторой траектории $x(t)$. Тогда на траектории $x(t)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle = \sigma \langle \varphi; v_1, \dots, v_m \rangle.$$

ЛЕММА 2.9. Для всякой полуинвариантной m -формы $\varphi(x)$ и всякой траектории $x(t)$ справедливо равенство

$$\varphi(x(T)) = \exp\left(\int_0^T \sigma(x(t)) dt\right) d_{*m} \Phi_T(\varphi(x(0))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение в вариациях для произвольной m -формы $\tilde{\varphi}$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \tilde{\varphi}(x(t)) = -\tilde{\varphi} D_m(x(t)).$$

Рассмотрим решение последнего уравнения с начальными условиями $\tilde{\varphi}(x(0)) = \varphi(x(0))$. Тогда $\varphi(t) = a(t)\tilde{\varphi}(t)$ с некоторой функцией $a(t)$. Дифференцируя это равенство, получаем

$$\dot{\varphi}(x(t)) = \dot{a}(t)\tilde{\varphi}(t) + a(t)\dot{\tilde{\varphi}}(t).$$

Подставляя это выражение в (5), получаем

$$\dot{a}(t)\tilde{\varphi}(t) + a(t)\dot{\tilde{\varphi}}(t) = -a(t)\tilde{\varphi}(t)D_m(x(t)) + \sigma(x(t))\varphi(t),$$

откуда $\dot{a}(t) = \sigma(x(t))a(t)$. Решение последнего уравнения имеет вид

$$a(t) = a(0) \exp\left(\int_0^T \sigma(x(t)) dt\right).$$

Учитывая, что $\varphi(x(0)) = \tilde{\varphi}(0)$, получаем $a(0) = 1$.

Для доказательства леммы осталось заметить, что $\tilde{\varphi}(T) = d_{*m}\Phi_T(\varphi(0))$. Лемма доказана.

Напомним, что две функции $f(x)$, $g(x)$, определенные на одном множестве, гомологичны, если существует непрерывная и дифференцируемая вдоль траекторий функция $h(x)$ такая, что $f(x) - g(x) = \frac{d}{dt}h(x)$.

ЛЕММА 2.10. Пусть $v_1(x)$, $v_2(x)$ – два полуинвариантных векторных поля, порождающих одно и то же семейство пространств, $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ – соответствующие им согласно уравнению (4) функции. Тогда σ_1 , σ_2 гомологичны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dot{v}_1 = Dv_1 + \sigma_1 v_1$, $\dot{v}_2 = Dv_2 + \sigma_2 v_2$. Так как $v_2 = av_1$, то $\dot{v}_2 = \dot{a}v_1 + a\dot{v}_1$. Следовательно,

$$Dav_1 + \sigma_2 av_1 = \dot{a}v_1 + a(Dv_1 + \sigma_1 v_1),$$

откуда

$$\sigma_2 av_1 = \dot{a}v_1 + a\sigma_1 v_1, \quad \sigma_2 = \frac{\dot{a}}{a} + \sigma_1.$$

Следовательно, $\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{d}{dt} \ln a$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 2.11. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – две полуинвариантные m -формы, порождающие одно и то же инвариантное семейство пространств, а $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ – соответствующие им согласно уравнению (5) функции. Тогда σ_1 , σ_2 гомологичны.

2.6. Полуинвариантные векторные поля и формы, порожденные сингулярно гиперболическим потоком. В этом пункте мы определяем некоторые формы, которые будут играть важную роль в дальнейшем изложении. Наиболее важными являются 1-форма r , 2-форма ω и функция $\theta(x)$, связанная с этими формами.

Форма $\omega(x)$. Пусть Ω – форма объема, т.е. величина $\langle \Omega; v_1, \dots, v_n \rangle$ равна объему параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, \dots, v_n \in T_x M$. Как говорилось во введении, многообразие M предполагается ориентируемым и ориентация фиксирована; эта ориентация определяет знак величины $\langle \Omega; v_1, \dots, v_n \rangle$. Семейство пространств E_x^{ss} тоже предполагалось ориентированным. Зафиксируем какую-либо ориентацию пространств E_x^{ss} .

Через ω обозначим 2-форму, значение которой на векторах $v_1, v_2 \in T_x M$ определяется равенством

$$\langle \omega; v_1, v_2 \rangle = \langle \Omega; v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \rangle, \quad (6)$$

где векторы $v_3, \dots, v_n$ образуют базис в E_x^{ss} , выбранный так, что векторы $v_3, \dots, v_n$ порождают параллелепипед единичного объема и выбранную ориентацию пространства E_x^{ss} .

Нетрудно показать, что $\langle \omega; v_1, v_2 \rangle$ не зависит от выбора базиса $v_3, \dots, v_n$.

Очевидно, что ранговым пространством формы ω является ортогональное дополнение к пространству E_x^{ss} , которое мы обозначили выше E_x^{c*} .

Из инвариантности семейства пространств E_x^{ss} (и, следовательно, семейства пространств E_x^{c*}) следует, что форма ω полуинвариантна.

Из полуинвариантности формы ω следует, что существует такая функция $\theta(x)$, что

$$\dot{\omega}(x) = -\omega(x)D_2(x) + \theta(x)\omega(x). \quad (7)$$

Так как семейство пространств E_x^{ss} гёльдерово, то и форма ω и функция $\theta(x)$ гёльдеровы.

Форма $\omega(x)$ дает способ измерять площадь параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 такими, что двумерное пространство, порожденное векторами v_1, v_2 , принадлежит конусу $\mathcal{K}_x^c$. Нетрудно показать, что существуют такие константы C_1, C_2 , что для таких векторов v_1, v_2 справедливы неравенства

$$C_1|\langle \omega; v_1, v_2 \rangle| < S(v_1, v_2) < C_2|\langle \omega; v_1, v_2 \rangle|,$$

где через $S(v_1, v_2)$ обозначена площадь, определяемая римановой метрикой.

Функция $\theta(x)$ имеет смысл скорости роста площади площадки, ортогональной пространству E_x^{ss} . В дальнейшем эта функция будет играть важную роль. Сформулируем одно из утверждений, характеризующих важность этой функции.

ЛЕММА 2.12. *Частично гиперболический поток является сингулярно гиперболическим тогда и только тогда, когда все неподвижные точки гиперболичны и существуют такие константы $\tilde{c}_3 \in \mathbb{R}$, $\gamma_3 > 0$, что для всякой траектории $x(t)$ и всякого $T > 0$ справедливо неравенство*

$$\int_0^T \theta(x(t)) dt > \tilde{c}_3 + \gamma_3 T.$$

Отметим, что константа γ_3 в этой лемме и в определении сингулярно гиперболического потока (определение 1.9) одна и та же.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\omega(v_1, v_2)$ для векторов $v_1, v_2 \in \mathcal{K}_x^c$ эквивалентна площади параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 , то условие роста площадей в определении сингулярно гиперболического потока эквивалентно следующему условию:

существуют такие константы $\bar{c}_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$, что для любого $t > 0$, любой точки $x \in U$ и любых векторов $v_1, v_2 \in \mathcal{K}_s^c$ справедливо неравенство

$$\langle \omega(\Phi_t(x)); d\Phi_t(v_2), d\Phi_t(v_2) \rangle > \bar{c}_3 e^{\gamma_3 t} \langle \omega(x); v_1, v_2 \rangle. \quad (8)$$

Согласно лемме 2.9

$$\omega(\Phi_t(x)) = \exp\left(\int_0^t \theta(x(\tau)) d\tau\right) d_{*2} \Phi_t(\omega(x)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \langle \omega(\Phi_t(x)); d\Phi_t(x)v_1, d\Phi_t(x)v_2 \rangle \\ &= \exp\left(\int_0^t \theta(x(\tau)) d\tau\right) \langle d_{*2}(\Phi_t(x)); d\Phi_t(v_2), d\Phi_t(v_2) \rangle \\ &= \exp\left(\int_0^t \theta(x(\tau)) d\tau\right) \langle \Phi_t(x); v_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение с неравенством (8), получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Форма $r(x)$. Обозначим через $r(x)$ форму, которая для каждого $v \in T_x M$ определяется равенством

$$\langle r(x); v \rangle = \langle \omega(x); X(x), v \rangle.$$

Очевидно, что r – это 1-форма. Эта форма ненулевая, если $X(x)$ не принадлежит аннулятору формы ω . Аннулятором формы ω является пространство E_x^{ss} . Из леммы 2.3 следует, что $X(x) \in E_x^{ss}$ в точках строго устойчивых многообразий неподвижных точек. Следовательно, $r(x) \neq 0$ для всех точек, кроме неподвижных точек и их строго устойчивых многообразий.

Форма $r(x)$ порождает семейство одномерных пространств $E_x^{u*} \subset T_x^* M$, ортогональных вектору $X(x)$ и пространству E_x^{ss} . Пространства E_x^{u*} определены для всех точек, кроме тех, в которых $X(x) \in E_x^{ss}$. Из инвариантности семейства пространств E_x^{ss} и семейства пространств E_x^0 , порожденных вектором $X(x)$, следует, что семейство пространств E_x^{u*} , порожденных формой r , инвариантно.

Нетрудно показать, что форма $r(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{r}(x) = -r(x)D(x) + \theta(x)r(x) \quad (9)$$

с той же самой функцией $\theta(x)$, которая определена с формой ω уравнением (7).

Отметим, что форма $r(x)$ гёльдерова и дифференцируема вдоль траекторий.

Форма r имеет смысл масштаба, в котором измеряется в данной точке расстояние до устойчивого многообразия близкой точки. Функция $\theta(x)$ имеет смысл скорости убегания близкой траектории от устойчивого многообразия точки x , если расстояние измерять в масштабе, определяемом формой r .

2.7. Адаптированные координаты. Как было отмечено выше, всякая 1-форма $p(x)$ определяет координату в пространстве $T_x M$ посредством соотношения $\xi = \langle p; v \rangle$. Мы построим систему координат в каждом двумерном пространстве $E \subset \mathcal{K}_x^c$. Для этого потребуются две 1-формы.

