Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочкой), *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 7, 129–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:33:16

УДК 517.946+539.3

С. А. Назаров

Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки)

Строятся главные члены асимптотики решения задачи теории упругости для тонкой пластины с искривленными основаниями, причем результирующая задача (двумерная модель) выписывается в явной форме. Допускается произвольная анизотропия упругих свойств, которые к тому же могут зависеть от “быстрой” поперечной и “медленных” продольных переменных. Обоснование асимптотики проводится при помощи весового неравенства Корна. Отдельно обсуждаются случаи слоистых пластин, пологих оболочек и пластин с острым краем.

Библиография: 51 название.

§1. Постановка задачи и предварительное описание результатов

1.1. Краевая задача. Пусть ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром $\partial\omega$, и $H_{\pm}$ — гладкие в $\bar{\omega}$ функции, причем $H = H_+ + H_- > 0$. Через $h > 0$ обозначим малый параметр и введем тонкую трехмерную область

$$\Omega_h^0 = \{x = (y, z) : y = (y_1, y_2) \in \omega, -hH_-(y) < z < hH_+(y)\}. \quad (1.1)$$

При этом x и y — декартовы координаты в пространстве и на плоскости $x_3 \equiv z = 0$, а $\zeta = h^{-1}z$ — “быстрая” переменная, принадлежащая интервалу $\Upsilon(y) = (-H_-(y), H_+(y))$. Пусть еще $\mathcal{V}_d \subset \mathbb{R}^2 - d$ -окрестность контура $\partial\omega$ и $\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$ — область, удовлетворяющая условию

$$\Omega_h^0 \supset \Omega_h \supset \{x \in \Omega_h^0 : y \in \omega \setminus \mathcal{V}_{ch}\}, \quad c > 0. \quad (1.2)$$

Поверхность $\partial\Omega_h$ предполагаем кусочно гладкой (того же качества, что и $\partial\Omega_h^0$). Выделим на ней множество $\Gamma_h \subset \{x \in \partial\Omega_h : y \in \bar{\omega} \cap \mathcal{V}_{ch}\}$, расположенное около края пластины Ω_h . Считаем, что

$$\partial\Omega_h \setminus \Gamma_h \subset \Sigma_+^0 \cup \Sigma_-^0, \quad (1.3)$$

где $\Sigma_{\pm}^0 = \{x : y \in \bar{\omega}, z = \pm hH_{\pm}(y)\}$ — основания пластины (1.1).

Для того чтобы сформулировать задачу об изгибе упругой пластины Ω_h с заземленной поверхностью Γ_h , договоримся интерпретировать вектор смещений u

как столбец $(u_1, u_2, u_3)^t$ (t – знак транспонирования) и образуем 6-столбец деформаций по формулам

$$\varepsilon(u) = D(\nabla_x)^t u, \quad (1.4)$$

$$D(\nabla_x) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \alpha \partial_2 & \alpha \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \alpha \partial_1 & 0 & \alpha \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_1 & \alpha \partial_2 & \partial_z \end{pmatrix}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.5)$$

Столбец (1.4) содержит декартовы компоненты $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \alpha^{-1}\varepsilon_{12}, \alpha^{-1}\varepsilon_{13}, \alpha^{-1}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$ тензора напряжений, а множители $\alpha = 2^{-1/2}$ добавлены с целью уравнивать естественные нормы столбца $\varepsilon(u)$ и симметричного тензора (ε_{jk}) . Согласно закону Гука вводится аналогичный (1.4) столбец напряжений

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u) = AD(\nabla_x)^t u. \quad (1.6)$$

Здесь A – положительно определенная и симметрическая матрица-функция размером 6×6 , аргументами которой назовем y и $\zeta = h^{-1}z$. При помощи матрицы A можно описать произвольные анизотропию и неоднородность пластины.

Во введенных обозначениях уравнения равновесия и краевые условия на свободных частях $\Sigma_{\pm} = \{x \in \partial\Omega_h \setminus \bar{\Gamma}_h : x \in \Sigma_{\pm}^0\}$ оснований пластины Ω_h выглядят следующим образом:

$$D(-\nabla_x)AD(\nabla_x)^t u = f \quad \text{в } \Omega_h, \quad (1.7)$$

$$D(\nu^{\pm})AD(\nabla_x)^t u = g^{\pm} \quad \text{на } \Sigma_{\pm}, \quad (1.8)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_h. \quad (1.9)$$

При этом f и $g^{\pm}$ – векторы (столбцы) объемных сил и поверхностных усилий, а $\nu^{\pm}$ – единичный вектор внешней нормали к $\Sigma_{\pm}^0$:

$$\nu^{\pm}(h, y) = N_{\pm}(h, y)^{-1}(-h\nabla_y H_{\pm}(y), \pm 1)^t, \quad (1.10)$$

$$N_{\pm}(h, y) = (1 + h^2 |\nabla_y H_{\pm}(y)|^2)^{1/2}, \quad \nabla_y = (\partial_1, \partial_2)^t.$$

Если u и v – гладкие вектор-функции, причем v удовлетворяет условию Дирихле (1.9), то верна формула Грина

$$\begin{aligned} & (D(-\nabla_x)AD(\nabla_x)^t u, v)_{\Omega_h} + \sum_{\pm} (D(\nu^{\pm})AD(\nabla_x)^t u, v)_{\Sigma_{\pm}} \\ &= 2E(u, v; \Omega_h) \equiv (AD(\nabla_x)^t u, D(\nabla_x)^t v)_{\Omega_h}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $(\cdot, \cdot)_{\Xi}$ – скалярное произведение в $L_2(\Xi)$, а функционал $E(u, u; \Omega_h) \geq 0$ имеет смысл упругой энергии, запасенной телом Ω_h ; благодаря положительной определенности A

$$E(u, u; \Omega_h) \geq c_A \|D(\nabla_x)^t u; L_2(\Omega_h)\|^2. \quad (1.12)$$

Через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$ обозначим пространство вектор-функций из соболевского класса $H^1(\Omega_h)^3$, удовлетворяющих краевому условию (1.9) (верхний индекс 3 указывает количество компонент). Известно (см., например, [1]–[4]) неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Omega_h)\|^2 \leq c_h E(u, u; \Omega_h) \quad \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3, \quad (1.13)$$

которое обеспечивает разрешимость рассматриваемой задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. При любых $f \in L_2(\Omega_h)^3$ и $g^\pm \in L_2(\Sigma_\pm)^3$ существует единственное (обобщенное) решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$ задачи (1.7)–(1.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Требования к правым частям f и $g^\pm$, разумеется, можно ослабить, чем мы и воспользуемся в §3.

Константа $c_h > 0$ в (1.13) существенно зависит от области Ω_h , а значит, и от малого геометрического параметра h . Для обоснования асимптотического представления решения задачи (1.7)–(1.9), являющегося основной целью работы, потребуется уточнить неравенство Корна (1.13), сделав его весовым (см. §4).

1.2. Обрисовка результатов. Основой двумерных моделей тонких пластин, используемых в конкретных инженерных расчетах, служит классическая гипотеза прямых нормалей, предложенная Кирхгофом в 1850 г., имеющая чисто физическую природу и потому придающая моделям формальный и эвристический характер. Строго обоснованной можно считать лишь модель цилиндрической однородной изотропной пластины, для которой помимо оценок погрешностей (см. [5]–[10]) разработана техника пограничных слоев, позволяющая конструировать асимптотические решения с произвольной, наперед заданной точностью (см. [11]–[19], а также книги [20; гл. 15, 16] и [21; §5.7]). Настоящая статья значительно расширяет объем результатов технической теории, получивших строгое математическое обоснование, и даже содержит анализ ситуаций, не затронутых прикладными исследованиями. Именно, при помощи общего алгоритма изучения эллиптических краевых задач в тонких областях, развитого в [9], [14], [22] (см. также [20; гл. 16]), в §2 определяются главные члены асимптотики решения задачи (1.7)–(1.9), т.е. выводится результирующая задача для произвольно анизотропной и неоднородной искривленной пластины при единственном ограничении: физические и геометрические характеристики плавно меняются в продольных направлениях (нет быстрой осцилляции; ср. с [22]–[24]). Обоснование найденной асимптотики проводится в §3 при помощи весового неравенства Корна, установленного в §4 для пластин с переменной толщиной и обобщающего прежние результаты [6], [25]–[27]. Подчеркнем, что доказанные оценки являются асимптотически точными и в некотором смысле коэрцитивными – в мажорантах явно выделена зависимость от составляющих правых частей задачи (1.7)–(1.9), а ухудшение их дифференциальных свойств снижает гарантированный порядок точности.

В случае цилиндрических пластин $\omega \times (-h/2, h/2)$ построенные в §2 двумерные модели не отличаются от известных ранее в технических теориях (см., например, [28]) или найденных путем формального асимптотического анализа (см. [29], [30]). Тем самым, настоящая статья дает косвенное, математическое подтверждение гипотез Кирхгофа.

Явление пограничного слоя здесь не затрагивается, хотя включение соответствующего члена в асимптотическое приближение позволяет установить поточечные, а не интегральные оценки остатка (в [31] это было сделано для тонких стержней). Дело в том, что в согласии с общими принципами построения пограничных слоев, изложенными в [14] и [20; гл. 16], слабое искривление границы не привносит каких-либо осложнений, поскольку существует почти тождественный диффеоморфизм окрестности $\mathcal{V}_{ch^{1/2}}$ на себя, спрямляющий поверхности $\Sigma_\pm^0 \cap \mathcal{V}_{ch^{1/2}}$, т.е.

дополнительно может потребоваться лишь разложение коэффициентов возникших дифференциальных операторов в ряды Тейлора по переменной $\text{dist}\{y, \partial\omega\}$. Сказанное не касается случая пластины с острым краем, для которой результирующая система вырождается на $\partial\omega$ (см. [32], [33; § 37]), а пограничные слои описываются решениями задач в параболических областях (см. [34]–[36]) или вовсе исчезают.

Утверждения и формулы, относящиеся к произвольным гладким функциям $H_{\pm}$, легко приспособиваются к частной, но важной форме пологой оболочки, для которой толщина $H(y)$ лишь слагаемым $O(h^2)$ отличается от постоянной. В связи с этой интерпретацией пластины переменной толщины упомянем статьи [37], [38], в которых доказываются теоремы о сходимости пространственных полей смещений и напряжений к решениям двумерных уравнений пологих оболочек. Как недавно стало известно автору, асимптотический анализ такой оболочки из однородного изотропного материала проведен М. Дож, Ж. Андреою, Е. Фау (М. Dauge, G. Andreoü, E. Faou).

§ 2. Формальные асимптотические конструкции

2.1. Разложения операторов. Вводя быструю переменную $\zeta = h^{-1}z$ и учитывая формулу (1.10), получаем

$$\begin{aligned} D(\nabla_x) &= h^{-1}\mathbb{D}_{\zeta} + \mathbb{D}_y, & D(\nu^{\pm}) &= -N_{\pm}^{-1}(\pm\mathbb{D}_1 - h\mathbb{D}_{\pm}), \\ \mathbb{D}_y &= \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \alpha\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \alpha\partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\partial_1 & \alpha\partial_2 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{D}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbb{D}_{\pm} &= \begin{pmatrix} \partial_1 H_{\pm} & 0 & \alpha\partial_2 H_{\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 H_{\pm} & \alpha\partial_1 H_{\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\partial_1 H_{\pm} & \alpha\partial_2 H_{\pm} & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{D}_{\zeta} &= \mathbb{D}_1\partial_{\zeta}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, матричные дифференциальные операторы L и $B^{\pm}$ из левых частей равенств (1.7) и (1.8) допускают расщепления

$$\begin{aligned} L(h, x, \nabla_x) &= h^{-2}L^0(y, \zeta, \partial_{\zeta}) + h^{-1}L^1(y, \zeta, \nabla_y, \partial_{\zeta}) + h^0L^2(y, \zeta, \nabla_y), \\ N_{\pm}(h, y)B^{\pm}(h, y, \nabla_x) &= h^{-1}B^{0\pm}(y, \partial_{\zeta}) + h^0B^{1\pm}(y, \nabla_y, \partial_{\zeta}) + h^1B^{2\pm}(y, \nabla_y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

в которых

$$\begin{aligned} L^0 &= -\mathbb{D}_{\zeta}A\mathbb{D}_{\zeta}^t, & L^1 &= -\mathbb{D}_{\zeta}A\mathbb{D}_y^t - \mathbb{D}_yA\mathbb{D}_{\zeta}^t, & L^2 &= -\mathbb{D}_yA\mathbb{D}_y^t, \\ B^{0\pm} &= \pm\mathbb{D}_1A\mathbb{D}_{\zeta}^t, & B^{1\pm} &= \pm\mathbb{D}_1A\mathbb{D}_y^t - \mathbb{D}_{\pm}A\mathbb{D}_{\zeta}^t, & B^{2\pm} &= -\mathbb{D}_{\pm}A\mathbb{D}_y^t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обращаем внимание на следующее ключевое тождество, используемое на протяжении всей статьи:

$$\mathbb{D}_y^t e^3 = \mathbb{D}_1^t \left(e^1 \frac{\partial}{\partial y_1} + e^2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right); \quad (2.4)$$

здесь e^j — орт оси x_j .

