Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Мелихов, Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 7, 105–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:03:35

УДК 517.537.7+517.983.22

С. Н. Мелихов

Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов

Пусть L – целая функция одного комплексного переменного экспоненциального типа вполне регулярного роста, сопряженная диаграмма которой совпадает с суммой замыкания ограниченной выпуклой области G и выпуклого компакта K в $\mathbb{C}$. Установлены критерии того, что оператор R представления аналитических в G функций рядами из квазиполиномов, показателями которых являются нули функции L , имеет линейный непрерывный правый обратный. Эти критерии формулируются в терминах конформных отображений единичного круга на область G и внешности замкнутого единичного круга на внешность K , а также в терминах продолжения исходной функции L до целой функции Q двух комплексных переменных с определенными оценками сверху ее модуля. С помощью аналога интерполирующей функции Леонтьева, определяемого этим продолжением Q , получены формулы для линейного непрерывного правого обратного оператора к оператору представления R .

Библиография: 31 название.

Введение

Пусть G – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $H_G(z) := \sup_{w \in G} \operatorname{Re}(zw)$, $z \in \mathbb{C}$; K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ с опорной функцией H_K ; L – целая (в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с сопряженной диаграммой $\overline{G} + K := \{z + t : z \in \overline{G}, t \in K\}$ и с нулевым множеством $V(L)$ ($\overline{G}$ обозначает замыкание G в $\mathbb{C}$). Согласно [1], [2] существует исключительное множество попарно непересекающихся кругов $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ нулевой линейной плотности такое, что $\Lambda_j := S_j \cap V(L) \neq \emptyset$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $V(L) \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$ и вне $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$ имеет место асимптотическое равенство

$$\log |L(z)| = H_G(z) + H_K(z) + o(|z|), \quad z \rightarrow \infty.$$

Положим $e_{\mu,p}(z) := z^p \exp(\mu z)$, $e_\mu := e_{\mu,0}$, $\mu, z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $p(\lambda)$ обозначим порядок нуля $\lambda \in V(L)$.

Пусть $A(G)$ – пространство Фреше всех функций, аналитических в области G . Определим конечномерные подпространства квазиполиномов в $A(G)$ с показателями в нулях L :

$$E_j := \operatorname{span}\{e_{\lambda,p} : 0 \leq p < p(\lambda), \lambda \in \Lambda_j\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-01041, 99-01-00178) и Немецкой службы академических обменов (DAAD).

Пусть $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность выпуклых компактов в G таких, что $G_n \subset \text{int } G_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Положим $p_n(f) := \sup_{z \in G_n} |f(z)|$, $f \in A(G)$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем пространство абсолютно суммируемых в $A(G)$ последовательностей квазиполиномов из E_j , $j \in \mathbb{N}$:

$$l_1(\mathbb{E}) := \left\{ F = (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} E_j : \tilde{p}_n(F) := \sum_{j \in \mathbb{N}} p_n(f_j) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Топология $l_1(\mathbb{E})$ задается последовательностью преднорм $(\tilde{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (в этой топологии $l_1(\mathbb{E})$ – пространство Фреше).

Определим оператор представления

$$R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G), \quad R(F) := \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j.$$

Согласно [3]–[5] последовательность $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ является абсолютно представляющей системой подпространств в $A(G)$, т.е. для каждой функции $f \in A(G)$ найдется последовательность квазиполиномов $f_j \in E_j$, $j \in \mathbb{N}$, такая, что ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j$ абсолютно сходится в $A(G)$ к f . Поэтому оператор R (линейно и непрерывно) отображает $l_1(\mathbb{E})$ на $A(G)$. При этом его ядро $\text{Ker } R$ бесконечномерно. В настоящей работе решена следующая задача, поставленная Ю. Ф. Коробейником в связи с приложениями к решению уравнений свертки (см. [6], [7]). При каких условиях оператор представления R имеет линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО), т.е. последовательность $F = (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{E})$ можно выбрать линейно и непрерывно зависящей от разлагаемой функции $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j \in A(G)$? В работах [6], [7] указанная задача решена в частной ситуации, когда каждый нуль $\lambda \in V(L)$ простой и каждый круг S_j , $j \in \mathbb{N}$, содержит ровно один нуль функции L (в этом случае все пространства E_j одномерны, $l_1(\mathbb{E})$ является пространством числовых последовательностей, а $R(F)$ – обычным рядом экспонент $\sum_{j \in \mathbb{N}} c_j e_{\lambda_j}$). Отметим основные отличия нашего исследования от проведенного в [6], [7].

1) Размерности пространств E_j могут быть неограниченными в совокупности. Эту трудность мы преодолеваем введением подходящих норм в конечномерных пространствах E_j и удобным описанием $l_1(\mathbb{E})$ как пространства Кёте последовательностей со значениями в конечномерных банаховых пространствах E_j (данный подход идет от Meise [8] и использовался нами ранее в [5]).

2) Основной метод, примененный в [6], [7], – использование критерия расщепляемости короткой точной последовательности пространств степенных рядов конечного типа и подходящие изоморфные реализации $A(G)$, $l_1(\mathbb{E})$, $\text{Ker } R$ в виде пространств степенных рядов – не позволил получить формулу для ЛНПО к оператору представления R в случае, если он существует. В связи с этим в настоящей работе разработан другой метод решения указанной задачи: она сводится к проблеме существования продолжения исходной функции L вполне регулярного роста до целой функции Q двух комплексных переменных с определенными оценками сверху ее модуля. Последняя задача (с помощью $\bar{\partial}$ -техники) сведена к вопросу о существовании некоторого плюрисубгармонического (в $\mathbb{C}^2$) продолжения опорной функции $H_G + H_K$ компакта $\overline{G} + K$ (т.е. индикатора роста функции L) или, что равносильно, о наличии двух семейств субгармонических (в $\mathbb{C}$) функций, одно из которых связано с G , а другое – с K . Критерии существования таких семейств субгармонических

функций (в том числе в терминах конформных отображений) установлены ранее в работах [9]–[11]. Доказательство наличия ЛНПО для оператора представления конструктивно (в той мере, в какой конструктивно находится Q). Именно, с помощью упомянутого продолжения Q функции L мы выписываем формулу для всех ЛНПО к оператору представления R , аналогичную формулам Леонтьева (см. [12]) для коэффициентов разложений в ряды экспонент аналитических функций на компакте $\overline{G} + K$, выраженным через интерполирующую функцию. При этом существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех ЛНПО для R и множеством всех таких продолжений Q функции L .

Следуя А. Ф. Леонтьеву [12], мы даем определение интерполирующего функционала, ассоциированного с целой функцией двух комплексных переменных. Ниже $\mathcal{F}$ – преобразование Лапласа аналитических функционалов: $\forall \nu \in A(\mathbb{C})', \forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\mathcal{F}(\nu)(\lambda) := \nu(e_\lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ такова, что для любого $z \in \mathbb{C}$ $Q(\cdot, z)$ – целая (в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой содержится в G . Зафиксируем какую-либо точку $t_0 \in G$. Q -интерполирующим функционалом назовем функционал

$$\Omega_Q(\mu, z, f) := \exp(-zt_0) \mathcal{F}^{-1}(Q(\cdot, z))_t \left(\int_{t_0}^t f(t_0 + t - \xi) \exp(\mu\xi) d\xi \right),$$

$$\mu, z \in \mathbb{C}, \quad f \in A(G).$$

Для произвольных $\mu, z \in \mathbb{C}$ функционал $\Omega_Q(\mu, z, \cdot)$ линеен и непрерывен на $A(G)$.

Приведем основной результат статьи (см. теорему 4.3).

ТЕОРЕМА. (I) Если компакт K совпадает с точкой, то оператор представления $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ не имеет ЛНПО.

(II) Пусть компакт K отличен от точки; φ – конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на G , а ψ – конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus K$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Следующие утверждения равносильны:

- (i) оператор представления $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО;
- (ii) существует функция $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ такая, что $Q(z, z) = L(z)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists m \in \mathbb{N}, \exists C < \infty$:

$$|Q(\mu, z)| \leq C \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C};$$

- (iii) существует положительно однородная степени 1 плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ функция P , для которой $H_G(z) + H_K(z) = P(z, z)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists m \in \mathbb{N}$:

$$P(\mu, z) \leq H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n} \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C};$$

- (iv) $\sup_{|z| < 1} |\varphi'(z)| < \infty$ и $\inf_{|z| > 1} |\psi'(z)| > 0$.

(III) Если функция Q удовлетворяет условию (ii), то оператор

$$f \mapsto \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_Q(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

является ЛНПО для $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$.

Если $\Pi: A(G) \rightarrow l_1(\mathbb{E})$ – ЛНПО для оператора $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$, то существует единственная функция Q , удовлетворяющая (ii), для которой

$$\Pi(f) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_Q(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)_{j \in \mathbb{N}} \quad \forall f \in A(G).$$

В случае, когда каждый нуль $\lambda \in V(L)$ простой, а каждый круг S_j , $j \in \mathbb{N}$, содержит ровно один нуль функции L , в [6], [7] доказано утверждение (I) и установлена равносильность утверждений (i) и (iv) теоремы.

Отметим, что каждое из утверждений (i)–(iv) выполняется, если границы G и K принадлежат классу C^α для некоторого $\alpha > 1$, и не выполняется, если ∂G или ∂K имеют хотя бы одну угловую точку.

Из приведенной теоремы и результатов работ [10], [11], [13] (см. также [14]) следует, что наличие ЛНПО у оператора представления R равносильно существованию ЛНПО у всякого ненулевого дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в $A(G)$ и в пространстве $A(K)$ всех ростков аналитических на K функций.