В качестве одной из форм возьмем построенную выше форму $r(x)$. Ниже будет построена 1-форма $p_0(x)$ такая, что:

- 1) $p_0(x)$ непрерывна и дифференцируема вдоль траекторий;
- 2) $p_0(x) \in E_x^{c*}$;
- 3) $\langle p_0(x); X(x) \rangle = 1$.

Из свойства 3) следует, что формы $p_0(x)$, $r(x)$ линейно независимы. Действительно, по определению формы $r(x)$ справедливо равенство $\langle r(x); X(x) \rangle = 0$, в то время как $\langle p_0(x); X(x) \rangle = 1$; если бы формы $p_0(x)$, $r(x)$ были линейно зависимы, то последние два равенства были бы невозможны.

Нетрудно показать, что $\omega = p_0 \wedge r$.

Адаптированными координатами вектора $v \in T_x M$ назовем величины

$$\xi_0(v) = \langle p_0(x); v \rangle, \quad \xi_r(v) = \langle r(x); v \rangle. \quad (10)$$

Для вектора $v \in \mathcal{K}_x^c$ определяется новая норма

$$\|v\| = \sqrt{\xi_0^2(v) + \xi_r^2(v)},$$

которую мы будем называть адаптированной нормой. Старую норму (порожденную римановой метрикой) мы будем называть римановой нормой.

Пусть $Q_1, \dots, Q_m$ – неподвижные точки, $V_1, \dots, V_m$ – их окрестности.

Вне окрестностей V_j для векторов $v \in \mathcal{K}_x^c$ адаптированная норма эквивалентна римановой норме. Эквивалентность означает, что существует константа $C > 0$ такая, что для всякой точки $x \notin \bigcup_j V_j$ и всякого вектора $v \in \mathcal{K}_x^c$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{C}|v| < \|v\| < C|v|.$$

Из инвариантности пространства E_x^{c*} следует, что форма $\dot{p}_0(x) + p_0(x)D(x)$ принадлежит E_x^{c*} и поэтому раскладывается в линейную комбинацию

$$\dot{p}_0 + p_0 D = \alpha p_0 + \sigma r. \quad (11)$$

Покажем, что форма $\dot{p}_0 + p_0 D$ ортогональна вектору $X(x)$.

Действительно, так как $\langle p_0; X(x) \rangle = 1$, то $\frac{d}{dt} \langle p_0; X(x) \rangle = 0$. С другой стороны, дифференцируя $\langle p_0; X(x) \rangle$ как произведение и учитывая, что $\dot{X}(x) = DX(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p_0; X(x) \rangle &= \langle \dot{p}_0; X(x) \rangle + \langle p_0; \dot{X}(x) \rangle = \langle \dot{p}_0; X(x) \rangle + \langle p_0; DX(x) \rangle \\ &= \langle \dot{p}_0 + p_0 D; X(x) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\langle \dot{p}_0 + p_0 D; X(x) \rangle = 0$, и тем самым ортогональность доказана.

Из ортогональности формы $\dot{p}_0 + p_0 D$ и вектора $X(x)$ следует, что в уравнении (11) $\alpha = 0$. Следовательно, форма $p_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{p}_0(x) + p_0(x)D(x) = \sigma(x)r(x). \quad (12)$$

В этом уравнении функция $\sigma(x)$ вне окрестностей неподвижных точек ограничена.

ЛЕММА 2.13. Пусть $v(t)$ – решение уравнения в вариациях вдоль некоторой траектории $x(t)$, $\xi_0(t)$, $\xi_r(t)$ – соответствующие адаптированные координаты вектора $v(t)$. Тогда $\xi_0(t)$, $\xi_r(t)$ являются решениями системы уравнений

$$\dot{\xi}_0 = \sigma(x(t))\xi_r(t), \quad \dot{\xi}_r = \theta(x(t))\xi_r(t). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению адаптированных координат

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0(t) &= \frac{d}{dt} \langle p_0(x(t)); v(t) \rangle = \langle \dot{p}_0(x(t)); v(t) \rangle + \langle p_0(x(t)); \dot{v}(t) \rangle \\ &= \langle (-p_0(x(t))D(x) + \sigma(x(t))r(x(t))); v(t) \rangle + \langle p_0(x(t)); D(x(t))v(t) \rangle \\ &= \langle (p_0(x(t))D(x(t)); v(t) \rangle + \langle p_0(x(t)); D(x(t))v(t) \rangle + \sigma(x(t))\langle r(x(t)); v(t) \rangle \\ &= 0 + \sigma(x(t))\langle r(x(t)); v(t) \rangle = \sigma(x(t))\xi_r(t). \end{aligned}$$

Тем самым, первое уравнение доказано. Второе уравнение доказывается аналогично. Лемма доказана.

§ 3. Частичная линеаризация

3.1. Формулировка теоремы о частичной линеаризации. Пусть Q – неподвижная точка типа (L) . Согласно определению у матрицы $D(Q)$ имеются собственные числа λ_1 , λ_2 кратности 1 такие, что

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq \gamma_3 > 0, \quad (14)$$

а остальная часть собственных чисел матрицы $D(Q)$ лежит в области, определяемой неравенствами $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_1$, $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$. Здесь величины γ_1 , γ_3 участвуют в определении сингулярной гиперболичности; см. определение 1.9.

Хорошо известная теорема Адамара–Перрона утверждает, что в окрестности точки Q определены устойчивое $(n-1)$ -мерное многообразие $W^s(Q)$ и неустойчивое одномерное многообразие $W^u(Q)$. Кроме того, известно, что для каждой точки $x \in W^s(Q)$ определено $(n-2)$ -мерное строго устойчивое многообразие $W^{ss}(x) \subset W^s(Q)$. Все эти многообразия определяются поведением решений в окрестности точки Q .

Из теоремы Адамара–Перрона следует, что в окрестности точки Q существует такая система координат (x_1, x_2, x_3) ($x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \in \mathbb{R}^{n-2}$), что уравнение $x_1 = 0$ определяет устойчивое многообразие $W^s(Q)$ точки Q , система уравнений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ определяет строго устойчивое многообразие $W^{ss}(Q)$ точки Q , система уравнений $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ определяет неустойчивое многообразие $W^u(Q)$ точки Q .

Система уравнений в окрестности точки Q в координатах (x_1, x_2, x_3) имеет вид

$$\dot{x}_1 = (\lambda_1 + f_1)x_1, \quad \dot{x}_2 = (\lambda_2 + f_2)x_2 + g_2x_3, \quad \dot{x}_3 = (A + f_3)x_3 + g_3x_2, \quad (15)$$

где f_1, f_2, f_3, g_2, g_3 – некоторые гладкие функции, зависящие от точки x , $f_j(Q) = 0, g_j(Q) = 0, A$ – некоторая постоянная $((n-2) \times (n-2))$ -матрица.

Обозначим через $\tilde{V}$ окрестность точки Q , определяемую неравенствами $|x_1| \leq \beta, |x_2| \leq \beta, |x_3| \leq \alpha$. Если α, β достаточно малы, то через $(n-1)$ -мерные поверхности

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) : |x_2| = \beta, |x_1| \leq \beta, |x_3| \leq \alpha\}, \\ \mathcal{P}_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) : |x_3| = \alpha, |x_2| \leq \beta, |x_1| \leq \beta\} \end{aligned}$$

траектории входят в область $\tilde{V}$ под ненулевым углом, а через $(n-1)$ -мерную поверхность

$$\mathcal{P}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| = \beta, |x_2| \leq \beta, |x_3| \leq \alpha\}$$

траектории выходят из области $\tilde{V}$. Каждая из поверхностей $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ распадается на две связных поверхности, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1+} &= \{x : x_1 = \beta\}, & \mathcal{P}_{1-} &= \{x : x_1 = -\beta\}, \\ \mathcal{P}_{2+} &= \{x : x_2 = \beta\}, & \mathcal{P}_{2-} &= \{x : x_2 = -\beta\}. \end{aligned}$$

Если $\dim M = 3$, то поверхность $\mathcal{P}_3$ тоже разделяется на две связные поверхности. Если же $\dim M > 3$, то поверхность $\mathcal{P}_3$ связная.

Из леммы 2.5 следует, что $W^{ss}(Q)$ не содержит точек аттрактора. Следовательно, найдутся такие $\alpha > 0, \beta > 0$, что поверхность $\mathcal{P}_3$ не содержит точек аттрактора.

Мы будем предполагать, что α, β настолько малы, что строго неустойчивые многообразия $W^{ss}(x)$ точек $x \in V$ можно определить в виде уравнений $x_1 = h_1(x_3), x_2 = h_2(x_3)$, где h_1, h_2 – некоторые C^1 -гладкие функции (свой для каждого многообразия $W^{ss}(x)$), причем $|h'(x_3)| < 0.1\alpha/\beta$. Существование таких α, β следует из того, что для многообразия $W^{ss}(Q)$ соответствующие уравнения имеют вид $h_1(x) = h_2(x) = 0$, а семейство многообразий $W^{ss}(x)$ непрерывно в C^1 -топологии.

Траектории точек аттрактора Λ входят в окрестность $\tilde{V}$ только через поверхность $\mathcal{P}_2$, так как в силу выбора α, β поверхность $\mathcal{P}_3$ не содержит точек аттрактора.

Траектории точек, входящих в область $\tilde{V}$ через поверхность $\mathcal{P}_2$, выходят из окрестности $\tilde{V}$ через некоторую область поверхности $\mathcal{P}_1$; эта область лежит внутри подобласти, определяемой неравенствами $|x_3 - ux_2| \leq c|x_2|^\gamma$, где $\gamma > 1, c > 0$ – некоторые константы, $u \in \mathbb{R}^{n-2}$ – некоторый вектор. Если система допускает гладкую линеаризацию в окрестности точки Q , то в качестве γ можно взять величину $\gamma = |\lambda_3|/|\lambda_2|$, где λ_3 – максимальная вещественная часть собственных чисел матрицы $D(Q)$, которые меньше λ_2 (рис. 2).