2.2. Асимптотические анзацы. Предположим, что правые части задачи (1.7)–(1.9) допускают представления

$$\begin{aligned} f(h, x) &= h^{-1} f^0(y, \zeta) + h^0 \bar{f}^0(y) + \tilde{f}(h, x), \\ g^\pm(h, y) &= h^0 g^{0\pm}(y) + \tilde{g}(h, x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

причем их члены подчинены требованиям

$$\begin{aligned} \int_{\Upsilon(y)} f_3^0(y, \zeta) d\zeta + g_3^{0+}(y) + g_3^{0-}(y) &= 0, \quad y \in \omega, \\ \bar{f}_1^0 &= \bar{f}_2^0 = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В этом параграфе функции f^0 , $\bar{f}^0$ и $g^{0\pm}$ считаем гладкими, а правильные ограничения накладываем на них и на остатки $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ в п. 3.2.

Решение задачи (1.7)–(1.9) с правыми частями (2.5) ищем в виде суммы

$$h^{-2} U^{-2}(y, \zeta) + h^{-1} U^{-1}(y, \zeta) + h^0 U^0(y, \zeta) + h^1 U^1(y, \zeta) + \dots, \quad (2.7)$$

два первых члена которой выглядят следующим образом:

$$U^{-2}(y, \zeta) = e^3 w_3(y), \quad U^{-1}(y, \zeta) = \sum_{i=1}^2 e^i \left(w_i(y) - \zeta \frac{\partial w_3}{\partial y_i}(y) \right). \quad (2.8)$$

Столбец $w = (w_1, w_2, w_3)^t$ подлежит дальнейшему определению. Функция w_3 описывает в главном прогиб пластины, а w_1 и w_2 – ее продольные смещения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Используется тот же асимптотический анзац (2.7), (2.8), что и в случае “прямых” пластин $\omega \times (-h/2, h/2)$. Имеется много путей его объяснения как механического толка [28], [29], так и математического [6]–[9], [22]. Расхождение показателей степеней h при w_3 и w_1, w_2 отражает очевидный факт: пластину легче изогнуть, чем растянуть. То же касается и представления (2.5), поскольку благодаря (2.6) поперечные силы имеют порядок h^1 , а продольные – порядок h^0 . Любую правую часть можно представить в виде (2.5), (2.6) после умножения на h^m с подходящим m .

2.3. Предельные задачи. Выделяя в (2.2) старшие (относительно h) части операторов, приходим к задаче Неймана на отрезке $\Upsilon(y) = (-H_-(y), H_+(y))$ с параметром $y \in \omega$

$$L^0 U = F \quad \text{на } \Upsilon(y), \quad B^{0\pm} U = G^\pm \quad \text{при } \zeta = \pm H_\pm(y). \quad (2.9)$$

Очередное утверждение известно и очевидно.

ЛЕММА 2.2. *Задача (2.9) с правыми частями $F \in L_2(\Upsilon(y))^3$, $G^\pm \in \mathbb{R}^3$ имеет решение $U \in H^2(\Upsilon(y))^3$ в том и только том случае, если выполнены условия разрешимости*

$$\int_{\Upsilon(y)} F_k(y, \zeta) d\zeta + G_k^+(y) + G_k^-(y) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Решение U определено с точностью до постоянного (по z) слагаемого, но будучи подчинено условиям ортогональности

$$\int_{\Upsilon(y)} U_k(y, \zeta) d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

становится единственным, удовлетворяет оценке

$$\|U; H^2(\Upsilon(y))\| \leq c(\|F; L_2(\Upsilon(y))\| + |G^+| + |G^-|) \quad (2.12)$$

и наследует от F и $G^\pm$ гладкую зависимость относительно переменных $y = (y_1, y_2) \in \omega$.

Подставим разложения (2.7), (2.5) и (2.3) в уравнения (1.7), (1.8) и, собрав коэффициенты при одинаковых степенях параметра h , получим набор предельных задач:

$$\begin{aligned} L^0 U^j &= -L^1 U^{j-1} - L^2 U^{j-2} + \delta_{j,1} f^0 \equiv F^j \quad \text{на } \Upsilon(y), \\ B^{0\pm} U^j &= -B^{1\pm} U^{j-1} - B^{2\pm} U^{j-2} + \delta_{j,1} g^{0\pm} \equiv G^{j\pm} \quad \text{при } \zeta = \pm H_\pm(y). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $j = -2, -1, 0, 1$ и $U^k = 0$ при $k < -2$.

Задача (2.13) при $j = -2$ однородная, и поэтому функция U^{-2} из (2.8), не зависящая от ζ , является ее решением. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что в силу тождества (2.4) справедливо равенство

$$\mathbb{D}_\zeta^t U^{-1} + \mathbb{D}_y^t U^{-2} = 0, \quad (2.14)$$

обеспечивающее выполнение (2.13) с $j = -1$. При учете (2.13), (2.14) и (2.3) находим, что

$$\begin{aligned} F^0 &= \mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t U^{-1} + D_y A \{\mathbb{D}_\zeta^t U^{-1} + \mathbb{D}_y^t U^{-2}\} = \mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t U^{-1}, \\ G^{0\pm} &= \mp \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_y^t U^{-1} + \mathbb{D}_\pm A \{\mathbb{D}_\zeta^t U^{-1} + \mathbb{D}_y^t U^{-2}\} = \mp \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_y^t U^{-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что для любой функции $\mathcal{W} \in H^1(\Upsilon(y))^6$

$$\begin{aligned} \int_{\Upsilon(y)} (e^j)^t \mathbb{D}_\zeta \mathcal{W}(\zeta) d\zeta + (e^j)^t \mathbb{D}_1 (\mathcal{W}(H_+(y)) - \mathcal{W}(-H_-(y))) \\ = \int_{\Upsilon(y)} (\mathbb{D}_\zeta^t e^j)^t \mathcal{W}(\zeta) d\zeta = 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теперь, взяв $\mathcal{W} = A\mathbb{D}_y^t U^{-1}$, видим, что правые части (2.15) удовлетворяют условиям (2.10), т.е. задача (2.13) при $j = 0$ разрешима. Кроме того, манипулируя с выражениями (2.1) и (2.8), выводим, что

$$\mathbb{D}_y^t U^{-1}(y, \zeta) = \mathcal{Y}(\zeta) \mathcal{D}(\nabla_y)^t w(y), \quad (2.17)$$

$$\mathcal{D}(\nabla_y) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \alpha \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \alpha \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_1^2 & \alpha \partial_2^2 & \partial_1 \partial_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}(\zeta) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & -\alpha^{-1} \zeta \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix};$$

здесь $\mathbf{1}_q$ и $\mathbf{0}_q$ — единичная и нулевая матрицы размером $q \times q$. Итак, решение U^0 представимо следующим образом:

$$U^0(y, \zeta) = \mathcal{X}(y, \zeta) \mathcal{D}(\nabla_y)^t w(y). \quad (2.18)$$

При этом матрица $\mathcal{X}$ имеет размеры 3×6 и удовлетворяет равенствам

$$-\mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{X} = \mathbb{D}_\zeta A \mathcal{Y} \text{ на } \Upsilon(y), \quad \pm \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{X} = \mp \mathbb{D}_1 A \mathcal{Y} \text{ при } \zeta = \pm H_\pm(y). \quad (2.19)$$

Иными словами, столбцы $\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^6$ матрицы $\mathcal{X}$ являются решениями задачи (2.9) со специальными правыми частями. Подчиним эти столбцы условиям ортогональности (2.11) — по лемме 2.2 матрица $\mathcal{X}$ будет гладко зависеть от $y \in \overline{\omega}$.

2.4. Вывод результирующей задачи. Перейдем к рассмотрению задачи (2.13) при $j = 1$, для чего понадобится следующее тождество, выражающее правило дифференцирования интегралов с переменными пределами:

$$\int_{\Upsilon(y)} \mathbb{D}_y \mathcal{W}(y, \zeta) d\zeta + \sum_{\pm} \mathbb{D}_\pm \mathcal{W}(y, \pm H_\pm(y)) = \mathbb{D}_y \int_{\Upsilon(y)} \mathcal{W}(y, \zeta) d\zeta. \quad (2.20)$$

Благодаря этому тождеству и предположению (2.6) правые части

$$\begin{aligned} F^1 &= \mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t U^0 + \mathbb{D}_y A \{\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}\} + f^0, \\ G^{1\pm} &= \mp \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_y^t U^0 + \mathbb{D}_\pm A \{\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}\} + g^{0\pm} \end{aligned} \quad (2.21)$$

удовлетворяют условию (2.10), $k = 3$. В самом деле, используя дополнительно (2.16) и (2.4), находим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Upsilon(y)} F_3^1(y, \zeta) d\zeta + G_3^{1+}(y) + G_3^{1-}(y) \\ &= (e^3)^t \left[\int_{\Upsilon(y)} \mathbb{D}_y A \{\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}\} d\zeta \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\pm} \mathbb{D}_\pm A \{\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}\} \Big|_{\zeta = \pm H_\pm(y)} \right] \\ &= (e^3)^t \mathbb{D}_y \int_{\Upsilon(y)} A \{\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}\} d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^2 (e^i)^t \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\Upsilon(y)} \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1} \} d\zeta \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\Upsilon(y)} (\mathbb{D}_\zeta^t \zeta e^i)^t A \{ \mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1} \} d\zeta \\
&= - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} (e^i)^t \left[\int_{\Upsilon(y)} \zeta \mathbb{D}_\zeta A \{ \mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1} \} d\zeta \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\pm} \pm (\zeta \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1} \}) \Big|_{\zeta=\pm H_{\pm}(y)} \right] = 0. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Последнее равенство возникло в результате уточнения соотношений (2.13) с $j = 0$ при помощи формул (2.3) и (2.15).

Для правых частей (2.21) условия разрешимости (2.10) при $k \equiv i = 1, 2$ записываются в виде

$$\begin{aligned}
0 &= (e^i)^t \left[\int_{\Upsilon(y)} \mathbb{D}_y A \mathcal{X} d\zeta + \sum_{\pm} \mathbb{D}_{\pm} A \mathcal{X} \Big|_{\zeta=\pm H_{\pm}(y)} \right] \mathcal{D}(\nabla_y)^t w + \mathcal{F}_i \\
&= (e^i)^t \mathbb{D}_y \int_{\Upsilon(y)} A \mathcal{X} d\zeta \mathcal{D}(\nabla_y)^t w + \mathcal{F}_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

где в соответствии с (2.17) и (2.18)

$$\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1} = \mathcal{X} \mathcal{D}(\nabla_y)^t w, \quad \mathcal{X}(y, \zeta) = \mathbb{D}_1^t \partial_\zeta \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta), \tag{2.24}$$

$$\mathcal{F}_i(y) = \int_{\Upsilon(y)} f_i^0(y, \zeta) d\zeta + g_i^{0+}(y) + g_i^{0-}(y), \quad i = 1, 2. \tag{2.25}$$

Итак, образовалась пара дифференциальных уравнений (2.23), в которых фигурирует до сих пор неизвестный столбец w . Еще одно уравнение появится при дальнейшем асимптотическом анализе, а полученная система уравнений, называемая результирующей, послужит для определения w , т.е. для конкретизации членов (2.8), (2.18) анзаца (2.7).

Недостающее уравнение можно определить при рассмотрении задачи для очередного члена U^2 . Однако в приближенное решение, используемое в п. 3.3, не войдет даже слагаемое U^1 (это принципиальный момент, позволяющий максимально ослабить требования к гладкости правых частей — здесь мы занимаемся построением и обоснованием только главных членов асимптотик). Поэтому более логично вывести упомянутое уравнение при помощи иных соображений. Именно обработаем невязку, оставляемую в системе (1.7) суммой $\mathbf{U}$ четырех слагаемых (2.7). При учете (2.2) и (2.5) имеем

$$\begin{aligned}
L\mathbf{U} - f &= h^{-4} L^0 U^{-2} + h^{-3} (L^0 U^{-1} + L^1 U^{-2}) \\
&\quad + h^{-2} (L^0 U^0 + L^1 U^{-1} + L^2 U^{-2}) + h^{-1} (L^0 U^1 + L^1 U^0 + L^2 U^{-1} - f^0) \\
&\quad + h^0 (L^1 U^1 + L^2 U^0 - \tilde{f}^0) + h^1 L^2 U^1 - \tilde{f}.
\end{aligned}$$

Векторы $U^{-2}, \dots, U^1$ были выбраны так, чтобы аннулировать множители при $h^{-4}, \dots, h^{-1}$. Следовательно, повторив преобразования применительно к крайним условиям (1.8), придем к формулам

$$\begin{aligned} LU - f &= -h^0 f^1 - \{\tilde{f} - h^1 L^2 U^1\}, \\ B^\pm U - g^\pm &= -h^1 g^{1\pm} - \{\tilde{g}^\pm - [N_\pm^{-1} - 1](g^{0\pm} + h^1 g^{1\pm}) - h^2 B^{2\pm} U^1\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

в которых

$$\begin{aligned} f^1 &= \mathbf{f} + \mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t U^1 + \bar{f}^0, & g^{1\pm} &= \mathbf{g}^\pm \mp \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_y^t U^1, \\ \mathbf{f} &= \mathbb{D}_y A (\mathbb{D}_\zeta^t U^1 + \mathbb{D}_y^t U^0) + \bar{f}^0, & \mathbf{g}^\pm &= \mathbb{D}_\pm A (\mathbb{D}_\zeta^t U^1 + \mathbb{D}_y^t U^0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

В силу (1.10) $1 - N_\pm(h, y)^{-1} = O(h^2)$, т.е. выражения из фигурных скобок в (2.26) разумно отнести к остатку (малому). Слагаемые $h^0 f^1$ и $h^1 g^{1\pm}$ вполне аналогичны составляющим $h^{-1} f^0$ и $h^0 g^{0\pm}$ в представлениях (2.5) – предъявим к ним подобные (2.6) требования

$$\int_{\Upsilon(y)} f_3^1(y, \zeta) d\zeta + g_3^{1+}(y) + g_3^{1-}(y) = 0, \quad y \in \omega. \quad (2.28)$$

Условия ортогональности (2.28) послужат отправной точкой при обосновании асимптотики в п. 3.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Соотношения (2.28) можно было получить как условие (2.10), $k = 3$, разрешимости задачи вида (2.9) для U^2 . Именно третье условие выполнялось автоматически (см. (2.22)) и в отличие от первых двух не было востребовано при определении U^1 .