Структура настоящей работы следующая. В §1 мы приводим необходимые для дальнейшего предварительные сведения. В §2 дается описание ядра $\text{Ker } R$ оператора представления R , обобщающее полученное ранее Ю. Ф. Коробейником [15] в случае одномерных пространств E_j . Как и в одномерной ситуации, $\text{Ker } R$ топологически изоморфно пространству Фреше $[1, H_K]$ всех целых (в $\mathbb{C}$) функций экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которых содержится в K . В §3 исследуется интерполирующий функционал Ω_Q , связанный с некоторой целой (в $\mathbb{C}^2$) функцией Q . Основной результат работы – теорема 4.3 – доказывается в §4. В качестве следствия мы устанавливаем критерии наличия ЛНПО у оператора представления функций из $A(G)$ рядами по абсолютно представляющей системе из квазиполиномов, построенной в [5]. В §4 установлено, в частности, что не имеет ЛНПО оператор представления, заданный любой минимальной абсолютно представляющей системой экспонент в $A(G)$ (т.е. абсолютно представляющей системой $(e_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$, показатели которой λ_j являются нулями, не обязательно всеми, целой функции экспоненциального типа с сопряженной диаграммой $\overline{G}$; см., например, [16]). В заключение формулу для ЛНПО к оператору представления мы применили к абстрактной формуле Ю. Ф. Коробейника для ЛНПО к оператору свертки (замечание 4.9).

§1. Предварительные сведения

Используемые в статье без ссылок понятия и факты из теории целых функций приведены, например, в [1], а из теории топологических векторных пространств – в [17].

Для выпуклого множества M в $\mathbb{C}$ $H_M(z) := \sup_{w \in M} \text{Re}(zw)$, $z \in \mathbb{C}$, – опорная функция M . Всюду далее G – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$; L – целая (в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с сопряженной диаграммой $\overline{G} + K$ и с нулевым множеством $V(L)$

($\overline{M}$ обозначает замыкание множества M в $\mathbb{C}$). Множество попарно непересекающихся кругов $S_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu_j| < r_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, нулевой линейной плотности (т.е. такое, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \sum_{|\mu_j| < r} r_j = 0$) обладает следующими свойствами: $\Lambda_j := S_j \cap V(L) \neq \emptyset$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $V(L) \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$ и вне $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$ имеет место асимптотическое равенство

$$\log |L(z)| = H_G(z) + H_K(z) + \bar{o}(|z|), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Как показано в [1], [2], такое исключительное множество кругов $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ существует. Считаем, что последовательность $(|\mu_j|)_{j \in \mathbb{N}}$ не убывает. Тогда $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log j}{|\mu_j|} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть M – ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{C}$ с непустой внутреннейстью. Положим

$$\begin{aligned} [1, H_M)_n &:= \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : |f|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \exp \left(-H_M(z) + \frac{|z|}{n} \right) < +\infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ [1, H_M) &:= \text{ind}_{n \rightarrow \infty} ([1, H_M)_n, |\cdot|_n); \\ [1, H_M]_n &:= \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : \widetilde{|f|}_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \exp \left(-H_M(z) - \frac{|z|}{n} \right) < +\infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ [1, H_M] &:= \text{proj}_{\leftarrow n} ([1, H_M]_n, \widetilde{|\cdot|}_n). \end{aligned}$$

Для выпуклой области M в $\mathbb{C}$ через $A(M)$ обозначаем пространство всех аналитических в M функций с топологией равномерной сходимости на компактах M . Для выпуклого компакта M в $\mathbb{C}$ символ $A(M)$ обозначает пространство всех ростков аналитических на M функций с естественной топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств.

Если E – локально выпуклое пространство, то E' – топологическое сопряженное к E пространство, а E'_b – сильное сопряженное к E пространство.

Положим $e_{\mu,p}(z) := z^p \exp(\mu z)$, $e_\mu := e_{\mu,0}$, $\mu, z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\nu)(z) := \nu(e_z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \nu \in A(\mathbb{C})',$$

является линейным топологическим изоморфизмом $A(\text{int } M)'_b$ на $[1, H_M)$ и $A(\overline{M})'_b$ на $[1, H_M]$ (см., например, [18; теорема 4.5.3]). При этом $\text{int } M$ обозначает внутренность M . Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим индуцированную этим изоморфизмом билинейную форму, устанавливающую двойственность между $A(\text{int } M)$ и $[1, H_M)$ и между $A(\overline{M})$ и $[1, H_M]$:

$$\langle f, g \rangle := \mathcal{F}^{-1}(g)(f).$$

Для любых $\nu \in A(\mathbb{C})'$, $\mu \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется равенство $\langle e_{\mu,p}, \mathcal{F}(\nu) \rangle = \mathcal{F}(\nu)^{(p)}(\mu)$.

Через $p(\lambda)$ обозначим порядок нуля $\lambda \in V(L)$. Положим

$$E_j := \text{span}\{e_{\lambda,p} : 0 \leq p < p(\lambda), \lambda \in \Lambda_j\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Система $\{e_{\lambda,p} : 0 \leq p < p(\lambda), \lambda \in \Lambda_j\}$ образует базис в конечномерном пространстве E_j .

Далее, $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность выпуклых компактов в G (с непустой внутренней частью) таких, что $G_n \subset \text{int } G_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$; $H_n := H_{G_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность норм $p_n(f) := \sup_{z \in G_n} |f(z)|$, $f \in A(G)$, $n \in \mathbb{N}$, задает топологию $A(G)$. Отметим, что $p_n(e_z) = \exp H_n(z) \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Пространство всех абсолютно суммируемых в $A(G)$ последовательностей квазиполиномов из E_j

$$l_1(\mathbb{E}) := \left\{ F = (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} E_j : \tilde{p}_n(F) := \sum_{j \in \mathbb{N}} p_n(f_j) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

с топологией, задаваемой последовательностью норм $(\tilde{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, является пространством Фреше (см., например, [19; §2]).

Оператор представления R определим следующим образом:

$$R(F) := \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad F = (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{E}).$$

Оператор R линейно и непрерывно отображает $l_1(\mathbb{E})$ в $A(G)$. Согласно [3; теоремы 3, 4], [4], [5; предложение 3.13] оператор $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ сюръективен.

Пусть $E_j^\perp$ – поляр E_j в $[1, H_G)$. Тогда

$$E_j^\perp = \{f \in [1, H_G) : f^{(p)}(\lambda) = 0, \ 0 \leq p < p(\lambda), \ \lambda \in \Lambda_j\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Положим $S(\mu, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| < r\}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Для последовательности кругов $S'_j := S(\mu_j, r'_j)$, $j \in \mathbb{N}$, через $\tilde{E}_j$ обозначим факторпространство $[1, H_G)/E_j^\perp$, наделенное нормой

$$\widetilde{\|\eta\|}_j := \inf_{f \in \eta} \sup_{z \in S'_j} |f(z)|.$$

Заметим, что $\dim \tilde{E}_j = \dim E_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} p(\lambda) =: q_j \ \forall j \in \mathbb{N}$. Пространство E_j , $j \in \mathbb{N}$, можно алгебраически отождествить с сопряженным к $\tilde{E}_j$ пространством. Двойственность между E_j и $\tilde{E}_j$ задается билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$:

$$\langle g, \tilde{v} \rangle_j = \langle g, v \rangle \quad \forall g \in E_j, \quad \forall \tilde{v} = v + E_j^\perp \in \tilde{E}_j.$$

В частности,

$$\langle e_{\lambda, p}, \tilde{v} \rangle_j = \langle e_{\lambda, p}, v \rangle = v^{(p)}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda_j, \quad 0 \leq p < p(\lambda), \quad \forall \tilde{v} = v + E_j^\perp \in \tilde{E}_j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $A = (a_{jn})_{j,n \in \mathbb{N}}$ – матрица Кёте, т.е. $0 < a_{jn} \leq a_{j,n+1} \forall j, n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{B} = ((B_j, \|\cdot\|_j))_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность конечномерных нормированных пространств. Положим

$$\begin{aligned}\Lambda_1(A, \mathbb{B}) &:= \left\{ X = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} B_j : \pi_n(X) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_j a_{jn} < +\infty \forall n \in \mathbb{N} \right\}; \\ K_{\infty, n}(A, \mathbb{B}) &:= \left\{ X = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} B_j : \pi_{\infty, n}(X) := \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{\|x_j\|_j}{a_{jn}} < +\infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}; \\ K_{\infty}(A, \mathbb{B}) &:= \text{ind}_{n \rightarrow} (K_{\infty, n}(A, \mathbb{B}), \pi_{\infty, n}).\end{aligned}$$

Если каждое пространство B_j совпадает с $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, то вместо $\Lambda_1(A, \mathbb{B})$ будем писать $\Lambda_1(A)$.