Нетрудно показать, что числа α, β , определяющие окрестность $\tilde{V}$, после построения системы координат (x_1, x_2, x_3) можно подобрать так, что $\alpha = \beta$. Поэтому в качестве определяющего числа для построенной окрестности оставим только одно число β . Далее нам придется уменьшать окрестность, так как по ходу построения будут появляться дополнительные условия, которые будут выполняться за счет малости β . Запись всех нужных условий сразу была бы слишком громоздкой.

Рис. 2

Обозначим через I_2 кривую, определяемую уравнениями $x_3 = 0, |x_2| = \beta$ ($-\beta \leq x_1 \leq \beta$). Эта кривая распадается на две кривые: кривую I_{2+} , определяемую уравнениями $x_2 = \beta$, и кривую I_{2-} , определяемую уравнением $x_2 = -\beta$. Отрезки траекторий, проходящих через кривую I_2 до пересечения с поверхностью $|x_1| = \beta$ (т.е. поверхность $\mathcal{P}_1$), образуют гладкую двумерную поверхность, которую мы обозначим Σ . Добавим к построенной поверхности точку Q и многообразие $W^u(Q)$. В результате получим гладкую поверхность (на кривой $W^u(Q)$ гладкость не нарушается; это следует из того, что $W^u(Q)$ принадлежит аттрактору, поэтому в точках $x \in W^u(Q)$ поверхность Σ имеет непрерывную нормаль; этой нормалью является пространство E_x^{ss*}).

Пересечение поверхности Σ с поверхностью $|x_1| = \beta$ является гладкой кривой, которую обозначим через I_1 . Как и кривая I_2 , кривая I_1 разделяется на две кривые: кривую I_{1+} , определяемую уравнением $x_1 = \beta$, и кривую I_{1-} , определяемую уравнением $x_1 = -\beta$ (см. рис. 2).

Так как поток является сингулярно гиперболическим, то определены многообразия $W^{ss}(x)$ не только для точек $x \in W^s(Q)$, но и для всех точек окрестности. Они определяются поведением решений на окрестности аттрактора, а не только в окрестности точки Q .

В этом параграфе мы строим частичную линеаризацию потока в окрестности неподвижной точки. “Частичная” означает, что мы не добиваемся полной линеаризации, как в теоремах Гробмана–Хартмана или Стернберга, а добиваемся линеаризации только по двум координатам. Точнее, мы строим две функции

$y_1(x)$, $y_2(x)$, удовлетворяющие уравнениям $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$, $\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$. Эти функции рассматриваются как координаты y_1 , y_2 . Эти две координаты можно дополнить до полной системы координат, взяв в качестве остальных координат построенную выше координату x_3 , но тогда поток уже не будет линейным.

Новым по сравнению с хорошо известными теоремами Гробмана–Хартмана и Стернберга (см., например, [21]) является то, что координаты y_1 , y_2 связаны с поведением траекторий не только в окрестности точки Q , но и в окрестности аттрактора Λ (точнее, согласованы с семейством строго устойчивых многообразий в окрестности точки Q). Кроме того, нам потребуются некоторые дополнительные свойства функций y_1 , y_2 .

Далее мы изменим рассматриваемую окрестность. Мы будем предполагать, что если $z \in \Sigma$, то $W^{ss}(z)$ определяется уравнениями $x_1 = h_1(x_3)$, $x_2 = h_2(x_3)$, где h_1 , h_2 – гладкие функции, определенные в области $|x_3| \leq \beta$, $|h'_j(x_3)| < 0.1$ (возможно, что для такого построения величину β придется уменьшить).

Обозначим через $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ поверхности, составленные из отрезков многообразий $W^{ss}(z)$, проходящих соответственно через точки $z \in I_1$, $z \in I_2$. Поверхности $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ разделяются, как и поверхности $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, на поверхности $\mathcal{N}_{1+}$, $\mathcal{N}_{1-}$, $\mathcal{N}_{2+}$, $\mathcal{N}_{2-}$.

Через I_0 обозначим кривую, лежащую на Σ и удовлетворяющую уравнению $|x_1| = |x_2|$, через $\mathcal{N}$ – поверхность, состоящую из многообразий $W^{ss}(z)$, $z \in I_0$.

ТЕОРЕМА 3.1 (теорема о частичной линеаризации). *Пусть Q – неподвижная точка типа (L) сингулярно гиперболического потока, порожденного уравнением $\dot{x} = X(x)$.*

Тогда существуют окрестность $\tilde{V}$ точки Q , в которой определены функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, гладкая поверхность Σ , состоящая из отрезков траекторий, и 1-формы p_1 , p_2 такие, что:

- 1) касательная плоскость к поверхности Σ лежит в конусе $\mathcal{K}_x^c$;
- 2) $y_1(x)$, $y_2(x)$ непрерывны и дифференцируемы вдоль траекторий;
- 3) $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$, $\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$;
- 4) уравнение $y_1(x) = 0$ определяет устойчивое многообразие $W^s(Q)$ точки Q ;
- 5) уравнение $y_2(x) = 0$ определяет объединение строго устойчивых многообразий точек $x \in W^u(Q)$;
- 6) уравнение $y_1(x) = c_1$, $y_2(x) = c_2$ определяет строго устойчивое многообразие $W^{ss}(z)$ некоторой точки $z \in \Sigma$;
- 7) $p_1(x)$, $p_2(x)$ непрерывны и дифференцируемы вдоль траекторий;
- 8) $p_1(x)$, $p_2(x)$ ортогональны пространствам E_x^{ss} ;
- 9) $\dot{p}_1 = -p_1 D(x) + \lambda_1 p_1$, $\dot{p}_2 = -p_2 D(x) + \lambda_2 p_2$;
- 10) $y_1(x) = \langle p_1(x); X(x) \rangle$, $y_2(x) = \langle p_2(x); X(x) \rangle$;
- 11) сужение функций y_1 , y_2 на поверхность Σ имеет непрерывный дифференциал, причем на Σ выполнены равенства $dy_1 = \lambda_1 p_1$, $dy_2 = \lambda_2 p_2$.

Для нас главным является не столько существование координат y_1 , y_2 , сколько существование форм p_1 , p_2 , определяющих систему координат в каждой

плоскости пространства $T_x M$, трансверсальной пространству E_x^{ss} . Координаты y_1, y_2 через формы p_1, p_2 легко выражаются формулами из п. 10).

Покажем, что для функций y_1, y_2 , определенных равенствами из п. 10) сформулированной теоремы, верны равенства из п. 3).

Действительно, учитывая, что $\dot{p}_1 = -p_1 D + \lambda_1 p_1$, $\dot{X}(x) = DX(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{d}{dt} \langle p_1(x); X(x) \rangle = \left\langle \frac{dp_1}{dt}; X(x) \right\rangle + \left\langle p_1; \frac{dX(x)}{dt} \right\rangle \\ &= \langle -p_1 D + \lambda_1 p_1; X(x) \rangle + \langle p_1; DX(x) \rangle = \lambda_1 \langle p_1; X(x) \rangle = \lambda_1 y_1. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$.

3.2. Построение форм $p_1(x), p_2(x)$.

Система координат в пространствах E_x^{c*} . Обозначим через e_1, e_2 векторы, которые в системе координат (x_1, x_2, x_3) представляются как $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$. Построим вспомогательные 1-формы $q_1, q_2 \in E_x^{c*}$ так, что

$$\langle q_1; e_1 \rangle = 1, \quad \langle q_1; e_2 \rangle = 0, \quad \langle q_2; e_1 \rangle = 0, \quad \langle q_2; e_2 \rangle = 1.$$

Если β достаточно мало, то векторы e_1, e_2 принадлежат конусу $\mathcal{K}_x^c$ и потому определяют систему координат в пространстве E_x^{c*} . В этой системе координат каждая 1-форма $q \in E_x^{c*}$ определяется координатами $\xi_1 = \langle q; e_1 \rangle$, $\xi_2 = \langle q; e_2 \rangle$. Очевидно, что величины ξ_1, ξ_2 являются в то же время коэффициентами разложения $q = \xi_1 q_1 + \xi_2 q_2$ формы $q \in E_x^{c*}$ по базису q_1, q_2 .

ЛЕММА 3.2. *Если $q(t)$ является решением уравнения $\dot{q} = -qD(x(t))$ вдоль некоторой траектории $\{x(t)\}$, принадлежащей $\tilde{V}$, то координаты ξ_1, ξ_2 удовлетворяют системе уравнений*

$$\dot{\xi}_1 = -\lambda_1 \xi_1 + h_{11} \xi_1 + h_{12} \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = -\lambda_2 \xi_2 + h_{21} \xi_1 + h_{22} \xi_2. \quad (16)$$

Здесь h_{ij} – функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, определенные равенствами

$$h_{ij}(x) = -\langle q_j(x); (D(x) - \lambda_i) e_i \rangle. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая равенство $\dot{q} + qD = 0$ на e_1 , получаем $\langle \dot{q} + qD; e_1 \rangle = 0$. Представляя q в виде разложения по базису q_1, q_2 , получаем

$$\langle \dot{\xi}_1 q_1 + \xi_1 \dot{q}_1 + \dot{\xi}_2 q_2 + \xi_2 \dot{q}_2 + \xi_1 q_1 D + \xi_2 q_2 D; e_1 \rangle = 0.$$

Учитывая, что $\langle q_1; e_1 \rangle = 1$, $\langle q_2; e_1 \rangle = 0$, получим

$$\dot{\xi}_1 + \xi_1 \langle \dot{q}_1; e_1 \rangle + \dot{\xi}_2 + \xi_1 \langle \dot{q}_2; e_1 \rangle + \xi_1 \langle q_1 D(x); e_1 \rangle + \xi_2 \langle q_2 D(x); e_1 \rangle = 0.$$

Так как вектор e_1 постоянный на траекториях (в окрестности $\tilde{V}$), то $\dot{e}_1 = 0$ (отметим, что равенство $\dot{e}_1 = 0$ справедливо только для построенной системы координат (x_1, x_2, x_3) ; в другой системе координат это равенство в силу нетензорности уравнения в вариациях может быть неверным). Следовательно,

$$\langle \dot{q}_1; e_1 \rangle = \langle \dot{q}_1; e_1 \rangle + \langle q_1; \dot{e}_1 \rangle = \frac{d}{dt} \langle q_1; e_1 \rangle = \frac{d}{dt} 1 = 0.$$

Аналогичным образом покажем, что $\langle \dot{q}_2; e_1 \rangle = 0$. Из последних равенств следует, что

$$\dot{\xi}_1 + \xi_1 \langle q_1 D; e_1 \rangle + \xi_2 \langle q_2 D; e_1 \rangle = 0.$$

Учитывая, что $\langle q_1; e_1 \rangle = 1$, $\langle q_2; e_1 \rangle = 0$, вычитая и добавляя $\lambda_1 \langle q_1; e_1 \rangle$, $\lambda_1 \langle q_2; e_1 \rangle$, получим

$$\dot{\xi}_1 + \lambda_1 \xi_1 + \xi_1 \langle q_1 D; e_1 \rangle - \lambda_1 \xi_1 \langle q_1; e_1 \rangle + \xi_2 \langle q_2 D; e_1 \rangle - \lambda_1 \xi_2 \langle q_2; e_1 \rangle = 0.$$

Переносим в последнем равенстве все члены, кроме $\dot{\xi}_1$, в правую часть и перегруппировывая правую часть, получим первое уравнение системы (16). Второе уравнение доказывается аналогично.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $D(Q)e_i = \lambda_i e_i$, то $h_{ij}(Q) = 0$. Так как $q_j(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера, то $h_{ij}(x)$ тоже удовлетворяют условию Гёльдера.