В силу (2.16), (2.20) и (2.27) левая часть (2.28) равна

$$\int_{\Upsilon(y)} \mathbf{f}_3 d\zeta + \mathbf{g}_3^+ + \mathbf{g}_3^- = H \bar{f}_3^0 + (e^3)^t \mathbb{D}_y \int_{\Upsilon(y)} A (\mathbb{D}_\zeta^t U^1 + \mathbb{D}_y^t U^0) d\zeta.$$

При обработке последнего слагаемого $I(y)$ используются те же приемы, что и в (2.22): при помощи (2.4), (2.13) с $j = 1$, (2.21), (2.20) и (2.17), (2.18) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} I(y) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\Upsilon(y)} (\mathbb{D}_\zeta^t \zeta e^i)^t A (\mathbb{D}_\zeta^t U^1 + \mathbb{D}_y^t U^0) d\zeta \\ &= - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} (e^i)^t \left[\int_{\Upsilon(y)} \zeta \mathbb{D}_\zeta A (\mathbb{D}_\zeta^t U^1 + \mathbb{D}_y^t U^0) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\pm} \pm \zeta \mathbb{D}_1 A (\mathbb{D}_\zeta^t U^1 + \mathbb{D}_y^t U^0) \Big|_{\zeta=\pm H^\pm} \right] \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left[(e^i)^t \int_{\Upsilon(y)} \zeta \mathbb{D}_y A (\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\pm} (e^i)^t \zeta \mathbb{D}_\pm A (\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}) \Big|_{\zeta=\pm H^\pm} + \mathcal{F}_i' \right] \\ &= \sum_{i=1}^2 (e^i)^t \mathbb{D}_y \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\Upsilon(y)} \zeta A (\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{X} + \mathcal{Y}) d\zeta \mathcal{D}(\nabla_y)^t w + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{F}_i', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_i(y) &= \int_{\Upsilon(y)} \zeta f_i^0(y, \zeta) d\zeta + \sum_{\pm} \pm H_{\pm}(y) g_i^{0\pm}(y), \\ \mathcal{F}_3(y) &= H(y) \bar{f}_3^0(y) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{F}'_i(y).\end{aligned}\quad (2.29)$$

Итак, условие (2.28) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^2 (e^i)^t \mathbb{D}_y \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\Upsilon(y)} \zeta A \mathcal{X} d\zeta \mathcal{D}(\nabla_y)^t w + \mathcal{F}_3 = 0, \quad (2.30)$$

замыкающему результирующую систему.

2.5. Результирующая задача. Заметим, что фигурирующие в (2.23) и (2.30) дифференциальные выражения

$$\mathbb{D}_y^t e^1, \quad \mathbb{D}_y^t e^2, \quad -\mathbb{D}_y^t (e^1 \partial_1 + e^2 \partial_2) \zeta$$

оказываются строками матрицы $\mathcal{D}(-\nabla_y) \mathcal{Y}(\zeta)^t$. Это наблюдение позволяет записать результирующую систему одной строкой

$$\mathcal{D}(-\nabla_y) \mathcal{M}(y) \mathcal{D}(\nabla_y)^t w(y) = \mathcal{F}(y), \quad y \in \omega; \quad (2.31)$$

здесь $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)^t$ — столбец с компонентами (2.25), (2.29), а (6×6) -матрица-функция $\mathcal{M}$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(y) &= \int_{\Upsilon(y)} \mathcal{Y}(\zeta)^t A(y, \zeta) (\mathbb{D}_{\zeta}^t \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta)) d\zeta \\ &= \int_{\Upsilon(y)} (\mathbb{D}_{\zeta}^t \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta))^t A(y, \zeta) (\mathbb{D}_{\zeta}^t \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta)) d\zeta.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Последнее представление получается интегрированием по частям при использовании соотношений (2.19) для $\mathcal{X}$.

Так как боковая поверхность пластины жестко закреплена (см. (1.9)), снабдим систему (2.31) краевыми условиями Дирихле

$$w(y) = 0, \quad \partial_n w(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad (2.33)$$

где $n = (n_1, n_2)^t$ — единичный вектор внешней нормали к контуру $\partial\omega$ и $\partial_n = n^t \nabla_y$ — дифференцирование вдоль n .

ТЕОРЕМА 2.4. 1) При всех $y \in \partial\omega$ матрица $\mathcal{M}(y)$ симметрична и положительно определена.

2) Если $\mathcal{F} \in H^{l-1}(\omega)^2 \times H^{l-2}(\omega)$ при некотором $l \in \{1, 2, \dots\}$, то существует единственное решение $w \in H^{l+1}(\omega)^2 \times H^{l+2}(\omega)$ задачи (2.31), (2.33) и выполняется оценка

$$\|w; H^{l+1}(\omega)^2 \times H^{l+2}(\omega)\| \leq c \|\mathcal{F}; H^{l-1}(\omega)^2 \times H^{l-2}(\omega)\|. \quad (2.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно (2.32) $\mathcal{M}(y)$ – матрица Грама, построенная по столбцам $\mathcal{Z}^1, \dots, \mathcal{Z}^6$ матрицы $\mathcal{Z}$ из (2.24) при помощи скалярного произведения $(A \cdot, \cdot)_{\Upsilon(y)}$ в $L_2(\Upsilon(y))^6$. Остается упомянуть, что верхний (3×3) -блок матрицы $\mathbb{D}_\zeta^t$ и нижние (3×3) -блоки матрицы $\mathcal{Y}$ нулевые, т.е. линейная независимость в $L_2(\Upsilon(y))^6$ столбцов $\mathcal{Y}^1, \dots, \mathcal{Y}^6$ наследуется столбцами $\mathcal{Z}^1, \dots, \mathcal{Z}^6$.

2) Нетрудно убедиться в алгебраической комплектности [2] матрицы $\mathcal{D}(\nabla_y)$ из (2.17). Таким образом, оператор системы (2.31) формально положителен [2] и обладает полиномиальным свойством [39]. Теперь нужное утверждение вытекает из [2; теорема 3.7.6] и [39; теорема 4.2]

Найдем явную формулу для $\mathcal{M}(y)$. С этой целью разобьем матрицы A , $\mathbb{D}_1$ и $\mathcal{X}$ на блоки размером 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} A_{(11)} & A_{(12)} \\ A_{(21)} & A_{(22)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_1 = (\mathbf{0}_3, \mathbb{T}), \quad \mathbb{T} = \text{diag}\{\alpha, \alpha, 1\}, \quad \mathcal{X} = (\mathcal{X}_{(1)}, \mathcal{X}_{(2)}).$$

Учитывая строение матрицы $\mathcal{Y}(\zeta)$ из (2.17), положим

$$\Sigma = A_{(22)}\mathbb{T}\partial_\zeta \mathcal{X} + A_{(21)}(\mathbf{1}_3, -\alpha^{-1}\zeta\mathbf{1}_3).$$

Тогда задача (2.19) примет вид

$$-\partial_\zeta \mathbb{T}\Sigma = 0 \quad \text{на } \Upsilon(y), \quad \pm \mathbb{T}\Sigma = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm H_\pm(y).$$

Следовательно, $\Sigma(y, \zeta) = 0$ и

$$\mathbb{T}\partial_\zeta \mathcal{X}_{(1)} = -A_{(22)}^{-1}A_{(21)}, \quad \mathbb{T}\partial_\zeta \mathcal{X}_{(2)} = \alpha^{-1}\zeta A_{(22)}^{-1}A_{(21)}.$$

Подставляя эти равенства в (2.32), находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(y) &= \int_{\Upsilon(y)} \begin{pmatrix} A_{(11)} & A_{(12)} \\ -\alpha^{-1}\zeta A_{(11)} & -\alpha^{-1}\zeta A_{(12)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & -\alpha^{-1}\zeta\mathbf{1}_3 \\ \mathbb{T}\partial_\zeta \mathcal{X}_{(1)} & \mathbb{T}\partial_\zeta \mathcal{X}_{(2)} \end{pmatrix} d\zeta \\ &= \int_{\Upsilon(y)} \begin{pmatrix} \mathbf{A}(y, \zeta) & -\alpha^{-1}\zeta\mathbf{A}(y, \zeta) \\ -\alpha^{-1}\zeta\mathbf{A}(y, \zeta) & 2\zeta^2\mathbf{A}(y, \zeta) \end{pmatrix} d\zeta, \\ &\quad \mathbf{A} = A_{(11)} - A_{(12)}A_{(22)}^{-1}A_{(21)}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

При этом $\mathbf{A}(y, \zeta)$ – положительно определенная и симметрическая (3×3) -матрица. Для пластин постоянной толщины формулы, подобные (2.35), указаны в [30].

Если матрица A кусочно постоянная относительно переменной ζ , т.е. Ω_h – слоистая пластина, то можно выполнить интегрирование в (2.35) и получить явную формулу для матрицы $\mathcal{M}(y)$. Такие формулы в технических теориях известны в случае слоев постоянной толщины (см., например, [28], [30]). Оправдание построенной асимптотики (см. далее замечание 3.7) можно истолковать как обоснование упоминавшихся в п. 1.2 классических гипотез Кирхгофа для слабоискривленных слоистых пластин.

§ 3. Обоснование асимптотики

3.1. Вспомогательные неравенства. Доказательство формулируемого неравенства Корна и сопутствующих ему других неравенств откладываем до следующего параграфа (см. пп. 4.2 и 4.4).

ТЕОРЕМА 3.1. 1) Если $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$, то

$$|u|^2 \leq CE(u, u; \Omega_h), \quad (3.1)$$

причем постоянная C не зависит от u и $h \in (0, 1)$, E — функционал из (1.11),

$$|u| = \left(\int_{\Omega_h} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[|\nabla_y u_i|^2 + h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + \rho_h^{-2} |u_i|^2 \right] + |\partial_z u_3|^2 + h^2 \rho_h^{-4} |u_3|^2 \right\} dx \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

а $\rho_h(y) = h + \text{dist}\{y, \partial\omega\}$ — весовая функция, равная $O(1)$ на удалении от Γ_h и $O(h)$ в непосредственной близости от Γ_h .

2) Для $u \in H^1(\Omega_h)^3$ выполняется неравенство

$$h^{1/2} \sum_{i=1}^2 \|\rho_h^{-1} u_i; L_2(\Sigma_{\pm})\| + h^{3/2} \|\rho_h^{-2} u_3; L_2(\Sigma_{\pm})\| \leq c|u|, \quad (3.3)$$

в котором обозначения аналогичны использованным выше.

3) Продолжим поле $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$ нулем на область (1.1) и введем средние его компонент по переменной z :

$$\hat{u}_j(y) = h^{-1} H(y)^{-1} \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} u_j(y, z) dz. \quad (3.4)$$

Справедливо неравенство

$$\|D(\nabla_y, 0)^t (u - \hat{u}_3 e^3); L_2(\Omega_h)\| \leq cE(u, u; \Omega_h)^{1/2} \quad (3.5)$$

с постоянной c , не зависящей от u и $h \in (0, 1)$.

Далее под $H^l(\omega \rightarrow H^s(\Upsilon))$ понимаем пространство функций в области Ω_1 (см. (1.1)), снабженное нормой

$$\left(\sum_{k=0}^l \int_{\omega} \|\nabla_y^k W; H^s(\Upsilon(y))\|^2 dy \right)^{1/2},$$

где $\nabla_y^k W$ — совокупность производных порядка k .