$\Lambda_1(A, \mathbb{B})$ – пространство Фреше, топология которого задается последовательностью норм π_n , $n \in \mathbb{N}$. Если $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : \lim_{j \rightarrow \infty} a_{jn}/a_{jm} = 0$, то $\Lambda_1(A, \mathbb{B})$ является пространством Фреше–Шварца, а $\Lambda_1(A, \mathbb{B})'_b$ можно отождествить с $K_{\infty}(A, \mathbb{B}')$, где $\mathbb{B}' := (B'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность сильных сопряженных к B_j пространств B'_j [8; лемма 1.2 (а)]. При этом двойственность между $\Lambda_1(A, \mathbb{B})$ и $K_{\infty}(A, \mathbb{B}')$ задается билинейной формой

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}} y_j(x_j), \quad X = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Lambda_1(A, \mathbb{B}), \quad Y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K_{\infty}(A, \mathbb{B}').$$

ЛЕММА 1.4. Существует последовательность чисел $r'_j > r_j$, $j \in \mathbb{N}$, обладающая следующими свойствами:

- (а) последовательность кругов $S'_j = S(\mu_j, r'_j)$, $j \in \mathbb{N}$, имеет нулевую линейную плотность;
- (б) для матрицы $A := (\exp(H_G(\mu_j) - |\mu_j|/n))_{j,n \in \mathbb{N}}$ совпадают локально выпуклые пространства $l_1(\mathbb{E})$ и $\Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}})$, где $\widehat{\mathbb{E}} := (E_j, \widehat{\|\cdot\|_j})_{j \in \mathbb{N}}$, а $(E_j, \widehat{\|\cdot\|_j})$ – сильное сопряженное к $\widetilde{E}_j$ пространство;
- (в) сильное сопряженное к $l_1(\mathbb{E})$ пространство можно отождествить с $K_{\infty}(A, \widetilde{\mathbb{E}})$, если $\widetilde{\mathbb{E}} = (\widetilde{E}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, а матрица A такая, как в (б); при этом двойственность между $l_1(\mathbb{E})$ и $K_{\infty}(A, \widetilde{\mathbb{E}})$ задается билинейной формой

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle x_j, y_j \rangle_j, \quad X \in l_1(\mathbb{E}), \quad Y \in K_{\infty}(A, \widetilde{\mathbb{E}});$$

- (г) пусть $\widetilde{R}: [1, H_G] \rightarrow K_{\infty}(A, \widetilde{\mathbb{E}})$ – оператор, сопряженный к $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$, если отождествить сопряженные к $l_1(\mathbb{E})$ и $A(G)$ пространства с $K_{\infty}(A, \widetilde{\mathbb{E}})$ и $[1, H_G]$ соответственно ($\widetilde{\mathbb{E}}$ и A такие, как в (в)). Тогда

$$\widetilde{R}(f) = (\widetilde{R}_j(f))_{j \in \mathbb{N}}, \quad f \in [1, H_G],$$

где $\widetilde{R}_j$ – линейные непрерывные операторы из $[1, H_G]$ в $\widetilde{E}_j$, для которых $\langle e_{\lambda, p}, \widetilde{R}_j(f) \rangle_j = \langle e_{\lambda, p}, f \rangle = f^{(p)}(\lambda)$, $0 \leq p < p(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$, $f \in [1, H_G]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (а) и (б) доказаны в [5; предложение 2.4].

(в) В силу (б) локально выпуклые пространства $l_1(\mathbb{E})$ и $\Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}})$ совпадают. Поскольку $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{jn}/a_{j,n+1} = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то по 1.3 $\Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}})'_b$, а значит, и $l_1(\mathbb{E})'_b$ можно отождествить с $K_\infty(A, \widehat{\mathbb{E}})$.

Утверждение (г) проверяется непосредственно.

Ниже мы будем пользоваться следующей модификацией теоремы 4.4.3 из [18] (см. также [20; теорема 7.1]).

ТЕОРЕМА 1.5 [18]. Пусть v – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$; Σ – комплексное линейное подпространство в $\mathbb{C}^n$ коразмерности k . Для любой аналитической функции f на Σ , для которой $\int_\Sigma |f|^2 \exp(-v) d\sigma < \infty$ ($d\sigma$ обозначает меру Лебега на Σ), существует аналитическая функция F на $\mathbb{C}^n$ такая, что $F = f$ на Σ и

$$\int_{\mathbb{C}^n} |F|^2 (1 + |z|^2)^{-3k} \exp(-v_1) d\lambda \leq C \int_\Sigma |f|^2 \exp(-v) d\sigma,$$

где $v_1(z) := \sup_{|t| \leq 1} v(z + t)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $d\lambda$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, $|z| := \left(\sum_{s=1}^n |z_s|^2 \right)^{1/2}$, $z \in \mathbb{C}^n$, а константа C не зависит от f .

§ 2. Описание ядра оператора представления

Пусть a – целая (в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой содержится в K . Символ $a(D)$ обозначает оператор свертки с характеристической функцией a :

$$a(D)(g)(z) := \mathcal{F}^{-1}(a)(g(\cdot + z)), \quad z \in G, \quad g \in A(G + K),$$

$a(D)$ линейно и непрерывно отображает $A(G + K)$ в $A(G)$ (см. [21], [22]). Отметим, что для любых $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$a(D)(e_{\mu,p}) = \sum_{k=0}^p C_p^k a^{(p-k)}(\mu) e_{\mu,k}.$$

Отсюда следует, что для произвольных $f \in E_j$, $j \in \mathbb{N}$, также $a(D)(f) \in E_j$.

Положим

$$\tilde{y}_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{e_t(\cdot)}{L(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $\tilde{y}_j \in E_j$, $j \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Следующие утверждения равносильны:

- (а) $Y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \text{Ker } R$;
- (б) существует функция $a \in [1, H_K]$ такая, что

$$y_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{a(t) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (б) $\Rightarrow$ (а). Вследствие асимптотического равенства (1) $0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{y}_j$ (при этом ряд абсолютно сходится в $A(\overline{G} + K)$). Поскольку оператор $a(D)$ линейно и непрерывно отображает $A(\overline{G} + K)$ в $A(\overline{G})$, то

$$0 = a(D) \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{y}_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a(D)(\tilde{y}_j),$$

причем последний ряд абсолютно сходится в $A(\overline{G})$ и

$$a(D)(\tilde{y}_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{a(t)e_t(\cdot)}{L(t)} dt \in E_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Значит, $Y = (a(D)(\tilde{y}_j))_{j \in \mathbb{N}} \in \text{Ker } R$.

(а) $\Rightarrow$ (б). Воспользуемся методом доказательства импликации (iv) $\Rightarrow$ (i) в теореме 3.8 из [5]. Пусть $Y \in \text{Ker } R$. Положим

$$l_\lambda(t) := \frac{(t - \lambda)^{p(\lambda)}}{L(t)}, \quad \lambda \in V(L).$$

Существуют полиномы a_j , для которых $y_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{a_j(t)e_t(\cdot)}{L(t)} dt$, $j \in \mathbb{N}$ [5; с. 314]. Следуя А. Ф. Леонтьеву [12; гл. IV, § 1], введем функции

$$\begin{aligned} L_{\lambda,p}(z) &:= \frac{1}{p!(p(\lambda) - p - 1)!} \sum_{s=0}^{p(\lambda)-p-1} s! C_{p(\lambda)-p-1}^s (l_\lambda a_j)^{(p(\lambda)-p-s-1)}(\lambda) \frac{L(z)}{(z - \lambda)^{s+1}}, \\ 0 \leq p < p(\lambda), \quad \lambda \in V(L). \end{aligned}$$

Тогда $L_{\lambda,p} \in [1, H_G + H_K]$, $0 \leq p < p(\lambda)$, $\lambda \in V(L)$. Возьмем функционалы $\varphi_{\lambda,p} \in A(\overline{G} + K)'$, для которых $\mathcal{F}(\varphi_{\lambda,p}) = L_{\lambda,p}$, $0 \leq p < p(\lambda)$, $\lambda \in V(L)$, и положим

$$M_j(f) := \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \sum_{p=0}^{p(\lambda)-1} \varphi_{\lambda,p}(f) e_{\lambda,p}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} M_j(f)$ абсолютно сходится в $A(\overline{G})$ для любой функции $f \in A(\overline{G} + K)$ (см. [5; доказательство теоремы 3.8, шаг 2]) и определяет линейный непрерывный оператор $M := \sum_{j \in \mathbb{N}} M_j: A(\overline{G} + K) \rightarrow A(\overline{G})$. При этом $\forall \mu \in \mathbb{C} \exists a(\mu) \in \mathbb{C}$: $M(e_\mu) = a(\mu)e_\mu$ [5; с. 318]. Отсюда следует, что если сопряженные к $A(\overline{G} + K)$ и $A(\overline{G})$ пространства отождествить с $[1, H_G + H_K]$ и $[1, H_G]$ соответственно, сопряженный к M оператор совпадает с оператором $\mathcal{M}_a: [1, H_G] \rightarrow [1, H_G + H_K]$ умножения на функцию a . Значит, $\forall f \in [1, H_G]$ $af \in [1, H_G + H_K]$. Согласно [23; предложение 7] $a \in [1, H_K]$. Поскольку $M(e_\mu) = a(D)(e_\mu) \forall \mu \in \mathbb{C}$ и множество $\{e_\mu : \mu \in \mathbb{C}\}$ полно в $A(\overline{G} + K)$, то $M = a(D)$ на $A(\overline{G} + K)$. Непосредственная проверка показывает, что для $\lambda, \mu \in V(L)$, $0 \leq p < p(\lambda)$, $0 \leq q \leq p(\mu)$

$$\varphi_{\lambda,p}(e_{\mu,q}) = L_{\lambda,p}^{(q)}(\mu) = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu, \\ 0, & \lambda = \mu, q < p, \\ C_q^p a_j^{(q-p)}(\lambda), & \lambda = \mu \in \Lambda_j, p \leq q. \end{cases}$$

Поэтому $M_k|_{E_j} = 0$, $k \neq j$, и $M_j(e_{\mu,q}) = \sum_{p=0}^q C_q^p a_j^{(q-p)}(\mu) e_{\mu,p} = a_j(D)(e_{\mu,q})$ $\forall \mu \in \Lambda_j$, $0 \leq q < p(\mu)$, т.е. $M_j|_{E_j} = a_j(D)|_{E_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Так как $M = a(D)$, то $a(D)|_{E_j} = M|_{E_j} = M_j|_{E_j} = a_j(D)|_{E_j}$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Следовательно, $y_j = a_j(D)(\tilde{y}_j) = a(D)(\tilde{y}_j)$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Отображение $T(a) := (a(D)(\tilde{y}_j))_{j \in \mathbb{N}}$ является линейным топологическим изоморфизмом $[1, H_K]$ на $\text{Ker } R$ (если топологию в $\text{Ker } R$ индуцировать из $l_1(\mathbb{E})$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in G$. По теореме 2.1 T – линейное отображение $[1, H_K]$ на $\text{Ker } R$.