Координаты одномерных пространств $E \subset E_x^{c*}$. Заметим, что для форм вида $q = \xi_1 q_1 + \xi_2 q_2$, принадлежащих одному и тому же подпространству $E \subset E_x^{c*}$, величина $k_1 = \xi_2 / \xi_1$ одинакова. Поэтому ее можно рассматривать в качестве локальной координаты подпространства $E \subset E_x^{c*}$. Аналогично, величина $k_2 = \xi_1 / \xi_2$ тоже может рассматриваться в качестве локальной координаты одномерного подпространства. Очевидно, что подпространство, порожденное формой q_1 , определяется уравнением $k_1 = 0$; подпространство, порожденное формой q_2 , определяется уравнением $k_2 = 0$.

Если семейство подпространств $E_x \subset E_x^{c*}$ является инвариантным, то координата $k_1 = k_1(x)$, определяющая это семейство, удовлетворяет уравнению

$$\dot{k}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2 + h_{22}(x) - h_{11}(x))k_1 + h_{21}(x) - h_{12}(x)k_1^2. \quad (18)$$

В самом деле, пусть $\{E_x\}$ – инвариантное семейство подпространств. Тогда для всякой траектории $x(t)$, принадлежащей множеству $\hat{V}$, решение уравнения $\dot{p} = -pD$ при каждом t принадлежит пространству $E_{x(t)}$, если $p(x(0)) \in E_{x(0)}$. Представляя $p(x(t))$ в виде $p = \xi_1 q_1 + \xi_2 q_2$ и дифференцируя частное ξ_2 / ξ_1 , получаем

$$\dot{k}_1 = \frac{d}{dt} \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\dot{\xi}_2 \xi_1 - \dot{\xi}_1 \xi_2}{\xi_1^2}.$$

Подставляя для $\dot{\xi}_1$, $\dot{\xi}_2$ их выражения через формулу (16), получаем

$$\dot{k}_1 = \frac{(-\lambda_2 \xi_2 + h_{21} \xi_1 + h_{22} \xi_2) \xi_1 - (-\lambda_1 \xi_1 + h_{11} \xi_1 + h_{12} \xi_2) \xi_2}{\xi_1^2},$$

откуда после несложных вычислений получаем (18).

Аналогично уравнению (18) покажем, что если семейство пространств $E_x \subset E_x^{c*}$ инвариантно, то

$$\dot{k}_2 = (\lambda_2 - \lambda_1 + h_{11}(x) - h_{22}(x))k_2 + h_{12}(x) - h_{21}(x)k_2^2. \quad (19)$$

Зафиксируем число $a \in (0, 1/2)$. Определим конусы $\mathcal{K}_{x,1}^* \subset E_x^{c*}$, $\mathcal{K}_{x,2}^* \subset E_x^{c*}$ так, что $\mathcal{K}_{x,1}^*$ является объединением подпространств пространства E_x^{c*} , для

которых $|k_1| < a$, а $\mathcal{K}_{x,2}^*$ является объединением таких подпространств, для которых $|k_2| < a$.

ЛЕММА 3.3. *Существует такое число $a_0 \in (0, 1/2)$, что если $a \in (a_0, 1/2)$, то семейство конусов $\mathcal{K}_{x,1}^*$ является инвариантным в окрестности $\tilde{V}$ при движении назад, а семейство $\mathcal{K}_{x,2}^*$ – при движении вперед.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства инвариантности семейства $\mathcal{K}_{x,1}^*$ покажем, что если $k_1 = a$, то $\dot{k}_1 > 0$, а если $k_1 = -a$, то $\dot{k}_1 < 0$.

Из уравнения (18) видно, что для этого достаточно, чтобы при всех $x \in \tilde{V}$ выполнялось неравенство

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + h_{22} - h_{11})a + h_{21} - h_{12}a^2 > 0. \quad (20)$$

Мы можем выбрать настолько малую окрестность $\tilde{V}$, что в этой окрестности выполнено неравенство $|h_{ij}| < |\lambda_2|/4$. Выберем a так, что

$$\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}\right)a - \frac{|\lambda_2|}{4} - \frac{|\lambda_2|}{4}a^2 > 0.$$

Решения последнего неравенства лежат между корнями уравнения

$$\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}\right)a - \frac{|\lambda_2|}{4} - \frac{|\lambda_2|}{4}a^2 = 0.$$

Покажем, что $a = 1/2$ лежит между корнями этого уравнения. Действительно, подставляя $a = 1/2$ в левую часть последнего равенства учитывая, что $\lambda_2 < 0$, $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, получаем величину

$$\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_2}{16} = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{16},$$

которая больше левой части последнего равенства. Следовательно, эта величина положительна, и поэтому (20) доказано.

Инвариантность семейства конусов $\mathcal{K}_{x,2}^*$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Для каждой точки $x \in I_1$ определим пространство $E_{x,1}^*$ так, что $E_{x,1}^*$ ортогонально пространству E_x^{ss} (следовательно, $E_{x,1}^*$ принадлежит пространству E_x^{c*}) и ортогонально кривой I_1 . На поверхность $\mathcal{N}_1$ продолжим пространства $E_{x,1}^*$ так, что величина k_1 постоянна на многообразиях $W^{ss}(z)$, $z \in I_1$. На окрестности $\tilde{V}$ определим пространства $E_{x,1}^*$ так, что они инвариантны относительно $d\Phi_t$.

Для каждой точки $x \in I_2$ определим пространство $E_{x,2}^*$ так, что $E_{x,2}^*$ ортогонально пространству E_x^{ss} (следовательно, $E_{x,2}^*$ принадлежит пространству E_x^{c*}) и ортогонально кривой I_2 . На поверхность $\mathcal{N}_2$ продолжим пространства $E_{x,2}^*$ так, что величина k_2 постоянна на многообразиях $W^{ss}(z)$, $z \in I_2$. На окрестности $\tilde{V}$ определим пространства $E_{x,2}^*$ так, что они инвариантны относительно $d\Phi_t$.

Таким образом мы определим пространства $E_{x,1}^*$ на всей окрестности $\tilde{V}$, кроме тех точек, траектории которых не пересекаются с поверхностью $\mathcal{N}_1$. Эти точки принадлежат устойчивому многообразию точки Q . Для этих точек определим пространство $E_{x,1}^*$ по непрерывности. Можно показать, что на $W^s(Q)$ пространство $E_{x,1}^*$ продолжается так, что оно ортогонально многообразию $W^s(Q)$.

Промежуточные формы. Построим формы $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ так, что выполнены условия:

- 1) $\tilde{p}_1 \in E_{x,1}^*, \tilde{p}_2 \in E_{x,2}^*$;
- 2) $\langle \tilde{p}_1; X(x) \rangle, \langle \tilde{p}_2; X(x) \rangle$ постоянны на многообразиях $W^{ss}(z), z \in \Sigma$;
- 3) $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ удовлетворяют условию Гёльдера.

Для этого построения заметим, что достаточно построить формы $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ для точек $z \in \Sigma$, а на многообразиях $W^{ss}(z)$ эти формы продолжаются однозначно. Так как формы $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ принадлежат одномерным пространствам $E_{x,1}^*$ и $E_{x,2}^*$, то для их определения достаточно одного уравнения. В качестве таких уравнений для точек $z \in \Sigma$ рассмотрим уравнения $\langle \tilde{p}_1; e_1 \rangle = 1, \langle \tilde{p}_2; e_2 \rangle = -1$.

Так как формы $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ порождают одномерные инвариантные семейства подпространств $E_{x,1}^*, E_{x,2}^*$, то они полуинвариантны. Следовательно, существуют такие функции $\tilde{\lambda}_1(x), \tilde{\lambda}_2(x)$, что

$$\dot{\tilde{p}}_i(x) + \tilde{p}_i(x)D(x) = \tilde{\lambda}_i(x)\tilde{p}_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что для всех точек $z \in \Sigma$, кроме тех, которые принадлежат многообразию $W^s(Q)$, верно неравенство $\langle \tilde{p}_1(z); X(z) \rangle \neq 0$.

Действительно, если $\langle \tilde{p}_1(z); X(z) \rangle = 0$ для какой-то точки z , то из полуинвариантности формы $\tilde{p}_1(z)$ следует, что для всех точек траектории $z(t)$ выполнено равенство $\langle \tilde{p}_1(z(t)); X(z(t)) \rangle = 0$. Так как траектории всех точек, кроме лежащих на многообразии $W^s(Q)$, пересекают поверхность $\mathcal{N}_1$, то $\langle \tilde{p}_1(z); X(z) \rangle = 0$ и для точек поверхности $\mathcal{N}_1$, следовательно, и для точек кривой I_1 . Но на кривой I_1 последнее равенство не может быть верным в силу построения системы координат (x_1, x_2, x_3) и вида уравнения в системе (x_1, x_2, x_3) .