ЛЕММА 3.2. Пусть $p = 0, 1, 2$ и $W_p \in H^{p+1}(\omega \rightarrow L_2(\omega))$, причем $W_1(y, \zeta) = 0$ и $W_2(y, \zeta) = \partial_n W_2(y, \zeta) = 0$ при $y \in \partial\omega$ и $\zeta \in \Upsilon(y)$. Тогда верны оценки

$$\|W_p; L_2(\Omega_h \cap \mathbf{V})\| \leq ch^{p+1} \|W_p; H^{p+1}(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon))\|, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{V} = \{(y, z) : y \in \mathcal{V}_{2ch}\}$, $\mathcal{V}_{ch}$ – окрестность контура $\partial\omega$, фигурирующая в (1.2), а постоянная с не зависит от W_p и $h \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно неравенству Пуанкаре–Фридрихса, использующему условия Дирихле на $\partial\omega$, находим, что при $i = 1, 2$

$$\|W_i; L_2(\omega \cap \mathcal{V}_{2ch} \rightarrow L_2(\Upsilon))\| \leq ch^i \|\nabla_y^i W_i; L_2(\omega \cap \mathcal{V}_{ch} \rightarrow L_2(\Upsilon))\|.$$

Таким образом, все три неравенства (3.6) сведены к случаю $p = 0$. Приступим к проверке самой формулы (3.6), $p = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} & h^{-2} \int_{\mathcal{V} \cap \Omega_h} |W_0(y, h^{-1}z)|^2 dy dz \\ & \leq ch^{-2} \left(h \int_{\mathcal{V}_{2ch} \cap \omega} |\widehat{W}_0(y)|^2 dy + \int_{\mathcal{V} \cap \Omega_h} |W_0(y, z) - \widehat{W}_0(y)|^2 dy dz \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

($\widehat{W}_0$ определено в (3.4)). Благодаря одномерному неравенству Пуанкаре на $\Upsilon(y)$ последний интеграл не превосходит

$$ch^2 \int_{\mathcal{V} \cap \Omega_h} (|\nabla_x W_0|^2 + |\nabla_y \widehat{W}_0(y)|^2) dy dz \leq ch^3 \|W_0; H^1(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon))\|^2.$$

Подчеркнем, что дополнительный множитель h возник из-за замены $z \mapsto \zeta = h^{-1}z$. Рассмотрим первый интеграл справа в (3.7). Сохраним символ $\widehat{W}_0$ за функцией $\widehat{W}_0$, записанной при помощи естественных криволинейных координат в окрестности $\mathcal{V}_d$ контура $\partial\omega$; здесь $t = |n|$ – расстояние до $\partial\omega$ внутри ω , а s – длина дуги на $\partial\omega$. Используя вариант неравенства Харди

$$|\widehat{W}_0(0, s)|^2 + \int_0^d t^{-2} |\widehat{W}_0(t, s) - \widehat{W}_0(0, s)|^2 dt \leq c \int_0^d (|\partial_t \widehat{W}_0(t, s)|^2 + |\widehat{W}_0(t, s)|^2) dt$$

(см., например, [21; предложение 4.5.2]), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} & h^{-1} \int_{\mathcal{V}_{2ch} \cap \omega} |\widehat{W}_0(y)|^2 dy \leq 2h^{-1} \int_{\mathcal{V}_{2ch} \cap \omega} (|\widehat{W}_0(0, s)|^2 + |\widehat{W}_0(t, s) - \widehat{W}_0(0, s)|^2) dy \\ & \leq c \int_{\partial\omega} ds \left\{ |\widehat{W}_0(0, s)|^2 + h \int_0^{2ch} t^2 |\widehat{W}_0(t, s) - \widehat{W}_0(0, s)|^2 dt \right\} \\ & \leq c \int_{\partial\omega} ds \int_0^d (|\partial_t \widehat{W}_0(t, s)|^2 + |\widehat{W}_0(t, s)|^2) dt \leq c \|W_0; H^1(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))\|^2. \end{aligned}$$

Осталось совместить полученные оценки.

3.2. О гладкости асимптотических членов. Придадим точный смысл разложениям (2.5). Именно допустим, что

$$f^0 \in L_2(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))^3, \quad g^{0\pm} \in L_2(\omega)^3, \quad \bar{f}_3^0 \in H^1(\omega), \quad (3.8)$$

где, как обычно, под $H^{-1}(\omega)$ подразумевается пространство функций, имеющих вид

$$\bar{f}_3^0(y) = \bar{f}_3^{00}(y) - \partial_1 \bar{f}_3^{01}(y) - \partial_2 \bar{f}_3^{02}(y), \quad \bar{f}_3^{0p} \in L_2(\omega), \quad (3.9)$$

а норма вычисляется по формуле

$$\|\bar{f}_3^0; H^{-1}(\omega)\| = \inf \left\{ \sum_{p=0}^2 \|\bar{f}_3^{0p}; L_2(\omega)\| \right\},$$

причем инфимум, берется по всем представлениям (3.9). Сумму норм функций (3.8) в указанных пространствах обозначим $\mathcal{N}_0$. Малость остатков в (2.5) обеспечивается предположением: сумма

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{N}} &= h^{-1} \|\rho_h^2 \tilde{f}_3; L_2(\Omega_h)\| + h^{-1/2} \sum_{\pm} \|\rho_h^2 \tilde{g}_3^{\pm}; L_2(\Sigma_{\pm})\| \\ &+ \sum_{i=1}^2 \left(\|\rho_h \tilde{f}_i; L_2(\Omega_h)\| + h^{1/2} \sum_{\pm} \|\rho_h \tilde{g}_i^{\pm}; L_2(\Sigma_{\pm})\| \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

есть величина “порядка единицы”. Распределение множителей в (3.10) согласовано с (3.2) и (3.3). Очевидной становится выгода применения весового неравенства Корна (3.1), поскольку соотношение $\mathcal{N}_0 = O(1)$ сохраняется даже в том случае, если в малой окрестности боковой поверхности пластины $\tilde{f}$ и $\tilde{g}^{\pm}$ велики по модулю.

В силу (2.25), (2.29) и (2.34) верна цепочка неравенств

$$\mathcal{N}_0 \geq C \|\mathcal{F}; L_2(\omega)^2 \times H^{-1}(\omega)\| \geq c \|w; H^2(\omega)^2 \times H^3(\omega)\|, \quad (3.11)$$

а значит, согласно (2.8), (2.18) и (2.21), (2.12)

$$\begin{aligned} U^k &\in H^{1-k}(\omega \rightarrow H^2(\Upsilon))^3, \quad k = -2, -1, 0, 1, \\ \|U^k; H^{1-k}(\omega \rightarrow H^2(\Upsilon))\| &\leq c \mathcal{N}_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Члены (3.12) анзаца (2.7) не обладают достаточной гладкостью, и поэтому некоторые из появившихся в § 2 задач следует понимать в обобщенном смысле (как и исходную задачу (1.7)–(1.9)). Мы уклоняемся от очевидных переформулировок и заметим лишь, что в соответствии с (2.27) и (3.9) условие (2.28) также интерпретируется как интегральное тождество

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} (\mathbb{D}_y^t e^3 v_3)^t \int_{\Upsilon(y)} A(\mathbb{D}_{\zeta}^t U^1 + \mathbb{D}_y^t U^0) d\zeta dy \\ &- \int_{\omega} \left\{ \bar{f}_3^{00} H v_3 + \sum_{i=1}^2 \bar{f}_3^{0i} \partial_i (H v_3) \right\} dy = 0 \quad \forall v_3 \in \mathring{H}^1(\omega, \partial\omega). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Одно из возможных рассуждений, приводящих к (3.13), реализуется так: функции f^0 , $g^{0\pm}$ и $\bar{f}^0$ приближаются гладкими, осуществляются все преобразования, указанные в § 2, а затем после подходящего интегрирования по частям делается предельный переход к негладким f^0 , $g^{0\pm}$ и $\bar{f}^0$. На этом пути получаются все интегральные тождества в данном параграфе, причем их вывод не требует каких-либо оценок, учитывающих параметр h .

3.3. Приближенное решение. Согласно (3.12) последнее из построенных в §2 слагаемых U^1 попадает лишь в $L_2(\omega \rightarrow H^2(\Upsilon))^3$ и не может быть включено в асимптотическое приближение из-за недостаточной гладкости по переменным y . Для соблюдения условий Дирихле (1.9) умножим предшествующие члены анзаца (2.7) на срезающую функцию $X \in C_0^\infty(\omega \setminus \overline{\mathcal{V}_{ch}})$, равную единице при $\text{dist}\{y, \partial\omega\} \geq 2ch$. Эту функцию можно взять зависящей от “быстрой” переменной $h^{-1}t$ (см. доказательство леммы 3.2), т.е.

$$|\nabla_y^k X(y)| \leq c_k h^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

Итак, введем частичную сумму ряда (2.7)

$$U(x) = h^{-2}U^{-2}(y) + h^{-1}U^{-1}(y, h^{-1}z) + h^0U^0(y, h^{-1}z) \quad (3.15)$$

и положим

$$U_X(x) = X(y)U(x). \quad (3.16)$$

По построению и в силу (1.2), (1.3) $U_X \in \mathring{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$.

ЛЕММА 3.4. *Вектор-функции (3.15) и (3.16) связаны неравенством*

$$\|U - U_X\| + \|\varepsilon(U) - \varepsilon(U_X); L_2(\Omega_h)\| \leq ch^0 \mathcal{N}_0. \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Носитель разности $U - U_X = (1 - X)U$ расположен в окрестности $\mathbf{V}$, фигурирующей в лемме 3.2, на которую нам предстоит ссылаться. Благодаря краевым условиям (2.23), структуре начальных членов (2.8) и соотношениям (3.12) компоненты векторов

$$\begin{aligned} U^{-2}, \partial_z U^{-2} &\in H^3(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon)), \\ U^{-1}, \partial_z U^{-1}, \nabla_y U^{-2} &\in H^2(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon)), \\ U^0, \partial_z U^0, \nabla_y U^{-1} &\in H^1(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon)) \end{aligned}$$

можно в лемме 3.2 принять за W_2, W_1, W_0 соответственно (градиент $\nabla_y U^0$ обрабатывается отдельно). Заметим еще, что в интеграле (3.2), суженном на $\Omega_h \cap \mathbf{V}$, множители ρ_h^{-m} безболезненно заменяются на h^{-m} . Выполняя дифференцирование при учете (3.14), находим, что левая часть (3.17) не превосходит

$$\begin{aligned} &c \sum_{p=0}^2 h^{-p} \{h^{-1} \|U^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathbf{V})\| + \|\nabla_y U^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathbf{V})\| \\ &\quad + \|\partial_z U^{-p}; L_2(\Omega_h \cap \mathbf{V})\|\} \\ &\leq c \sum_{p=0}^2 h^{-p} \{h^{-1} h^{p+1} \|U^{-p}; H^{p+1}(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon))\| \\ &\quad + h^{(p-1)+1} \|\nabla_y U^{-p}; H^p(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon))\| \\ &\quad + h^{p+1} \|h^{-1} \partial_z U^{-p}; H^{p+1}(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon))\|\} \\ &\leq c \sum_{p=0}^2 \|U^{-p}; H^{p+1}(\omega \rightarrow H^2(\Upsilon))\| \leq c \mathcal{N}_0. \end{aligned}$$

При первом оценивании использовались неравенства (3.6), а также очевидная формула

$$\|\nabla_y U^0; L_2(\Omega_h \cap \mathbf{V})\| \leq \|\nabla_y U^0; L_2(\Omega_h)\|.$$

Дальнейшие выкладки опирались на (3.12). Лемма доказана.

3.4. Вычисление и оценивание невязок. Аналогично п. 2.4 имеем

$$\begin{aligned} LU_X - f &= L(1 - X)U + h^{-4}L^0U^{-2} \\ &\quad + h^{-3}(L^0U^{-1} + L^1U^{-2}) + h^{-2}(L^0U^0 + L^1U^{-1} + L^2U^{-2}) \\ &\quad + h^{-1}(L^1U^0 + L^2U^{-1} - f^0) + h^0(L^2U^0 - \bar{f}^0) - \tilde{f} \\ &= L(1 - X)U - h^{-1}L^0U^1 + h^0(L^2U^0 - \bar{f}^0) - \tilde{f}, \\ B^\pm U_X - g^\pm &= B^\pm(1 - X)U + h^{-3}N_\pm^{-1}B^{0\pm}U^{-2} \\ &\quad + h^{-2}N_\pm^{-1}(B^{0\pm}U^{-1} + B^{1\pm}U^{-2}) \\ &\quad + h^{-1}N_\pm^{-1}(B^{0\pm}U^0 + B^{1\pm}U^{-1} + B^{2\pm}U^{-2}) \\ &\quad + h^0N_\pm^{-1}(B^{1\pm}U^{-2} + B^{2\pm}U^{-1} - g^{0\pm}) \\ &\quad + h^1B^{2\pm}U^0 + (N_\pm^{-1} - 1)g^{0\pm} - \tilde{g}^\pm. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь применялись соотношения (2.13) с $j = -2, -1, 0$, а слагаемые $-L^0U^1$ и $-B^{0\pm}U^1$ появились в соответствии с (2.21) и (2.13), $j = 1$.

Положим $R = U_X - u$ и заметим, что $LU_X - f = LR$, $B^\pm U_X - g^\pm = B^\pm R$, а сам вектор R удовлетворяет краевым условиям (1.9). Умножим (3.18) скалярно на R и проинтегрируем по частям при учете краевых условий (3.19). В результате получим:

$$\begin{aligned} 2E(R, R; \Omega_h) &= \langle AD^t(1 - X)U, D^t R \rangle - \langle A\mathbb{D}_\zeta^t U^1, \mathbb{D}_z^t R \rangle \\ &\quad + \left\{ \langle A\mathbb{D}_y^t U^0, \mathbb{D}_y^t R \rangle - h(f_3^{00}, H\hat{R}_3)_\omega - h \sum_{i=1}^2 (\bar{f}_3^{0i}, \partial_i H\hat{R}_3)_\omega \right\} \\ &\quad + \left\{ \langle \tilde{f}, R \rangle + \sum_{\pm} [(\tilde{g}^\pm, R)_{\Sigma_\pm} + ((N_\pm^{-1} - 1)g^{0\pm}, R)_{\Sigma_\pm}] \right\} \\ &\equiv I_X - I_1 + I_0 + \tilde{I}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Скалярное произведение в $L_2(\Omega_h)$ обозначено через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Кроме того, $D = D(\nabla_x)$ и $\mathbb{D}_z = h^{-1}\mathbb{D}_\zeta$; в выражении $\langle f^0, R \rangle$ учтены условия (2.6), (3.9) и произведено интегрирование по z , т.е. $\hat{R}_3$ определено согласно (3.4). Помимо формулы Грина (1.11) использовались формулы, получающиеся из нее заменой операторов L , $B^\pm$ на L^0 , $N_\pm^{-1}B^{0\pm}$ или L^2 , $N_\pm^{-1}B^{2\pm}$.