Покажем, что T инъективно. Если $(a(D)(\tilde{y}_j))_{j \in \mathbb{N}} = 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{a(t)e_t(z)}{L(t)} dt = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in G.$$

Вычисляя последние интегралы с помощью вычетов и приравнявая к нулю коэффициенты при $e_{\lambda,p}$, получим, что $a^{(p)}(\lambda) = 0$, $0 \leq p < p(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Поскольку система $\{e_{\lambda,p} : 0 \leq p < p(\lambda), \lambda \in V(L)\}$ полна в $A(G + K)$ (см. [3]–[5]) и $a \in [1, H_G + H_K]$, то $a \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Непрерывность оператора T следует из соотношения (1). По теореме об открытии отображении (для пространств Фреше) $T: [1, H_K] \rightarrow \text{Ker } R$ – топологический изоморфизм “на”.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Следуя Ю. Ф. Коробейнику [22], функцию L будем называть $(1, H_G + H_K)$ -интерполирующей, если все нули L простые и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in V(L)} |\lambda|^{-1} (H_G(\lambda) + H_K(\lambda) - \log |L'(\lambda)|) = 0.$$

Согласно [24] L является $(1, H_G + H_K)$ -интерполирующей функцией тогда и только тогда, когда все нули функции L простые и исключительные круги S_j можно выбрать так, что каждый из них содержит ровно один нуль функции L .

В случае, когда $L - (1, H_G + H_K)$ -интерполирующая функция, приведенное в теореме 2.1 описание $\text{Ker } R$ следует из [15; теорема 1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. (а) Для любого $\mu \notin V(L)$ справедливо равенство

$$e_\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{L(\mu)}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt,$$

где $\gamma_j := \bigcup_{\lambda \in \Lambda_j} \gamma(\lambda)$, окружность $\gamma(\lambda) := \{t \in \mathbb{C} : |t - \lambda| = r(\lambda)\}$ лежит во внешности окружности $\gamma(\nu)$, если $\lambda \neq \nu$, а μ лежит во внешности всех окружностей $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$. При этом ряд абсолютно сходится в $A(G + K)$ (см. [3; доказательство теоремы 1]).

(б) Пусть $(w_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{E})$, $\mu \notin V(L)$ и $e_\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} w_j$. Тогда

$$0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mu w_j - D(w_j))$$

(D – оператор дифференцирования). Для любой функции $a \in [1, H_K]$ такой, что $\mu w_j - D(w_j) = a(D)(\tilde{y}_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$, в G выполняется равенство

$$w_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{a(t)e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt$$

(γ_j такие, как в (а)). Чтобы убедиться в этом, положим

$$v_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{a(t)e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mu(w_j - v_j) - D(w_j - v_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Значит, $\forall j \in \mathbb{N} \exists c_j \in \mathbb{C}: w_j - v_j = c_j e_\mu$. Поскольку $w_j - v_j \in E_j$, а $e_\mu \notin E_j$, то $c_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

§ 3. Интерполирующий функционал, задаваемый целой функцией двух комплексных переменных

Следуя А. Ф. Леонтьеву [12], который ввел интерполирующую функцию, соответствующую целой (в $\mathbb{C}$) функции экспоненциального типа, дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть целая в $\mathbb{C}^2$ функция Q такова, что $Q(\cdot, z) \in [1, H_G]$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Зафиксируем какую-либо точку $t_0 \in G$. Q -интерполирующим функционалом назовем функционал

$$\Omega_Q(\mu, z, f) := \exp(-zt_0) \mathcal{F}^{-1}(Q(\cdot, z))_t \left(\int_{t_0}^t f(t_0 + t - \xi) \exp(\mu\xi) d\xi \right),$$

$$\mu, z \in \mathbb{C}, \quad f \in A(G).$$

Всюду далее t_0 – некоторая фиксированная точка из G .

Отметим некоторые свойства Ω_Q .

ЛЕММА 3.2. (а) Для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$ $\Omega_Q(z, z, e_\mu) = q(\mu, z)$, где q – целая в $\mathbb{C}^2$ функция, для которой

$$Q(\mu, z) - \exp((\mu - z)t_0)Q(z, z) = q(\mu - z)(\mu - z).$$

(б) Для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$ $\Omega_Q(\mu, z, \cdot) \in A(G)'$.

(в) Пусть функция $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ такова, что отображение $z \mapsto Q(\cdot, z)$ из $\mathbb{C}$ в $[1, H_G]$ ограничено на каждом компакте в $\mathbb{C}$ (т.е. для всякого компакта $D \subset \mathbb{C}$ найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого

$$\sup_{z \in D} \sup_{\mu \in \mathbb{C}} |Q(\mu, z)| \exp(-H_G(\mu) + |\mu|/n) < \infty).$$

Тогда $\Omega_Q(\cdot, \cdot, f) \in A(\mathbb{C}^2)$ для любой функции $f \in A(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) очевидно.

(б) Поскольку линейное отображение $f \mapsto \int_{t_0}^t f(t_0 + t - \xi) \exp(\mu \xi) d\xi$, $t \in G$, непрерывно в $A(G)$, а $\mathcal{F}^{-1}(Q(\cdot, z))$ — линейный непрерывный функционал на $A(G)$, то $\Omega_Q(z, \mu, \cdot)$ — также линейный непрерывный функционал на $A(G)$.

(в) Зафиксируем $f \in A(G)$. Для $z \in \mathbb{C}$ через $\gamma(\cdot, z)$ обозначим функцию, сопряженную по Борелю с $Q(\cdot, z)$. Возьмем произвольный круг $S(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < \infty$). Из ограниченности множества $\{Q(\cdot, z) : z \in S(z_0, r)\}$ в $[1, H_G]$ следует, что найдется выпуклый компакт M в G , содержащий сопряженные диаграммы функций $Q(\cdot, z)$ для всех $z \in S(z_0, r)$. Используя интегральное представление $\gamma(\cdot, z)$ (см. [1; гл. IV, § 20]) и условия аналитичности несобственного интеграла по параметру (см. [25; гл. IV, § 1, 1.2]), получаем, что функция $\gamma(t, z)$ аналитична в $S(z_0, r)$ для любого $t \notin M$. Возьмем какую-либо замкнутую спрямляемую жорданову кривую Γ , лежащую в G и содержащую внутри себя M . Тогда $\forall z \in S(z_0, r)$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$

$$\Omega_Q(\mu, z, f) = \frac{\exp(-zt_0)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t, z) \left(\int_{t_0}^t f(t_0 + t - \xi) \exp(\mu \xi) d\xi \right) dt.$$

Заметим, что функция $(t, \mu, z) \mapsto \gamma(t, z) \int_{t_0}^t f(t_0 + t - \xi) \exp(\mu \xi) d\xi$ непрерывна на Γ по t для произвольных $(\mu, z) \in \mathbb{C} \times S(z_0, r)$, аналитична в $\mathbb{C} \times S(z_0, r)$ по (μ, z) для любого $t \in \Gamma$ и ограничена внутри $\mathbb{C} \times S(z_0, r)$ равномерно по $t \in \Gamma$. Поэтому, снова используя условия аналитичности интеграла по параметру [25], получаем, что $\Omega_Q(\cdot, \cdot, f) \in A(\mathbb{C} \times S(z_0, r))$. Значит, $\Omega_Q(\cdot, \cdot, f)$ — целая в $\mathbb{C}^2$ функция.

Для функции Q , удовлетворяющей предположениям в лемме 3.2(в), введем операторы

$$\Pi_j(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_Q(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt, \quad f \in A(G), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

По теории вычетов $\Pi_j(f) \in E_j \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall f \in A(G)$.

Далее,

$$p_n^*(\nu) := \sup_{p_n(f) \leq 1} |\nu(f)|, \quad \nu \in A(G)',$$

— “норма” в $A(G)'$, сопряженная к p_n , $n \in \mathbb{N}$.

Из непосредственных оценок сверху для $|\Pi_j(f)|$ следует, что линейные операторы Π_j непрерывны в $A(G)$. Следующая лемма показывает, что при некоторых дополнительных ограничениях на Q последовательность операторов Π_j , $j \in \mathbb{N}$, обладает более сильным свойством, чем равностепенная непрерывность.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что функция Q из определения 3.1 удовлетворяет следующим условиям: $\forall z \in \mathbb{C} \quad Q(z, z) = L(z)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}, \exists C < \infty$:*

$$|Q(\mu, z)| \leq C \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\forall s \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N}, \exists B < \infty$:

$$p_s(\Pi_j(f)) \leq B p_k(f) \exp\left(-\frac{|\mu_j|}{k}\right) \quad \forall f \in A(G), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что функция Q удовлетворяет предположениям утверждения (в) леммы 3.2. Вследствие леммы 3.2 (а) $\forall z \notin \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bar{S}_l$

$$\Pi_j(e_z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{q(z, t)e_t(\cdot)}{L(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{Q(z, t)e_t(\cdot)}{(z - t)L(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $s \in \mathbb{N}$. Учитывая оценки сверху для $|Q|$, соотношение (1) и условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r_j}{|\mu_j|} = 0,$$