ЛЕММА 3.4. *Для точек $z \in \Sigma$ функции $\tilde{\lambda}_1(x), \tilde{\lambda}_2(x)$ постоянны на многообразиях $W^{ss}(z), z \in \Sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что если некоторая функция $\varphi(x)$ дифференцируема вдоль траекторий и постоянна на многообразиях $W^{ss}(z)$, то функция $\dot{\varphi}(x)$ тоже постоянна на многообразиях $W^{ss}(z)$. Отсюда следует, что функция $\frac{d}{dt}\langle \tilde{p}_i; X(x) \rangle$ постоянна на многообразиях $W^{ss}(z)$. С другой стороны, нетрудно показать, что

$$\tilde{\lambda}_i(x) = \frac{\frac{d}{dt}\langle \tilde{p}_i(x); X(x) \rangle}{\langle \tilde{p}_i(x); X(x) \rangle}.$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt}\langle p_i; X(x) \rangle = \langle \dot{p}_i; X(x) \rangle + \langle p_i; \dot{X}(x) \rangle = -\langle p_i D; X(x) \rangle + \tilde{\lambda}_i \langle p_i; X(x) \rangle + \langle p_i; DX(x) \rangle.$$

Поэтому $\tilde{\lambda}_i(x)$ постоянна на многообразиях $W^{ss}(z)$. Лемма доказана.

Окончание построения форм p_1, p_2 . Форму $p_i(x)$, $i = 1, 2$, мы получим, умножив форму $\tilde{p}_i(x)$ на функцию $b_i(x)$, дифференцируемую вдоль траекторий и постоянную на многообразиях $W^{ss}(z)$. Как мы видели ранее, равенство $\dot{p}_i + p_i D = \lambda_i p_i$ будет выполнено, если $b_i(x)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt} \ln b_i(x) = \lambda_i - \tilde{\lambda}_i(x).$$

Интегрируя последнее равенство вдоль траектории $x(t)$, $t < 0$, мы получим следующее соотношение для функции $l_i(x) = \ln b_i(x)$:

$$l_i(x(t)) = l_i(x(0)) - \int_t^0 (\lambda_i - \tilde{\lambda}_i(x(\tau))) d\tau, \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

Так как функции $l_i(x)$, $i = 1, 2$, постоянны на многообразиях $W^{ss}(z)$, $z \in \Sigma$, то достаточно построить эти функции для точек поверхности Σ .

Построим функцию $l_1(z)$ для точек $z \in \Sigma$.

Обозначим через $z_{1+}(t)$ такую траекторию, что $z_{1+}(0)$ – точка пересечения многообразия $W^u(Q)$ и кривой I_{1+} , через $z_{1-}(t)$ обозначим такую траекторию, что $z_{1-}(0)$ – точка пересечения многообразия $W^u(Q)$ и кривой I_{1-} .

Очевидно, что $z_{1+}(t) \rightarrow Q$, если $t \rightarrow -\infty$, причем сходимость экспоненциальная. Аналогично, $z_{1-}(t) \rightarrow Q$, если $t \rightarrow -\infty$.

Определим величины

$$F_+ = \int_{-\infty}^0 (\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(z_{1+}(t))) dt, \quad F_- = \int_{-\infty}^0 (\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(z_{1-}(t))) dt.$$

Из определения траекторий $z_{1+}(t)$, $z_{1-}(t)$, из равенства $\tilde{\lambda}_1(Q) = \lambda_1$ и из условия Гёльдера для функций $\tilde{\lambda}_1(x)$ следует, что функции под интегралами в определении величин F_+ , F_- стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$ экспоненциально, и поэтому интегралы сходятся.

Определим функцию $l_1(z)$ на кривых I_{1+} , I_{1-} так, что

$$l_1(z) = F_+, \quad z \in I_{1+}; \quad l_1(z) = F_-, \quad z \in I_{1-}.$$

Из равенства (21) следует, что функция $l_1(z)$ продолжается на все траектории $z(t)$, которые начинаются на Σ и пересекают кривые I_{1+} , I_{1-} . Очевидно, что траектории всех точек, исключая те, которые лежат на кривой $W^s(Q) \cap \Sigma$, пересекаются с кривой I_{1+} либо с кривой I_{1-} .

Заметим, что кривая $W^s(Q) \cap \Sigma$ состоит из точки Q и траекторий двух точек: точки $z_{2+} = W^s(Q) \cap \Sigma \cap I_{2+}$ и точки $z_{2-} = W^s(Q) \cap \Sigma \cap I_{2-}$. Обозначим через $z_{2+}(t)$, $z_{2-}(t)$ траектории точек z_{2+} , z_{2-} . Положим $l_1(Q) = 0$. В точках траекторий $z_{2+}(t)$, $z_{2-}(t)$ определим функцию $l_1(z)$ соотношением

$$l_{1\pm}(z_{2\pm}(t)) = \int_t^{+\infty} (\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(z_{2\pm}(\tau))) d\tau.$$

Таким образом, функция $l_1(z)$ определена на всей поверхности Σ .

Непрерывность функций $l_1(z)$, $l_2(z)$. Мы докажем, что функция $l_1(z)$ является непрерывной на поверхности Σ .

Для доказательства нам потребуются рассмотреть следующие семейства кривых, зависящих от параметра $s \in [0; +\infty)$:

$$\begin{aligned} I_{1+}(s) &= \Phi_{-s}(I_{1+}) \cap \Sigma, & I_{1-}(s) &= \Phi_{-s}(I_{1-}) \cap \Sigma, \\ I_{2+}(s) &= \Phi_s(I_{2+}) \cap \Sigma, & I_{2-}(s) &= \Phi_s(I_{2-}) \cap \Sigma. \end{aligned}$$

Здесь пересечение означает, что выбирается связная компонента пересечения, причем та, которая зависит от параметра s непрерывно.

Определим кривую $I_0 \subset \Sigma$ уравнением $|y_1| = |y_2|$.

Будем доказывать непрерывность функции $l_1(z)$ в точках $z_0 \in \Sigma \cap W^s(Q)$. Пусть z'_k – последовательность точек, сходящаяся к точке z_0 . Мы предполагаем, что все точки z'_k лежат на той же кривой семейства I_{2+} (или I_{2-}), что и точка z_0 . Траектория точки z'_k пересекается с кривой $|y_1| = |y_2|$ в точке z_k и с кривой I_1 в точке z''_k . Очевидно, что если $z'_k \rightarrow z_0$, то $z_k \rightarrow Q$.

Пусть $z'_k(t)$ – траектория точки z_k . Непрерывность функции $l_1(z)$ в точке z_0 следует из двух очевидных фактов.

1. Интеграл от функции $\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(z'_k)$ по части траектории от точки z'_k до точки z_k сходится к интегралу

$$\int_{t_0}^{+\infty} (\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(z_{2\pm}(\tau))) d\tau,$$

где t_0 таково, что $z_0 = z_{2\pm}(t_0)$.

2. Интеграл от функции $\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(z'_k)$ по части траектории от точки z_k до точки z''_k сходится к интегралу

$$\int_{-\infty}^0 (\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(z_{1\pm}(\tau))) d\tau.$$

Тем самым, непрерывность функции $l_1(z)$ в точке z_0 доказана.

Непрерывность в точках $z \in W^u(Q)$ и непрерывность функции $l_2(z)$ доказываются аналогично.

Таким образом, непрерывность функций l_1 , l_2 и, следовательно, форм $p_1(x)$, $p_2(x)$ доказана.

3.3. Гладкость функций y_1 , y_2 на поверхности Σ . Покажем, что функции y_1 , y_2 на поверхности Σ являются гладкими “почти всюду”. Гладкость функции $y_1(x)$ на поверхности Σ нарушается в точках кривой $W^s(Q) \cap \Sigma$; гладкость функции $y_2(x)$ на поверхности Σ нарушается в точках кривой $W^u(Q)$, а также в точках кривой $W^s(Q) \cap \Sigma$.

Для доказательства гладкости нам потребуется записать уравнение для форм dy_1 , dy_2 .

Сначала предположим, что слоение окрестности $\tilde{V}$ на многообразия $W^{ss}(z)$, $z \in \Sigma$, гладкое. В этом случае формы p_1 , p_2 тоже окажутся гладкими всюду, кроме многообразий $W^u(Q)$ (на нем нарушается гладкость формы p_2) и $W^s(Q)$ (на нем нарушается гладкость формы p_1).

Из гладкости форм p_1, p_2 следует, что определенные выше функции y_1, y_2 тоже гладкие (гладкость нарушается на многообразиях $W^s(Q), W^u(Q)$). Следовательно, определены дифференциалы dy_1, dy_2 , которые являются 1-формами.

Из следующей леммы вытекает, что для дифференциалов dy_1, dy_2 справедливы те же уравнения, что и для форм p_1, p_2 .

ЛЕММА 3.5. Пусть y — C^2 -гладкая функция, $\dot{y} = \lambda y$. Тогда для формы dy справедливо равенство

$$(\dot{dy}) + dy \cdot D = \lambda dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любой гладкой функции y справедливо равенство

$$d(\dot{y}) = (\dot{dy}) + dy \cdot D. \quad (22)$$

Пусть в координатах $(x_1, \dots, x_n)$ форма dy имеет координаты $(q_1, \dots, q_n)$ (очевидно, $q_j = \frac{\partial y}{\partial x_j}$). k -я координата формы $\dot{q}$ имеет вид

$$(\dot{q})_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial x_j} X_j(x).$$

При условиях леммы

$$\dot{y} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_j} X_j(x).$$

Взяв внешнюю производную от функции $\dot{y}$, получаем

$$d(\dot{y}) = d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_j} X_j(x)\right) = d\left(\sum_{j=1}^n q_j X_j(x)\right).$$

В результате, как легко видеть, получаем вектор с координатами

$$\eta_k = \left(\frac{\partial(\sum_j q_j X_j)}{\partial x_k}\right).$$

Отсюда

$$\eta_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_j} X_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_k} X_j + \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \right) = \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n q_j D_{jk}.$$

Последнее выражение является ничем иным, как записью в координатах выражения $(\dot{dy}) + dy \cdot D$. Отсюда получаем равенство (22).