Оценим слагаемые $I_{\dots}$ в (3.20). В силу леммы 3.4

$$|I_X| \leq c\|\varepsilon(U) - \varepsilon(U_X); L_2(\Omega_h)\| \times \|\varepsilon(R); L_2(\Omega_h)\| \leq C\mathcal{N}_0 E(R, R; \Omega_h)^{1/2}. \quad (3.21)$$

Следующий член I_1 обрабатывается так:

$$\begin{aligned} |I_1 + I_{10}| &= |\langle A\mathbb{D}_\zeta^t U^1, (\mathbb{D}_z^t + \mathbb{D}_y^t)R \rangle| \leq c\|\mathbb{D}_\zeta^t U^1; L_2(\Omega_h)\| \times \|D^t R; L_2(\Omega_h)\| \\ &\leq ch^{1/2}\|\mathbb{D}_\zeta^t U^1; L_2(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))\| \times \|\varepsilon(R); L_2(\Omega_h)\| \\ &\leq ch^{1/2}\mathcal{N}_0 E(R, R; \Omega_h)^{1/2}, \\ I_{10} &= \langle A\mathbb{D}_\zeta^t U^1, \mathbb{D}_y^t R \rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Оставшийся интеграл I_{10} присоединим к I_0 . Кроме того, в интегральном тождестве (3.13) положим $v_3 = \widehat{R}_3$ и вычтем левую часть из $I_0 + I_{10}$. В итоге получаем

$$I_0 + I_{10} = \langle A(\mathbb{D}_y^t U^0 + \mathbb{D}_\zeta^t U^1), \mathbb{D}_y^t (R - e^3 \widehat{R}_3) \rangle,$$

а значит, по теореме 3.1(3)

$$\begin{aligned} |I_0 + I_{10}| &\leq ch^{1/2} (\|\mathbb{D}_y^t U^0; L_2(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))\| \\ &\quad + \|\mathbb{D}_\zeta^t U^1; L_2(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))\|) E(R, R; \Omega_h)^{1/2} \\ &\leq ch^{1/2} \mathcal{N}_0 E(R, R; \Omega_h)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь, как и в (3.22), были применены соотношения (3.12), а множитель $h^{1/2}$ появился из-за замены $z \mapsto \zeta = h^{-1}z$. Наконец, согласно теореме 3.1(1,2) и формулам (3.10), (3.8), (1.10) выполняются неравенства

$$|\widetilde{I}| \leq c \left(\widetilde{N}|R| + \mathcal{N}_0 h^2 \sum_{\pm} \|R; L_2(\Sigma_{\pm})\| \right) \leq c(\widetilde{\mathcal{N}} + h^{1/2} \mathcal{N}_0) E(R, R; \Omega_h)^{1/2}. \quad (3.24)$$

3.5. Теорема об асимптотике. Собирая оценки (3.21)–(3.24) и основываясь на (3.20), обнаруживаем, что

$$E(R, R; \Omega_h)^{1/2} \leq c(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}).$$

Отсюда и из неравенств (1.12), (3.1) и (3.17) выводим основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть правые части f и g подчинены требованиям (2.5), (2.6) и (3.8), (3.10), определяющим, в частности, величины $\mathcal{N}_0$ и $\widetilde{\mathcal{N}}$. Тогда решение и задачи (1.7)–(1.9) и асимптотическое приближение (3.15), построенное при помощи формул (2.8), (2.18) по решению w результирующей задачи (2.31), (2.33) с правой частью (2.25), (2.29), связаны неравенством

$$\|u - U\| + \|\varepsilon(u) - \varepsilon(U); L_2(\Omega_h)\| \leq c(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}), \quad (3.25)$$

в котором постоянная c зависит от ω , $H_{\pm}$ и A , но не от $h \in (0, 1]$ и функций f^0 , $g^{0\pm}$, $\widetilde{f}^0$ и $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}^{\pm}$, составляющих правые части исходной задачи.

Приведем упрощенные асимптотические формулы для смещений и деформаций (напряжений), вытекающие из (3.25).

СЛЕДСТВИЕ 3.6. В условиях теоремы 3.5 верны оценки

$$\begin{aligned} \|\rho_h^{-2}(u_3 - h^2 w_3); L_2(\Omega_h)\| &\leq ch^{-1}(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}), \\ \left\| \rho_h^{-1} \left(u_i - h^{-1} \left(w_i - \zeta \frac{\partial w_3}{\partial y_i} \right) \right); L_2(\Omega_h) \right\| &\leq c(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}), \\ \|\varepsilon(u) - h^{-1}(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{X} + \mathcal{Y}) \mathcal{D}(\nabla_y)^t w; L_2(\Omega_h)\| &\leq c(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с (1.4), (2.1) и (2.8), (2.14), (2.17), (2.18) выполняются равенства

$$\begin{aligned}\varepsilon(U) &= (h^{-1}\mathbb{D}_\zeta^t + \mathbb{D}_y^t)U = h^{-3}\mathbb{D}_\zeta^t U^{-2} + h^{-2}(\mathbb{D}_\zeta^t U^{-1} + \mathbb{D}_y^t U^{-2}) \\ &\quad + h^{-1}(\mathbb{D}_\zeta^t U^0 + \mathbb{D}_y^t U^{-1}) + h^0\mathbb{D}_y^t U^0 \\ &= h^{-1}(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{X} + \mathcal{Y})\mathcal{D}(\nabla_y)^t w + \mathbb{D}_y^t U^0.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Так как согласно (3.12)

$$\|\mathbb{D}_y^t U^0; L_2(\Omega_h)\| \leq ch^{1/2}\|U^0; H^1(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))\| \leq ch^{1/2}\mathcal{N}_0,$$

последняя оценка в (3.26) выводится из (3.25) и (3.27). Для того чтобы проверить первые две оценки, достаточно убедиться в справедливости формулы $\|U^0\|_0 \leq ch^0\mathcal{N}_0$, где $\|u\|_0^2$ — фрагмент интеграла из (3.2), включающий смещения u_i и u_3 , но не их производные. Поскольку $h^2\rho_h(y)^{-2} \leq c$, нужная формула получается так:

$$\begin{aligned}\|U^0\|_0^2 &\leq ch^2\|\rho_h^{-1}U^0; L_2(\Omega_h)\|^2 \leq ch^3\|\rho_h^{-1}U^0; L_2(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))\|^2 \\ &\leq ch\|U^0; H^1(\omega \rightarrow H^1(\Upsilon))\|^2 \leq ch\mathcal{N}_0^2.\end{aligned}$$

В пояснении нуждается предпоследний переход. Если ω' — собственная подобласть ω и $\rho_h(y) \geq c > 0$ при $y \in \omega'$, то

$$\|\rho_h^{-1}U^0; L_2(\omega' \rightarrow L_2(\Upsilon))\| \leq c\|U^0; L_2(\omega' \rightarrow L_2(\Upsilon))\| \leq c\mathcal{N}_0.$$

Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что при $\text{dist}\{y, \partial\omega\} \geq d$ $U^0(y, \zeta) = 0$. Далее следуем схеме проверки оценки (3.6), $p = 0$, из леммы 3.4, но применяем другой вариант неравенства Харди

$$\begin{aligned}h \int_0^d (h+n)^{-2} |\mathcal{Z}(n)|^2 dn &= -2h \int_0^d (h+n)^{-2} \int_n^d \mathcal{Z}(\tau) \partial_\tau \mathcal{Z}(\tau) d\tau dn \\ &= -2h \int_0^d \mathcal{Z}(\tau) \partial_\tau \mathcal{Z}(\tau) \int_0^\tau (h+n)^{-2} dn d\tau \leq 2 \int_0^d \frac{\tau}{h+\tau} |\mathcal{Z}(\tau) \partial_\tau \mathcal{Z}(\tau)| d\tau \\ &\leq 2d \left(\int_0^d |\partial_\tau \mathcal{Z}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^d (h+\tau)^{-2} |\mathcal{Z}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2},\end{aligned}$$

справедливый для $\mathcal{Z} \in H^1(0, d)$ в случае $\mathcal{Z}(d) = 0$.

Слагаемое U^0 безболезненно удаляется из асимптотического решения (3.15) только при рассмотрении самих смещений — оно принимает участие в формировании асимптотик деформаций (3.27) и напряжений $\sigma(U)$. Оценки (3.25) и (3.26) в самом деле служат оправданием построенных асимптотических представлений, поскольку нормы отделенных асимптотических членов

$$\|U\|, \quad \|\varepsilon(U); L_2(\Omega_h)\|, \quad \|h^{-2}U^{-2} + h^{-1}U^{-1}\|_0, \quad \|h^{-1}(\mathbb{D}_\zeta^t \mathcal{X} + \mathcal{Y})\mathcal{D}^t w; L_2(\Omega_h)\|$$

суть $O(h^{1/2}\mathcal{N}_0)$.

Полная оценка (3.25) является асимптотически точной: как установлено в [17], [40] для цилиндрической изотропной пластины, энергетическая норма (левая часть (3.25)) главного члена пограничного слоя, возникающего вблизи боковой поверхности пластины, но не учитываемого в асимптотическом решении (3.15), как раз и составляет $O(1)$. Пограничный слой служит для компенсации невязки, оставленной приближенным решением в условиях Дирихле (1.9). В промежуточном приближении (3.16) эту роль исполняла срезающая функция X , причем вносимая ею погрешность имела тот же порядок h^0 (см. (3.17)).

Требования гладкости (3.8) нельзя ослабить без потери точности. Так, при наличии у функции f^0 сингулярностей, выводящих ее из класса $L_2(\omega \rightarrow L_2(\Upsilon))^3$, показатель степени h в мажоранте из (3.25) становится отрицательным – это связано с явлением внутренних пограничных слоев, обладающих трехмерной структурой (см. [41]–[43] и др.).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Предположение о гладкости матрицы A в законе Гука (1.6) можно ослабить и перейти к рассмотрению слоистых пластин, у которых A – кусочно гладкая матрица-функция с разрывами на поверхностях

$$\Sigma_n = \{x : y \in \omega, z = hH_n(y)\}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.28)$$

Здесь H_n – гладкие функции, $-H_- < H_1 < \dots < H_N < H_+$. Теперь задача (1.7)–(1.9) дополняется условиями сопряжения

$$\begin{aligned} D(\nu(y))A(y, H_n(y) - 0)D(\nabla_x)^t u(y, hH_n(y) - 0) \\ = D(\nu(y))A(y, H_n(y) + 0)D(\nabla_x)^t u(y, hH_n(y) + 0), \\ u(y, hH_n(y) - 0) = u(y, hH_n(y) + 0), \quad y \in \omega, \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.29)$$

в которых фигурируют односторонние пределы при $\zeta \rightarrow H_n(y) \pm 0$, а $\nu(y)$ – нормаль к Σ_n . Впрочем, условия сопряжения (3.29) исчезают при формулировке задачи (1.7)–(1.9) как интегрального тождества. При выводе результирующей системы (2.31) можно ограничиться такими, обобщенными, постановками предельных задач (2.13) (ср. с замечанием 3.3), т.е. финальные формулы (2.32) и (2.35) сохраняются и для слоистых пластин. Остается отметить, что при обосновании асимптотики мы также обращались к подобию (3.20) интегрального тождества.