получаем:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \exists m(n) \geq n, \exists C_1, C_2 < \infty: \forall z \notin \mathcal{S}_0 := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} S(\mu_l, 2r_l), \forall j \in \mathbb{N} \\ p_s(\Pi_j(e_z)) \leq C_1 \exp\left(H_G(z) - \frac{|z|}{m(n)}\right) \sup_{t \in \partial S_j} \frac{\exp(H_K(t) + |t|/n + H_s(t))}{\exp(H_G(t) + H_K(t) - |t|/n)} \\ \leq C_2 \exp\left(H_G(z) - \frac{|z|}{m(n)}\right) \exp\left(H_{s+1}(\mu_j) - H_G(\mu_j) + \frac{2|\mu_j|}{n}\right). \end{aligned}$$

Выберем $n \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$ так, чтобы для любого $w \in \mathbb{C}$ выполнялись неравенства $H_G(w) \geq H_{s+1}(w) + 3|w|/n$ и $H_G(w) - |w|/m(n) \leq H_l(w)$. Тогда $\forall z \notin \mathcal{S}_0, \forall j \in \mathbb{N}$

$$p_s(\Pi_j(e_z)) \leq C_2 p_l(e_z) \exp\left(-\frac{|\mu_j|}{n}\right), \quad \text{т.е.} \quad \sup_{z \notin \mathcal{S}_0} \frac{p_s(\Pi_j(e_z))}{p_l(e_z)} \leq C_2 \exp\left(-\frac{|\mu_j|}{n}\right).$$

Согласно [13; предложение 1.7] $\forall l \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}, \exists A_1 < \infty: \forall g \in [1, H_G)_{l+1}$

$$p_k^*(\mathcal{F}^{-1}(g)) \leq A_1 \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|g(z)|}{p_{l+1}(e_z)} = A_1 \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|g(z)|}{\exp H_{l+1}(z)}.$$

Пользуясь принципом максимума, получаем: $\forall l \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}, \exists A_2 < \infty: \forall g \in [1, H_G), \sup_{z \notin \mathcal{S}_0} |g(z)| / \exp H_l(z) < \infty$,

$$p_k^*(\mathcal{F}^{-1}(g)) \leq A_2 \sup_{z \notin \mathcal{S}_0} \frac{|g(z)|}{\exp H_l(z)} = A_2 \sup_{z \notin \mathcal{S}_0} \frac{|g(z)|}{p_l(e_z)}. \quad (3)$$

Для фиксированного $s \in \mathbb{N}$, l и n , выбранных по s , возьмем в (3) $k \geq n$.

Пусть $\Pi'_j: A(G)' \rightarrow A(G)'$ — отображение, сопряженное к $\Pi_j: A(G) \rightarrow A(G)$. Тогда $\forall \nu \in A(G)', p_s^*(\nu) \leq 1, \forall f \in A(G), \forall j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\nu(\Pi_j(f))| &= |\Pi'_j(\nu)(f)| \leq p_k(f) p_k^*(\Pi'_j(\nu)) \leq A_2 p_k(f) \sup_{z \notin \mathcal{S}_0} \frac{|\Pi'_j(\nu)(e_z)|}{p_l(e_z)} \\ &\leq A_2 p_k(f) \sup_{z \notin \mathcal{S}_0} \frac{p_s(\Pi_j(e_z)) p_s^*(\nu)}{p_l(e_z)} \leq A_2 C_2 p_k(f) \exp\left(-\frac{|\mu_j|}{k}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$p_s(\Pi_j(f)) = \sup_{p_s^*(\nu) \leq 1} |\nu(\Pi_j(f))| \leq A_2 C_2 p_k(f) \exp\left(-\frac{|\mu_j|}{k}\right) \quad \forall f \in A(G), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть функция Q удовлетворяет предположениям леммы 3.3. В силу леммы 3.2(а)

$$\Pi_j(e_\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{Q(\mu, t)e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \mu \notin \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bar{S}_l.$$

Поскольку линейные операторы Π_j непрерывны в $A(G)$ и множество $\{e_\mu: \mu \in \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bar{S}_l)\}$ полно в $A(G)$, операторы Π_j не зависят от выбора точки $t_0 \in G$ в определении 3.1.

§4. Критерии существования и формулы для правого обратного к оператору представления

ТЕОРЕМА 4.1. Следующие утверждения равносильны:

- (i) оператор представления $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО;
- (ii) существует функция $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ такая, что $Q(z, z) = L(z)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists C < \infty$:

$$|Q(\mu, z)| \leq C \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C};$$

- (iii) существует положительно однородная степени 1 плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ функция P , для которой $H_G(z) + H_K(z) = P(z, z)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$:

$$P(\mu, z) \leq H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n} \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C}.$$

При этом если Q – функция, удовлетворяющая (ii), то оператор

$$f \mapsto (\Pi_j(f))_{j \in \mathbb{N}}, \quad f \in A(G),$$

где Π_j определяются формулами (2), является ЛНПО для R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть оператор представления $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО. Тогда для матрицы $A := (\exp(H_G(\mu_j) - |\mu_j|/n))_{j, n \in \mathbb{N}}$ сопряженный к R оператор $\tilde{R}: [1, H_G] \rightarrow K_\infty(A, \tilde{\mathbb{E}})$ (см. определение 1.3 и лемму 1.4 (г)) имеет линейный непрерывный левый обратный T .

Пусть $(e_{jq})_{q=1}^{q_j}$ – базис Ауэрбаха в $\tilde{E}_j$ и $(e_{jq}^*)_{q=1}^{q_j}$ – ортогональный к нему базис в E_j (см. [26; с. 291]), т.е. базисы со следующими свойствами: $\langle e_{jq}^*, e_{jp} \rangle_j = \delta_{qp}$, $\widehat{\|e_{jq}\|_j} = 1$, $\widehat{\|e_{jq}^*\|_j} = 1$, $1 \leq q \leq q_j$ (см. лемму 1.4 (б)). При этом $\dim E_j = \dim \tilde{E}_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} p(\lambda) =: q_j$, $j \in \mathbb{N}$. Положим

$$\tilde{e}_{jq} := (\delta_{kj} e_{jq})_{k \in \mathbb{N}}, \quad f_{jq} := T(\tilde{e}_{jq}), \quad 1 \leq q \leq q_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Так как оператор $T: K_\infty(A, \tilde{\mathbb{E}}) \rightarrow [1, H_G]$ непрерывен, то в силу теоремы Гротендика о факторизации [17; теорема 6.5.1] $\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists D_l < \infty$:

$$|f_{jq}(\mu)| \leq D_l \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} - H_G(\mu_j) + \frac{|\mu_j|}{l}\right) \quad (4)$$

$$\forall \mu \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq q \leq q_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что для любого $Y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K_\infty(A, \tilde{\mathbb{E}})$ ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{y}_j$, в котором $\tilde{y}_j := (\delta_{kj} y_j)_{k \in \mathbb{N}}$, абсолютно сходится в $K_\infty(A, \tilde{\mathbb{E}})$ к Y . Поэтому, учитывая лемму 1.4 (г) и то, что $T \circ \tilde{R} = \text{id}_{[1, H_G]}$, получаем:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} \langle e_{jq}^*, \tilde{R}_j(f) \rangle_j f_{jq} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} \langle e_{jq}^*, f \rangle f_{jq} \quad \forall f \in [1, H_G]$$

(последний ряд (по j) абсолютно сходится в $[1, H_G)$ в силу непрерывности T). Отсюда следует, что $\forall \mu \in \mathbb{C}, \forall f \in [1, H_G)$

$$f(\mu) = \langle e_\mu, f \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} \langle e_{jq}^*, f \rangle f_{jq}(\mu) = \left\langle \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} f_{jq}(\mu) e_{jq}^*, f \right\rangle$$

и

$$e_\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} f_{jq}(\mu) e_{jq}^*. \quad (5)$$

При этом ряд в (5) (по j) абсолютно сходится в $A(G)$ со слабой топологией, а значит, в силу ядерности $A(G)$ абсолютно сходится и в $A(G)$ [27; 4.2.2].

Так как

$$0 = \mu e_\mu - D(e_\mu) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} f_{jq}(\mu) (\mu e_{jq}^* - D(e_{jq}^*)) \quad \forall \mu \in \mathbb{C},$$

то в силу теоремы 2.1 $\forall \mu \in \mathbb{C} \exists a_\mu \in [1, H_K]: \forall j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{q=1}^{q_j} f_{jq}(\mu) (\mu e_{jq}^* - D(e_{jq}^*)) = a_\mu(D)(\tilde{y}_j) =: y_{j,\mu}. \quad (6)$$

При этом в силу замечания 2.4 (а) $\forall z \notin V(L), \forall \mu \in \mathbb{C}$

$$a_\mu(z) e_z = a_\mu(D)(e_z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{L(z)}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{a_\mu(t) e_t(\cdot)}{(z-t)L(t)} dt. \quad (7)$$

Вследствие замечания 2.4 (б) $\forall \mu \notin V(L), \forall j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{q=1}^{q_j} f_{jq}(\mu) e_{jq}^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{a_\mu(t) e_t(\cdot)}{(\mu-t)L(t)} dt. \quad (8)$$

Из равенств (7), (8) и (5) следует, что для любого $\mu \notin V(L)$

$$a_\mu(\mu) e_\mu = L(\mu) \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{a_\mu(t) e_t(\cdot)}{(\mu-t)L(t)} dt = L(\mu) e_\mu.$$

Таким образом,

$$a_\mu(\mu) = L(\mu) \quad \forall \mu \notin V(L). \quad (9)$$

Положим

$$\tilde{r}_j := \max\{r'_j, (1 + |\mu_j|)^{-2}\}, \quad \tilde{S}_j := S(\mu_j, 2\tilde{r}_j), \quad j \in \mathbb{N}; \quad \tilde{\mathcal{S}} := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{S}_j.$$

Введем функцию двух комплексных переменных $Q(\mu, z) := a_\mu(z), \mu \in \mathbb{C}, z \notin \tilde{\mathcal{S}}$. Оценим $|Q|$ сверху.