Выведем утверждение леммы из (22). Беря дифференциал от обеих частей равенства $\dot{y} = \lambda y$ и применяя равенство (22), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Учитывая, что на кривой I_1 функция y_1 постоянна, получаем, что dy_1 ортогональна кривой I_1 . Аналогично получаем, что dy_2 ортогональна кривой I_2 . Из вида кривой I_2 следует, что $\langle dy_2; e_1 \rangle = 0$ на кривой I_2 .

Покажем, что на кривой I_1 справедливо равенство $\langle dy_1; X(x) \rangle = \lambda_1 \langle p_1; X(x) \rangle$.

Действительно, очевидно, что

$$\langle dy_1; X(x) \rangle = \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 = \lambda_1 \langle p_1; X(x) \rangle.$$

Кроме того, y_1 постоянна на I_1 . Следовательно, dy_1 ортогональна кривой I_1 . Так как y_1 постоянна на многообразиях $W^{ss}(x)$, то dy_1 ортогональна пространствам E_x^{ss} .

Отсюда $dy_1 = \lambda_1 p_1$ на кривой I . Так как уравнения для dy_1 и для $\lambda_1 p_1$ совпадают, то из единственности решения при заданных начальных условиях следует, что $dy_1 = \lambda_1 p_1$ на поверхности Σ .

Аналогично покажем, что $dy_2 = \lambda_2 p_2$ на поверхности Σ .

Пусть теперь слоение на многообразия $W^{ss}(x)$ негладкое. Аппроксимируем его гладким слоением $W_n^{ss}(x)$ на кривой I_1 (т.е. многообразия $W^{ss}(x)$, $x \in I_1$, аппроксимируем семейством многообразий $W_n^{ss}(x)$, $x \in I_1$, так, что семейство $W_n^{ss}(x)$ гладкое на I_1). Продолжим семейство $W_n^{ss}(x)$ на окрестность $\tilde{V}$ в силу инвариантности. Многообразия $W_n^{ss}(x)$ продолжаются на множество $W^s(Q) \cap \Sigma$ по непрерывности.

Мы получим последовательность слоений на многообразия $W_n^{ss}(z)$, $z \in \Sigma$, которые являются гладкими всюду, кроме точек многообразия $W^s(Q)$. При этом последовательность $W_n^{ss}(z)$ равномерно сходится к $W^{ss}(x)$ в C^1 -топологии; это следует из инвариантности семейства конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ при движении назад.

Для каждого слоения $W_n^{ss}(z)$ построены функции y_1, y_2 , которые мы обозначим $y_{1,n}, y_{2,n}$. Соответствующая последовательность форм $p_{1,n}, p_{2,n}$ равномерно сходится к формам p_1, p_2 .

Так как на поверхности Σ имеют место равенства $dy_{1,n} = \lambda_1 p_{1,n}$, $dy_{2,n} = \lambda_2 p_{2,n}$, то $dy_{1,n}, dy_{2,n}$ сходятся к $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2$, и поэтому y_1, y_2 на поверхности Σ имеют непрерывные дифференциалы – соответственно $dy_1 = \lambda_1 p_1$, $dy_2 = \lambda_2 p_2$. Тем самым, гладкость функций $y_1(x), y_2(x)$ доказана.

3.4. Адаптированные координаты в окрестности неподвижных точек. Пусть $Q_1, \dots, Q_m$ – все неподвижные точки. Выше для каждой точки Q_j была построена окрестность, которую мы будем обозначать $\tilde{V}_j$. В этой окрестности построена система координат (y_1, y_2) (индекс, соответствующий номеру окрестности у координат и других величин, связанных с этой окрестностью, мы опускаем). Предполагается, что окрестность $\tilde{V}_j$ определяется неравенствами $|y_1| < 2$, $|y_2| < 2$. Этого всегда можно добиться, так как определенные выше формы p_1, p_2 и функции y_1, y_2 можно умножить на некоторое число, а окрестность $\tilde{V}_j$ можно сузить. Внутри окрестности $\tilde{V}_j$ определим окрестность V_j неравенствами $|y_1| \leq 3/2$, $|y_2| \leq 3/2$. Определим окрестность $\bar{V}_j$ неравенствами $|y_1| \leq 1$, $|y_2| \leq 1$ и множество $\tilde{V}_0$ соотношением

$$\tilde{V}_0 = U \setminus \bigcup_{j=1}^m V_j.$$

Множества $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_m$ образуют открытое покрытие множества U .

Формы p_1, p_2 линейно независимы и принадлежат пространству E_x^{c*} (напомним, что E_x^{c*} – это двумерное подпространство пространства T_x^* , порожденное

формами, ортогональными пространству E_x^{ss} ; это пространство является ранговым пространством формы ω). Поэтому в окрестности $\tilde{V}_j$ справедливо равенство $\omega(x) = L(x)p_1 \wedge p_2$, где $L(x)$ – некоторая функция, p_1, p_2 были построены в предыдущем пункте при линеаризации потока в окрестности неподвижных точек.

Изменим форму ω , умножив ее на такую функцию $b(x)$, что $b(x)$ непрерывна, дифференцируема вдоль траекторий, $b(x) = 1$ вне окрестностей $\tilde{V}_j$, а в окрестности V_j функция $b(x)$ определяется соотношением

$$b(x) = \frac{L(Q_j)}{L(x)}.$$

Нетрудно показать, что такая функция существует.

Новую форму обозначим также ω . Недоразумений не возникнет, так как старая форма ω далее использоваться не будет. Новой форме ω соответствует новая функция $\theta(x)$, которая в силу леммы 2.10 гомологична старой. В окрестности V_j новая форма ω имеет вид $\omega = Lp_1 \wedge p_2$, где L – некоторая константа (своя для каждой окрестности V_j).

Далее мы изменим константу c_3 в определении сингулярной гиперболичности. Старая константа c_3 далее использоваться не будет. Новая константа c_3 определяется так, что для всякого $T > 0$ справедливо неравенство

$$\exp\left(\int_0^T \theta(x(t)) dt\right) > c_3 e^{\gamma_3 T}. \quad (23)$$

После переопределения формы ω можно вывести явный вид новой формы $r(x)$ в окрестности V_j . Для этого заметим, что для любого вектора $v \in T_x U$ справедливо

$$\langle r; v \rangle = \langle \omega; X(x), v \rangle = L = L(\langle p_1; X(x) \rangle \langle p_2; v \rangle - \langle p_2; X(x) \rangle \langle p_1; v \rangle).$$

Учитывая, что $\langle p_1; X(x) \rangle = y_1$, $\langle p_2; X(x) \rangle = y_2$, получаем, что $\langle r; v \rangle = L(y_1 \langle p_2; v \rangle - y_2 \langle p_1; v \rangle)$, откуда

$$r(x) = -Ly_2 p_1(x) + Ly_1 p_2(x). \quad (24)$$

Соответственно, функция $\theta(x)$ в окрестности V_j имеет вид

$$\theta(x) = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (25)$$

Форма $p_0(x)$. Построим 1-форму $p_0(x)$ так, чтобы выполнялись условия:

- 1) $p_0(x)$ непрерывна и дифференцируема вдоль траекторий;
- 2) $p_0(x) \in E_x^{c*}$;
- 3) $\langle p_0(x); X(x) \rangle = 1$.

Сначала построим форму $p_0(x)$ вне окрестностей V_j . Пусть $w(x) \in T_x M$ – вектор, ортогональный пространству E_x^{ss} и вектору $X(x)$ (здесь ортогональность определяется римановой структурой). Тогда равенства $\langle p_0(x); X(x) \rangle = 1$, $\langle p_0(x); w(x) \rangle = 0$ определяют форму $p_0(x) \in E_x^{c*}$ вне окрестностей V_j однозначно.

В окрестности $\tilde{V}_j$ определим форму $p_0(x)$ равенством

$$p_0(x) = \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} p_1 + \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} p_2, \quad (26)$$

где формы p_1, p_2 построены при линеаризации потока в окрестности $\tilde{V}_j$.

На всей окрестности U определим форму p_0 с помощью разбиения единицы, подчиненную покрытию множества U множествами $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_m$.

Напомним, что разбиение единицы, подчиненное покрытию множества U множествами $\tilde{V}_j$, это система гладких функций $h_0(x), \dots, h_m(x)$ таких, что $0 \leq h_j(x) \leq 1$, $h_j(x) = 0$ вне множества $\tilde{V}_j$, $h_0(x) + \dots + h_m(x) = 1$.

Если обозначить через $p_{0,j}$ форму, определенную в окрестности $\tilde{V}_j$ равенством (26), а через $p_{0,0}$ обозначить форму, построенную выше в окрестности $\tilde{V}_0$, то общая форма p_0 , построенная с помощью разбиения единицы, определяется как

$$p_0(x) = h_0(x)p_{0,0}(x) + \dots + h_m(x)p_{0,m}(x).$$

Новая форма $p_0(x)$ определяется теперь формулой (26) не во всей окрестности $\tilde{V}_j$, а только в окрестности V_j .

Форма $p_0(x)$ удовлетворяет уравнению (12). В этом уравнении функция $\sigma(x)$ вне окрестностей V_j ограничена. Покажем, что в окрестности V_j функция $\sigma(x)$ определяется равенством

$$\sigma(x) = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)y_1y_2}{L(y_1^2 + y_2^2)^2}. \quad (27)$$

По определению формы $p_0(x)$ внутри множества V_j

$$p_0(x) = a_1p_1 + a_2p_2,$$

где

$$a_1 = \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \quad a_2 = \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 + p_0D &= \frac{d}{dt}(a_1p_1 + a_2p_2) + (a_1p_1 + a_2p_2)D \\ &= \dot{a}_1p_1 + a_1(\dot{p}_1 + p_1D) + \dot{a}_2p_2 + a_2(\dot{p}_2 + p_2D). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\dot{p}_1 + p_1D = \lambda_1p_1$, $\dot{p}_2 + p_2D = \lambda_2p_2$, получаем

$$\dot{p}_0 + p_0D = (\dot{a}_1 + \lambda_1a_1)p_1 + (\dot{a}_2 + \lambda_2a_2)p_2.$$

Из вида функций a_1, a_2 и из равенств $\dot{y}_1 = \lambda_1y_1$, $\dot{y}_2 = \lambda_2y_1$ после несложных выкладок получаем

$$\dot{p}_0(x) + p_0(x)D(x) = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)y_1y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}(-y_2p_1 + y_1p_2).$$

Отсюда и из (24) следует (27).