3.6. Пологие оболочки. Один из наиболее часто встречающихся типов слабо изогнутых пластин – пологие оболочки, геометрия которых описывается такой формулой:

$$\Omega_h = \{x : \tau \in \tilde{\omega}, |\sigma| < h/2\}.$$

Здесь $\tilde{\omega}$ – область с гладкой границей $\partial\tilde{\omega}$, расположенная на слабоискривленной гладкой поверхности $\tilde{\Sigma}$ (ее кривизны суть $O(h)$), τ – система координат на $\tilde{\Sigma}$, σ – поперечная координата, т.е. $|\sigma| = \text{dist}\{x, \tilde{\Sigma}\}$. Простейшим примером служит полая сферическая оболочка, заключенная между сферами

$$\mathbb{S}_{\pm} = \left\{ x : |y|^2 + |z + l|^2 = \left(\sqrt{l^2 + r_0^2} \pm \frac{1}{2}h \right)^2 \right\}$$

и проецирующаяся на круг $\omega = \{y : |y| < r_0\}$ с фиксированным радиусом r_0 . Центр $(0, -l)$ сфер удален от плоскости ω , т.е. $l = l(h)$, а произведение $l_0 = hl$ не зависит от h . Переходя к обозначениям из (1.1), получаем уравнения для величин $H_{\pm}(h, y)$:

$$|y|^2 + h^2 H_{\pm}^2 + 2l_0 H_{\pm} = r_0^2 \pm \sqrt{l_0^2 + h^2 r_0^2} + \frac{1}{4}h^2,$$

из которого выводим, что

$$H_{\pm}(h, y) = H_{\pm}^0(y) + h^2 \tilde{H}_{\pm}(h, y), \quad H_{\pm}^0(y) = \frac{1}{2}(\pm 1 + l_0^{-1}(r_0^2 - |y|^2)),$$

$$|\nabla_y^k \tilde{H}_{\pm}(h, y)| \leq c_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Дополнительная зависимость функций $H_{\pm}$ от параметра h не привносит каких-либо осложнений. Поскольку в механике малый параметр – некая условность, более правильным оказывается повторение процедуры из §2 при сохранении зависимостей $H_{\pm}$ от h . В этом случае завершающий этап – асимптотический анализ результирующей задачи, содержащей параметр h , – весьма прост. Также физически осмысленной является перезапись всех уравнений в криволинейных координатах, привязанных к срединной поверхности оболочки

$$\tilde{\Sigma} = \{x : z = hH_0(h, y)\},$$

где $H_0 \sim 2^{-1}(H_+ - H_-)$. Компоненты единичного вектора $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)^t$ нормали к $\tilde{\Sigma}$ имеют вид

$$\mathbf{n}_3 = N_0(h, y)^{-1}, \quad \mathbf{n}_i = -hN_i(h, y)N_0(h, y)^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$N_i(h, y) = \partial_i H_0(h, y), \quad N_0(h, y) = [1 + h^2(N_1(h, y)^2 + N_2(h, y)^2)]^{1/2}$$

(ср. с (1.10)). Два перпендикулярных вектора $\mathbf{s}^i = (\mathbf{s}_1^i, \mathbf{s}_2^i, \mathbf{s}_3^i)^t$ в плоскости, касательной к $\tilde{\Sigma}$, можно определить так:

$$\mathbf{s}_3^i = hN_i(h, y)N_0(h, y)^{-1},$$

$$\mathbf{s}_i^i = \{1 - h^2[N_0(h, y) - 1]^{-1}N_{3-i}(h, y)^2\}N_0(h, y)^{-1},$$

$$\mathbf{s}_2^1 = \mathbf{s}_1^2 = h^2[N_0(h, y) - 1]^{-1}N_1(h, y)N_2(h, y)N_0(h, y)^{-1}.$$

Теперь переход к криволинейным координатам в анзаце (2.7) и дифференциальном операторе из результирующей системы (2.31) не составляет труда. Наконец, схема обоснования асимптотики остается прежней, так как все производные функций $y \mapsto H_{\pm}(h, y)$ равномерно ограничены при $h \in (0, 1)$ и $y \in \bar{\omega}$.

3.7. Замечания о пограничных слоях. Если пластина цилиндрическая и $H_{\pm}$ – постоянные, то предельная задача, описывающая явление пограничного слоя, получается в результате введения двух быстрых переменных $\eta_1 = h^{-1}t$ и $\eta_2 = h^{-1}z$, где (n, s) – естественные криволинейные координаты в окрестности контура $\partial\omega$, s – длина дуги на $\partial\omega$ и $-n = t$ – расстояние до $\partial\omega$ вдоль внутренней нормали. Подчеркнем, что для переменной s сохраняется начальный масштаб и

она оказывается параметром в двумерной задаче анизотропной теории упругости в полосе $\Pi = \mathbb{R}_+ \times (-H_-, H_+)$. Необходимую информацию о разрешимости такой задачи можно почерпнуть из [21; § 5.7] и [44], а полное описание процедуры приведено, например, в [11]–[19] и [20; гл. 15, 16].

Для пластин переменной толщины схема построения пограничного слоя в целом остается прежней. Незначительные изменения связаны с необходимостью спрямить границы, что делается при помощи замены

$$(t, z) \mapsto \eta = (\eta_1, \eta_2), \quad (3.30)$$

$$\eta_1 = h^{-1}t, \quad \eta_2 = H(t, s)^{-1}[H(0, s)h^{-1}z + H_+(0, s)H_-(t, s) - H_-(0, s)H_+(t, s)]$$

(см. [34]). После выделения главных частей дифференциальных операторов относительно параметра h (их коэффициенты требуется разложить в ряды Маклорена по переменной t) осуществляется формальный переход к $h = 0$ и получается задача теории упругости в полуполосе $\Pi(s) = \mathbb{R}_+ \times (-H_-(0, s), H_+(0, s))$, зависящей от $s \in \partial\omega$. По сравнению с возможностью пользоваться “простыми” быстрыми переменными $(h^{-1}t, h^{-1}z)$ и обрабатывать задачи в областях со слабо возмущенными границами введение координат (3.30) обладает значительными преимуществами, продемонстрированными на многочисленных примерах в [20].

Новые моменты обнаруживаются при рассмотрении пластин с острыми краями. Предположим, что условие $H > 0$, введенное в п. 1.1, выполняется в ω , но нарушается всюду на $\partial\omega$, причем для простоты

$$H_{\pm}(t, s) = t^{\gamma} \mathcal{H}_{\pm}(s), \quad \gamma > 0, \quad \mathcal{H}_{\pm} \in C^{\infty}(\partial\omega), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_- > 0. \quad (3.31)$$

В этом случае пластина оканчивается ребром и в соответствии с (2.35) результирующая система (2.31) вырождается на $\partial\omega$. Как известно (см. [33], [45] и др.), количество краевых условий, необходимых для корректной постановки задачи Дирихле, варьируется в зависимости от порядка вырождения. Так, при $\gamma \in (0, 1/3)$ нужны все четыре условия (2.33), но при $\gamma \in [1/3, 2/3]$ и $\gamma \in [2/3, 1)$ следует ограничиться соответственно наборами краевых условий

$$w_1(y) = w_2(y) = 0, \quad w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad (3.32)$$

и

$$w_1(y) = w_2(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \quad (3.33)$$

В случае $\gamma \geq 1$ краевые условия не требуются вовсе. Эти эффекты, разумеется, тесно связаны с явлением пограничного слоя. Дело в том, что формула (3.30) теряет смысл в ситуации (3.31) и полуполоса не выступает в качестве предельной области. Согласно [46], [34] и [20; § 12.4] правильной оказывается замена $(y, z) \mapsto (s, \xi_1, \xi_2)$,

$$\xi_1 = h^{\alpha}t, \quad \xi_2 = h^{\alpha}z, \quad \alpha = (1 - \gamma)^{-1}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (3.34)$$

которая в окрестности контура $\{x : y \in \partial\omega, z = 0\}$ преобразует Ω_h в $\{(s, \xi) : s \in \partial\omega, \xi \in \Pi(s)\}$, где $\Pi(s)$ – параболическое множество:

$$\Pi(s) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0, \xi_1^{-\gamma}\xi_2 \in (-\mathcal{H}_-(s), \mathcal{H}_+(s))\}.$$

Весовые неравенства Корна в областях такого типа изучались в [47], [48], а асимптотические разложения решений – в [35], [36]. Упомянутые результаты показывают, что при $\gamma \in (0, 1/3)$ имеются четыре условия затухания решения задачи в $\Pi(s)$, а при $\gamma \in (1/3, 2/3)$ и $\gamma \in (2/3, 1)$ их становится соответственно три и два (ровно столько же краевых условий указано в (3.32) и (3.33)). В случаях $\gamma = 1/3$ и $\gamma = 2/3$ приходится оперировать с ограниченными решениями. Подчеркнем, что при $\gamma = 1$ или $\gamma > 1$ (на краю пластины ребро или нулевое заострение) замена (3.34) неправомерна, поскольку $\alpha = \infty$ или $\alpha < 0$. Это означает отсутствие пограничного слоя (ср. с [34]) и согласуется с упоминавшимся исчезновением краевых условий.

Построение асимптотических разложений для пластин с острым краем усложняется в значительной степени: появляются нецелые показатели степеней h и из-за особенностей производных решений приходится обращаться либо к методу сращиваемых разложений ([49], [50] и др.), либо к процедуре перераспределения невязок [20]. Сколь-нибудь подробных публикаций на эту тему автор не знает.

§ 4. Весовое неравенство Корна

4.1. План доказательства теоремы 3.1. Неравенство (3.1) в случае цилиндрической пластины $\omega \times (-h/2, h/2)$ проверено в [26], причем отправным пунктом послужило аналогичное неравенство без весовых множителей (т.е. $\rho_h = 1$ в (3.2)), установленное в [6]. Переход к весовой норме (3.2) был достигнут в [26] при помощи удобного разбиения $\{\omega_j : j = 1, \dots, J_h\}$ области ω и обработки интеграла из (3.2), суженного на цилиндр $\omega_j \times (-h/2, h/2)$. Нечто подобное предстоит сделать и в этом параграфе. Заметим, что благодаря условиям (1.2) и (1.3) поле $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$ продолжается нулем на пластину Ω_h^0 из (1.1) с боковой поверхностью $\Gamma_h^0 = \{x : y \in \partial\omega, -hH_-(y) < z < hH_+(y)\}$. Более того, считаем, что функции $H_{\pm}$ продолжены с сохранением основных свойств на область ω' , содержащую $\overline{\omega}$, и вводим множества Ω'_h, Γ'_h и т.п. Далее оперируем с полями u из $\mathring{H}^1(\Omega_h^0, \Gamma_h^0)$ или $\mathring{H}^1(\Omega'_h, \Gamma'_h)$.

Пусть $\{\omega^1, \dots, \omega^N\}$ – фиксированное (не зависящее от h) покрытие области ω . Если оно достаточно мелкое, то окажется выполненным такое условие: при каждом $n = 1, \dots, N$ существуют число $\varkappa_n > 0$ (фиксированное) и декартова система координат (y^n, z^n) (зависящая от h), для которых

$$G_h^n = \{x : y^n \in g^n, |z^n| \leq h\varkappa_n\} \subset \Omega'_h. \quad (4.1)$$

При этом g^n – множество в плоскости $z^n = 0$, проекции которого на плоскость $z = 0$ совпадают с ω_n ; справедливы формулы

$$\begin{aligned} (y, z - z_0^n(h))^t &= \Theta(h)(y^n, z^n)^t, \\ |z_0^n(h)| &\leq ch, \quad |\Theta(h) - \mathbf{1}_3| \leq ch, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\Theta(h)$ и $\mathbf{1}_3$ – унитарная и единичная матрицы размером 3×3 . Приведем пояснения. В силу (4.1) внутрь Ω'_h помещается цилиндрическая пластина G_h^n толщиной $2h\varkappa_n$, срединное сечение которой проецируется на ω_n . Соотношения (4.2) показывают, что переход к системе координат, привязанной к G_h^n , осуществляется сдвигом вдоль оси z на расстояние $O(h)$ и поворотом осей на малые углы.

Вывод весового неравенства Корна для пластины переменной толщины осуществляется по следующей схеме. Сначала отбираются области $\omega^1, \dots, \omega^K$, пересекающиеся с контуром $\partial\omega$. Для “прямых” пластин $G_h^1, \dots, G_h^K$ применяются весовые неравенства Корна вида (3.1) из [26], справедливость которых обеспечивается условиями Дирихле на Γ_h^0 . Затем эти неравенства распространяются на “искривленные” пластины $\Omega_h^n = \{x \in \Omega'_h : y \in \omega^n\}$, $n = 1, \dots, K$ (см. далее леммы 4.2 и 4.3). На этом завершается первый этап и получается весовое неравенство (3.1), суженное на фиксированную окрестность боковой поверхности пластины Ω_h . На втором этапе рассматриваются области $\omega^{K+1}, \dots, \omega^L$, имеющие непустые пересечения с хотя бы одним из множеств $\omega^1, \dots, \omega^K$. Так как $\rho_h(y) > c > 0$ при $y \in \omega^{K+1} \cup \dots \cup \omega^L$, неравенства (3.1) на $G_h^{K+1}, \dots, G_h^L$ перестают быть весовыми по существу и устанавливаются при помощи результатов [6] (см. далее лемму 4.1(2)). Как и ранее, леммы 4.2 и 4.3 позволяют заменить G_h^n на Ω_h^n , $n = K+1, \dots, L$, и еще более отодвинуться от края пластины Ω_h . Очередной этап повторяет предыдущий, и требуется конечное их число для перебора всех элементов покрытия $\{\omega^n : n = 1, \dots, N\}$.

Описанная схема реализуется в конце параграфа, а начинаем мы с проверки более простых утверждений 2) и 3) теоремы 3.1, вытекающих из (3.1).

4.2. Теорема о следах. Следующее тождество очевидно:

$$\begin{aligned} & |u_j(y, H_+(y))|^2 + |u_i(y, -H_-(y))|^2 \\ &= \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} (hH(y))^{-1} \frac{\partial}{\partial z} [(2z - h(H_+(y) - H_-(y))) u_j(y, z)^2] dz. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выполнив дифференцирование, оцениваем последний интеграл величиной

$$\frac{c}{h} \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} (h^2 |\partial_z u_j(y, z)|^2 + |u_j(y, z)|^2) dz.$$

При $j = 1, 2$ умножим полученное неравенство на $\rho_h(y)^{-2}$, а при $j = 3$ — на $h^2 \rho_h(y)^{-4}$. Для вывода (3.3) осталось проинтегрировать по $y \in \omega$ и заметить, что $h^4 \rho_h^{-4} |\partial_z u_3|^2 \leq |\partial_z u_3|^2$.