Пусть $\alpha(z) := \log |L(z)| - H_G(z) - H_K(z)$, если $z \notin \tilde{\mathcal{S}}$, и $\alpha(z) := 0$, если $z \in \tilde{\mathcal{S}}$. Тогда $\alpha(z) = \bar{o}(|z|), z \rightarrow \infty$.

Из (7) (см. [5; с. 316]) следует, что $\forall \mu \in \mathbb{C}, \forall z \notin \tilde{\mathcal{S}}$

$$\begin{aligned} Q(\mu, z)e_z(w) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{s \geq 0} (z - \mu_j)^{-s-1} (D - \mu_j I)^s \left(\frac{L(z)}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{a_\mu(t)e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)(w) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{s \geq 0} L(z)(z - \mu_j)^{-s-1} (D - \mu_j I)^s (y_{j,\mu})(w), \quad w \in G \end{aligned} \quad (10)$$

(здесь I — тождественное отображение).

Для любого $n \in \mathbb{N}$ выберем $n_1 \in \mathbb{N}$ и $d_n > 0$ так, чтобы

$$H_G(z) - H_{n_1}(z) + \alpha(z) \leq \frac{|z|}{n} + d_n \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (11)$$

Вследствие (10) $\forall \mu \in \mathbb{C}, \forall z \notin \tilde{\mathcal{S}}$

$$|Q(\mu, z)| \exp H_{n_1}(z) \leq |L(z)| \sum_{j \in \mathbb{N}} (1 + |\mu_j|)^2 \sum_{s \geq 0} |z - \mu_j|^{-s} p_{n_1}((D - \mu_j I)^s (y_{j,\mu})).$$

По лемме 1.4(б) $\forall k \in \mathbb{N} \exists l(k) \in \mathbb{N}, \exists C(k) < \infty$:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (1 + |\mu_j|)^2 p_k(v_j) \leq C(k) \sum_{j \in \mathbb{N}} \widehat{\|v_j\|_j} a_{j,l(k)} \quad \forall (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{E}).$$

В [5; с. 316] установлены оценки для норм операторов $D - \mu_j I$ в $(E_j, \widehat{\|\cdot\|_j})$:

$$\sup_{\widehat{\|g\|_j} \leq 1} \|(D - \mu_j I)(g)\|_j \leq r'_j \leq \tilde{r}_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \forall z \notin \tilde{\mathcal{S}}$

$$\begin{aligned} |Q(\mu, z)| \exp H_{n_1}(z) &\leq |L(z)| \sum_{s \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} (1 + |\mu_j|)^2 p_{n_1}((z - \mu_j)^{-s} (D - \mu_j I)^s (y_{j,\mu})) \\ &\leq C(n_1) |L(z)| \sum_{s \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{\tilde{r}_j}{|z - \mu_j|} \right)^s \widehat{\|y_{j,\mu}\|_j} a_{j,l(n_1)} \\ &\leq 2C(n_1) \exp(H_G(z) + H_K(z) + \alpha(z)) \sum_{j \in \mathbb{N}} \widehat{\|y_{j,\mu}\|_j} a_{j,l(n_1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (6) получим, что

$$\widehat{\|y_{j,\mu}\|_j} \leq \sum_{q=1}^{q_j} (|\mu| + \|\widehat{D(e_{jq}^*)}\|_j) |f_{jq}(\mu)|.$$

Поскольку $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{r}_j / |\mu_j| = 0$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует константа C_1 такая, что

$$\begin{aligned} (1 + \tilde{r}_j) a_{jk} &= \exp \left(H_G(\mu_j) - \frac{|\mu_j|}{k} + \log(1 + \tilde{r}_j) \right) \\ &\leq C_1 \exp \left(H_G(\mu_j) - \frac{|\mu_j|}{k+1} \right) = C_1 a_{j,k+1} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

и, значит,

$$(1 + \|\widehat{D}(e_{jq}^*)\|_j) a_{jk} \leq (1 + \tilde{r}_j) a_{jk} \leq C_1 a_{j,k+1} \quad \text{для всех } 1 \leq q \leq q_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, вследствие (12), (11), (4) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m > 1, \exists C_2, C_3 < \infty$ (в (4) $m - 1$ выбираем по $l(n_1) + 2$): $\forall \mu \in \mathbb{C}, \forall z \notin \tilde{\mathcal{S}}$

$$\begin{aligned} |Q(\mu, z)| &\leq 2C(n_1) \exp\left(H_K(z) + \frac{|z|}{n} + d_n\right) \\ &\quad \times \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} (1 + |\mu|)(1 + \|\widehat{D}(e_{jq}^*)\|_j) |f_{jq}(\mu)| a_{j,l(n_1)} \\ &\leq C_2 \exp\left(H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \sum_{j \in \mathbb{N}} q_j \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m-1} \right. \\ &\quad \left. - H_G(\mu_j) + \frac{|\mu_j|}{l(n_1)+2} + \log(1 + |\mu|)\right) a_{j,l(n_1)+1} \\ &\leq C_3 \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \\ &\quad \times \sum_{j \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{|\mu_j|}{(l(n_1)+1)(l(n_1)+2)} + \log q_j\right) \end{aligned}$$

(последний ряд сходится в силу равенств $\lim_{j \rightarrow \infty} \log \frac{q_j}{|\mu_j|} = 0$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} \log \frac{j}{|\mu_j|} = 0$). Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists C_4 < \infty$:

$$|Q(\mu, z)| \leq C_4 \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \quad \forall \mu \in \mathbb{C}, \quad \forall z \notin \tilde{\mathcal{S}}. \quad (13)$$

Пусть $w_0 \in G$. Из приведенных выше оценок следует также, что для любого фиксированного $z \notin \tilde{\mathcal{S}}$ ряд

$$\sum_{s \geq 0} L(z)(z - \mu_j)^{-s-1} (D - \mu_j I)^s (y_{j,\mu})(w_0)$$

абсолютно сходится в $[1, H_G)$ (по μ) к некоторой функции $g_j(\mu) \in [1, H_G)$, а вследствие равенства (10) ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} g_j$ абсолютно сходится в $[1, H_G)$ к функции $Q(\cdot, z)e_z(w_0)$. Значит, для любого $z \notin \tilde{\mathcal{S}}$ функция $Q(\mu, z)$ принадлежит $[1, H_G)$ и, тем более, — целая (в $\mathbb{C}$) по μ . Кроме того, для всякого $\mu \in \mathbb{C}$ $Q(\mu, \cdot) = a_\mu \in [1, H_K]$. По теореме Хартогса о продолжении (см. [28; гл. III, §7, 19]) функция Q аналитически продолжается в $\mathbb{C}^2$. Стандартным образом (с помощью принципа максимума) из (13) получим, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists C_5 < \infty$:

$$|Q(\mu, z)| \leq C_5 \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C}.$$

Вследствие (8) $Q(z, z) = L(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть функция $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ удовлетворяет условиям утверждения (ii), а Π_j – операторы, заданные равенствами (2). Положим

$$\Pi(f) := (\Pi_j(f))_{j \in \mathbb{N}}, \quad f \in A(G).$$

Из леммы 3.3 следует, что Π – линейное непрерывное отображение $A(G)$ в $l_1(\mathbb{E})$. Покажем, что $R \circ \Pi = \text{id}_{A(G)}$.

Вследствие леммы 3.2(a), замечания 2.4(a) и непрерывности оператора свертки $Q(\mu, D): A(G + K) \rightarrow A(G)$ для любого $\mu \notin \mathcal{S} := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bar{S}_l$ при $m \rightarrow \infty$ в $A(G)$

$$\begin{aligned} L(\mu) \sum_{j=1}^m \Pi_j(e_\mu) &= \sum_{j=1}^m \frac{L(\mu)}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{Q(\mu, t) e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt \\ &= Q(\mu, D) \left(\frac{L(\mu)}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{\partial S_j} \frac{e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt \right) \\ &\rightarrow Q(\mu, D)(e_\mu) = Q(\mu, \mu)e_\mu = L(\mu)e_\mu. \end{aligned}$$

Таким образом, $\forall \mu \notin \mathcal{S} \quad (R \circ \Pi)(e_\mu) = e_\mu$. Поскольку множество $\{e_\mu : \mu \notin \mathcal{S}\}$ полно в $A(G)$, то $(R \circ \Pi)(f) = f \quad \forall f \in A(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). В качестве P нужно взять регуляризованный радиальный индикатор функции Q , т.е. следует положить $P := h_Q^*$, где

$$h_Q(\mu, z) := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log |Q(t\mu, tz)|}{t}, \quad \mu, z \in \mathbb{C},$$

а “*” обозначает полунепрерывную сверху регуляризацию.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Поскольку $L \in [1, H_G + H_K]$, то существует функция $\beta: \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что $\beta(z) = \bar{o}(|z|)$, $z \rightarrow \infty$, и $|L(z)| \leq \exp(H_G(z) + H_K(z) + \beta(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}$. В силу [29; лемма 2.8] найдется субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция γ , для которой $\beta \leq \gamma$ на $\mathbb{C}$ и $\gamma(z) = \bar{o}(|z|)$, $z \rightarrow \infty$. Утверждение (ii) вытекает из теоремы 1.5, примененной к функциям $v(\mu, z) := P(\mu, z) + \gamma(z) + 2 \log(1 + |z|^2)$, $f := L$ и подпространству $\Sigma := \{(z, z) : z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$.