§ 4. Строго неустойчивые пространства

Поверхность $\mathcal{N}$. Для каждой окрестности V_j неподвижной точки Q_j построим поверхность $\mathcal{N}^{(j)}$, определяемую уравнением $|y_1| = |y_2|$, где y_1, y_2 – построенные при линеаризации потока в окрестности V_j функции. Поверхности $\mathcal{N}^{(j)}$ определены только в окрестности V_j . Через $\mathcal{N}$ обозначим поверхность $\mathcal{N} = \bigcup_j \mathcal{N}^{(j)}$.

Множества $M(b; \delta)$. Далее через δ обозначается положительная константа, $\delta < \gamma_3/2$.

Напомним, что через $\tilde{V}_0$ обозначается множество $U \setminus \bigcup_j V_j$.

Пусть $b \in (0, 1)$, $T > 0$. Обозначим через $M(b; \delta; T)$ множество точек $x \in U$, определяемое требованиями:

- 1) траектория $\{x(t) : t \in [-T, 0]\}$ определена;
- 2) если траектория $\{x(t) : t \in [-T, 0]\}$ не пересекается с множеством $\tilde{V}_0$, то $x \in M(b; \delta; T)$;
- 3) если $x(-T)$ принадлежит одному из множеств V_j , то существует такое $\tau > 0$, что $\{x(t) : t \in (-T - \tau, -T)\} \subset V_j$ и $x(-T - \tau)$ принадлежит поверхности, определяемой уравнением $|y_2| = 1.5$. Если $x(-T) \in \tilde{V}_0$, то полагаем $\tau = 0$;
- 4) пусть траектория $\{x(t) : t \in (-T - \tau, 0)\}$ пересекает поверхность $\mathcal{N}$ в моменты $0 > t_1 > \dots > t_m$ в точках $x_k = x(t_k)$.

Обозначим через $d_1, \dots, d_m$ величины $d_k = |y_1(x_k)|$. Тогда

$$D_k \geq b e^{\delta t_k} \quad \text{для всех } i \in \{1, \dots, m\}. \quad (28)$$

Через $M(b; \delta)$ обозначим множества

$$M(b; \delta) = \bigcap_{T>0} M(b; \delta; T), \quad (29)$$

$$M(0; \delta) = \bigcup_{b>0} M(b; \delta). \quad (30)$$

Очевидно, что если $x \in M(b; \delta)$, то полутраектория $\{x(t) : t \in (-\infty, 0)\}$ определена, принадлежит U и пересекает поверхность $\mathcal{N}$ в моменты $\dots < t_m < \dots < t_1 < 0$ (возможно, что количество моментов пересечения конечно или они вообще отсутствуют). Из существования $\{x(t) : t \in (-\infty, 0)\}$ следует, что $M(b; \delta) \subset \Lambda$.

Отметим следующие очевидные включения:

- 1) если $T_1 > T_2$, то $M(b; \delta; T_1) \subset M(b; \delta; T_2)$;
- 2) если $b_1 < b_2$, то $M(b_2; \delta; T) \subset M(b_1; \delta; T)$, $M(b_2; \delta) \subset M(b_1; \delta)$;
- 3) $\Phi_{-t}(M(b; \delta)) \cap \tilde{V}_0 \subset M(b e^{-\delta t}; \delta)$, $t > 0$.

Множества $M(b; \delta)$, $M(b; \delta; T)$ замкнуты, но не инвариантны. Множество $M(0; \delta)$ инвариантно, но не замкнуто. Инвариантность множества $M(0; \delta)$ следует из указанных выше включений.

С самого начала не ясно, являются ли множества $M(b; \delta)$ непустыми. Ниже мы докажем их непустоту при достаточно малых $b > 0$.

В определении множеств $M(b; \delta)$ имеется большой произвол. В построении линейаризации имеется произвол в выборе системы координат (x_1, x_2, x_3) , кривых I_1, I_2 (и, соответственно, поверхности Σ).

При другом выборе объектов, определяющих множества $M(b; \delta)$, мы получим другие аналогичные множества (обозначим их $\widetilde{M}(b; \delta)$). Можно показать, что справедливо следующее утверждение:

существуют константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $b_1 > 0$ такие, что при всех $b \in (0, b_1)$ имеют место включения

$$\widetilde{M}(C_1 b; \delta) \subset M(b_1; \delta) \subset \widetilde{M}(C_2 b; \delta).$$

Функция $\eta(x)$. Определим функцию $\eta(x)$ для некоторых точек $x \in \Lambda$ следующим образом. Пусть $\{x(t) : t \in (-\infty, 0]\}$ – отрицательная полутраектория, $x(0) = x$. Положим

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^0 \sigma(x(t)) \exp\left(-\int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) dt. \quad (31)$$

Функция $\eta(x)$ определена, если интеграл в правой части сходится.

4.1. Построение строго неустойчивых подпространств. Определим пространство E_x^{uu} как множество таких векторов $v \in E_x^c$, что адаптированные координаты $\xi_0(v)$ и $\xi_r(v)$ вектора v удовлетворяют равенству $\xi_0(v) = \eta(x)\xi_r(v)$.

Очевидно, что пространство E_x^{uu} определено только для тех точек, для которых определена функция $\eta(x)$, а это как раз те точки, для которых интеграл в правой части (31) сходится.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\{x(t) : t \leq 0\}$ – отрицательная полутраектория некоторой точки $x \in \Lambda$, $v(t)$ – решение уравнения в вариациях вдоль $x(t)$. Тогда для адаптированной нормы $\|v(t)\|$ справедливо

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|v(t)\| = 0$$

тогда и только тогда, когда интеграл в правой части (31) сходится и для адаптированных координат $\xi_0(t)$, $\xi_r(t)$ вектора $v(t)$ справедливо равенство $\xi_0(0) = \eta(x(0))\xi_r(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы видели ранее, адаптированные координаты являются решением системы

$$\dot{\xi}_0(t) = \sigma(x(t))\xi_r(t), \quad \dot{\xi}_r(t) = \theta(x(t))\xi_r(t),$$

откуда

$$\begin{aligned} \xi_r(t) &= \xi_r(0) \exp\left(-\int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right), \\ \xi_0(0) &= \xi_0(-T) + \xi_r(0) \int_{-T}^0 \sigma(x(t)) \exp\left(-\int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) dt. \end{aligned}$$

Из оценки (23) следует, что

$$|\xi_r(t)| \leq |\xi_r(0)| \frac{e^{-\gamma_3|t|}}{c_3},$$

откуда следует, что $\xi_r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Если $\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_0(-T) = 0$, то, переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$ в последнем равенстве, получаем, что соответствующий интеграл сходится и $\xi_0(0) = \eta(x(0))\xi_r(0)$.

С другой стороны, если интеграл сходится и $\xi_0(0) = \eta(x(0))\xi_r(0)$, то нетрудно показать, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_0(-T) = 0$.

Лемма доказана.

Из следующей леммы выводится, что если $x \in M(b; \delta)$, то пространство E_x^{uu} существует.

ЛЕММА 4.2. *Существуют такие $b_0 > 0$, $B > 0$, что если $b < b_0$, $x \in M(b; \delta)$, то:*

- 1) *интеграл в правой части (31) сходится;*
- 2) *сходимость равномерная на каждом множестве $M(b; \delta)$;*
- 3) *справедливо неравенство $|\eta(x)| < B/b^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства леммы индекс j в обозначении неподвижной точки Q_j и других величин, связанных с точкой Q_j , опускается. Как сказано выше, собственные числа матрицы $D(Q)$ упорядочены так, что $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, а остальные собственные числа лежат в области $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$. В окрестности точки Q построены координаты (y_1, y_2) согласно предыдущему параграфу.

Рис. 3

Пусть $t_1, t_2, \dots$ – моменты пересечения траектории $\{x(t) : t \in (-\infty, 0]\}$ и поверхности $\mathcal{N}$, определяемой уравнением $|y_1| = |y_2|$. Обозначим $d_k = |y_1(x(t_k))|$. Напомним, что поверхность $\mathcal{N}_2$ определяется уравнением $|y_2| = 1$, поверхность $\mathcal{N}_1$ определяется уравнением $|y_1| = 1$. Через поверхность $\mathcal{N}_2$ траектория $x(t)$

входит в окрестность неподвижной точки в момент t'_k , через поверхность $\mathcal{N}_1$ траектория выходит из окрестности в момент t''_k . Моменты t'_k, t''_k подобраны так, что $x(t) \in V_j$ при $t \in (t'_k, t''_k)$. Очевидно, что $t_k \in (t'_k, t''_k)$. Обозначим $x(t_k)$ через $x'_k, x(t''_k)$ через x''_k (рис. 3).

Интеграл в правой части (31) разобьем на две части:

$$\eta(x) = - \sum I_k + J,$$

где I_k – интеграл по части траектории, соответствующей $t \in (t'_k, t''_k)$ (и, следовательно, лежащей в множествах V_j), J – интеграл по остальной части. Точнее,

$$I_k = \int_{t'_k}^{t''_k} \sigma(x(t)) \exp\left(- \int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) dt.$$

Интегралов I_k может быть как конечное число, так и бесконечное; их может не быть вовсе, тогда $\eta(x) = J$.