4.3. Неравенство для $u - e^3 \hat{u}_3$. Разобьем окрестность замыкания $\bar{\omega}$ на квадраты $\{y : |y_i - hk_i| < h/2, k_i \in \{0, \pm 1, \dots\}, i = 1, 2\}$. Пусть q — один из таких квадратов с центром в точке y^q , имеющий непустое пересечение с ω и потому лежащий в ω' . Введем еще призму $Q = \{(y, z) : y \in q, -hH_-(y) < z < hH_+(y)\}$ с криволинейными основаниями и поместим в нее шар B с радиусом hr и центром на прямой $y = y^q$. Так как $H_{\pm}$ — непрерывные функции, число $r > 0$ можно взять не зависящим от h и положения квадрата q .

Для сужения поля $u \in \mathring{H}^1(\Omega'_h, \Gamma'_h)^3$ на Q справедливо представление

$$u(x) = u^{\perp}(x) + u^0(x), \quad (4.4)$$

в котором $u^0(x) = d(x)a$, a — столбец в $\mathbb{R}^6$,

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha z & -\alpha y_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha z & 0 & \alpha y_1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha y_2 & -\alpha y_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

(ср. с матрицей $D(y, z)$, у которой для явной аналогии переставлены столбцы). Так как u^0 — смещение Q как жесткого целого, верны равенства

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(u^\perp), \quad E(u, u; Q) = E(u^\perp, u^\perp; Q), \quad (4.5)$$

которые вытекают, например, из формул (1.4), (1.11) и соотношения $D(\nabla_x)^t d(x) = \mathbf{0}_6$ (см. (1.6) и (4.5)). Положим

$$a = d_B^{-1} \int_B d(x)^t u(x) dx, \quad d_B = \int_B d(x)^t d(x) dx, \quad (4.7)$$

и подчеркнем, что d_B — матрица Грама размером 6×6 , положительно определенная и симметрическая. Не ограничивая общности, можно считать, что начало координат помещено в центр шара B . Тогда простые вычисления показывают, что

$$d_B = \frac{4}{3} \pi r^3 h^3 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & p \mathbf{1}_3 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{5} r^2 h^2. \quad (4.8)$$

Заметим, что в силу (4.4) и (4.7)

$$\int_Q d(x)^t u^\perp(x) dx = \int_Q d(x)^t u(x) dx - \int_Q d(x)^t d(x) dx a = d_B a - d_B a = 0. \quad (4.9)$$

Благодаря условиям ортогональности справедливо такое неравенство Корна:

$$E(u^\perp, u^\perp; Q) \geq c(\|\nabla_x u^\perp; L_2(Q)\|^2 + h^{-2} \|u^\perp; L_2(Q)\|^2) \quad (4.10)$$

(см. [3], [4] и др.). Обращаем внимание на два обстоятельства. Во-первых, множитель h^{-2} появился в связи с заменой $x \mapsto \xi = h^{-1}x$, исключающей малый параметр h и переводящей Q в “единичную” призму

$$Q_1 = \{\xi = (\xi', \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : |\xi_i| < 1/2, i = 1, 2; -H_-(y^q + h\xi') < \xi_3 < H_+(y^q + h\xi')\}.$$

Во-вторых, множество Q оказывается звездным относительно шара B , и поэтому согласно [4] постоянная $c > 0$ в (4.9) выражается через отношение диаметров $(2hr)^{-1} \text{diam } Q = (2r)^{-1} \text{diam } Q_1$, не зависит от h и ее можно взять общей для всех квадратов из разбиения $\{q\}$.

В силу (3.4) и (4.10) имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla_y(u^\perp - e^3 \hat{u}_3^\perp); L_2(Q)\|^2 &\leq 2(\|\nabla_y u^\perp; L_2(Q)\|^2 + \|\nabla_y \hat{u}_3^\perp; L_2(Q)\|^2) \\ &\leq c \left(E(u^\perp, u^\perp; Q) + \int_q \left\{ h \sum_{\pm} |u_3^\perp(y, \pm h H_\pm(y))|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-h H_-(y)}^{h H_+(y)} (|\nabla_y u_3^\perp(y, z)|^2 + |u_3^\perp(y, z)|^2) dz \right\} dy \right). \end{aligned}$$

Тождество (4.3) позволяет оценить сумму по $\pm$ из фигурных скобок посредством интеграла из тех же скобок. Таким образом, ссылаясь еще раз на (4.10), находим, что

$$\|D(\nabla_y, 0)^t(u^\perp - e^3 \hat{u}_3^\perp); L_2(Q)\|^2 \leq c E(u^\perp, u^\perp; Q). \quad (4.11)$$

Пусть d_3 – третья строка матрицы (4.5). Непосредственными вычислениями убеждаемся в справедливости равенств

$$d(y, z) - e^3 \widehat{d}_3(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha z & -\alpha y_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha z & 0 & \alpha y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(\nabla_y, 0)^t(d(y, z) - e^3 \widehat{d}_3(y)) = \mathbf{0}_6.$$

Последняя формула вместе с (4.6) и (4.4) позволяет убрать знак “ $\perp$ ” из оценки (4.11) и получить, что

$$\|D(\nabla_y, 0)^t(u - e^3 \widehat{u}_3); L_2(Q_h)\|^2 \leq cE(u, u; Q).$$

Осталось просуммировать последнее неравенство по всем элементам разбиения пластины Ω_h на призмы Q .

4.4. Доказательство теоремы 3.1 (неравенство Корна). Сначала получим вспомогательные неравенства на цилиндрических пластинах G_h^n , введенных в п. 4.1. Вектор $v \in H^1(G_h^n)^3$ записываем в координатах (y^n, z^n) , и его проекции обозначаем через v_1^n, v_2^n и v_3^n . Кроме того,

$$\begin{aligned} |v; G_h^n|_1^2 &= \int_{G_h^n} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left(|\nabla_{y^n} v_i^n|^2 + h^2 \left(\left| \frac{\partial v_i^n}{\partial z^n} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_3^n}{\partial y_i^n} \right|^2 \right) + |v_i^n|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial v_3^n}{\partial z^n} \right|^2 + h^2 |v_3^n|^2 \right\} dy^n dz^n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если дополнительно $v = 0$ на $T_h^n = \{(y^n, z^n) : y^n \in t^n, |z^n| < h\kappa_n\}$, где t^n – непустая открытая дуга на контуре ∂g^n (граница срединного сечения G_h^n), то под $|v; G_h^n|_\rho^2$ понимается интеграл (4.12), в котором по аналогии с (3.2) распределены степени весового множителя $\rho_h^n(y^n) = h + \text{dist}\{y^n, t^n\}$.

ЛЕММА 4.1. 1) Для $v \in \mathring{H}^1(G_h^n, T_h^n)^3$ выполняется неравенство

$$|v; G_h^n|_\rho^2 \leq cE(v, v; G_h^n). \quad (4.13)$$

2) Если $v \in H^1(G_h^n)^3$ и r^n – несобственная подобласть g^n , $R_h^n = \{(y^n, z^n) : y^n \in r^n, |z^n| < h\kappa_n\}$, то

$$|v; G_h^n|_1^2 \leq c(E(v, v; G_h^n) + |v; R_h^n|_1^2). \quad (4.14)$$

Постоянные c в (4.13) и (4.14) не зависят от v и $h \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) установлено в [26]. Проверим неравенство (4.14), используя приемы из [6]. После замен

$$z^n \mapsto \zeta^n = h^{-1} z^n, \quad v_3^n \mapsto V_3^n = h v_3^n \quad (4.15)$$

получаем, что при $h \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} & \int_{G_h^n} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial v_i^n}{\partial y_i^n} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_i^n}{\partial z^n} + \frac{\partial v_3^n}{\partial y_i^n} \right|^2 \right) + \left| \frac{\partial v_1^n}{\partial y_2^n} + \frac{\partial v_2^n}{\partial y_1^n} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_3^n}{\partial z^n} \right|^2 \right\} dy^n dz^n \\ & \quad + h \int_{G_h^n} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial v_i^n}{\partial y_i^n} \right|^2 + h^{-2} \left| \frac{\partial v_i^n}{\partial \zeta^n} + \frac{\partial V_3^n}{\partial y_i^n} \right|^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left| \frac{\partial v_1^n}{\partial y_2^n} + \frac{\partial v_2^n}{\partial y_1^n} \right|^2 + h^{-4} \left| \frac{\partial V_3^n}{\partial \zeta^n} \right|^2 \right\} dy^n d\zeta^n \\ & \geq h \int_{G_h^n} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial v_i^n}{\partial y_i^n} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_i^n}{\partial \zeta^n} + \frac{\partial V_3^n}{\partial y_i^n} \right|^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left| \frac{\partial v_1^n}{\partial y_2^n} + \frac{\partial v_2^n}{\partial y_1^n} \right|^2 + \left| \frac{\partial V_3^n}{\partial \zeta^n} \right|^2 \right\} dy^n d\zeta^n. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В силу (1.12) и (1.5) левая часть (4.16) оценивается сверху величиной $cE(v, v; G_h^n)$. Интеграл I из правой части лишь несущественными в данном контексте множителями отличается от упругой энергии поля $(v_1^n, v_2^n, V_3^n)^t$ в теле G_1^n с единичными размерами. Неравенство Корна на G_1^n (см. [2]–[4] и др.) может быть записано так:

$$\begin{aligned} & h \sum_{i=1}^2 \|v_i^n; H^1(G_1^n)\|^2 + h \|V_3^n; H^1(G_1^n)\|^2 \\ & \leq c \left(hI + h \sum_{i=1}^2 \|v_i^n; L_2(R_1^n)\|^2 + h \|V_3^n; L_2(R_1^n)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Разумеется, постоянная c в (4.17) не зависит от v и h . Теперь нужно сделать замены, обратные для (4.15). Правая часть полученного неравенства не превосходит правой части (4.14). Его левая часть отличается от интеграла (4.12) лишь тем, что при $|\partial_{z^n} v_3^n|^2$ появился множитель h^4 . Этот множитель удаляется без последствий, так как сам член $|\partial_{z^n} v_3^n|^2$ можно найти в первом подынтегральном выражении из (4.16).

Очередное утверждение позволит перейти от норм, возникших в лемме 4.1, к норме (3.2) на G_h^n , т.е. осуществить замену координат (4.2). Пусть $\omega^n \subset \omega' -$ краевой элемент покрытия $\{\omega^n\}$ области ω , т.е. $\emptyset \neq \omega^n \cap \partial\omega \subset \tau^n$, а множества g^n и t^n , фигурирующие в лемме 4.1, проецируются на ω^n и τ^n . Очевидно, что весовые множители $\rho_h(y)$ и $\rho_h^n(y^n)$ оказываются эквивалентными и о них в дальнейшем заботиться не нужно. Для внутреннего элемента $\bar{\omega}^n \subset \omega$ под $|v; G_h^n|_\rho^2$ будет подразумеваться интеграл (4.12), но эквивалентность весов $\rho_h(y)$ и $\rho_h^n(y^n) = 1$ на G_h^n сохранится.

ЛЕММА 4.2. Пусть u – векторное поле v , указанное в лемме 4.1 (1) или 2), но записанное в координатах (y, z) , привязанных к пластине Ω_h . Пусть еще $|u|_{G,n}^2$ – интеграл из (3.2), суженный с Ω_h на G_h^n . Тогда неравенства

$$|u|_{G,n}^2 \leq c|v; G_h^n|_\rho^2 \leq C|u|_{G,n}^2 \quad (4.18)$$

выполняются с постоянными, не зависящими от u и $h \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим фрагмент левой части (4.18), свободный от производных компонент u_j :

$$I_0 = \int_{G_h^n} \{ \rho_h^{-2} |u_1|^2 + \rho_h^{-2} |u_2|^2 + h^2 \rho_h^{-4} |u_3|^2 \} dy dz$$

(ср. с (3.2)). Поскольку столбцы u и v связаны формулой $u = \Theta(h)v$, в соответствии с (4.2) заключаем, что

$$\begin{aligned} I_0 &\leq c \int_{G_h^n} \{ \rho_h^{-2} (|v_1|^2 + h^2 |v_2|^2 + h^2 |v_3|^2) + \rho_h^{-2} (h^2 |v_1|^2 + |v_2|^2 + h^2 |v_3|^2) \\ &\quad + h^2 \rho_h^{-4} (h^2 |v_1|^2 + h^2 |v_2|^2 + |v_3|^2) \} dy^n dz^n. \end{aligned}$$

По определению весовой функции $h^{-1} > \rho_h(y)^{-1} > c_\rho > 0$ в ω' , а значит, $h^2 \rho_h^{-2} |v_3|^2 \leq c_\rho^{-2} h^2 \rho_h^{-4} |v_3|^2$ и $h^4 \rho_h^{-4} |v_i|^2 \leq \rho_h^{-2} |v_i|^2$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $I_0 \leq c|v; G_h^n|_\rho^2$.