ЛЕММА 4.2. 1) Пусть G – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; φ – конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на G . Условие

$$(a) \quad \sup_{|z| < 1} |\varphi'(z)| < \infty$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие

(a') существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции u_t , $t \in \mathbb{C}$, такие, что $u_t(t) \geq 0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}$:

$$u_t(z) \leq H_G(z) - \frac{|z|}{m} - H_G(t) + \frac{|t|}{n} \quad \forall z, t \in \mathbb{C}.$$

2) Пусть выпуклый компакт K в $\mathbb{C}$ отличен от точки; ψ – конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus K$, для которого $\psi(\infty) = \infty$. Условие

$$(b) \quad \inf_{|z| > 1} |\psi'(z)| > 0$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняется условие

- (б') существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции v_t , $t \in \mathbb{C}$, такие, что $v_t(t) \geq 0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$:

$$v_t(z) \leq H_K(z) + \frac{|z|}{n} - H_K(t) - \frac{|t|}{m} \quad \forall z, t \in \mathbb{C}.$$

Равносильность утверждений (а) и (а') установлена в [9], [13] (она вытекает из [9; теорема 9] и [13; теорема 3.5]; см. также [30; теоремы 2.7, 3.4]). При этом каждое из условий (а) и (а') эквивалентно существованию ЛНПО у любого ненулевого оператора свертки (дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) $a(D): A(G) \rightarrow A(G)$.

Утверждения (б) и (б') равносильны по [10; теорема 2.10] (см. также [11; теорема 1, лемма 8]). При этом каждое из условий (б) и (б') эквивалентно тому, что для всякого ненулевого оператора свертки $a(D): A(K) \rightarrow A(K)$ существует ЛНПО.

(Обзор результатов подобного рода, связанных с граничным поведением плюрикомплексных функций Грина выпуклой области и дополнения выпуклого компакта в $\mathbb{C}^N$, приведен в [14].)

Отметим, что если субгармонические в $\mathbb{C}$ функции u_t (соответственно v_t), $t \in \mathbb{C}$, удовлетворяют условиям (а') (соответственно (б')), то $u_t(t) = 0$ (соответственно $v_t(t) = 0$) для любого $t \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 4.3. (I) Если компакт K совпадает с точкой, то оператор представления $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ не имеет ЛНПО.

(II) Пусть компакт K отличен от точки; φ – конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на G , а ψ – конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus K$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Следующие утверждения равносильны:

- (i) оператор представления $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО;
- (ii) существует функция $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ такая, что $Q(z, z) = L(z)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists C$:

$$|Q(\mu, z)| \leq C \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right) \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C};$$

- (iii) существует позитивно однородная плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ функция P , для которой $H_G(z) + H_K(z) = P(z, z)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$:

$$P(\mu, z) \leq H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n} \quad \forall \mu, z \in \mathbb{C};$$

- (iv) (а) $\sup_{|z| < 1} |\varphi'(z)| < \infty$ и (б) $\inf_{|z| > 1} |\psi'(z)| > 0$.

(III)

- (v) Если функция Q удовлетворяет (ii), то оператор

$$f \mapsto \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_Q(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

является ЛНПО для $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$.

- (vi) Если $\Pi: A(G) \rightarrow l_1(\mathbb{E})$ – ЛНПО для оператора $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$, то существует единственная функция Q , удовлетворяющая (ii), для которой

$$\Pi(f) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_Q(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)_{j \in \mathbb{N}} \quad \forall f \in A(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Без ограничения общности можно считать, что $K = \{0\}$. В этом случае $H_K \equiv 0$.

Предположим, что оператор $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО. По теореме 4.1 существует плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ функция P , удовлетворяющая условиям (iii) теоремы 4.1. Положим $v_1(z) := P(1, z) - H_G(1)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $v_1(1) \geq 0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n: v_1(z) \leq |z|/n - 1/m \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $v_1 \leq 0$ на $\mathbb{C}$. Кроме того, $v_1(0) < 0$ и $v_1(1) \geq 0$, что противоречит принципу максимума для субгармонических функций.

(II) Утверждения (i), (ii), (iii) равносильны по теореме 4.1.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Положим $\forall \mu, z, t \in \mathbb{C}$

$$u_t(\mu) := P(\mu, t) - H_G(t) - H_K(t), \quad v_t(z) := P(t, z) - H_G(t) - H_K(t).$$

Тогда для любого $t \in \mathbb{C}$ функции u_t, v_t субгармоничны в $\mathbb{C}$, $u_t(t) \geq 0, v_t(t) \geq 0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_t(\mu) &\leq H_G(\mu) - H_G(t) - \frac{|\mu|}{m} + \frac{|t|}{n}, \\ v_t(z) &\leq H_K(z) - H_K(t) + \frac{|z|}{n} - \frac{|t|}{m} \quad \forall \mu, z, t \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

По лемме 4.2 выполняется утверждение (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Пусть выполнены условия (iv). Тогда по лемме 4.2 существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции $u_t, v_t, t \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условиям (а') и (б') леммы 4.2. Как заметил S. Mott, функцию P можно построить следующим образом. Положим для $\mu, z \in \mathbb{C}$

$$P_0(\mu, z) := \sup_{t \in \mathbb{C}} (u_t(\mu) + v_t(z) + H_G(t) + H_K(t)), \quad P_1(\mu, z) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{P_0^*(r\mu, rz)}{r}$$

и, наконец, $P := P_1^*$.

(III) Утверждение (v) справедливо по теореме 4.1.

(vi) Сопряженный к Π оператор $\Pi': K_\infty(A, \tilde{\mathbb{E}}) \rightarrow [1, H_G)$ является линейным непрерывным левым обратным для $\tilde{R}: [1, H_G) \rightarrow K_\infty(A, \tilde{\mathbb{E}})$. Пусть $f_{jq} := \Pi(\tilde{e}_{jq})$, где $\tilde{e}_{jq} := (\delta_{kj} e_{jq})_{k \in \mathbb{N}}$, а $(e_{jq})_{q=1}^{q_j}$ – базис Ауэрбаха в $\tilde{E}_j, j \in \mathbb{N}$. Поскольку для любых $1 \leq q \leq q_j, j \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{C}$

$$\langle \Pi(e_\mu), \tilde{e}_{jq} \rangle = \langle e_\mu, \Pi'(\tilde{e}_{jq}) \rangle = \langle e_\mu, f_{jq} \rangle = f_{jq}(\mu),$$

то $\Pi(e_\mu) = (\sum_{q=1}^{q_j} f_{jq}(\mu) e_{jq}^*)_{j \in \mathbb{N}}, \mu \in \mathbb{C}$, где $(e_{jq}^*)_{q=1}^{q_j}$ – ортогональный к $(e_{jq})_{q=1}^{q_j}$ базис в E_j .

При доказательстве импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в теореме 4.1 установлено следующее. Для всякого $\mu \in \mathbb{C}$ найдется функция $a_\mu \in [1, H_K]$, для которой выполняется

равенство (8), а функция $Q(\mu, z) := a_\mu(z)$, $\mu \in \mathbb{C}$, $z \notin \tilde{\mathcal{S}}$, продолжается до функции $Q \in A(\mathbb{C}^2)$, удовлетворяющей условию (ii). Ясно, что $Q(\mu, z) = a_\mu(z)$ для всех $\mu \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}$. Поэтому в силу (8) для $\mu \notin V(L)$ в $A(G)$ выполняются равенства

$$\sum_{q=1}^{q_j} f_{jq}(\mu) e_{jq}^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{Q(\mu, t) e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(Составные контуры γ_j выбираются так, как в замечании 2.4 (а).) По лемме 3.2 (а)

$$\int_{\gamma_j} \frac{Q(\mu, t) e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt = \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_Q(t, t, e_\mu) e_t(\cdot)}{L(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \mu \notin V(L).$$

Так как по лемме 3.3 линейное отображение

$$\Pi_0: f \mapsto \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_Q(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

непрерывно из $A(G)$ в $l_1(\mathbb{E}) = \Lambda_1(A, \tilde{\mathbb{E}})$, $\Pi(e_\mu) = \Pi_0(e_\mu) \quad \forall \mu \notin V(L)$ и множество $\{e_\mu: \mu \notin V(L)\}$ полно в $A(G)$, то $\Pi = \Pi_0$ на $A(G)$.

Покажем единственность такой функции Q . Без ограничения общности можно считать, что $0 \in G$. Пусть Q_1, Q_2 удовлетворяют условию (ii) и $\forall f \in A(G)$

$$\Pi(f) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_{Q_1}(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)_{j \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{\Omega_{Q_2}(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt \right)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Полагая $f := e_\mu$ и пользуясь леммой 3.2 (а), будем иметь:

$$\int_{\gamma_j} \frac{Q_1(\mu, t) e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt = \int_{\gamma_j} \frac{Q_2(\mu, t) e_t(\cdot)}{(\mu - t)L(t)} dt \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall \mu \notin V(L).$$

Вычисляя последние интегралы с помощью вычетов и приравнивая коэффициенты при $e_{\lambda, p}$, $0 \leq p < p(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$, получаем:

$$\left. \frac{\partial^p Q_1(\mu, t)}{\partial t^p} \right|_{t=\lambda} = \left. \frac{\partial^p Q_2(\mu, t)}{\partial t^p} \right|_{t=\lambda}, \quad 0 \leq p < p(\lambda), \quad \lambda \in V(L), \quad \mu \notin V(L).$$