Оценим интеграл I_k . Для его оценки сделаем замену $t = t_k + s$ и обозначим $s' = t'_k - t_k, s'' = t''_k - t_k$. В оценке I_k будем обозначать $\sigma(x(t))$ через $\tilde{\sigma}(s)$, $\theta(x(t))$ через $\tilde{\theta}(s)$. Величину $\exp\left(- \int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right)$ представим в виде

$$\exp\left(- \int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) = \exp\left(- \int_t^{t_k} \theta(x(\tau)) d\tau\right) \exp\left(- \int_{t_k}^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right).$$

После этих замечаний получаем

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{t'_k}^{t''_k} \sigma(x(t)) \exp\left(- \int_t^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) dt \\ &= \int_{s'_k}^{s''_k} \tilde{\sigma}(s) \exp\left(- \int_s^0 \tilde{\theta}(\tau) d\tau\right) \exp\left(- \int_{t_k}^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) dt \\ &= \exp\left(- \int_{t_k}^0 \theta(x(\tau)) d\tau\right) \int_{s'_k}^{s''_k} \tilde{\sigma}(s) \exp\left(- \int_s^0 \tilde{\theta}(\tau) d\tau\right) dt. \end{aligned}$$

В последнем интеграле выразим функцию $\tilde{\sigma}(s)$ по-другому. Так как на траектории $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$, то $y_1(s) = y_1(0)e^{\lambda_1 s}$. Аналогично, $y_2(s) = y_2(0)e^{\lambda_2 s}$. Учитывая, что $y_1(0) = y_2(0) = d_k$, из (27) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(s) &= \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)y_1 y_2}{L(y_1^2 + y_2^2)^2} = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2 + \lambda_1)s}}{Ld_k^2(e^{2\lambda_1 s} + e^{2\lambda_2 s})^2} \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{Ld_k^2 \operatorname{ch}((\lambda_2 - \lambda_1)s)(e^{2\lambda_1 s} + e^{2\lambda_2 s})}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в I_k , получаем

$$\begin{aligned} I_k &= \exp\left(- \int_{t_k}^0 \theta(x(t)) dt\right) \int_{s'_k}^{s''_k} \frac{1}{Ld_k^2(e^{2\lambda_1 s} + e^{2\lambda_2 s})} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\operatorname{ch}((\lambda_2 - \lambda_1)s)} \\ &\quad \times \exp\left(- \int_s^0 \tilde{\theta}(\tau) d\tau\right) ds \end{aligned}$$

$$= \frac{\exp\left(-\int_{t_k}^0 \theta(x(t)) dt\right)}{Ld_k^2} \int_{s'}^{s''} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(e^{2\lambda_1 s} + e^{2\lambda_2 s}) \operatorname{ch}((\lambda_2 - \lambda_1)s)} \times \exp\left(\int_0^s \tilde{\theta}(\tau) d\tau\right) ds.$$

В последнем выражении учтем, что величина $\tilde{\theta}(\tau)$ в окрестности V_j равна $\lambda_1 + \lambda_2$. Поэтому

$$\exp\left(\int_0^s \tilde{\theta}(\tau) d\tau\right) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)s}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{s'_k}^{s''_k} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(e^{2\lambda_1 s} + e^{2\lambda_2 s}) \operatorname{ch}((\lambda_2 - \lambda_1)s)} \exp\left(\int_0^s \tilde{\theta}(\tau) d\tau\right) ds \\ &= \int_{s'_k}^{s''_k} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)s}}{(e^{2\lambda_1 s} + e^{2\lambda_2 s}) \operatorname{ch}((\lambda_2 - \lambda_1)s)} ds \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) ds}{\operatorname{ch}^2(\lambda_2 - \lambda_1)s} = 1. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что

$$|I_k| < \frac{1}{Ld_k^2} \exp\left(-\int_{t_k}^0 \theta(x(t)) dt\right). \quad (32)$$

Из неравенств

$$d_k \geq be^{-|\delta t_k|} = be^{\delta t_k}, \quad \exp\left(\int_{t_k}^0 \theta(x(t)) dt\right) \geq c_3 e^{\gamma_3 |t_k|}$$

следует, что

$$|I_k| < \frac{1}{c_3 L b^2} e^{(\gamma_3 - 2\delta)t_k}.$$

Заметим, что $|t_k| > hk$ для некоторого h . Следовательно,

$$\sum |I_k| < \frac{1}{c_3 L b^2} \sum e^{-h(\gamma_3 - 2\delta)k} = \frac{1}{c_3 L b^2} \frac{e^{-h(\gamma_3 - 2\delta)}}{1 - e^{-h(\gamma_3 - 2\delta)}}.$$

Из последнего неравенства следует равномерная на множестве $M(b; \delta)$ сходимость $\sum I_k$ и оценка

$$\left| \sum I_k \right| \leq \sum |I_k| < \frac{B_1}{b^2},$$

где

$$B_1 = \frac{1}{c_3 L} \sum e^{-h(\gamma_3 - 2\delta)k} = \frac{1}{c_3 L} \frac{e^{-h(\gamma_3 - 2\delta)}}{1 - e^{-h(\gamma_3 - 2\delta)}}.$$

Величина J оценивается исходя из того, что в интеграле для J функция $\sigma(x)$ ограничена некоторой константой (обозначим ее A), и поэтому

$$|J| \leq \int_{-\infty}^0 A \exp\left(-\int_t^0 \theta(s) ds\right) dt \leq \frac{A}{c_3} \int_{-\infty}^0 \exp(-\gamma_3 t) dt = \frac{A}{c_3 \gamma_3}.$$

Суммируя предыдущие оценки, получаем

$$|\eta(x)| \leq \frac{A}{c_3\gamma_3} + \frac{B_1}{b^2}.$$

Если b_0 достаточно мало (т.е. $b < b_0$), то $A/(c_3\gamma_3) < B_1/b^2$, и поэтому $|\eta(x)| < 2B_1/b^2$. Полагая $B = 2B_1$, получаем требуемое неравенство.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Для каждой точки $x \in M(b; \delta)$, каждого вектора $v \in E_x^{uu}$ и любого $t < 0$ справедливо неравенство

$$\|d\Phi_t(v)\| < \frac{B}{c_3b^2} e^{-(\gamma_3-2\delta)|t|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим вектор $d\Phi_t(v)$ через $v(t)$. Пусть $\xi_0(t)$, $\xi_r(t)$ — адаптированные координаты вектора $v(t)$.

Так как $x(t) \in M(be^{-\delta|t|}; \delta)$ при $t < 0$, то для $t < 0$

$$|\eta(x(t))| \leq \frac{B}{b^2 e^{-2\delta|t|}}.$$

Как мы видели ранее,

$$|\xi_r(t)| < \frac{e^{-\gamma_3|t|}}{c_3}.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$|\xi_0(t)| = |\eta(x(t))| |\xi_r(t)| \leq \frac{B}{c_3b^2} e^{-(\gamma_3-2\delta)|t|}.$$

Из этих неравенств легко выводится утверждение леммы. Лемма доказана.

Список литературы

- [1] C. A. Morales, M. J. Pacífico, E. R. Pujals, “On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **326**:1 (1998), 81–86.
- [2] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmospheric Sci.*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [3] B. Saltzman, “Finite amplitude free convection as an initial value problem—I”, *J. Atmospheric Sci.*, **19**:4 (1962), 329–341.
- [4] В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, Тр. ММО, **44**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982, 150–212; англ. пер.: V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, L. P. Shil’nikov, “On structurally unstable attracting limit sets of Lorenz attractor type”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2** (1983), 153–216.
- [5] J. Guckenheimer, “A strange, strange attractor”, *The Hopf bifurcation and its applications*, Applied Math. Sciences, **19**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
- [6] J. Guckenheimer, R. F. Williams, “Structural stability of Lorenz attractors”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **50**:1 (1979), 59–72.

- [7] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “Пример дикого странного аттрактора”, *Матем. сб.*, **189**:2 (1998), 137–160; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shil’nikov, “An example of a wild strange attractor”, *Sb. Math.*, **189**:2 (1998), 291–314.
- [8] L. Shilnikov, “Bifurcations and strange attractors”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. III: *Invited lectures* (Beijing, China, 2002), Higher Education Press, Beijing, 2002, 349–372; [arXiv: math.DS/0304457](#).
- [9] Е. А. Сатаев, “Отсутствие устойчивых траекторий у неавтономных возмущений систем типа системы Лоренца”, *Матем. сб.*, **196**:4 (2005), 99–134; англ. пер.: E. A. Sataev, “Non-existence of stable trajectories in non-autonomous perturbations of systems of Lorenz type”, *Sb. Math.*, **196**:4 (2005), 561–594.
- [10] L. J. Díaz, E. R. Pujals, R. Ures, “Partial hyperbolicity and robust transitivity”, *Acta Math.*, **183**:1 (1999), 1–43.
- [11] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, “Singular hyperbolic systems”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:11 (1999), 3393–3401.
- [12] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, “Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers”, *Ann. of Math.* (2), **160**:2 (2004), 375–432.
- [13] C. A. Morales, M. J. Pacifico, “Mixing attractors for 3-flows”, *Nonlinearity*, **14**:2 (2001), 359–378.
- [14] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, “Strange attractors across the boundary of hyperbolic systems”, *Comm. Math. Phys.*, **211**:3 (2000), 527–558.
- [15] C. A. Morales, M. J. Pacifico, “A dichotomy for three-dimensional vector fields”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:5 (2003), 1575–1600.
- [16] C. M. Carballo, C. A. Morales, M. J. Pacifico, “Homoclinic classes for generic C^1 vector fields”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:2 (2003), 403–415.
- [17] M. J. Pacifico, E. R. Pujals, J. L. Vieitez, “Robustly expansive homoclinic classes”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **25**:1 (2005), 271–300.
- [18] Е. А. Сатаев, “Инвариантные меры для сингулярно гиперболических аттракторов”, *Тезисы докладов международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”* (Москва, 2007), Изд-во Моск. ун-та, М., 2007, 275–276.
- [19] Д. В. Аносов, *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Тр. МИАН, **90**, Наука, М., 1967; англ. пер.: D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [20] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
- [21] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.

Е. А. Сатаев (Е. А. Sataev)

Обнинский государственный технический университет
атомной энергетики

E-mail: sataev@iate.obninsk.ru

Поступила в редакцию

21.03.2008