Обработаем оставшуюся часть I_1 выражения $|u|_{G,n}^2$. Согласно (4.2) для присутствующих в ней производных справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_k}{\partial y_i}(y, z) \right|^2 &\leq c \left(\left| \frac{\partial v_k}{\partial y_i^n}(y^n, z^n) \right|^2 + h^2 |\nabla_{(y^n, z^n)} v(y^n, z^n)|^2 \right), \\ \left| \frac{\partial u_k}{\partial z}(y, z) \right|^2 &\leq c \left(\left| \frac{\partial v_k}{\partial z^n}(y^n, z^n) \right|^2 + h^2 |\nabla_{(y^n, z^n)} v(y^n, z^n)|^2 \right), \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 3$ и $i = 1, 2$. Следовательно, оценивание I_1 можно произвести так: для членов, имеющих весовой множитель $h^2 \rho_h^{-2}$, воспользоваться соотношениями $h^4 \rho_h^{-2} \leq h^2 \leq 1$ и $h^4 \rho_h^{-2} \leq h^2 \rho_h^{-2}$, а для членов без множителя – соотношениями $h^2 \leq 1$ и $h^2 \leq c_\rho^{-2} h^2 \rho_h^{-2}$.

Второе неравенство в (4.18) получится при помощи точно таких же рассуждений, если заметить, что матрица $\Theta(h)^{-1}$, осуществляющая обратные замены, по-прежнему удовлетворяет неравенству $|\Theta(h)^{-1} - \mathbf{1}_3| \leq ch$.

Последняя из лемм предоставляет возможность распространить неравенство Корна с G_h^n на $\tilde{\Omega}_h^n = \{x \in \Omega_h^n : y \in \omega^n, \text{dist}\{y, \partial\omega^n\} > \sqrt{2}h\}$. Сужение основания искривленной пластины происходит по чисто техническим причинам – используется разбиение $\{q\}$ окрестности множества $\bar{\omega}$, введенное в п. 4.3. Разумеется, можно было бы подобрать разбиение, приспособленное к форме ω^n , и тем самым заменить $\tilde{\Omega}_h^n$ на $\Omega_h^n = \{x \in \Omega_h^n : y \in \omega^n\}$, однако отрезание пограничных полосок шириной $O(h)$ не нарушает намеченную процедуру вывода неравенства (3.1), поскольку покрытие $\{\omega^n\}$ не зависит от h (глубина перехлеста его элементов достаточна) и поле $u \in \dot{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$ продолжено нулем на увеличенную пластину Ω_h' (около края Γ_h образован запас). Далее через $|u|_{\Omega,n}^2$, $|u|_Q^2$ или $|u|_B^2$ обозначается интеграл из (3.2), суженный на области $\tilde{\Omega}_h^n$, Q или B соответственно.

ЛЕММА 4.3. Для $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3 \subset \mathring{H}^1(\Omega'_h, \Gamma'_h)^3$ выполняется соотношение

$$|u|_{\Omega, n}^2 \leq c(|u|_{G, n}^2 + E(u, u; \tilde{\Omega}_h^n)), \quad (4.19)$$

причем постоянная c не зависит от u и $h \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть q — один из квадратов со стороной h , содержащийся в ω^n . Как и в п. 4.3, определим призму Q с криволинейными основаниями, но выбор шара B подчиним дополнительному условию $B \subset Q \cap G_h^n$ (при этом остальные требования соблюдаются). Так как $\rho_h(y)^{-2} \leq h^{-2}$ в норме (3.2), из (4.6) и (4.10) вытекает, что

$$|u^\perp|_Q^2 \leq cE(u^\perp, u^\perp; Q) = cE(u, u; Q). \quad (4.20)$$

Далее будет проверена такая формула для составляющей $u^0(x) = d(x)a$ в (4.6):

$$|u^0|_Q^2 \leq c|u|_B^2. \quad (4.21)$$

Постоянные в (4.20) и (4.21) можно взять общими для всех квадратов, попадающих в ω^n . Поэтому, суммируя эти неравенства, приходим к искомому соотношению (4.19):

$$\begin{aligned} |u|_{\Omega, n}^2 &= \sum_{\dots} |u|_Q^2 \leq 2 \left(\sum_{\dots} |u^0|_Q^2 + \sum_{\dots} |u^\perp|_Q^2 \right) \\ &\leq 2c \left(\sum_{\dots} |u|_B^2 + \sum_{\dots} E(u, u; Q) \right) \leq 2c(|u|_{G, n}^2 + E(u, u; \tilde{\Omega}_h^n)). \end{aligned}$$

Итак, осталось удостовериться в справедливости (4.21). Сделаем это, совместив центр (y^B, z^B) шара B с началом координат (чтобы не писать всюду $d(y - y^B, z - z^B)$ вместо $d(x)$). Согласно (4.7)

$$a \equiv (a_1, \dots, a_6)^t = d_B^{-1}J, \quad J \equiv (J_1, \dots, J_6)^t = \int_B d(x)^t u(x) dx.$$

Поэтому прямое вычисление нормы $|da|_B$ при учете явного выражения (4.8) для матрицы d_B показывает, что

$$\begin{aligned} |da|_B^2 &\leq ch^3 \{ \rho^{-2}(|a_1|^2 + |a_2|^2) + h^2 \rho^{-4}|a_3|^2 + h^2 \rho^{-2}(|a_4|^2 + |a_5|^2) + |a_6|^2 \} \\ &\leq Ch^{-3} \{ \rho^{-2}(|J_1|^2 + |J_2|^2) + h^2 \rho^{-4}|J_3|^2 \\ &\quad + h^{-2} \rho^{-2}(|J_4|^2 + |J_5|^2) + h^{-4}|J_6|^2 \}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $\rho = \rho_h(y^q)$ и при некоторых постоянных $C, c > 0$

$$c\rho \leq \rho_h(y) \leq C\rho. \quad (4.23)$$

При $i = 1, 2$ благодаря (4.5) и (4.23) имеем

$$|J_i|^2 = \left| \int_B u_i dx \right|^2 \leq c \text{mes}_3 B \int_B |u_i|^2 dx \leq ch^3 \rho^2 \int_B \rho_h^{-2} |u_i|^2 dx \leq ch^3 \rho^2 |u|_B^2.$$

Аналогично

$$|J_3|^2 \leq ch^3 \int_B |u_3|^2 dx \leq ch\rho^4 |u|_B^2.$$

Положим $P(x) = |y - y^B|^2 + |z - z^B|^2 - r^2 h^2$, где rh — радиус шара B . Тогда

$$\begin{aligned} |J_{6-i}|^2 &= \frac{1}{2} \left| \int_B (zu_i - y_i u_3) dx \right|^2 = \frac{1}{8} \left| \int_B \left(u_i \frac{\partial P}{\partial z} - u_3 \frac{\partial P}{\partial y_i} \right) dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} \left| \int_B P \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right) dx \right|^2 \leq ch^3 (\max_B P)^2 \int_B \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) dx \\ &\leq ch^5 \rho^2 \int_B h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) dx \leq ch^5 \rho^2 |u|_B^2. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} |J_6|^2 &= \frac{1}{2} \left| \int_B (x_1 u_2 - x_2 u_1) dx \right|^2 = \frac{1}{8} \left| \int_B P \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx \right|^2 \\ &\leq ch^7 \int_B \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 \right) dx \leq ch^7 |u|_B^2. \end{aligned}$$

Подставляя в (4.22) полученные оценки для $|J_1|, \dots, |J_6|$, приходим к (4.19), что и требовалось.

В заключение обсудим порядок применения доказанных лемм. Если область ω^1 пересекается с $\partial\omega$, то при учете продолжения поля u нулем на Ω'_h обращаемся последовательно к леммам 4.1(1), 4.2 и 4.3. Они доставляют неравенство Корна (3.1) на $\tilde{\Omega}_h^1$. Пусть теперь площадь пересечения ω^{K+1} и ω^1 ненулевая. Тогда к неравенству Корна (3.1) на $\omega^1 \cup \omega^{K+1}$ приводят леммы 4.1(2), 4.2 и 4.3. Все ситуации, возникающие при переборе элементов покрытия $\{\omega^1, \dots, \omega^N\}$, по сути дела исчерпываются двумя упомянутыми.

Список литературы

1. *Friedrichs K. O.* On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // *Ann. Math.* 1947. V. 48. P. 441–471.
2. *Nečas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Paris: Masson, 1967.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
4. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // *УМН.* 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
5. *Morgenstern D.* Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1959. V. 4. № 2. P. 145–152.
6. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // *Прикладная матем. и мех.* 1973. Т. 37. № 5. С. 914–924.
7. *Ciarlet P. G., Kesavan S.* Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1981. V. 26. P. 145–172.
8. *Destuynder P.* Comparaison entre les modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité // *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 1981. V. 15. P. 331–369.
9. *Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В.* Вывод предельных уравнений для эллиптических краевых задач в тонких областях при помощи ЭВМ // *ЖВМ и МФ.* 1986. Т. 26. № 7. С. 1032–1048.

10. *Destuynder P., Gruais I.* Error estimation for the linear three-dimensional elastic plate model // Asymptotic methods for elastic structures. Berlin: Walter de Gruyter, 1995. P. 75–88.
11. *Friedrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. №1. P. 1–33.
12. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная матем. и мех. 1962. Т. 26. №4. С. 668–686.
13. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений упругих тонких пластин // Прикладная матем. и мех. 1965. Т. 29. №1. С. 141–161.
14. *Назаров С. А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестник ЛГУ. 1982. №7. С. 65–68.
15. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
16. *Gregory R. D., Wan F. V. M.* Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elasticity. 1984. V. 14. №1. P. 27–64.
17. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикладная матем. и мех. 1989. Т. 53. №4. С. 642–650.
18. *Назаров С. А.* Асимптотика решения задачи Навье–Стокса о течении тонкого слоя жидкости // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. №2. С. 131–144.
19. *Dauge M., Gruais I.* Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1995. V. 321. P. 375–380.
20. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenevski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. V. 1, 2. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
21. *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
22. *Назаров С. А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. №5. С. 1–92.
23. *Caillerie D.* Thin elastic and periodic plates // Math. Methods Appl. Sci. 1984. V. 2. P. 251–270.
24. *Панасенко Г. П., Резцов М. В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородных пластинах // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. №5. С. 1061–1065.
25. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О зависимости констант в неравенстве Корна от параметров, характеризующих геометрию области // УМН. 1989. Т. 44. №6. С. 157–158.
26. *Назаров С. А.* Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестник СПбГУ. 1992. №8. С. 19–24.
27. *Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G.* Korn's inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants // Asymptotic Anal. 1994. V. 8. P. 1–14.
28. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987.
29. *Sanchez-Palencia E.* Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. II. 1990. V. 311. №8. P. 909–916.
30. *Зорин И. С.* Операторное представление системы Ламе и предельные краевые задачи теории тонких плит // Вестник ЛГУ. 1987. №22. С. 108.
31. *Назаров С. А.* Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы матем. анализа. Т. 17. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 101–152.
32. *Маговер Е. В.* Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем // Ученые записки ЛГПИ. 1957. Т. 17. №2. С. 28–39.
33. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
34. *Назаров С. А.* Асимптотика решений эллиптических уравнений в тонких областях с кусочно гладкой границей // Дифференциальные уравнения и их применения. Т. 33. Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР, 1982. С. 62–83.
35. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Асимптотика на бесконечности решений задач теории упругости в плоских параболических областях // Проблемы матем. анализа. Т. 15. СПб: Изд-во СПбГУ, 1995. С. 162–200.

36. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Принцип Сен-Венана для параболоидальных упругих тел // Проблемы матем. анализа. Т. 18. СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. С. 109–156.
37. Busse S., Ciarlet P. G., Miara B. Coques “faiblement courbées” en coordonnées curvilignes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1996. V. 322. P. 1093–1098.
38. Busse S., Ciarlet P. G., Miara B. Justification d'un modèle linéaire bi-dimensionnel de coques “faiblement courbées” en coordonnées curvilignes // RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 1997. V. 31. №3. P. 409–434.
39. Назаров С. А. Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы матем. анализа. Т. 16. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 167–192.
40. Зорин И. С., Назаров С. А. Двучленная асимптотика решения задачи о продольной деформации пластины, защемленной по краю // Вычислит. механика деформируемого твердого тела. 1991. Т. 2. С. 10–21.
41. Назаров С. А., Семенов Б. Н. Об асимптотике решений задач изгиба пластин с разрывными нагрузками // Прикладная механика. Т. 5. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. С. 135–145.
42. Назаров С. А. Упругие емкость и поляризация дефекта в упругом слое // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. №5. С. 57–65.
43. Назаров С. А. Проявление пространственной структуры поля напряжений в окрестности угловой точки тонкой пластины // Прикладная матем. и мех. 1991. Т. 55. №4. С. 653–661.
44. Алдошина И. А., Назаров С. А. Асимптотически точные условия сопряжения на стыке пластин с сильноразличающимися характеристиками // Прикладная матем. и мех. 1998. Т. 62. №2. С. 272–282.
45. Назаров С. А. Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность // Записки научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 249. С. 212–231.
46. Вишик М. И., Грушин В. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений высших порядков // Матем. сб. 1969. Т. 79. №1. С. 3–36.
47. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка в области с щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99. №4. С. 514–537.
48. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Korn's type inequalities for a class of unbounded domains and applications to boundary-value problems in elasticity // Elasticity. Mathematical methods and application. The Ian N. Sneddon 70th Birthday Vol., 1990. P. 211–233.
49. Назаров С. А. Весовые неравенства Корна на параболоидальных областях // Матем. заметки. 1997. Т. 6. №5. С. 751–765.
50. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
51. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений эллиптических задач. М.: Наука, 1989.