Поскольку $Q_1(\mu, \cdot), Q_2(\mu, \cdot) \in [1, H_K] \subset [1, H_G + H_K]$ и множество $\{e_{\lambda, p}: 0 \leq p < p(\lambda), \lambda \in V(L)\}$ полно в $A(G + K)$, то для любого $\mu \notin V(L)$ $Q_1(\mu, \cdot) \equiv Q_2(\mu, \cdot)$ в $\mathbb{C}$, а значит, $Q_1 \equiv Q_2$ в $\mathbb{C}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Пусть $(w_{jq})_{q=1}^{q_j}$ – базис Ауэрбаха в $(E_j, \|\cdot\|_j)$ (например, базис $(e_{jq}^*)_{q=1}^{q_j}$, использованный при доказательстве импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в теореме 4.1). Введем “растянутую” матрицу $\hat{A} := (\tilde{a}_{ln})_{l, n \in \mathbb{N}}$, где $\tilde{a}_{ln} := \exp(H_G(\mu_j) - |\mu_j|/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{s=0}^{j-1} q_s < l \leq \sum_{s=0}^j q_s$ ($q_0 := 0$), $j \in \mathbb{N}$. Согласно [5; следствие 2.5] отображение

$$U: \left(\sum_{q=1}^{q_j} c_{jq} w_{jq} \right)_{j \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{E}) \mapsto (c_{jq})_{1 \leq q < q_j, j \in \mathbb{N}}$$

является линейным топологическим изоморфизмом $l_1(\mathbb{E})$ на $\Lambda_1(\tilde{A})$. Для линейного непрерывного оператора представления

$$R_0: \Lambda_1(\tilde{A}) \rightarrow A(G), \quad (c_{jq})_{1 \leq q \leq q_j, j \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{q=1}^{q_j} c_{jq} w_{jq},$$

справедливо $R_0 = R \circ U^{-1}$. Значит, оператор представления $R_0: \Lambda_1(\tilde{A}) \rightarrow A(G)$ сюръективен, т.е. $(w_{jq})_{1 \leq q \leq q_j, j \in \mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система в $A(G)$. При этом $R_0: \Lambda_1(\tilde{A}) \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 4.5. (I) Если компакт K совпадает с точкой, то оператор представления $R_0: \Lambda_1(\tilde{A}) \rightarrow A(G)$ не имеет ЛНПО.

(II) Если компакт K отличен от точки, то каждое из утверждений (i)–(iv) теоремы 4.3 равносильно следующему:

(vii) оператор представления $R_0: \Lambda_1 \rightarrow A(G)$ имеет ЛНПО.

Для последовательности $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ положим $A((\lambda_k)) := (\exp(H_G(\lambda_k) - |\lambda_k|/n))_{k, n \in \mathbb{N}}$. Пространство Фреше $\Lambda_1(A((\lambda_k)))$ является пространством всех последовательностей $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_{\lambda_k}$ абсолютно сходится в $A(G)$. Оператор представления $R_0(c) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_{\lambda_k}$ линейно и непрерывно отображает $\Lambda_1(A((\lambda_k)))$ в $A(G)$.

Из теоремы 4.3 вытекает, что для любой минимальной (см. [16]) абсолютно представляющей системы экспонент в $A(G)$ соответствующий оператор представления не имеет ЛНПО.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть $L \in [1, H_G]$, $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность различных нулей L . Оператор представления $R_0: \Lambda_1(A((\lambda_k))) \rightarrow A(G)$ не имеет ЛНПО.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если система $(e_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$ не является абсолютно представляющей в $A(G)$, то оператор представления $R_0: \Lambda_1(A((\lambda_k))) \rightarrow A(G)$ не является сюръективным, а значит, не имеет ЛНПО.

Пусть теперь $(e_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система в $A(G)$. Согласно [31; §2, лемма 5] функция L имеет вполне регулярный рост и индикатор роста H_G . Пусть S_j , $j \in \mathbb{N}$, — исключительные круги (см. §1); $M_j := (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \cap S_j$, $j \in \mathbb{N}$. Определим оператор $J(c) := (\sum_{\lambda_k \in M_j} c_k e_{\lambda_k})_{j \in \mathbb{N}}$ (если $M_j = \emptyset$, то полагаем $\sum_{\lambda_k \in M_j} c_k e_{\lambda_k} := 0$); J линейно и непрерывно отображает $\Lambda_1(A((\lambda_k)))$ в $l_1(\mathbb{E})$. При этом $R_0 = R \circ J$. По теореме 4.3 (I) оператор $R: l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ не имеет ЛНПО. Значит, оператор R_0 также не имеет ЛНПО.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Пусть $L - (1, H_G + H_K)$ -интерполирующая функция; $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — множество всех нулей L ; функция $Q \in \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условиям утверждения (ii) теоремы 4.3. Оператор

$$f \mapsto \left(\frac{\Omega_Q(\lambda_j, \lambda_j, f)}{L'(\lambda_j)} \right)_{j \in \mathbb{N}}, \quad f \in A(G), \quad (14)$$

является ЛНПО для оператора представления $R_0: \Lambda_1(A) \rightarrow A(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Пусть $L - (1, H_G + H_K)$ -интерполирующая функция с множеством нулей $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$, а функция Q удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.3. Тогда всякую функцию $f \in [1, H_G)$ можно представить в виде суммы следующего аналога ряда Лагранжа, абсолютно сходящегося в $[1, H_G)$:

$$f(\mu) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{Q(\mu, \lambda_j)}{(\mu - \lambda_j)L'(\lambda_j)} f(\lambda_j), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

В заключение применим формулу (14) для ЛНПО к оператору представления к конструкции (формуле) для ЛНПО к оператору свертки, принадлежащей Ю. Ф. Коробейнику (см. [22], [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Пусть ограниченная выпуклая область G в $\mathbb{C}$ удовлетворяет условию (iv) (а) теоремы 4.3; B — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$; $a(D): A(G + B) \rightarrow A(G)$ — оператор свертки с характеристической функцией a вполне регулярного роста (при порядке 1) с индикатором роста H_B .

Возьмем какой-либо выпуклый компакт K в $\mathbb{C}$, для которого выполняется условие (iv) (б) теоремы 4.3 (например, $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, $R > 0$). Существует $(1, H_G + H_K)$ -интерполирующая функция L , множество всех нулей которой $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ таково, что

$$|a(\lambda_j)| = \exp(H_B(\lambda_j) + o(|\lambda_j|)), \quad j \rightarrow \infty.$$

Пусть $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ — какое-либо продолжение L , удовлетворяющее условиям (ii) теоремы 4.3. Оператор

$$T(f) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\Omega_Q(\lambda_j, \lambda_j, f)}{a(\lambda_j)L'(\lambda_j)} e_{\lambda_j}, \quad f \in A(G),$$

является ЛНПО для оператора свертки $a(D): A(G + B) \rightarrow A(G)$.

Список литературы

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
2. Красичков-Терновский И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Матем. заметки. 1978. Т. 24. № 4. С. 531–546.
3. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы подпространств // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 741–755.
4. Напалков В. В., Комаров А. В. О разложении аналитических в полиобласти функций в ряды по элементарным решениям систем уравнений свертки // Препринт. Уфа, 1989.
5. Melichow S. N. Über absolut repräsentierende Systeme aus Quasipolynomen in Räumen analytischer Funktionen // Math. Nachr. 1992. V. 158. P. 299–323.
6. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и конформные отображения // Докл. РАН. 1992. Т. 323. № 5. С. 826–829.
7. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 70–84.
8. Meise R. Sequence space representations for (DFN)-algebras of entire functions modulo closed ideals // J. Reine Angew. Math. 1985. V. 363. P. 59–95.
9. Momm S. Convolution equations on the analytic functions on convex domains in the plane // Bull. Sci. Math. (2). 1994. V. 345. P. 729–752.

10. Melikhov S. N., Momm S. Solution operators for convolution equations on the germs of analytic functions on compact convex sets of $\mathbb{C}^N$ // *Studia Math.* 1995. V. 117. №1. P. 79–99.
11. Мелихов С. Н., Момм З. О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1997. №5. С. 38–48.
12. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
13. Momm S. *Convex univalent functions and continuous linear right inverses* // *J. Funct. Anal.* 1992. V. 103. P. 85–103.
14. Momm S. Extremal plurisubharmonic functions for convex bodies in $\mathbb{C}^N$ // *Complex analysis, harmonic analysis and applications. Proceedings of a conference in honour of the retirement of Roger Gay, June 7–9, 1995, Bordeaux, France* / ed. R. Deville et al. Harlow: Longman, 1996. P. 87–103.
15. Коробейник Ю. Ф. Нетривиальные разложения нуля по абсолютно представляющим системам. Приложения к операторам свертки // *Матем. сб.* 1991. Т. 182. №5. С. 661–680.
16. Абанин А. В. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // *Матем. заметки.* 1995. Т. 57. №4. С. 483–497.
17. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
18. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
19. Мелихов С. Н. О разложении аналитических функций в ряды экспонент // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1988. Т. 52. №5. С. 991–1004.
20. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
21. Коробейник Ю. Ф. О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // *Матем. сб.* 1968. Т. 75 (117). №2. С. 225–234.
22. Коробейник Ю. Ф. Операторы свертки в комплексной области // *Матем. сб.* 1985. Т. 127. №2. С. 173–197.
23. Коробейник Ю. Ф. О мультипликаторах весовых функциональных пространств // *Analysis Math.* 1989. Т. 15. №105–114.
24. Леонтьев А. Ф. Об эквивалентных условиях представления аналитических функций рядами экспонент // *Матем. заметки.* 1976. Т. 20. №1. С. 91–104.
25. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.
26. Jarchow H. *Locally convex spaces.* Stuttgart: Teubner, 1981.
27. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.
28. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
29. Momm S. On the dependence of analytic solutions of partial differential equations from the right-hand side // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1994. V. 345. P. 729–752.
30. Momm S. A critical growth rate of the pluricomplex Green function // *Duke Math. J.* 1993. V. 72. P. 487–502.
31. Коробейник Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1980. Т. 44. №5. С. 1066–1114.